رسم نمودار به کمک انتقال:

داخل پرانتز ← تغییرات x ها ← برعکس

بیرون پرانتز ← تغییرات y ها ← مستقیم

مثال : در هر مورد تابع داده شده را رسم کنید .

$1)\ y = |x - 2| + 3$

2) $y = 1 - |x + 2|$

3) $y = \sqrt{x + 2} + 3$

4) $y = 2 - \sqrt{1 - x}$

5) $y = -(x - 2)^2 + 1$

رسم تابع به کمک انتقال (به روش حسن زاد)

نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است برای رسم هریک نمودار های داده شده به ترتیب گفته شده عمل می کنیم

1) $y = f(x-1)$ ۱واحد به راست   2) $y = f(x+2)$ ۲واحد به چپ

3) $y = f(x) + 1$ ۱واحد به بالا   4) $y = f(x) - 2$ ۲واحد به پایین

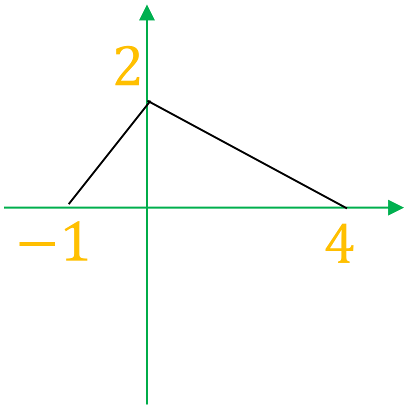
5) $y = f(2x)$ در جهت محور x ها فشرده

6) $y = f(\frac{1}{3}x)$ در جهت محور x ها کشیده

7) $y = \frac{1}{2}f(x)$ در جهت محور y ها فشرده

8) $y = 2f(x)$ در جهت محور y ها کشیده

مثال : نمودار تابع f بصورت مقابل است موارد زیر را رسم کنید؟



$1) y = f(-x)$

$2) y = -f(-x)$

$3) y = f(x-2)$

$4) y = f(2x-4)$

$5) y = 2f(x+1)-3$

6) $y=-f\left(\frac{1}{2}x\right)+2$

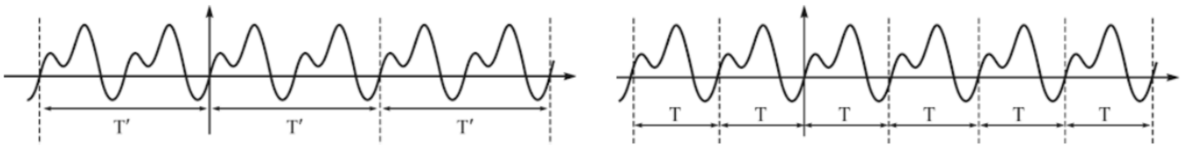
مثال : اگر دامنه و برد تابع f به صورت $D_f=[-1,2)\ ,R_f=[0,1)$ باشد دامنه و برد تابع $5-2f(4x-1)$؟

تابع متناوب :

تابع f را متناوب گویند هرگاه بازه ای به طول T داشته باشیم به طوریکه

$$f(x+T)=f(x)$$

دوره تناوب : کوتاهترین حالت ممکن T را دوره تناوب می گویند . . .



دوره تناوب توابع معروف :

$$\begin{cases}\sin ax\\ \cos ax\end{cases} \rightarrow T=\frac{۲\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases}\tan ax\\ \cot ax\end{cases} \rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases}y=ax-[ax]\\ y=[ax]+[-ax]\end{cases} \rightarrow t=\frac{۱}{|a|}$$

مثال : دوره تناوب توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = ۲\sin\frac{x}{۲} - ۷$

۲) $y = \sqrt{۲} - ۳\cos(\frac{\pi}{۳} - ۲x)$

۳) $y = ۵ + \pi\cos(-۴x + ۳)$

۴) $y = ۳x - [۳x]$

۵) $y = \left[\frac{x}{۲}\right] + \left[-\frac{x}{۲}\right]$

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases} x & ۰\le x\le ۱ \\ ۲-x & ۱\le x\le ۲ \end{cases}$ با دوره تناوب ۲ مفروض است. مساحت محصور بین نمودار تابع و محور طول ها در بازه ی $[-۰.۷۵ , ۳.۲۵]$ کدام است؟

بررسی کتاب درسی:

توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$

۲) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

۳) $y = -\pi\sin\left(\frac{x}{۲}\right) - ۲$

۴) $y = -\frac{۳}{۴}\sin ۳x$

مثال : در هر مورد ضابطه تابع مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

۱) $T = \pi \quad , \quad \max = ۳ \quad , \quad \min = -۱$

۲) $T = ۳ \quad , \quad \max = ۹ \quad , \quad \min = ۳$

۳) $T = ۴\pi \quad , \quad \max = +۱ \quad , \quad \min = -۷$

مثال : ضابطه مربوط به هر یک از نمودار های داده شده را بنویسید.

حد رادیکال

$$۱)\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{\sqrt{۲-x}-x}$$

$$۲)\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt[۳]{x+۵}-۲}{x^{۲}-۲x-۳}$$

مشـــتق :

چنانچه حد زیر موجود باشد آن را مشتق تابع f در نقطه a خوانده و با نماد $f'(a)$ نمایش می دهند.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

✓ هریک از حدود زیر میتواند برای تعریف مشتق در نقطه a بکار رود:

$$\begin{cases} f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+a)-f(a)}{\Delta x} \\ f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x+3)-f(3)}{\Delta x} \end{cases}$$

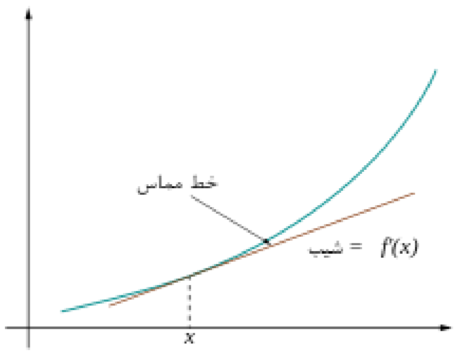
$$\begin{cases} f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \end{cases}$$

- مشتق های یکطرفه:

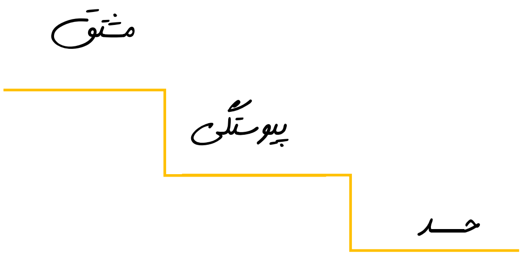
مشتق راست نقطه a : $f'_{+}(a) = \lim\limits_{x \to a^{+}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مشتق چپ نقطه a : $f'_{-}(a) = \lim\limits_{x \to a^{-}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

- تعبیر هندسی مشتق: مشتق تابع در یک نقطه بیانگر شیب (ضریب زاویه) خط مماس بر منحنی در آن نقطه(مشتق راست بیانگر شیب مماس راست و مشتق چپ بیانگر شیب مماس چپ است)



✓ نمای مقابل ارتباط بین مشتق ، پیوستگی و حد را بیان میکند.



نقطه گوشه (زاویه دار) : مشتق های چپ و راست در این نقاط متفاوت است اما بی نهایت نیستند.

نقطه بازگشتی: مشتق های چپ و راست در این نقاط یکی ∞ و دیگری $-\infty$ میباشد.

نقطه‌عطف (مماس قائم) : مشتق های چپ و راست در این نقاط هر دو ∞ یا $-\infty$ می‌باشد.

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = -\infty \qquad\qquad \mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \infty$$

✓ در نقطه‌بازگشتی و عطف خطِ مماسِ قائم وجود دارد.

توجه: دانش آموز بایستی از روی نمودار تابع، تشخیص دهد در چه نقاطی مشتق موجود است و یا موجود نیست و در چه نقاطی ۰ یا + یا − یا ∞ یا $-\infty$ است. مشتق های چپ و راست کدام موجود است و کدام موجود نیست و نقاط گوشه‌و بازگشتی و عطف را بشناسد.

توضیح: برای به دست آوردن مشتق تابع در یک نقطه از فرمول های مشتق استفاده میکنیم، اما در مواردی مجبوریم (وگاهی بهتر است) از تعریف مشتق استفاده نماییم.

مواردی که مشتق، با تعریف محاسبه میشود.

قدر مطلق :

$\mathbf{f(x) = |x^2 - 1|}$ ؛ a=۱ در

توجه: گاهی اوقات قدر مطلق به صورت پنهان در تابع وجود دارد.....

جزء صحیح :

$$f(x) = (4x - \pi)[\cos 2x] \quad ; \quad a = \frac{\pi}{4}$$

وجود عامل ضربی

کنکور ۸۳ ریاضی:

$$f(x) = \frac{(x-1)\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^2}$$; در نقطه (۱,۰)

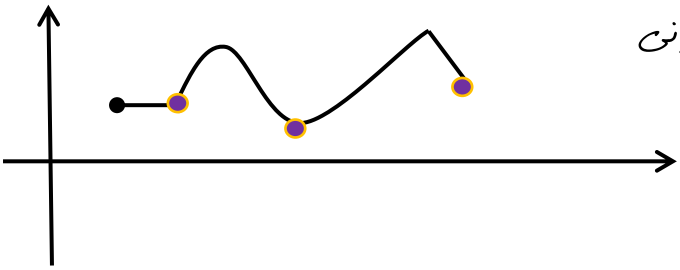
نقاط بحرانی - ماکزیمم و مینیمم مطلق و نسبی - صعودی و نزولی - جهت تقعر و نقطهٔ عطف

نقطهٔ بحرانی

نقطهٔ $x_0 \in D_f$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f است. ← هرگاه $f'(x_0)$ موجود نباشد یا $f'(x_0)=0$

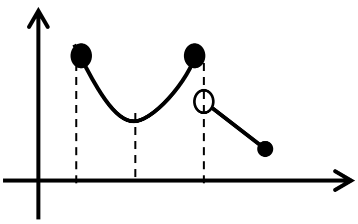
مثلاً در شکل مقابل ← ۳،۲،۵ ، (۱،۲) : نقطهٔ بحرانی

توجه کنید که ابتدا و انتهای باز، بحرانی ....!!

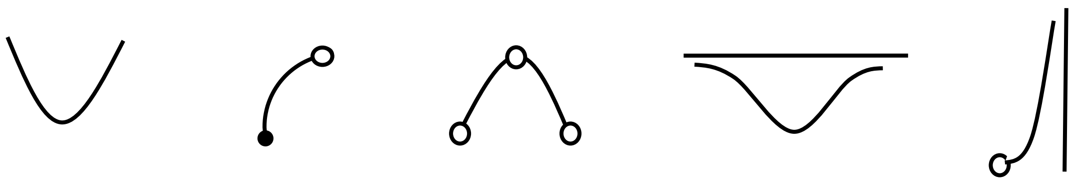


نقطهٔ ماکزیمم مطلق : نقطهٔ $x_0 \in D_f$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع f است هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمامی نقاط دیگر بیشتر یا با آنها مساوی باشد.

نقطهٔ مینیمم مطلق : بطور مشابه تعریف می شود مثلاً در شکل مقابل: نقطهٔ ماکزیمم و یا مینیمم مطلق را نقاط اکسترمم مطلق می نامند.

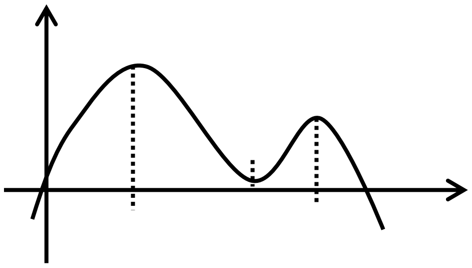


تذکر : شکل های زیر ماکزیمم مطلق ندارد.



توجه: ماکزیمم و مینیمم مطلق، بنام ماکزیمم و مینیمم سراسری نیز خوانده می شوند.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی: نقطهٔ $x_0 \in D_f$ نسبی تابع f است، هرگاه مقدار تابع در این نقطه به نسبت نقاط اطرافش از بقیه یا با آن ها مساوی باشد.



نقطهٔ مینیمم نسبی: به طور مشابه تعریف می شود.

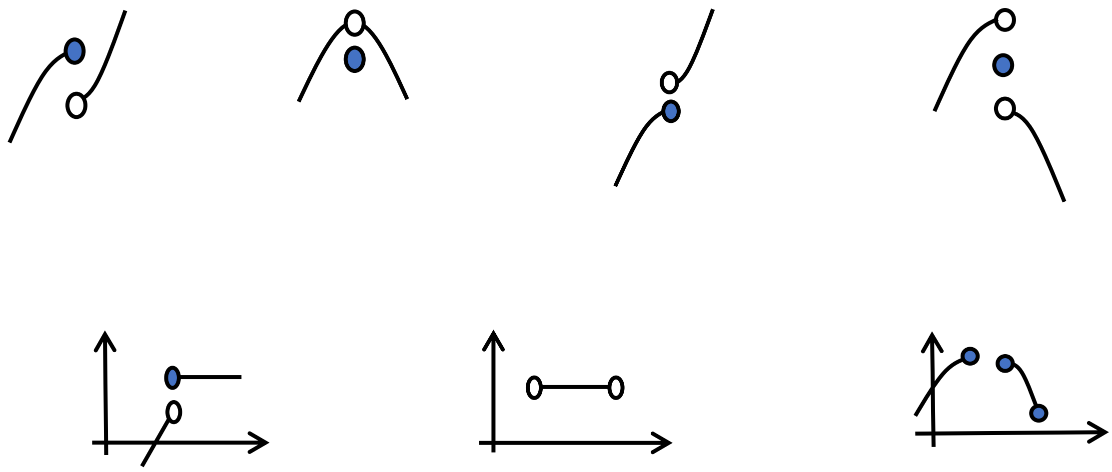
مثلاً در شکل مقابل: $x = ۲ ، ۴$: نقطهٔ ماکزیمم نسبی (موضعی)

$x=۳$: نقطهٔ مینیمم نسبی (موضعی)

منطقهٔ ماکزیمم و مینیمم نسبی را نقاط اکسترمم نسبی می نامند.

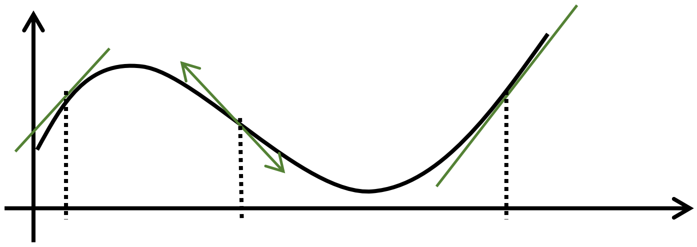
توجه: ماکزیمم و مینیمم نسبی، بنام ماکزیمم و مینیمم موضعی نیز خوانده شوند.

مثال: در هر شکل معلوم کنید نقطهٔ مورد سوال ماکزیمم نسبی است یا مینیمم نسبی.

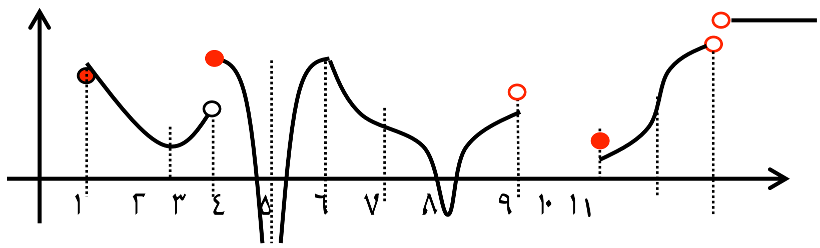


جهت تقعر و نقطه عطف

اگر نمودار تابع f مطابق شکل مقابل باشد. در x=۱ خط مماس بر منحنی و بالای منحنی واقع است، در این نقطه تقعر منحنی به سمت پائین است. در تمامی باز (۴،۱) وضعیت اینگونه است و تقعر منحنی به سمت پائین است. در x=۷ خط مماس بر منحنی موجود و زیر منحنی واقع است، در این نقطه تقعر منحنی به سمت بالا است. در تمامی باز $(4,+\infty)$ تقعر به سمت بالا ست. x=۴ که در آن دو ویژگی مهم مقابل را دارا است، نقطهٔ عطف منحنی است. ۱) تقعر عوض می شود. ۲) خط مماس بر منحنی موجود است.



مثال : برای شکل زیر موارد مقابل را تعیین کنید. (موارد ۷ گانه)



۱) بحرانی : x = ۲,۳,۵,۶,۷, ۱۰, (۱۱, +∞)

۲) ماکزیمم مطلق : (۱۱, +∞)

۳) مینیمم مطلق : ندارد

۴) ماکزیمم نسبی : x = ۳,۵, (۱۱, +∞)

۵) مینیمم نسبی : x = ۲,۷, (۱۱, +∞)

۶) جهت تقعر :
- بالا : (۱,۳) , (۵,۶), (۹,۱۰)
- پایین: (۳,۴), (۴,۵), (۶,۷), (۷,۸), (۱۰,۱۱)

۷) نقطه عطف : x = ۶,۱۰