



مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که مولفه اول برابر نداشته باشند و می‌تواند مولفه اول برابر داشته باشند.
باید مولفه اول هم‌نوع باشد.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

$$f = \{(2,3), (2,4)\} \text{ تابع نیست}$$

$$g = \{(2,3), (4,3), (2,4)\} = \{(2,3), (4,3)\}$$



کدام از روابط زیر تابع است؟

$$1) \quad x^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$x=0 \rightarrow (y-1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} y-1 = 3 \rightarrow y = 4 \\ y-1 = -3 \rightarrow y = -2 \end{cases} \quad \{ \dots, (0,4), (0,-2), \dots \}$$

تابع نیست.

$$2) \quad (x-5)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$x=5 : (y+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} y+1 = 2 \rightarrow y = 1 \\ y+1 = -2 \rightarrow y = -3 \end{cases}$$

$$\{ \dots, (5,1), (5,-3), \dots \}$$

$$3) \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

مجموع دو به دو چند مقدار منفی منفرجه
صاف است هر دو صفر باشند.

$$\begin{cases} x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ y-2 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$f = \{(1,2)\}$$

تابع تک نقطه‌ای



$$4) \quad y = \pm \sqrt{-4x^2 + 8x - 1}$$

$$y = \pm \sqrt{-(4x^2 - 8x + 1)} = \pm \sqrt{-(2x-1)^2}$$

$$f = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$$

تابع تک نقطه‌ای است.

برای آنکه داخل عبارت منفرجه شود مجبوراً فقط عدد $\frac{1}{2}$ را بپذیرد.

$$5) \quad x = [y]$$

$$x=2 : [y] = 2 \Rightarrow 2 \leq y < 3$$

برای $x=2$ بی شمار y حاصل شد لذا رابطه منفرجه تابع نیست.

$$6) \quad x = \sin y$$

$$x=0 \rightarrow y = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, \dots$$





$$f: A \rightarrow B$$

دامنه

همدانه

$$R_f \subseteq B$$

D_f

مناظره تابع

تعیین دامنه برخی توابع

$$f(x) = \sum x^2 + 7x + 1$$

$$f(x) = -1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 - x + 14$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

(۱) توابع چندجمله‌ای

$$k \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = \sqrt[k]{g(x)} \quad D_f = D_g$$

رادیكال با مرتبه زوج، بی‌تأثیر است کافی است دامنه زیر رادیكال را فاب بکنیم.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x} \quad D_f = \mathbb{R}$$

(۲) توابع رادیكالی
(الف) فرض فرد

$$f(x) = \sqrt[7]{\frac{1}{x-2}} \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow \text{کافی است نامعادله } g(x) \geq 0 \text{ را حل کنیم.}$$

(ب) فرض زوج

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x - 4}$$

$$-x^2 + 7x - 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a} = \frac{-4}{-1} = 4 \end{cases} \text{ مجموعه ضربات صفرات.}$$

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$-x^2 + 7x - 4$	$-$	0	$+$	$-$

$$D_f = [1, 4]$$

$$y = \sqrt{\frac{2x-1}{1-4x}}$$

$$D_f = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$$

$$\frac{2x-1}{1-4x} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 1-4x > 0 \rightarrow x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$2x-1$	$-$	0
$1-4x$	$+$	$-$

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

$$D_f = (D_h \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{4+x}} \rightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5 \\ 4+x > 0 \rightarrow x > -4 \end{cases}$$

$$D_h \cap D_g = [5, +\infty)$$

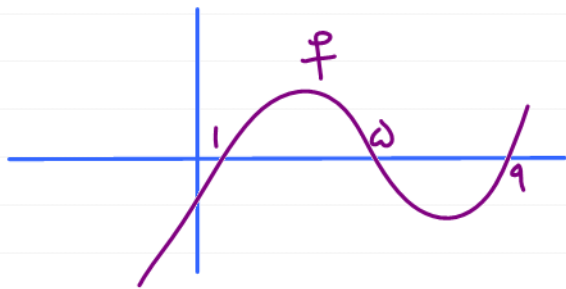
$$D_f = (D_h \cap D_g) - \{-4\} = [5, +\infty)$$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$x \geq 0, x \neq 0$ $x \geq 1, x \neq 1$ $x \geq 2, x \neq 2$

$$D_f = (2, +\infty)$$



دائمه تابع زیر را بایزید.

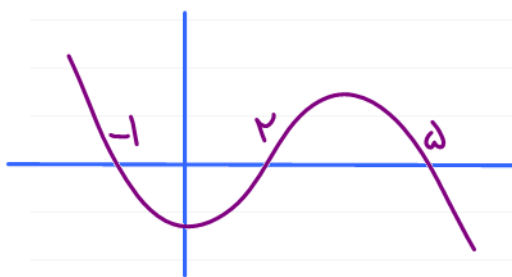
سند f رسم شده است.

$$g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{x-3}}$$

$$\frac{f(x)}{x-3} \geq 0$$

x	$-\infty$	2	3	5	9	$+\infty$
$f(x)$	-	+	+	-	+	-
$x-3$	-	-	+	+	+	+
	+	-	+	-	+	+

$$D_f = (-\infty, 2] \cup (3, 5) \cup [9, +\infty)$$



در کس مقابل سند f رسم شده است.

دائمه تابع g را تعیین کنید.

$$g(x) = \sqrt{(x-3)f(x)}$$

$$(x-3)f(x) \geq 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 3 $-1, 2, 5$

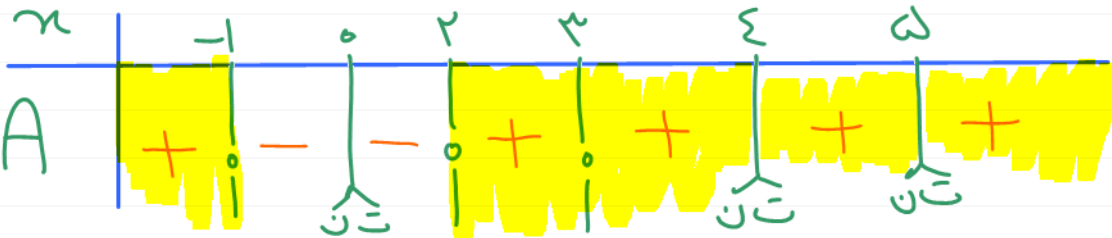
x	-1	2	3	5	
$(x-3)f(x)$	-	+	-	+	-

x	-1	2	3	5	
$x-3$	-	-	+	+	+
$f(x)$	+	-	+	+	-
	-	+	-	+	-

$$D_g = [-1, 2] \cup [3, 5]$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-2)(x-3)^2(x+1)^3}{|x-5|(x-4)^4 x^2}} \geq 0$$

دائمه تابع

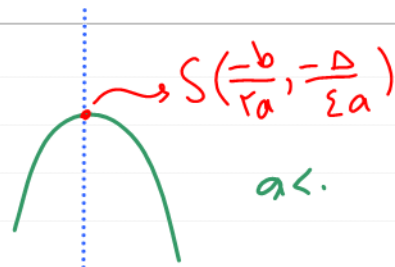
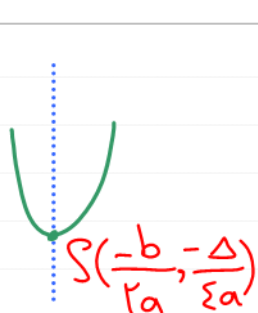


$$D_f = (-\infty, -1] \cup [2, 3) \cup (3, 4) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty)$$



تعیین برد یزخی نوابع
(1) تابع درجه دوم

ا > 0



a < 0

$$R_f = \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty \right)$$

$$R_f = \left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a} \right]$$

* برد تابع $f(x) = x^2 - 5x + 1$ را به طریق بیابید.

اول، $a > 0 \rightarrow$ درجه بالا $\rightarrow R_f = \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty \right) = \left[\frac{-12}{4}, +\infty \right) = \left[-3, +\infty \right)$

دوم، $y = x^2 - 5x + 1 - 1 + 1$
 $y = (x - 2.5)^2 - 3 \rightarrow R_f = \left[-3, +\infty \right)$

سوم، $y = x^2 - 5x + 1$
 $x^2 - 5x + 1 - y = 0$

$a = 1, b = -5, c = 1 - y \rightarrow \Delta \geq 0 \rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$

$$25 - 4(1)(1 - y) \geq 0$$

$$25 - 4 + 4y \geq 0$$

$$4y \geq -21 \rightarrow y \geq -5.25$$

$$R_f = \left[-5.25, +\infty \right)$$

برد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$ را تعیین کنید.

$$y = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$$

$$x^2 - 3x = y(x - 1)$$

$$x^2 - 3x - yx + y = 0$$

$$x^2 - (3 + y)x + y = 0$$

$$\Delta \geq 0 \rightarrow (3 + y)^2 - 4y \geq 0$$

$$y^2 - 12y + 9 \geq 0$$

y_1	y_2
3	9
$+$	$-$
2	12

$$R_f = (-\infty, 3] \cup [9, +\infty)$$

$$y_1 = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

برد تابع $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ را تعیین کنید.

$$yx^2 + y = x$$

$$yx^2 - x + y = 0$$

$$\Delta \geq 0 \rightarrow 1 - 4y^2 \geq 0$$

$$1 \geq 4y^2 \rightarrow y^2 \leq \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \rightarrow R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$D_f = \mathbb{R} \rightarrow y = \frac{r_n}{1+n^2}$
 $-\frac{1}{r} \leq \frac{n}{1+n^2} \leq \frac{1}{r} \rightarrow -1 \leq \frac{r_n}{1+n^2} \leq 1$
 $\rightarrow R_f = [-1, 1]$

$\boxed{\sin \alpha = r \sin \alpha \cos \alpha}$

$\sin \alpha = r \sin \alpha \cos \alpha$
 $\sin \alpha = r \sin \alpha \cos \alpha$

$n = \tan \alpha \rightarrow y = \frac{r \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{r \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}}$

$y = \frac{r \sin \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = r \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha$

$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \rightarrow R_f = [-1, 1]$

$y = \frac{|n|}{1+n^2}$

$-\frac{1}{r} \leq y = \frac{n}{1+n^2} \leq \frac{1}{r} \rightarrow R_f = [-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}]$

$y = \frac{n^2}{1+n^2} R_f = [0, 1]$

$y = \frac{|n|}{1+|n|} R_f = [0, 1]$

$y = \frac{1}{1+n^2} R_f = (0, 1]$

$\begin{cases} y = a \sin n + b \cos n + c \\ y = a \cos n + b \sin n + c \end{cases}$

* بردن تابع صبر

$y = \sin n + 2 \sin n + 3$
 $y = \sin n + 2 \sin n + 1 + 2$
 $y = (\sin n + 1)^2 + 2$

$\sin n = 1, -1, 0, \dots \rightarrow \frac{b}{ra} \leq 1$

$\sin n = 1 \rightarrow y = y_{\max}$
 $\sin n = -1 \rightarrow y = y_{\min}$
 $\sin n = 0 \rightarrow y = 3$
 $\sin n = \frac{-b}{ra} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = 2$

$R_f = [2, 4]$

بردن تابع $y = \cos n + \cos n + 3$

$\cos n = 1 \rightarrow y = 5$
 $\cos n = -1 \rightarrow y = 3$

$-1 \leq \cos n = \frac{b}{ra} = \frac{-1}{2} \leq 1 \rightarrow y = (\frac{1}{2}) + (\frac{-1}{2}) + 3 = 3$
 $R_f = [3, 5]$



$$* y = \sqrt{x - [x]} \quad \circ \langle x - [x] \rangle < 1 \rightarrow \circ \langle \sqrt{x - [x]} \rangle < 1$$

$$R_f = [0, 1)$$

$$* y = \sqrt{[x] + [-x]}$$

$$D_f = \mathbb{Z} \quad R_f = \{0\}$$

$$* y = \frac{1}{[x] + [-x]} \quad D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \quad R_f = \{-1\}$$

$$* y = \sqrt{9 \left(\frac{x}{9} - \left[\frac{x}{9} \right] \right)}$$

بین مغزی ۹

بین مغزی ۳

$$R_f = [0, 3)$$

همگی سوال زیر را حل کنید.

بنافدا

اگر بازه $[-\infty, 1]$ را دنبال $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx - 2}$ باشد

$$f(-3) = 2 \text{ ؟}$$

$$ax^2 + bx - 2 \geq 0$$

$$\Delta \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} & \alpha & \beta & & \\ \hline & - & + & - & \\ \hline & + & - & + & \\ \hline & - & + & - & \end{array}$$

$$\Delta = \begin{array}{c|c|c|c|c} & \frac{-b}{2a} & & & \\ \hline & + & - & + & \\ \hline & - & + & - & \end{array}$$

توهم جواب داده است
به هیچ کدام از حالات مقابل
دارد نشود.

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array}$$

لذا ناممکن است در جواب ادوات. لذا $a = 0$

$$bx - 2 \geq 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & -1 & & & \\ \hline & + & - & + & \\ \hline & - & + & - & \end{array}$$

در جواب ادوات

$$b(-1) - 2 = 0$$

$$-b = 2 \rightarrow b = -2$$

$$f(x) = \sqrt{-2x - 2}$$

$$f(-3) = 2$$

A hand-drawn graph on lined paper. The horizontal axis is labeled $f(n) = 1$ in red. The vertical axis is labeled $f(n) = c$ in blue. A red horizontal line is drawn at the level of the horizontal axis. Below the horizontal axis, the text $R = \{c\}$ is written in red.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \{c\}$$

$$f(x) = x$$

$$D_f = R_f$$

بنیاد زنی و اولاد

(۲) تابع هانی

~~$y=x$~~

$f(x) = \underbrace{(a-2b)}_{\text{مقدار}} x^2 + \underbrace{(b-1)}_{\text{ضریب}} x + \underbrace{(c-2)}_{\text{مقدار}}$ یک تابع درجه ۲ است. a, b, c را بیابید.

$$\begin{aligned} \psi_C - \psi &= 0 \rightarrow C = \psi \\ b-1 &= 1 \rightarrow b = \psi \end{aligned}$$

$$a \vdash b = 1 \rightarrow a = 1$$

نکته : تابع به فرم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ اُسْرَیک تابع ثابت باشد

$$f(x) = \frac{\cancel{\mu_{x+1}}}{\cancel{\mu_{x+1}}}$$

ح. رابطه ای بین a, b, c, d برقرار است:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$f(x) = \frac{x+4}{x+2} = \frac{2(2+x)}{x+2} = 2 \text{ ثابت}$$

تابع ثابت f با ضابطه $f(n) = \frac{n+a}{n+1}$ مغرضه a که $a=1$

$$f(n) = \frac{vn + a}{vn + v} \leftarrow \frac{a}{n} \leftarrow \frac{v}{v} = \frac{4}{v} \leftarrow a = \frac{4}{v}$$

$$a = \frac{4}{v}$$

$$m+n+k \approx g(n) = \frac{m^2 + n^2 + k^2 + k - 1}{2} \quad \text{اگر } \{2\} - R \text{، این تابع می باشد}$$

$f(n) \rightarrow b(x-2)^2$ $n^2 - 4n + 4$
 $n=2$ ، f چیست؟ $f(2) = 0$ مربعی، یعنی
 $b(x-2)^2 = mx^2 + nx + k - 1$
 $b(x^2 - 4x + 4) = mx^2 + nx + k - 1$
 $bx^2 - 4bx + 4b = mx^2 + nx + k - 1$
 $\underline{bx^2 - 4bx} + 4b = \underline{mx^2 + nx} + \underline{k - 1}$
 $k - 1 = 0 \rightarrow k = 1$ $n = -4b = -4$
 $4b = k - 1 \rightarrow 4b = 0 \rightarrow b = 0$ $m = b = 0$
 $\Sigma b = k \rightarrow 0 = 1$ $m = b = 0$

کلاس‌های تابستان ۱۴۰۴



۱۲ تابع خطی

$$f(x) = ax + b$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 سبب $\rightarrow$ هم از اینجا

حرف خط را با معلوم بردار و نقطه
می توان رسم کرد.

اگر $f(f(x)) = 9x + 5$ ، f خطی باشد در این صورت معادله f را بیابید.

خطی $f(x) = ax + b$

$$f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 9x + 5$$

$$\begin{cases} a^2 = 9 \\ a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$ab + b = 5$$

$$3b + b = 5 \rightarrow b = 1 \rightarrow f(x) = 3x + 1$$

$$-3b + b = 5 \rightarrow b = -2 \rightarrow f(x) = -3x - 2$$

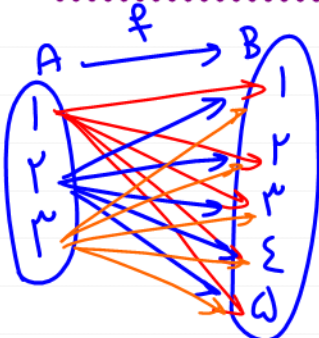
اگر $f(f(x)) = 14x + 9$ باشد، f خطی در این صورت معادله f را بیابید.

خطی $f(x) = ax + b$

$$f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b = 14x + 9$$

$$\begin{cases} a^2 = 14 \\ a = \sqrt{14} \\ a = -\sqrt{14} \end{cases}, ab + b = 9 \rightarrow b = \frac{9}{a} \rightarrow f(x) = \sqrt{14}x + \frac{9}{\sqrt{14}}$$

$$b = -3 \rightarrow f(x) = -\sqrt{14}x - 3$$



۵ حالت
۵ حالت
۵ حالت

چند تابع از A به B می توان نوشت؟

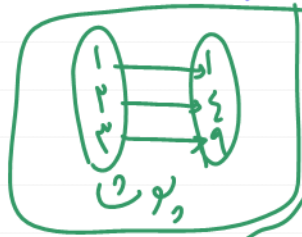
$$5^3 = 125$$

تعداد اعضای دامنه

$$5 \times 5 \times 5 = 125$$

تعداد اعضای مقبوضه

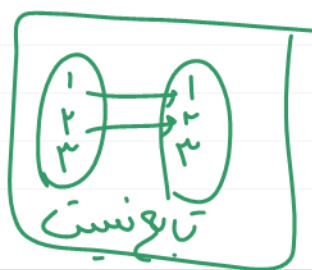
نکته:



همدان

$$R_f \subseteq B$$

۱، ۲، ۳، ۴، ۵



تابع نیست

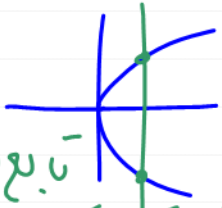


$$D_f = \{1, 2, 3\}$$

$$R_f = \{1, 2, 3\}$$



تذکر: هر خط قائم، نمودار تابعی است و در یک نقطه قطع کند تا تابع باشد.

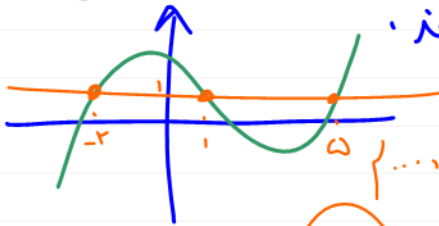


تابع نیست

تابع برعکس: اگر f تابع باشد، مولفه x ی در هر دو داشته باشد f را یک به یک می‌گیریم.

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

هر خط افقی نمودار را در یک نقطه قطع کند.



$$\{(5, 1), (1, 1), (-2, 1), \dots\}$$

این‌ها یک به یک نیستند.

* کدام از این‌ها یک به یک هستند؟



یک به یک نیست.

ب) $|x| + |y| = 2$
 $y = 0 \rightarrow |x| = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \quad f = \{\dots, (2, 0), (-2, 0), \dots\}$

ج) $y = [x]$ $\begin{matrix} x = 2, 5 \rightarrow y = 2 \\ x = 2, 6 \rightarrow y = 2 \end{matrix} \quad \{(2, 5, 2), (2, 6, 2), \dots\}$



د) $|x| + [y] = 0$
 $x = 2 \quad [y] = -2 \rightarrow -2 \leq y < -1$

تعریف تابع یک به یک به زبان ریاضی

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال دهم $f(x) = 3x + 5$ یک به یک است.

$$y_1 = y_2 \Rightarrow 3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$$

$$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$



فهمیده (بر خط) کدامیک از انواع زیر یک هسته؟ ۱/۲

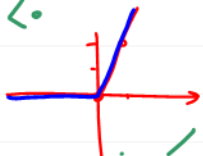
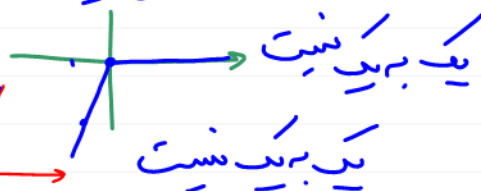
$$1) \quad y = x - |x| = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

7) $y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

v) $y = x - [x]$ 

$$c) \quad y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z}' \\ -1 & x \notin \mathbb{Z}' \end{cases}$$

d) $y = x[x]$



✓ $[-2, 2)$

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \rightarrow y=0 \\ x=1/2 \rightarrow y=0 \end{array} \right\} \dots, (1/2, 0), (1/4, 0), \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{یک به یک نیست} \end{array} \right.$$

دینار و گوارا بی گناه

ساوی دو تابع

$$\left. \begin{array}{l} Df = Dg \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$\forall x; f(x) = g(x)$$

$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \xrightarrow{D} x^2 - x \geq 0$

$$g(x) = \sqrt{x} \sqrt{n-1} \xrightarrow{D} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \end{array} \right\} \rightarrow Dg = [1, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

$$J_2: \begin{cases} f(n) = \sqrt{n-n^2} \xrightarrow{D} n-n^2 > \\ g(n) = \sqrt{n} \sqrt{1-n} \end{cases}$$

$$g(n) = \sqrt{n} \sqrt{1-n}$$

$D_g = [0, 1]$ $\boxed{n \geq 0}$, $\boxed{n \leq 1}$, $\boxed{n = 0}$, $\boxed{n = 1}$

$$D_f = D_g$$

$$g_{(n)} = \sqrt{n} \sqrt{1-n} = \sqrt{n(1-n)} = \sqrt{n-n^2} = f(n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \left[\frac{x^r}{1+x^r} \right] \rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ g(x) = \left[\frac{x^r}{1+x^r} \right] \rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$g(x) = 0 \quad \xrightarrow{\text{تابع ثابت}} \quad D_g = \mathbb{R}$$

کلاس‌های تابستان ۱۴۰۴

$$D_f = D_g$$

$$0 \leq \frac{n^r}{n+1} < \frac{n^r}{n+1} < \frac{n^r}{n+1}$$

$$\circ \quad \frac{x_r}{x_{r+1}} < 1 \rightarrow \left[\frac{x_r}{x_{r+1}} \right] = \circ$$



اگر دو تابع $f(n) = 2n - 2$ و $g(n) = \begin{cases} \frac{2n^2 - 4n + 2}{n-1} & n \neq a \\ b & n = a \end{cases}$ با هم سادی باشند

$f(1) = g(1)$

$2(1) - 2 = b \rightarrow b = -2$

$a = 1$ (تاریخچه شماره ۱)

$2a - b = 2 - (-2) = 4$

اگر $f(n) = 2n + 2$ و $g(n) = \begin{cases} \frac{2x + 2n}{n} & n \neq 0 \\ b & n = 0 \end{cases}$ با هم سادی باشند

$f(0) = g(0)$

$2(0) + 2 = b \rightarrow b = 2$

$f = \{(n, y) \mid y = f(n)\}$

$f^{-1} = \{(y, n) \mid n = f^{-1}(y)\}$

$f = \{(2, 3), (4, 5)\}$
 $f^{-1} = \{(3, 2), (5, 4)\}$

f یک به یک $\iff$ شرط معکوس پذیری

$f = \{(2, 3), (4, 5)\}$
 $f^{-1} = \{(3, 2), (5, 4)\}$

$f(n) = \frac{2n-2}{2}$

$(2, 2) \in f$

$(2, 2) \in f^{-1}$

$f^{-1}(n) = \frac{2n+2}{2}$

$f(n) = \frac{2n-1}{2} \rightarrow f^{-1}(n) = \frac{2n+1}{2}$

$(2, 1) \in f \iff (1, 2) \in f^{-1}$

$y = \frac{2n-1}{2}$

هدف تنها اینست
 داشتن n به
 طرف و بر
 عبارت بر صبی

$2y = 2n - 1$
 $2y + 1 = 2n$
 $n = \frac{2y+1}{2} = f^{-1}(y)$

$y = \frac{2n-1}{2}$
 $2y = 2n - 1$
 $2n = 2y + 1$
 $n = \frac{2y+1}{2} = f^{-1}(y)$



منابع تابع معکوس عرب از کتاب زیر را ببینید

$$y = \frac{2x-2}{5x+7} \Rightarrow 5xy + 7y = 2x - 2$$

$$5xy - 2x = -7y - 2$$

$$x = \frac{-7y-2}{5y-2} = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-7x-2}{5x-2} = \frac{7x+2}{-5x+2}$$

جملاتی که x دارند تعریف
و جملاتی که x ندارند تعریف

$$y = \frac{5x+7}{5x-9} \rightarrow 5xy - 9y = 5x + 7$$

$$5xy - 5x = 9y + 7 \rightarrow x(5y-5) = 9y+7$$

$$x = \frac{9y+7}{5y-5} = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{9x+7}{5x-5}$$

$$\left(\frac{7}{9}, 0\right) \in f^{-1}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$$

تابع همگرافیک

جای a, d را عوض می کنیم
c, b را برعکس می کنیم

$$y = \frac{2x-2}{5x+2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x+2}{-2x+2}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

a, d قرینه باشند
 $a+d=0$

$$f = f^{-1}$$

$$f(x) = \frac{2x+2}{5x-2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x-2}{-5x+2} = \frac{2x+2}{5x-2}$$

$$y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1 + 1$$

$$y = (x-1)^3 + 1$$

$$y-1 = (x-1)^3$$

$$\sqrt[3]{y-1} = \sqrt[3]{(x-1)^3}$$

$$\sqrt[3]{y-1} = x-1$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{y-1} = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1}$$

$(9, 3) \in f^{-1}$



$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 12x - 1 + 1$$

$$y = (x-2)^3 + 1$$

$$y - 1 = (x-2)^3$$

$$\sqrt[3]{y-1} = x-2$$

$$2 + \sqrt[3]{y-1} = x$$

$$f^{-1}(y) = 2 + \sqrt[3]{y-1}$$

$$y = x\sqrt{x} - 1 + 1$$

$$x\sqrt{x} = (\sqrt{x})^3 \quad (x, y) \in f$$

$$y = (\sqrt{x} - 1)^3 + 1$$

$$y - 1 = (\sqrt{x} - 1)^3$$

$$\sqrt[3]{y-1} = \sqrt{x} - 1$$

$$1 + \sqrt[3]{y-1} = \sqrt{x}$$

$$x = (1 + \sqrt[3]{y-1})^2 = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x) = (1 + \sqrt[3]{x-1})^2 \quad (x, y) \in f$$

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

احمال جبری روی توابع

$$f = \{(2, 3), (4, 7), (5, 1)\} \quad D_f = \{2, 4, 5\}$$

$$g = \{(1, 2), (2, 4), (5, 9)\} \quad D_g = \{1, 2, 5\}$$

$$\rightarrow D_{f+g} = \{2, 5\}$$

$$f + g = \{(2, 7), (5, 10)\} \quad f \times g = \{(2, 12), (5, 9)\}$$

$$f - g = \{(2, -1), (5, -8)\} \quad \frac{f}{g} = \{(2, \frac{3}{4}), (5, \frac{1}{9})\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = \sqrt{5-x}$$

$$5-x \geq 0 \rightarrow x \leq 5$$

$$D_g = (-\infty, 5]$$

$$D_f = [1, +\infty)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [1, 5]$$

$$D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x | g(x) = 0\} = [1, 5] - \{5\} = [1, 5)$$

$$D_{g/f} = (D_f \cap D_g) - \{x | f(x) = 0\} = [1, 5] - \{1\} = (1, 5]$$



$$f = \{(1,0), (0,1), (-1,1), (-2,0), (2,3), (4,0)\}$$

$$g = \{(-1,0), (2,1), (2,-1), (-2,1), (3,-2)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(-2,0), (2,-3), (4,0)\}$$

$$f+g = \{(-1,1), (-2,1), (2,2), (4,1)\}$$

$$\frac{g}{f} = \{(-1,0), (2, \frac{1}{3})\}$$

$$g-f = \{(-1,-1), (2,1), (2,-2), (-2,1)\}$$

$$2f = \{(1,0), (0,2), (-1,2), (-2,0), (2,6), (4,0)\}$$

$$f \times g = \{(-1,0), (-2,0), (2,-3), (4,0)\}$$

$$f^2 = f \times f = \{(1,0), (0,1), (-1,1), (-2,0), (2,9), (4,0)\}$$

$$f \circ g = \{(-1,1), (2,0), (2,1), (-2,0), (3,0)\}$$

$$g \circ f = \{(2,-2)\} \quad f \circ f = \{(1,1), (0,0), (-1,0), (-2,1), (2,1)\}$$

$$g \circ g = \{(2,0), (3,1)\}$$

نسبت $\frac{f}{g}$ را بنویس. $g(x) = \frac{x-2}{x-4}$

اگر $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

$$D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\frac{f}{g} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x-2}{x-4}} = \frac{x-1}{x-4}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$= (\mathbb{R} - \{2, 4\}) - \{2\} = \mathbb{R} - \{2, 4\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid f(x) = 0\} = (\mathbb{R} - \{2, 4\}) - \{1\} = \mathbb{R} - \{1, 2, 4\}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{x-2}{x-4}}{\frac{x-1}{x-2}} \quad (x \neq 1, 2, 4)$$



$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{[x-2]}$$

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

+	-	+
2	1	2

$$[x-2] \neq 0$$

$$[x] - 2 \neq 0$$

$$[x] \neq 2 \rightarrow x \notin [2, 3) \quad (2)$$



۱- دامنه حریف از تقاطع این دو ناحیه می‌گردد.

$$(1) \cap (2) = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x+1}}$$

$$x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \quad (1)$$

$$(1) \cap (2) = [-1, +\infty) - \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$x - \sqrt{x+1} \neq 0$$

$$x \neq \sqrt{x+1} \rightarrow x^2 \neq x+1 \rightarrow x^2 - x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

$$2.) f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3|x-1| + 2}$$

$$x^2 - 2x + 1 - 3|x-1| + 2 = 0$$

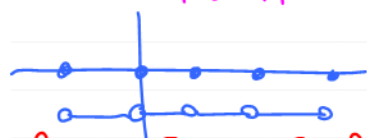
$$(x-1)^2 - 3|x-1| + 2 = 0$$

$$|x-1|^2 - 3|x-1| + 2 = 0 \rightarrow (|x-1| - 1)(|x-1| - 2) = 0$$

$$|x-1| - 1 = 0 \rightarrow |x-1| = 1 \rightarrow \begin{cases} x-1=1 \rightarrow x=2 \\ x-1=-1 \rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$|x-1| - 2 = 0 \rightarrow |x-1| = 2 \rightarrow \begin{cases} x-1=2 \rightarrow x=3 \\ x-1=-2 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 0, 2, 3\}$$



$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z}' \\ -1 & x \notin \mathbb{Z}' \end{cases} \quad R_f = \{0, -1\}$$

$$f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]} \quad D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}' \rightarrow R_f = \{-1\}$$

$$f(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right] \quad 0 \leq \frac{x^2}{x^2 + 1} < 1 \rightarrow \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right] = 0 \rightarrow R_f = \{0\}$$

$$f(x) = \frac{|x|}{|x| + 1} \quad R_f = [0, 1) \quad f(x) = \frac{1}{|x| + 1} \rightarrow R_f = (0, 1]$$

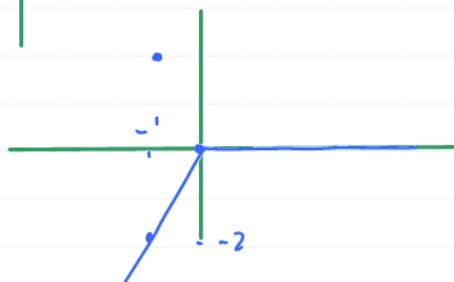


(۳) نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



ب) $f(x) = x - |x| = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$



(۴) مساحت محصور شده بین دو نمودار $y = x + |x|$ و $y = \frac{1}{2}x + 3$ را تعیین کنید.

$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$0 = \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow -3 = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = -6$

برای پیدا کردن نقطه اشتراک دو تابع را نقطه میزنیم.

$\frac{1}{2}x + 3 = x + |x|$

(A) $\frac{1}{2}x + 3 = x + x \Rightarrow \frac{1}{2}x + 3 = 2x \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2$

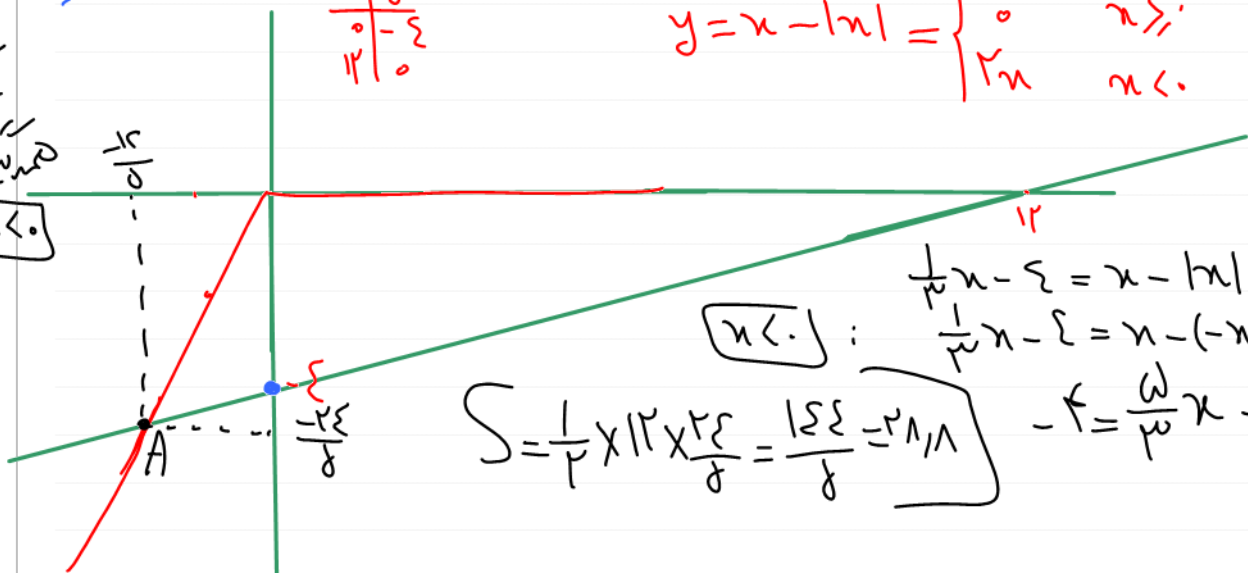
$S = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$

(۵) مساحت محصور شده بین توابع $y = x - |x|$ و $y = \frac{1}{2}x - 4$ را تعیین کنید.

$y = x - |x| = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

همدیرا نقطه میزنیم

$2x = \frac{1}{2}x - 4 \Rightarrow \frac{3}{2}x = -4 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$



$x < 0$

$\frac{1}{2}x - 4 = x - |x|$
 $\frac{1}{2}x - 4 = x - (-x)$

$S = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{25}{8} = \frac{153}{8} = 19.125$

$-4 = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$



هموارتر است

۶) منایطه تابع معکوس حریف از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y = \frac{2x+3}{x+5}$

$$2xy + 5y = 2x + 3$$

$$2xy - 2x = -5y + 3$$

$$x(2y-2) = -5y+3$$

$$x = \frac{-5y+3}{2y-2} = f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x+3}{2x-2} = \frac{2x-3}{-2x+2}$$

کافی است a, b, c را عوض کنیم
 b, c را قریب کنیم

$$x = \frac{y-3}{2y-2}$$

$$y = \frac{x-3}{2x-2} \quad \boxed{\sqrt{u^2} = |u|}$$

ب) $f(x) = \frac{3x-1}{x+7}$

$$3xy + 7y = 3x - 1$$

$$3xy - 3x = -7y - 1$$

$$x(3y-3) = -7y-1$$

$$x = \frac{-7y-1}{3y-3} = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-7x-1}{3x-3}$$

۲) $y = x^2 - 9x \quad (x < 3)$

$$(y, -1) \in f \rightarrow (-1, y) \in f^{-1}$$

$$y = x^2 - 9x + 9 - 9$$

$$y = (x-3)^2 - 9 \rightarrow y+9 = (x-3)^2$$

$$\sqrt{y+9} = \sqrt{(x-3)^2}$$

$$\sqrt{y+9} = |x-3| \quad x < 3 \rightarrow -x+3$$

$$x = -\sqrt{y+9} + 3 = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x+9} + 3$$

۳) $f(x) = x^2 - 10x \quad (x < 5)$

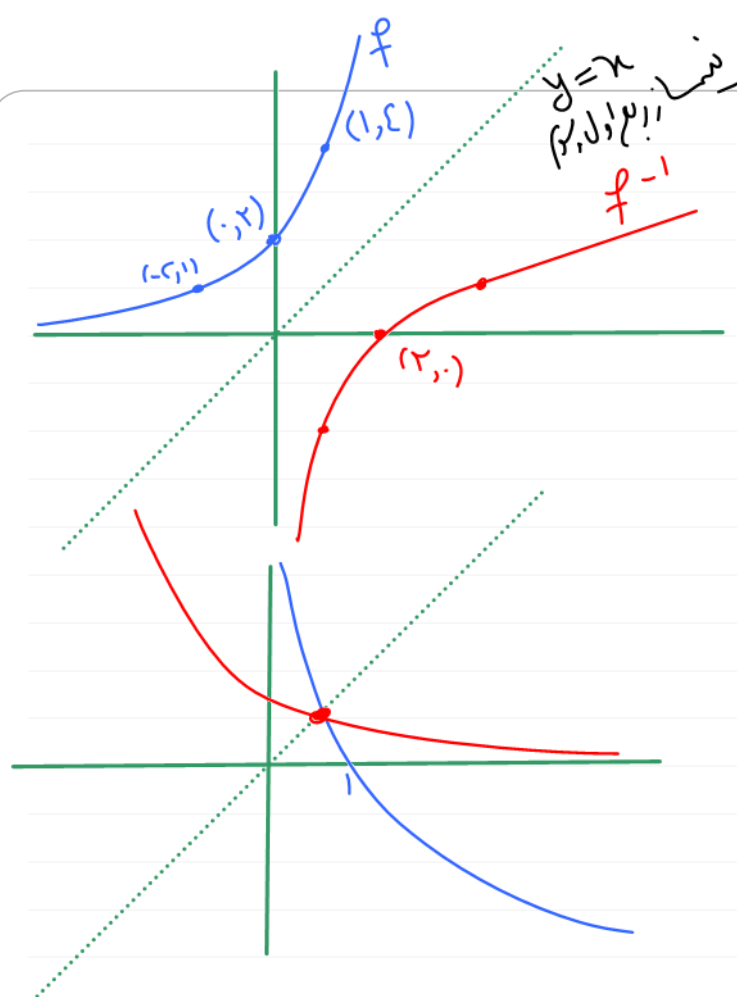
$$y = x^2 - 10x + 25 - 25$$

$$y = (x-5)^2 - 25$$

$$y + 25 = (x-5)^2$$

$$\sqrt{y+25} = \sqrt{(x-5)^2} = |x-5| = -x+5$$

$$x = 5 - \sqrt{y+25} = f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(x) = 5 - \sqrt{x+25}$$

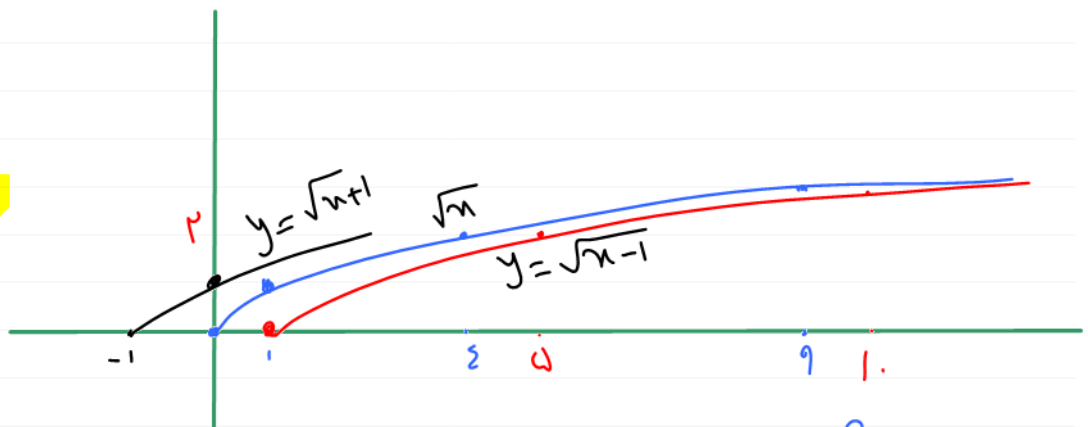


$y=x$ نسبت
 f, f^{-1} نسبت به خط $y=x$
تقارن دارند.

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x-1} \quad x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$y = \sqrt{x+1} \quad x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$



$$y = f(x) \rightarrow y = f(x-a)$$

$$(2, 3) \rightarrow (7, 3)$$

$$(4, -1) \rightarrow (9, -1)$$

$$y = f(x) \rightarrow y = f(x+a)$$

$$(x, y) \rightarrow (x-a, y)$$

$$y = f(x) \rightarrow y = f(ax)$$

$$(x, y) \rightarrow (\frac{x}{a}, y)$$

$$y = f(x) \rightarrow y = f(\frac{x}{a})$$

$$(2, 5) \rightarrow (\frac{2}{5}, 5)$$

$$(5, 1) \rightarrow (\frac{5}{1}, 1)$$

$$y = f(x) \rightarrow y = f(\frac{x}{a})$$

$$(2, 4) \rightarrow (2, 4)$$



۳) $y = f(x) \rightarrow y = af(x)$
 $(x, y) \rightarrow (x, ay)$

$y = f(x) \rightarrow y = 2f(x-1) + 3$
 $(4, 17) \rightarrow (5, 17)$
 $(-3, -2) \rightarrow (-2, -5)$

۴) $y = f(x) \rightarrow y = f(x) \pm a$
 $(x, y) \rightarrow (x, y \pm a)$

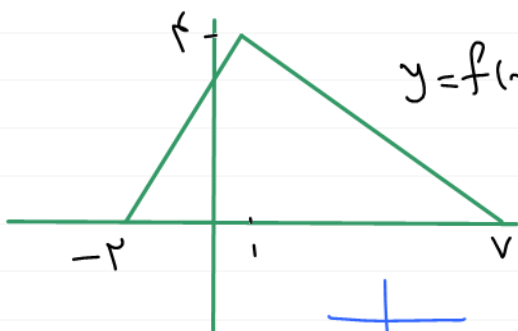
$y = f(x) \rightarrow y = 3f(\frac{x}{3} - 1) + 7$
 $(2, 3) \rightarrow (7, 14)$

$y = f(x) \rightarrow y = af(bx + c) + d$

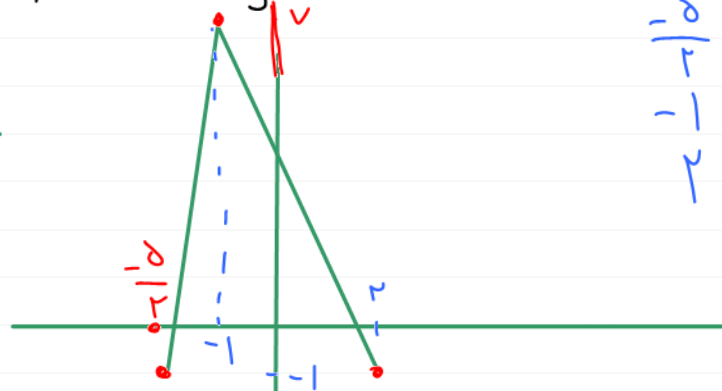
تغییری در a
 تغییر در b
 تغییر در c
 تغییر در d

تغییری در a
 تغییر در b
 تغییر در c
 تغییر در d

$y = f(x) \rightarrow y = 2f(\frac{x}{2} - 1) + 4$
 $(2, 3) \rightarrow (12, 14)$



$y = f(x) \rightarrow y = 2f(x+3) - 1$



$\frac{-5}{2}$	-1
-1	7
2	-1

$\frac{-2}{1}$	4
7	0

$y = f(x) \rightarrow y = af(x) \Rightarrow \begin{cases} a > 1 & \text{استیلا عرضی} \\ 0 < a < 1 & \text{انقباض عرضی} \end{cases}$

$y = \sqrt{x} \rightarrow y = 2\sqrt{x}$



$y = \sqrt{x} \rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$





$$y = f(ax) \rightarrow \begin{cases} a > 1 \rightarrow \\ a < 1 \rightarrow \end{cases}$$

$$y = f(x)$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f\left(\frac{x}{a}\right) \end{cases}$$

x	y
0	0
1	2
2	0



x	y
0	0
1	2
2	0

