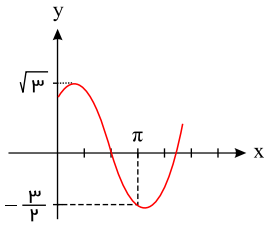




مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۱ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin(x + \frac{\pi}{3})$ است. b کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است.

$$Max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \xrightarrow[\text{است، } b > 0]{\text{چون شکل فرمت خود سینوس}} b + a = \sqrt{3}$$

نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

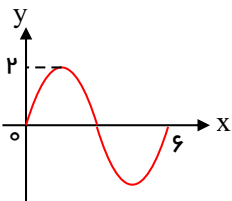
$$\left| \begin{array}{l} \pi \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$\rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$-2 \left\{ \begin{array}{l} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{array} \right. \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۲ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

$$\frac{8}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\frac{7}{3} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳ دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد.

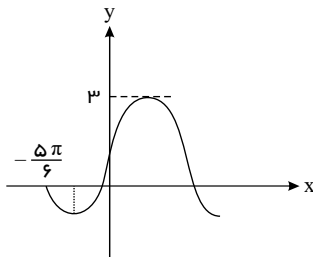
$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

با توجه به شکل داده‌شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبولاست. بیشترین مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد



بنابراین $a = 2$ است پس $a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

۳ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱٫۵ ☐

۲ ☐

۲٫۵ ☐

$1 + \sqrt{3}$ ☐

پاسخ: گزینه ۲

$$y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x) = a + b \sin x$$

نقطه $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\frac{-5\pi}{6} \rightarrow 0 = a + b \sin(\frac{-5\pi}{6}) \rightarrow 0 = a - b \sin(\frac{5\pi}{6})$$

$$\rightarrow 0 = a - b \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) \rightarrow 0 = a - b \sin(\frac{\pi}{6}) \rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \quad (I)$$

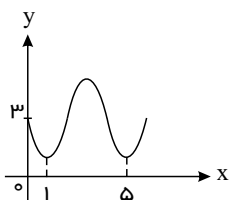
در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار Max تابع از رابطه $|a| + c$ به دست می‌آید و چون تابع داده‌شده فرمت سینوس را دارد $ab > 0$ است و چون $y(0) > 0$ است پس $a > 0$ است و در نتیجه $b > 0$ است.

$$Max = |a| + c \rightarrow 3 = |b| + a \rightarrow 3 = b + a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ حاصل می‌شوند.

پس: $f(x) = 1 + 2 \sin x \rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = 1 + 2(\frac{1}{2}) = 2$

۴ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۲ ☐

۲٫۵ ☐

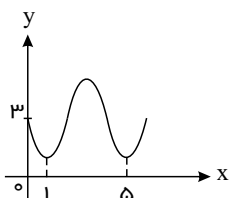
۳ ☐

۳٫۵ ☐

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل روبه‌رو به راحتی پی می‌بریم که دوره تناوب اصلی تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ برابر

$$T = 4 \text{ می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است یعنی: } f(0) = 3 \rightarrow a = 3$$





توجه کنید که دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$y = a + \sin(\underbrace{b\pi x}_k) \Rightarrow \text{دوره‌ی تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

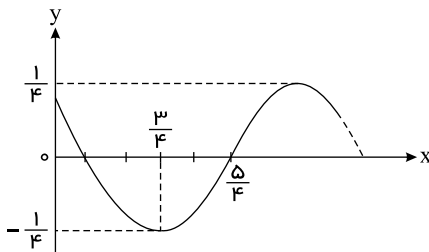
چون به ازای $x > 0$ تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار b منفی می‌باشد، یعنی $b = -\frac{1}{2}$ است. داریم:

$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin \frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = 2.5$$

۵ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $0 < c < \pi$ و $b > 0$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱



۱ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به نمودار و اینکه $0 < c < \pi$ ، $b > 0$ مشخص است که a مثبت است.

$$\max = |a| = \frac{1}{4} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{4} \rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \cos(bx + c)$$

نقطه $A\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ در تابع صدق می‌کند:

$$\frac{1}{4} \cos\left(\frac{3}{4}b + c\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{3}{4}b + c\right) = -1 \Rightarrow \frac{3}{4}b + c = \pi$$

همچنین در $x = \frac{5}{4}$ مقدار تابع برابر صفر است.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \cos\left(\frac{5}{4}b + c\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{5}{4}b + c\right) = 0$$

با توجه به نمودار در $x = \frac{5}{4}$ دومین بار است که نمودار تابع محور x ها را قطع می‌کند، پس داریم: $\frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2}$ و حال دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

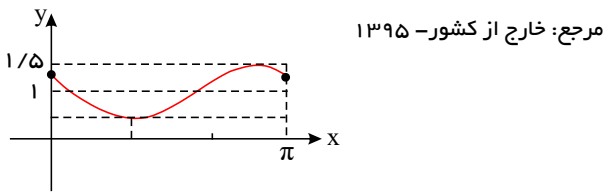
$$\begin{cases} \frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3}{4}b + c = \pi \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \frac{5}{4}b - \frac{3}{4}b = \frac{3\pi}{2} - \pi \Rightarrow \frac{2}{4}b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pi$$

$$\frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{b=\pi} c = \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{a \cdot c}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$



۶ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. کدام $a + b$ است؟



۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

 $\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ دوره تناوب تابع برابر π است.

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

ماکزیمم تابع برابر ۱٫۵ است، پس:

$$1 + |a| = 1.5 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

تابع در اطراف $x = 0$ نزولی است، پس a, b مختلف‌العلامت هستند و داریم:

$$a = \frac{1}{2}, b = -2 \Rightarrow a + b = -\frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 2 \Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

۷ نمودار تابع $y = 2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور y ها در جهت

منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله $[0, \pi]$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$y = 2^{|\sin x|} \xrightarrow{\text{به راست } \frac{\pi}{2}} y = 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{2})|} = 2^{|\cos x|} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{3}{2}} y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} \xrightarrow{y=0} 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{3}{2} = |\cos x|$$

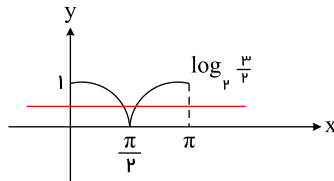
$\log_2 \frac{3}{2}$ در واقع عدد بین صفر تا یک است؛ زیرا:

$$\underbrace{\log_2 1}_{\text{صفر}} < \log_2 \frac{3}{2} < \underbrace{\log_2 2}_1$$

حال تابع $y = |\cos x|$ و خط $y = \log_2 \frac{3}{2}$ را رسم می‌کنیم.

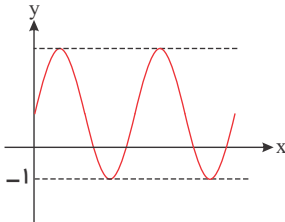


خط و نمودار در دو نقطه تقاطع دارند.



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۸ شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $(0, \frac{4}{3})$ است. $a + b$ کدام است؟



۳ (۱)

۴ (۲)

۵ (۳)

۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم که در تابع $y = a \cdot \sin bx$ اگر $a \cdot b > 0$ باشد، تابع در نقطه شروع $x = 0$ صعودی خواهد بود و اگر $a \cdot b < 0$ باشد، نزولی خواهد بود.

توجه:

$$y = k \cdot \sin ax \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{2\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل، منحنی دو بار تکرار شده است. پس عدد $\frac{4}{3}$ دو برابر دوره تناوب تابع است.

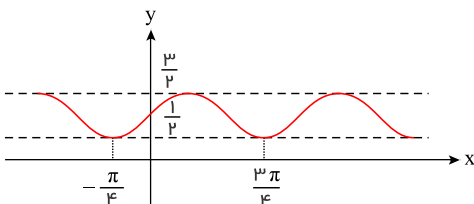
$$2T = \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

کمترین مقدار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ زمانی ایجاد می‌شود که مقدار سینوس عدد ۱ یا -۱ باشد و با توجه به شکل مقدار min عدد ۱- است. پس:

$$\min = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a + b = \begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ -2 - 3 = -5 \end{cases}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۹ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



۳ (۲)

۳ (۴)

۱ (۱)

۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

$$y = \sin bx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$y = 1 + a \cdot \sin bx \cdot \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx$$

چون فاصله دو نقطه مینیمم متوالی برابر با دوره تناوب اصلی منحنی است پس:



$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

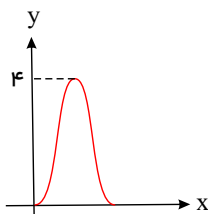
$$y = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} 1 + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تابع در اطراف $x = 0$ صعودی است، پس a و b هم علامتند و داریم:

$$a + b = 2 \text{ یا } a + b = -2$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۱۰ شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است. b کدام است؟



۱ (۲)

۲ (۱)

۲ (۴)

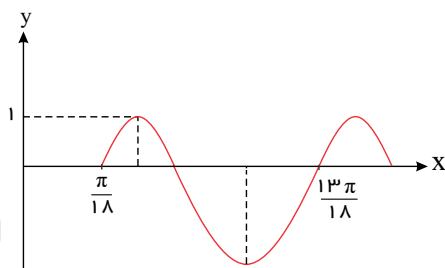
۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به شکل، منحنی از $(0, 0)$ و $(2, 4)$ عبور می‌کند پس:

$$\left. \begin{array}{l} (0, 0) \xrightarrow{\text{تابع}} 0 = a + b \cos(0) \Rightarrow a + b = 0 \\ (2, 4) \xrightarrow{\text{تابع}} 4 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}(2)\right) = a + b \cdot \cos \pi = a - b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۱۱ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟



۱ (۲)

۱ (۱)

۲ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به رابطه $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ داریم:

$$f(x) = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = a + 2 \sin bx$$



$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |b| = 3 \rightarrow b = \pm 3 \rightarrow b = 3 \text{ ق. ق.} \\ f\left(\frac{\pi}{18}\right) &= 0 \rightarrow a + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 0 \rightarrow a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow a + b = -1 + 3 = 2$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۲ دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

π (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ روش اول: تابع را ساده تر می کنیم.

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} - \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x}{\sin \pi x \cos \pi x}$$

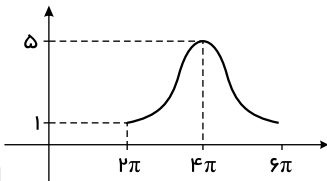
$$f(x) = \frac{-(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x)}{\sin \pi x \cos \pi x} = \frac{-\cos 2\pi x}{\frac{1}{2} \sin 2\pi x} = -2 \cot 2\pi x$$

روش دوم:

با توجه به اتحاد $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$ به راحتی حل می شود.

$$\tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

۱۳ شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را در یک دوره تناوب، نشان می دهد. مقدار c کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۴ (۲)

۵ (۱)

۱ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ از روی نمودار، مشخص است که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است، پس داریم:

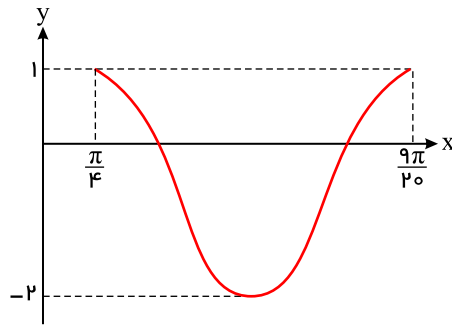
$$y = c + a \cos bx$$

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + c = 5 \\ \min &= -|a| + c = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$



۱۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = a \cos^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲



۴) ۷٫۵ -

۳) ۷٫۵

۲) ۱۵ -

۱) ۱۵

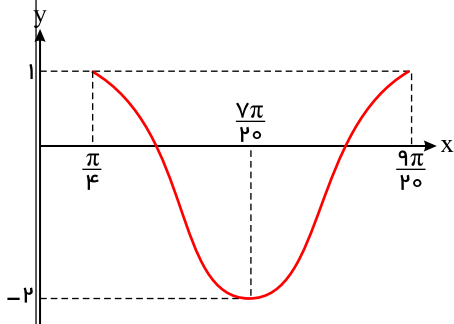
پاسخ: گزینه ۱

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = \pm 5 \Rightarrow b = 5$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow a \cos^2\left(5 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c = 1 \Rightarrow a + c = 1$$

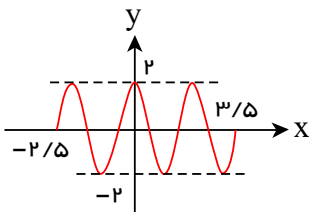
$$f\left(\frac{7\pi}{20}\right) = -2 \Rightarrow a \cos^2\left(5 \times \frac{7\pi}{20} - \frac{\pi}{4}\right) + c = -2 \Rightarrow c = -2$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow ab = 15$$



مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۱۵ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin\left(\frac{1}{2} + bx\right)$ است. $a \cdot b$ کدام است؟ ($b > 0$)



۲) ۲٫۵

۱) ۲

۴) ۳٫۵

۳) ۳

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم که دوره تناوب تابع $y = k \cdot \cos ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos(b\pi x)$$

چون برد تابع $[-2, 2]$ است و برد تابع کسینوس $[-1, 1]$ است پس $a = 2$ است. ($a > 0$ است زیرا نمودار نسبت به محور x ها قرینه نشده است.)

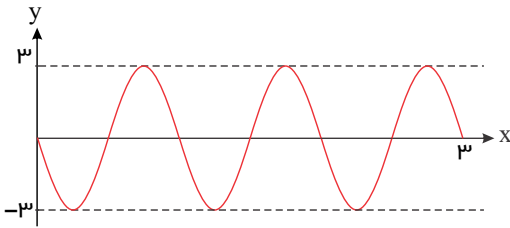
$$3T = 3/5 - (-2/5) = 1 \Rightarrow T = 1/3$$

از طرفی طبق شکل دوره تناوب ۲ است و داریم: $T = \frac{2\pi}{\pi b} = 2 \Rightarrow b = 1$ پس $ab = 2$ می‌باشد.



۱۶ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a \cdot b$ کدام می باشد؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲



۱) -۶

۲) -۳

۳) ۴٫۵

۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

سه برابر دوره تناوب برابر ۳ است.

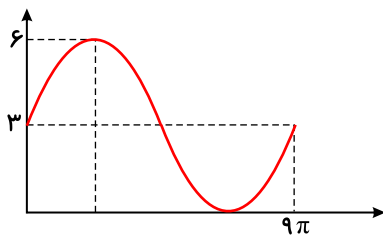
$$3T = 3 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

تابع در اطراف $x = 0$ نزولی است، پس a و b مختلف‌العلامت هستند.

$$a = 3, b = -2 \text{ یا } a = -3, b = 2 \Rightarrow a \cdot b = -6$$



۱۷ اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2(cx - \frac{3\pi}{4})}$ باشد،

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

مقدار $f(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

۴) ۵

۳) ۴٫۷۵

۲) ۴٫۵

۱) ۴

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از روابط مثلثاتی $\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$ و $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ داریم:

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2((cx - \frac{3\pi}{4}))} = \frac{2}{a} - b \cos^2(cx - \frac{3\pi}{4}) = \frac{2}{a} - b(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(cx - \frac{3\pi}{4}))$$

$$f(x) = \frac{-b}{2} \sin 2cx + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{b}{2} \sin(-2cx) + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \xrightarrow[\text{صعودی شروع شده}]{\text{سینوس به شکل درست}} \begin{cases} b > 0 \\ -2c > 0 \Rightarrow c < 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|2c|} = 9\pi \Rightarrow |c| = \frac{1}{9} \xrightarrow{c < 0} c = -\frac{1}{9}; y_{max} = \left| \frac{-b}{2} \right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 6 \xrightarrow{b > 0} \frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$y_{min} = -\left| \frac{-b}{2} \right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 0 \xrightarrow{b > 0} -b + \frac{2}{a} = 0 \xrightarrow{(1)} b = 6$$

$$f(x) = 3 \sin(\frac{2}{9}x) + 3 \rightarrow f(\frac{3\pi}{4}) = 3 \sin(\frac{2}{9} \times \frac{3\pi}{4}) + 3 \rightarrow f(\frac{3\pi}{4}) = 4.5$$



۱۸ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟

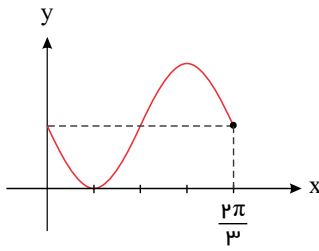
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

۱) صفر

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) ۲

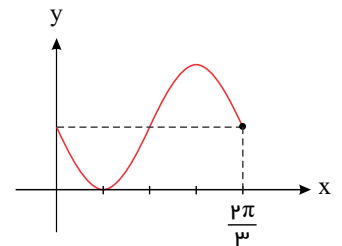


پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم: $y = \sin ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$

با توجه به نمودار داریم:

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

$$y = 1 - \sin mx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = \pm 3$$



چون نمودار در آغاز رو به پایین حرکت می‌کند و ضریب سینوس منفی است پس باید کمان سینوس مثبت باشد پس $m > 0$ بوده و $m = +3$ قابل قبول است.

$$y = 1 - \sin(+3x) = 1 - \sin 3x \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{6}} y = 1 - \sin \frac{21\pi}{6} = 1 - \sin \frac{7\pi}{2} \rightarrow y = 1 + 1 = 2$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

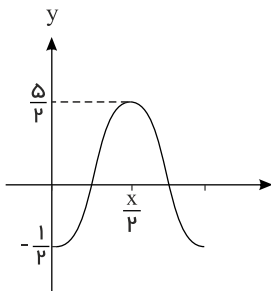
۱۹ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را نشان می‌دهد، مقدار ac کدام است؟

۲) -۲

۴) $-\frac{3}{2}$

۱) -۵

۳) $-\frac{5}{2}$



پاسخ: گزینه ۴ با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع برابر $\frac{5}{2}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس:

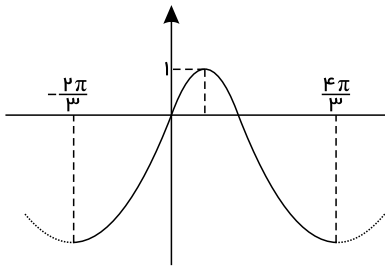
$$\left. \begin{aligned} c + |a| &= \frac{5}{2} \\ c - |a| &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow 1 + |a| = \frac{5}{2} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2}$$

چون نمودار در شکل برخورد با محور y ‌ها دارای مینیمم است، پس a منفی است.

$$|a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot c = -\frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$$



۲۰ شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b \cos(cx - \frac{\pi}{3})$ را نشان می‌دهد. مقدار



مرجع: سراسری-۱۴۰۲

$b(c-a)$ کدام است؟

۳ ☐ ۲

۲ ☐ ۱

۶ ☐ ۴

۴ ☐ ۳

پاسخ: گزینه ۳ برای رسم نمودار داده شده، نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت راست می‌بریم، سپس طول نقاط را بر c تقسیم کرده و در ادامه، عرض نقاط را در b ضرب و با a جمع می‌کنیم.

با مقایسه نمودار داده شده و نمودار $y = \cos x$ نتیجه می‌گیریم که b و c هر دو مثبت‌اند و داریم:

$$\begin{cases} (0, 0) \in \text{نمودار} \Rightarrow a + b \cos(\frac{-\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 & (1) \\ y_{\max} = a + |b| = 1 \xrightarrow{b > 0} a + b = 1 & (2) \end{cases}$$

(۱)، (۲)

$$\rightarrow a = -1, b = 2$$

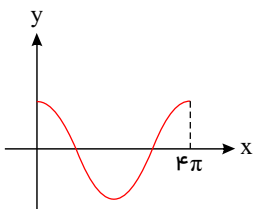
چون فاصله بین دو Min متوالی یا دو Max متوالی یک دوره تناوب است، پس دوره تناوب تابع هم برابر

$$\frac{4\pi}{3} - (\frac{-2\pi}{3}) = 2\pi \text{ است، پس:}$$

$$\frac{2\pi}{|c|} = 2\pi \xrightarrow{c > 0} c = 1$$

$$b(c-a) = 2(1 - (-1)) = 4 \text{ عبارت مورد نظر}$$

۲۱ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟



مرجع: سراسری-۱۳۹۶

$-\frac{1}{2}$ ☐ ۱

$\frac{1}{2}$ ☐ ۲

۱ ☐ ۳

صفر ☐ ۴

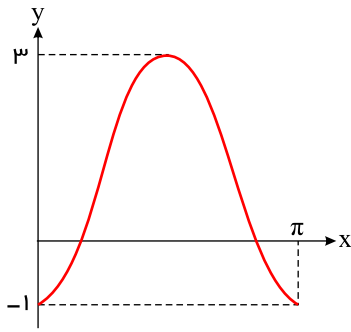
پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم: $y = \cos ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$

با توجه به شکل، دوره تناوب تابع 4π است.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx \rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = 4\pi \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{1}{2}x \xrightarrow{x = \frac{16\pi}{3}} f(\frac{16\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cos(\frac{9\pi - \pi}{3})$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \cos(3\pi - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 2(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$



۲۲ اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

$$\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

ضابطه تابع f را ساده می کنیم:

$$f(x) = a + b \sin\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = a + \frac{b}{2} \sin\left(2cx - \frac{3\pi}{2}\right) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نمودار}} \begin{cases} a - \left|\frac{b}{2}\right| = -1 \\ a + \left|\frac{b}{2}\right| = 3 \end{cases} \rightarrow a = 1 \xrightarrow{f(0)=-1} -1 = 1 + \frac{b}{2} \Rightarrow b = -4$$

مقدار c را هم از دوره تناوب تابع به دست می آوریم:

$$\frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - 2 \cos 2x \xrightarrow{\text{صفرهای } f} 1 - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \begin{cases} 2x_1 = \frac{\pi}{3} \\ 2x_2 = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{5\pi}{6} \\ x_1 = \frac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow x_2 - x_1 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$