

$ax^2+bx+c=0 \rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$
 $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$
 $\alpha+\beta=S-2P$, $\alpha+\beta=S-2PS$
 $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
 نکات معادله درجه ۲ (بر خط فهمیده)
 $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$ یک درجه k برابر دیگری



مثال: در معادله $x^2-(m+1)x+m=0$ به ازای چه مقادیری از m یکی از ریشه ها ۲ برابر دیگری است؟
 $K=2$

$\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k} \rightarrow \frac{(m+1)^2}{m}=\frac{9}{2}$
 $2m^2+5m+2=9m$
 $2m^2-4m+2=0 \rightarrow m=\frac{-d \pm \sqrt{\Delta}}{2} \begin{cases} m=-2 \\ m=1 \end{cases}$

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2-4x+4=0$ باشند مطلوب است تعیین:

الف) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{16 - 8}{4} = 2$ $\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$

ب) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{S^3 - 3PS}{P} = \frac{64 - 48}{4} = \frac{16}{4} = 4$

ج) $\frac{\alpha}{\alpha^2+4} + \frac{\beta}{\beta^2+4}$
 $= \frac{\alpha}{4\alpha} + \frac{\beta}{4\beta} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
 ریشه α : $\alpha^2-4\alpha+4=0 \rightarrow \alpha^2+4=4\alpha$
 ریشه β : $\beta^2-4\beta+4=0 \rightarrow \beta^2+4=4\beta$

د) $\frac{\beta}{(\alpha-4)^2} + \frac{\alpha}{(\beta-4)^2}$ $\alpha^2-4\alpha+4=0 \rightarrow \alpha(\alpha-4)=-4 \rightarrow \alpha-4=-\frac{4}{\alpha}$

$\frac{\beta}{(-\frac{4}{\alpha})^2} + \frac{\alpha}{(-\frac{4}{\beta})^2} = \frac{1}{16}(\alpha^2\beta + \beta^2\alpha) = \frac{1}{16}(\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2)$
 $= \frac{1}{16} \times 4 \times (16 - 8) = \frac{4 \times 8}{16} = 2$

ه) $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$
 $A^2 = (\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}})^2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2 = \frac{S^2 - 2P}{P} + 2$
 $A^2 = 9 \rightarrow A = \pm 3$

و) $B = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$
 $B^2 = (\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha})^2 = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$
 $= 4\beta(\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}) = 4(4 + 4) = 16$
 $B = \pm 4$



نوشتن معادله درجه دوم با دانستن ریشه ها (α, β)

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha \rightarrow x - \alpha = 0 \\ x = \beta \rightarrow x - \beta = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

* معادله درجه دوی بنویسید، ریشه های $\sqrt{3} + 2, \sqrt{3} - 2$ باشد.

$$\left. \begin{array}{l} S = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4 \\ P = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

در معادله $x^2 - 4x + 6 = 0$ ، α, β ریشه ها هستند.
معادله درجه دوی بنویسید که ریشه هایش
(الف) از سه برابر ریشه های معادله فوق ۴ واحد کمتر باشند.

$$\left. \begin{array}{l} S = 2\alpha - 4 + 2\beta - 4 = 2(\alpha + \beta) - 8 = 18 - 8 = 10 \\ P = (2\alpha - 4)(2\beta - 4) = 4\alpha\beta - 8\alpha - 8\beta + 16 = 4(9) - 8(4) + 16 = 36 - 32 + 16 = 20 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 10x + 20 = 0$$

(ب) از نصف ریشه های معادله فوق ۳ واحد بزرگتر باشند.

$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{\alpha}{2} + 3 + \frac{\beta}{2} + 3 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 6 = 9 \\ P = (\frac{\alpha}{2} + 3)(\frac{\beta}{2} + 3) = \frac{\alpha\beta}{4} + \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta + 9 = 1 + \frac{3}{2}(4) + 9 = 19 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 18x + 19 = 0$$

(ج) معکوس ریشه های معادله فوق شوند.

$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{4}{9} \\ P = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{9} \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{1}{9} = 0$$

کافی است جای α, β را عوض کنیم

(د) قرینه ریشه های معادله فوق باشند.
کافی است علامت ریشه ها را تغییر دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} S = (-\alpha) + (-\beta) = -(\alpha + \beta) = -6 \\ P = (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta = 4 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + 6x + 4 = 0$$

(و) مربع ریشه های معادله فوق باشند.

$$\left. \begin{array}{l} S = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 36 - 8 = 28 \\ P = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 16 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 28x + 16 = 0$$



بخت بیامون علامت
ریشه های معادله درجه دوم

دوریه حقیقی دارد $\Delta > 0 \rightarrow$

دوریه هم علامت $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} > 0 \rightarrow$

دوریه مثبت دارند $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} > 0$

دوریه منفی دارند $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} < 0$

دوریه مختلف علامت $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \rightarrow$

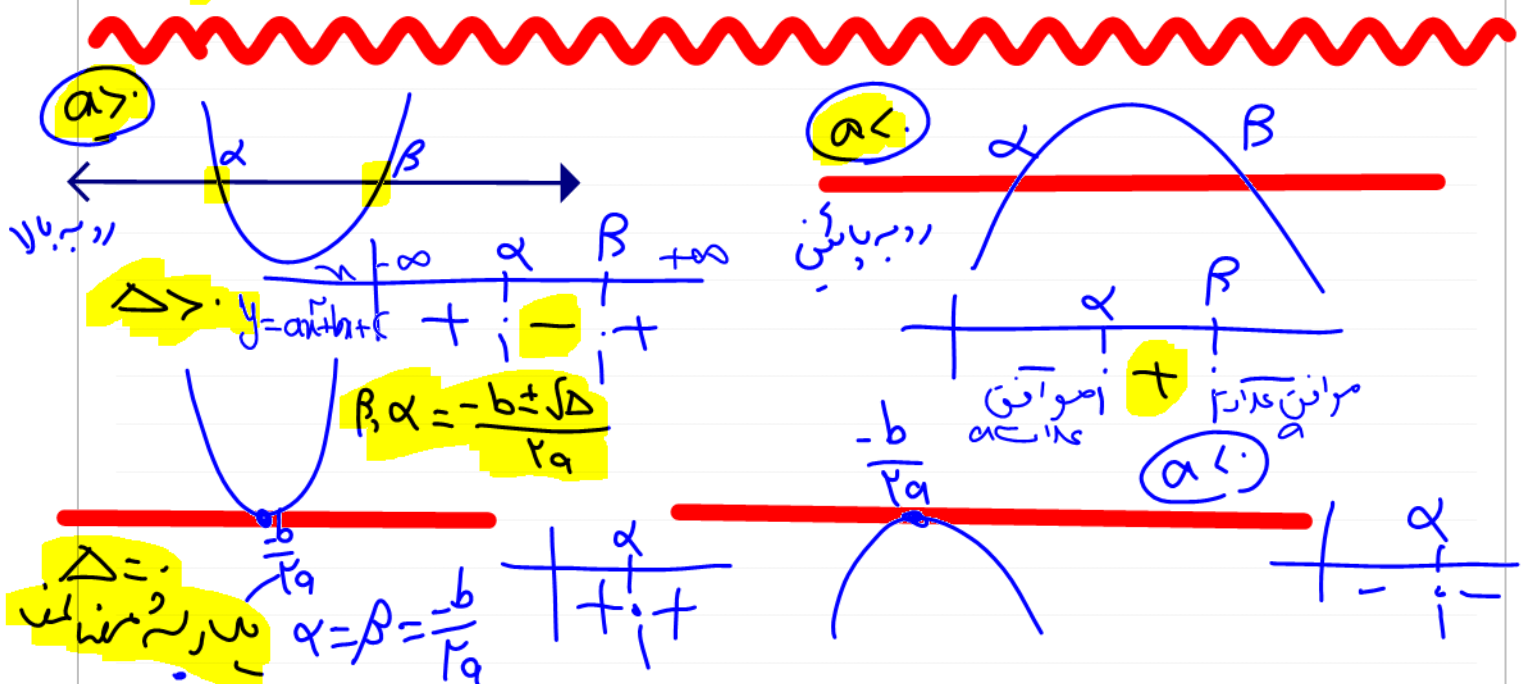
دوریه مثبت $\alpha < 0 < \beta$ یک ریشه مثبت یک ریشه منفی

دوریه قرینه دارند $S = 0 \rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = 0$

تذکر : $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow$ یکی مثبت یکی منفی $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

دوریه مختلف علامت دارد $\Rightarrow$ راس محور x دارد و طرف مبدأ y می کند : تذکر

دوریه مختلف علامت دارد $\Rightarrow$ راس از هر چهار ناحیه می گذرد : تذکر



کلاس های تابستان ۱۴۰۴

همواره مثبت $\Delta < 0$: منبسط < 0 منبسط > 0

همواره منفی $\Delta < 0$: منبسط < 0 منبسط > 0



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = mx + h$$

$$ax^2 + bx + c = mx + h$$

$\Delta >$
نقاط

$\Delta <$
نقاط

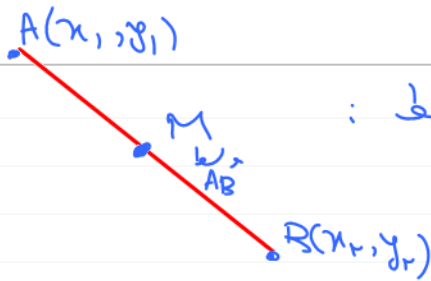
مقادیر درجه ۲
مقادیر نقاط $\Delta = 0$
نقاط



بنام خدا

هندسه تحلیلی

۱) طول پاره خط :



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

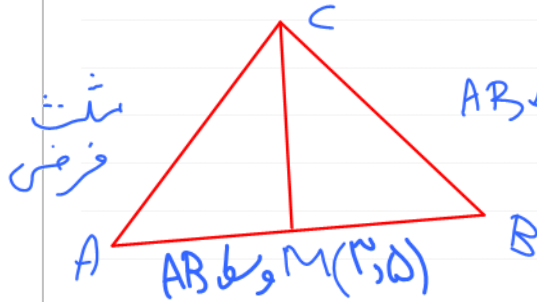
$A(2, 5) \quad B(7, 1)$

$$AB = \sqrt{(7-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25}$$

$$M \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

۲) مختصات وسط پاره خط

مثال: اگر $A(2, 3)$, $B(5, 7)$, $C(-3, 10)$ باشد طول میانه وار در مثل ABC درشت



AB وسط M

$$\begin{cases} x_M = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \\ y_M = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

$M(3.5, 5)$

$C(-3, 10)$

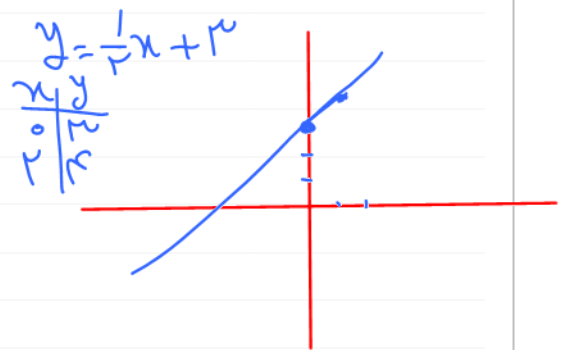
$$CM = \sqrt{(3.5 - (-3))^2 + (5 - 10)^2} = \sqrt{34 + 25} = \sqrt{59}$$

۳) شیب خط

الف) $y = mx + b$

عرض از مبدأ $\rightarrow b$

شیب $\rightarrow m$

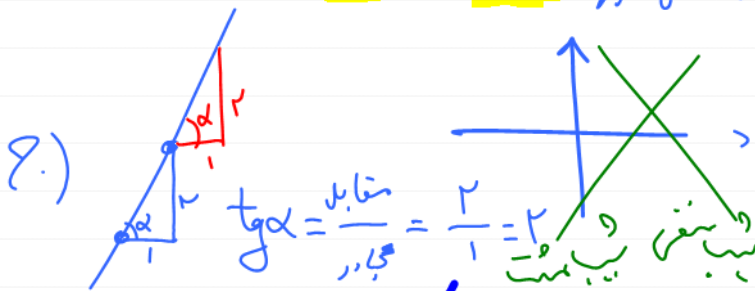


ب) $A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$

تفاضل عمودی Δy

تفاضل افقی Δx

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



۳) $ax + by + c = 0$

$$m = -\frac{a}{b}$$

$2x + 3y - 7 = 0 \rightarrow m = -\frac{2}{3}$

$-3x + y - 2 = 0$

$m = \frac{3}{1} = 3$

$m = -\frac{1}{2} \leftarrow x + 2y - 1 = 0$

کلاس های تابستان ۱۴۰۴



$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

مثال: $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \rightarrow m_1 = -\frac{2}{3} \\ 5x + 4y - 7 = 0 \rightarrow m_2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$
خط موازی

$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} \\ 2x - y + 3 = 0 \rightarrow m_2 = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} & \text{منطبقه} \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} & \text{موازی} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} & \text{مقاطعند} \end{cases}$$

مثال منطبق: $\begin{cases} 2x + 3y + 0 = 0 \\ 5x + 4y + 10 = 0 \end{cases}$

(۵) شرط اینکه سه نقطه A, B, C بر یک راست باشند

امتداد
استقامت



$$m_{AB} = m_{BC}$$

مثال: $A(2m, -1), B(1, -3), C(7, -3)$

آیا سه نقطه بر یک خط راست می‌آیند؟
بازای چه m؟

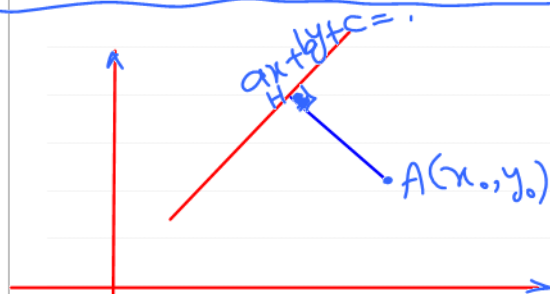
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{-1 - (-3)}{2m - 1} = \frac{1 - 7}{-3 - (-1)} \Rightarrow \frac{2}{2m - 1} = \frac{-6}{-2} \Rightarrow \frac{2}{2m - 1} = 3$$

$$2m - 1 = \frac{2}{3}$$

$$12m - 9m^2 - 12 + 9m = -12m + 11$$

$$-9m^2 + 29m - 20 = 0$$

$$\Delta = 0$$



(۶) فاصله نقطه از خط

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

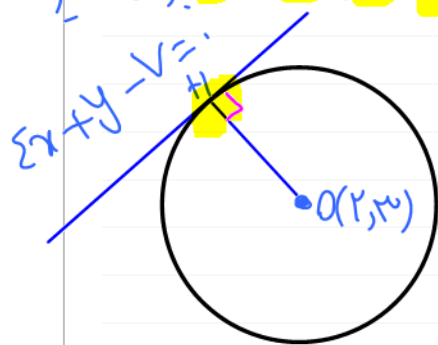
مثال: $2x + 5y - 7 = 0$
 $A(-2, -1)$

$$AH = \frac{|2(-2) + 5(-1) - 7|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{21}{\sqrt{29}}$$

$$\begin{aligned} &2x + 5y - 7 = 0 \\ &A(-1, -3) \\ &AH = \frac{|2(-1) + 5(-3) - 7|}{\sqrt{4 + 25}} \\ &= \frac{14}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$



مثال: اگر یک خط باشد شعاع دایره را بیابید. مرکز دایره ای باشد خط $\Sigma x + y - v = 0$ بر آن دایره



$$OH = ?$$

$$OH = \frac{|\Sigma(2) + 3 - v|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = R$$

$A(2,3) \rightarrow y = ax + b$
 $m = v$

$$y = vx + b$$

$$3 = 1 \cdot 2 + b \rightarrow b = -1$$

نوشتن معادله خط با معادله بردار نقطه شیب

$$\begin{cases} y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - 3 = v(x - 2) \\ y = vx - 1 \end{cases}$$

$y = vx - 1$

۸) مساحت با معادله بردار متفاوتهای

	A(1,2)	B(2,0)	C(3,4)
A	1	2	
B	2	0	
C	3	4	
A	1	2	

$$S = \frac{1}{2} |(2+1+4) - (4+10+4)| = \frac{1}{2} \times 8 = 2$$

$ax + by + c = 0$
 $ax + by + c' = 0$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۹) فاصله دو خط موازی

مثال: فاصله دو خط موازی $2x + y - 5 = 0$ و $2x + y - 1 = 0$ را بیابید.

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(-1) - (-5)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

نکته ۱۰



AC و O: $O = (\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2})$
BD و O: $O = (\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2})$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



اگر $b = a + 1$ باشد، میسر از زیری های $x^2 - 2bx + \epsilon = 0$ میسر است.

$$\frac{-2}{a} \quad \frac{2}{a} \quad \frac{2}{a}$$

$$a=1 \\ b=2$$

$$x^2 - \epsilon x + \epsilon = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \\ x=2$$

$$\Delta = 4b^2 - 4a$$

$$\frac{2b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a}}{2a} \\ \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a}}{a}$$

$$\frac{a+1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1 - a}}{a} = \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2 + a + 1}}{a}$$

$$\frac{a+1 \pm |a-1|}{a}$$

$$\frac{a+1 + a-1}{a} = 2$$

$$\frac{(a+1) - (a-1)}{a} = \frac{2}{a}$$



معادلات گنگ

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{5x+1} = 9$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = (9 - \sqrt{5x+1})^2$$

$$x+2 = 81 + 5x+1 - 18\sqrt{5x+1}$$

$$18\sqrt{5x+1} = 80 - 4x = 4(20-x)$$

$$18(5x+1) = 4(x^2 + 14x + 40) \quad \begin{matrix} x+1 \geq 0 \\ 20-x \geq 0 \end{matrix}$$

$$90x + 18 = 4x^2 + 56x + 160$$

$$4x^2 - 34x + 142 = 0$$

$$x=2$$

$$\frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 4 \cdot 142}}{2 \cdot 4}$$

$$\frac{34 \pm 2\sqrt{114}}{8}$$

$$\frac{17 \pm \sqrt{114}}{4}$$

$$* \sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3 \rightarrow (\sqrt{x+3})^2 = (3 - \sqrt{x})^2$$

$$x+3 = 9 + x - 6\sqrt{x}$$

$$6\sqrt{x} = 6 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x=1$$



جواب

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = [x]$$

$$n \leq x < n+1 \iff [x] = n$$

* دایره تابع

$$f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{[x]-3}$$

رایباید. $25-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 25 \rightarrow -5 \leq x \leq 5$ ①

$$[x]-3 \neq 0 \rightarrow [x] \neq 3 \rightarrow x \notin [3, 4) \text{ ②}$$

$$\text{①} \cap \text{②} = [-5, 3) \cup [4, 5]$$

* حاصل $[1] + [2] + [3] + \dots + [15]$ رایباید.

$$3(1) + 8(2) + 7(3) = 34$$

$$[x+n] = [x] + n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ویرگی ۲ :

$$[x + \frac{1}{4}] + [x - \frac{1}{4}] = 1$$

* مدار

$$[x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}] + [x - \frac{1}{4}] = 1$$

$$1 + [x - \frac{1}{4}] + [x - \frac{1}{4}] = 1$$

$$2[x - \frac{1}{4}] = 0 \implies [x - \frac{1}{4}] = 0 \implies 0 \leq x - \frac{1}{4} < 1 \implies \frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{4}$$

$$0 \leq x - [x] < 1$$

ویرگی ۳ :

$$x = -2.7$$

$$[x] = -3$$

$$x - [x] = -2.7 - (-3) = 0.3$$

مثال: برد تابع $f(x) = 4x - [x] - [3x]$ رایباید.

$$0 \leq 2x - [2x] < 1$$

$$0 \leq 3x - [3x] < 1$$

$$0 \leq f(x) < 2 \implies R_f = [0, 2)$$

مثال: برد تابع $f(x) = x - 4(\frac{x}{4} - [\frac{x}{4}])$ رایباید.

$$f(x) = 4(\frac{x}{4} - [\frac{x}{4}])$$

بین منتهای

$$0 \leq \frac{x}{4} - [\frac{x}{4}] < 1$$

$$0 \leq 4(\frac{x}{4} - [\frac{x}{4}]) < 4$$

$$0 \leq f(x) < 4$$

$$R_f = [0, 4)$$



ویرگی ۴

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z}' \\ 0 & x \in \mathbb{Z}' \end{cases}$$

دسته مرکب از توابع زیر را بنویسید

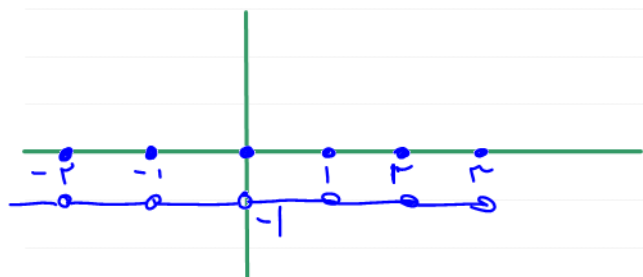
$$f(x) = \sqrt{[x] + [-x]} \quad D_f = \mathbb{Z}' \quad R_f = \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]} \quad D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}' \quad R_f = \{-1\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{[x] + [-x]}} \quad D_f = \emptyset$$

تذکر: این تابع است.

نمودار، $f(x) = [x] + [-x]$ را رسم کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 0} ([x] + [-x]) = -1$$

حداقل

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ([x] + [-x]) = \text{موجود نیست}$$

مستند

$$y = mx - [mx] \rightarrow T = \frac{1}{|m|}$$

$$y = mx - [mx] \quad T = \frac{1}{m}$$

$$f(x + \frac{1}{m}) = f(x)$$

$$m(x + \frac{1}{m}) - [m(x + \frac{1}{m})]$$

$$= mx + 1 - [mx + 1]$$

$$= mx + 1 - [mx] - 1$$

$$= mx - [mx] = f(x)$$

$$[x+y] \geq [x] + [y]$$

$$\begin{cases} x = 2.1 \\ y = 2.3 \end{cases} \quad 4.4 < 4$$

$$\begin{cases} x = 2.4 \\ y = 2.6 \end{cases} \quad 5 < 5$$

$$B = [\log_{\frac{1}{2}}] = ? \rightarrow -6$$

$$\log_{\frac{1}{2}} = \log_{2^{-1}} = -\log_2$$

کلاس های تابستان ۱۴۰۴

$$A = [\log_2^v] = ?$$

$$2^2 < v < 2^3$$

$$\log_2^2 < \log_2^v < \log_2^3$$

$$2 < \log_2^v < 3 \rightarrow [\log_2^v] = 2$$

$$\log_2^v = \log_2^{\frac{1}{2} \times 1 < \frac{1}{2}} = \log_2^{\frac{1}{2}} = -1$$

































