بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّهُمَّ صَلِّ عَلی مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّل فَرَجَهُم

حسابان (۲)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

فصل ۴

دبیر: اکبر کرمانی خواه

شامل:

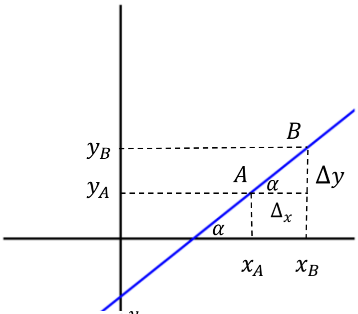
درسنامه-تمرینات و فعالیت ها و مثال های کتاب درسی

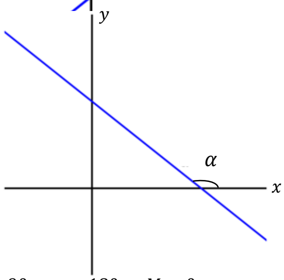
تست های طبقه بندی شده کنکور سراسری-نمونه سوالات نهایی

فصل چهارم: مشتق

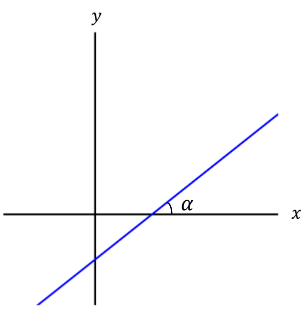
اگر $A(x_A,Y_A)$ و $B(x_B,Y_B)$ دو نقطه از یک خط باشند شیب آن به صورت $M=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ تعریف می‌شود.

همچنین اگر α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور x ها بسازد $M=tan\alpha$ است.

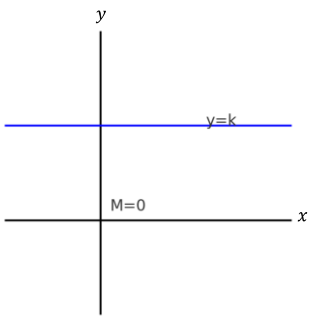




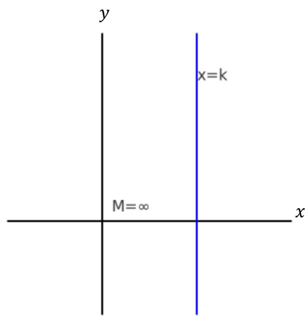
$90<\alpha<180 \to M>0$



$0<\alpha<90 \to M>0$

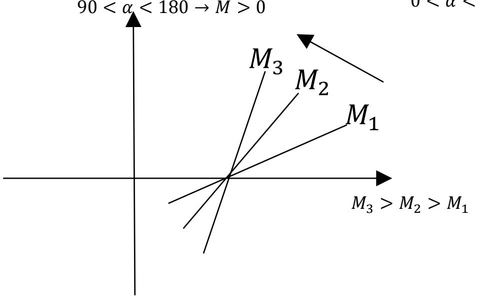


$y=k \to M=0$

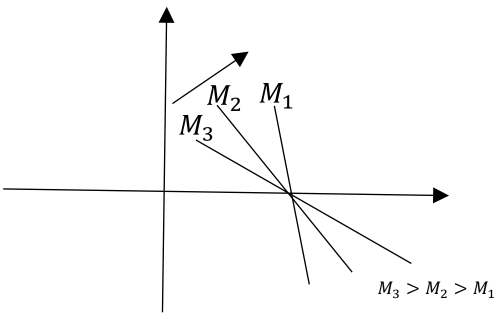


$x=k \to M$ تعریف نشده

مقایسه شیب خط:



الف) اگر شیب خط مثبت باشد هرچه زاویه حاده خط با جهت مثبت محور x ها بیشتر باشد شیب خط بزرگتر است.

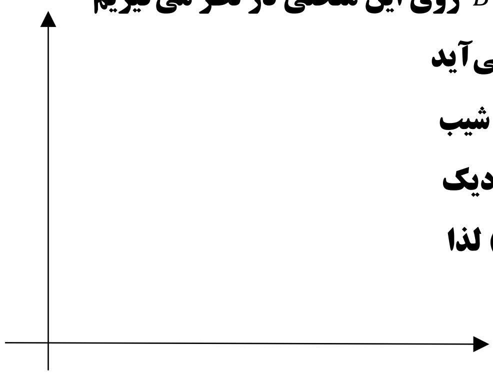


ب) اگر شیب خط منفی باشد هرچه زاویه منفرجه خط با جهت مثبت محور ها کمتر باشد خط ها به خط عمودی نزدیکتر شده، شیب ها کوچکتر می‌شوند.

شیب خط مماس بر یک منحنی:

فرض کنیم نمودار تابع $y=f(x)$ داده شده باشد و نقطه ثابت $A\ (a,f(a))$ روی این منحنی باشد؛ نقطه متغییر دیگری مانند $B\ (x,f(x))$ روی این منحنی در نظر می‌گیریم شیب خط قاطع AB از رابطه $M_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ بدست می آید

اگر نقطه A را از دو طرف به نقطه A نزدیک کنیم شیب خط قاطع AB به شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه A نزدیک می‌شود اگر B به A خیلی نزدیک شود (به طوری که فاصله B تا A از هر عدد مثبت کوچکی،کوچکتر شود) لذا شیب خط های قاطع نیز به شیب خط مماس بسیار نزدیک می‌شود.



پس $M = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **شیب خط مماس بر منحنی** f **در** A **اگر حد فوق موجود و متناهی باشد مقدار آن مشتق تابع** f **در** $x = a$ **گویند و به صورت** $f'(a)$ **نشان می‌دهند.**

تعریف دیگر: $M_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$M = f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ خط مماس بر منحنی f

مثال: مشتق توابع زیر را به کمک تعریف در نقاط خواسته شده حساب کنید.

الف) $f(x) = x^2 \qquad a = 1$

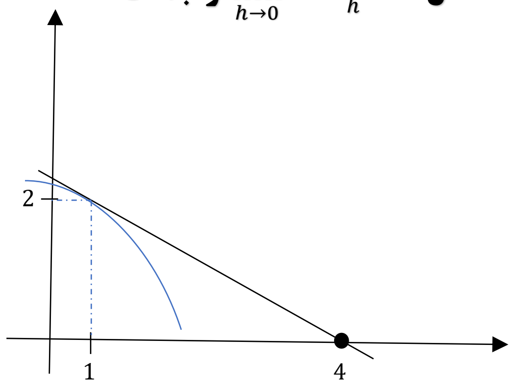
ب) $f(x) = 2x^3 - 5 \qquad a = 2$

ج) $f(x) = \sqrt{x} \qquad a = 4$

د) $f(x) = \frac{3}{x} \qquad a = -2$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی $y = x^2 - 3x$ **را در نقطه به طول** $x = 1$ **واقع بر این منحنی به کمک تعریف بدست آورید و سپس معادله خط مماس بر این منحنی را در این نقطه بنویسید.**

مثال:در شکل مقابل خط مماس بر منحنی f در $x=1$ رسم شده است؛ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ را بدست آورید.



تعریف مشتق با ظاهری متفاوت:

مثال: اگر $f'(3)=5$ ؛حاصل حد های زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}=$

ب) $\lim_{x\to 0}\frac{f(3+4h)-f(3)}{h}=$

نکته: اگر $f'(a)$ موجود باشد آنگاه :

الف) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{h}=mf'(a)$

ب) $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\frac{m-n}{k}f'(a)$

مثال: اگر $\lim_{h\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{3x-6}=\frac{4}{3}$ حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{2h}$ را بدست آورید.

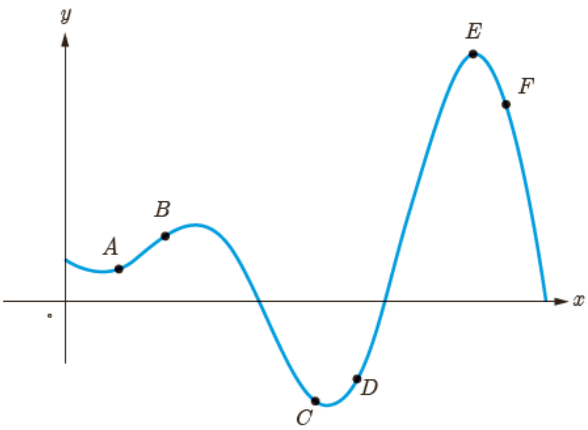
مثال: اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2-3h)}{h}=9$ **حاصل** $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-2x}$ **را حساب کنید.**

مثال: اگر $f'(3)=2$ **و** $f(3)=3$ **باشد؛ حاصل** $\lim_{x\to 3}\frac{f^2(x)-f^2(3)}{x^2-4x+3}$ **را حساب کنید.**

تمرین

۱ اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
	−۳
	−۱
	۰
	$\frac{1}{2}$
	۱
	۲

۳ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه A

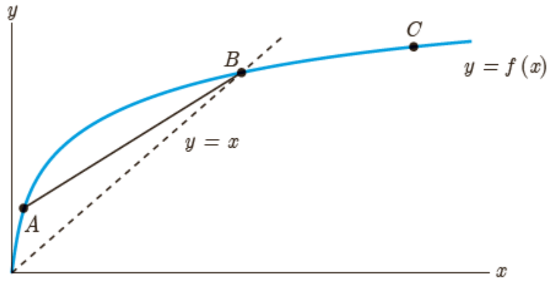
ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

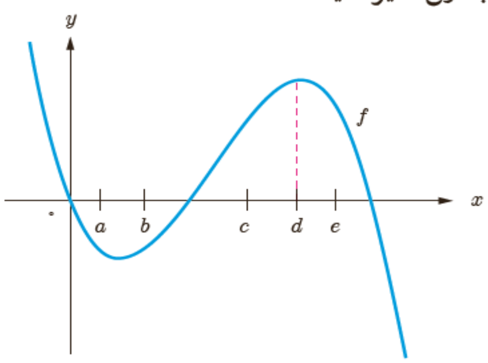
ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$



شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 , m_2 , ... و m_6 در نظر بگیرید.

۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a , b , c , d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	−۰/۵
	−۲

۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

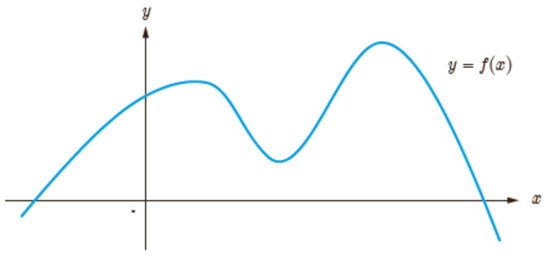
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



۶ اگر $f(x)=x^{3}-2$ ، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

۷ نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی روبه‌رو در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

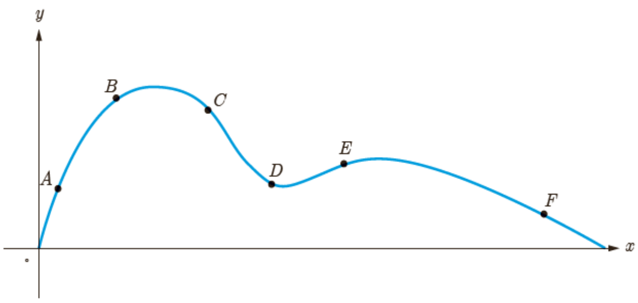
ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E<m_B<m_A$

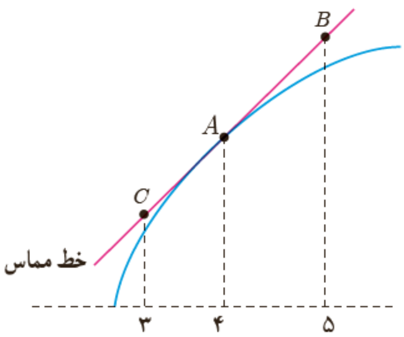
ت) شیب منحنی در نقاط F ،D و C منفی است.

ث) $m_F<m_D<m_C$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$



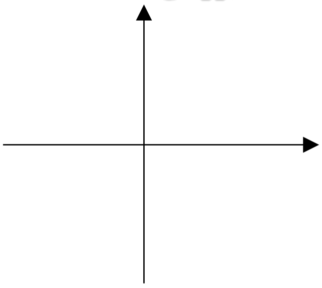
۸ برای تابع f در شکل زیر داریم : $f'(4)=1/5$ و $f(4)=25$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



::نیم‌یادداشت::

مشتق پذیری و پیوستگی:

مثال: **تابع** $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ **را رسم کنید و به کمک تعریف مشتق پذیری** f **را در** $x=2$ **بررسی کنید.**



مثال: **نمودار تابع** $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 1 \\ x+2 & x>1 \end{cases}$ **را رسم کنید و مشتق پذیری** f **را در** $x=1$ **بررسی کنید.**

مثال: **نمودار تابع** $f(x)=\begin{cases} x^3 & x\geq 0 \\ 2x & x<0 \end{cases}$ **را رسم کرده و مشتق پذیری** f **را در** $x=0$ **بررسی کنید.**

قضیه: اگر تابع f **در** $x=a$ **مشتق پذیر باشد آنگاه در** $x=a$ **پیوسته نیز است.**

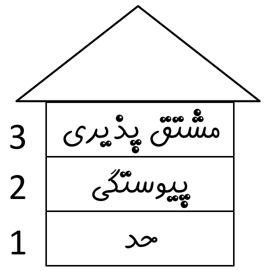
نکته: عکس قضیه بالا درست نیست؛ یعنی اگر f **در** $x=a$ **پیوسته باشد لزوما** f **در** $x=a$ **مشتق پذیر نیست.**

مثال: **تابع** $f(x)=|x-1|$ **در** $x=1$ **پیوسته است ولی در این نقطه مشتق ندارد.**

نکات:

۱) عکس نقیض گزاره بالا برقرار است یعنی اگر f در $x = a$ پیوسته نباشد آنگاه در این نقطه مشتق هم ندارد.

۲) به شکل مقابل نگاه کنید؛ وجود هر طبقه، وجود طبقات زیرین را ایجاد می‌کند.



تعریف: مشتق راست و چپ تابع f در $x = a$ را با نماد $f'+(a)$ و $f'-(a)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'+(a) = \lim_{h\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'-(a) = \lim_{h\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال: **مشتق چپ و راست تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = -1$ را بدست آورید.**

الف) مشتق پذیری f را در $x = -1$ بررسی کنید.

ب) معادلات نیم مماس های راست و چپ بر این منحنی را در $x = -1$ بنویسید.

مثال: مشتق پذیری تابع $y=\left|x^3-2x^2\right|$ در $x=0$ بررسی کنید.

نکته: در تابع $y=|f(x)|$ اگر $x=a$ ریشه ساده $f(x)$ باشد f در $x=a$ مشتق ندارد ولی اگر $x=a$ ریشه مضاعف $f(x)$ باشد f در $x=a$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|$ در $x=0$ مشتق ندارد ولی در $x=3$ مشتق دارد.

مثال: مشتق پذیری تابع $y=\sqrt{x+2}$ را در $x=-2$ بررسی کنید.

مثال: مشتق پذیری تابع $y=\sqrt[3]{x-1}$ را در $x=1$ بررسی کنید و معادله خط مماس بر منحنی را در این نقطه بنویسید.

تعریف: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد در این صورت خط $x=a$ را مماس قائم بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ گویند بدیهی است که $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

نکات:

۱) تابع $y=\sqrt[n]{ax+b}$ به ازای ریشه زیر رادیکال $(x=\frac{-b}{a})$ مشتق پذیر نیست.

الف) اگر n زوج باشد تابع در این نقطه پیوسته نیست و لذا مشتق نداره.

ب) اگر n فرد باشد تابع در این نقطه پیوسته است ولی شیب خط مماس بر نمودار در این نقطه نامتناهی است.

مثال: **مشتق پذیری تابع $y=[x]$ را در $x=1$ بررسی کنید.**

مثال: **مشتق پذیری توابع $f(x)=(x-2)[x]$ و $g(x)=(x-2)^2.[x]$ را در $x=2$ بررسی کنید.**

نقاط مشتق ناپذیر:

اگر تابع f در $x = a$ هر یک از شرایط زیر را داشته باشد در این صورت در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۱) f در $x = a$ پیوسته نباشد.

۲) f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$

الف) هر ۲ موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه ای)

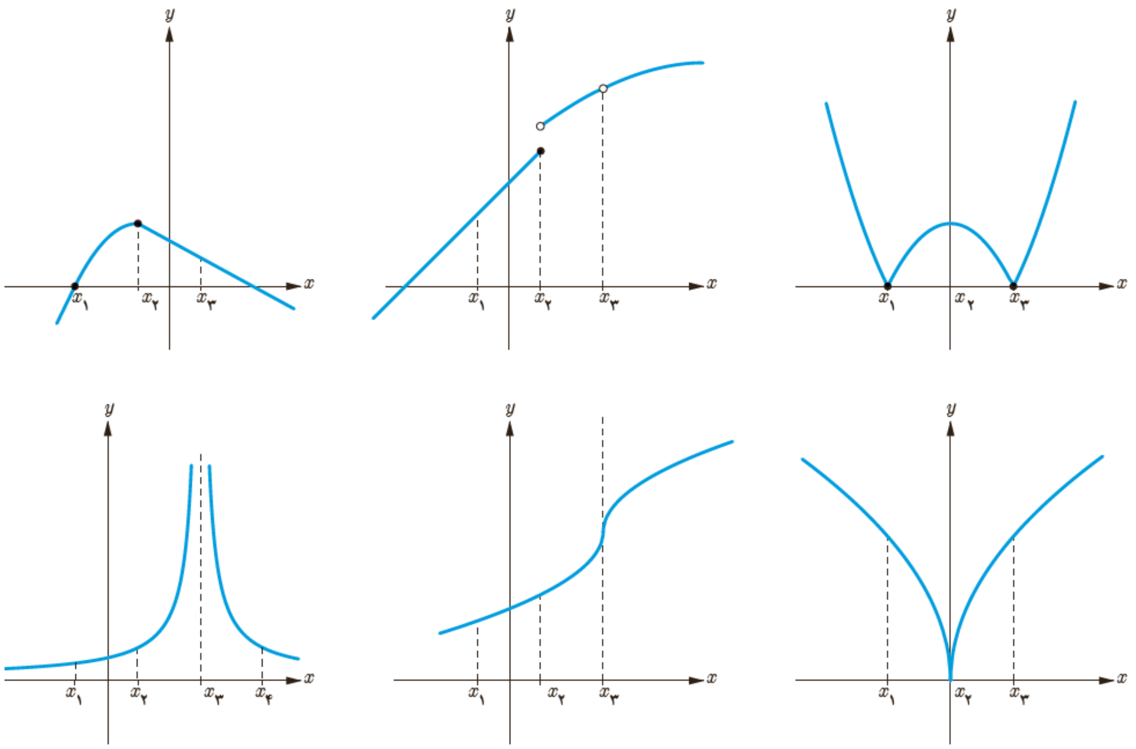
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه ای)

پ) هردو نامتناهی باشند و غیر علامت (نقطه بازگشت)

ت) هر دو نامتناهی و هم علامت باشند (مماس قائم)

کار در کلاس

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.



تابع	مشتق	مثال
۱) $y = c$	$y' = 0$	
۲) $y = ax + b$	$y' = a$	$y = 3x - 5 \to y' =$
۳) $y = x^n \ \ (n \in \mathbb{N})$	$y' = nx^{n-1}$	$y = x^3 \to y' =$
۴) $y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	
۵) $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
۶) $y = \sqrt{ax + b}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$	$y = \sqrt{3x - 2} \to y' =$
۷) $y = \sqrt[3]{x}$	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	
۸) $y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[5]{x} \to y' =$
۹) $y = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y = \sqrt[7]{x^3} \to y' =$
۱۰) $y = af(x)$	$y' = af'(x)$	$y = 2x^3 \to y' =$
۱۱) $y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$	$y = x^4 + x^2 \to y' =$
۱۲) $y = f(x) - g(x)$	$y' = f'(x) - g'(x)$	$y = x^5 - \sqrt{x} \to y' =$
۱۳) $y = f(x) \times g(x)$	$y' = f(x) \times g'(x) + f(x) \times g'(x)$	$y = \sqrt{x}(x^2 + 1) \to y' =$
۱۴) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f(x) \times g'(x) + f(x) \times g'(x)}{[g(x)]^2}$	$y = \frac{x^3}{x^2 + x} \to y' =$
۱۵) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$	$y' = \frac{ad - bc}{(x + d)^2}$	$y = \frac{2x - 3}{5x + 4} \to y' =$
۱۶) $y = Sinx$	$y' = Cosx$	
۱۷) $y = Cosx$	$y' = -Sinx$	
۱۸) $y = tanx$	$y' = (1 + tan^2 x) = \frac{1}{Cos^2 x}$	
۱۹) $y = Cotx$	$y' = -(1 + tan^2 x) = \frac{-1}{Sin^2 x}$	

اثبات۳)

اثبات۵)

اثبات۶)

اثبات۷)

اثبات۱۶)

اثبات۱۷)

اثبات۱۸)

اثبات۱۹)

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = Sinx \times tanx$

ب) $g(x) = \frac{5Cosx}{3-Cotx}$

مشتق تابع مرکب (قاعده زنجیری): اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند در این صورت تابع fog مشتق پذیر است و $(fog)'$ به بیان دیگر اگر u تابعی بر حسب x و f تابعی بر حسب u باشد داریم:

$$y = f(u) \rightarrow y' = u' \times f'(u)$$

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = (x^3 - 4x + 5)^4$

ب) $y = Sin^2x$

ج) $y = Sinx^2$

د) $y = \sqrt[3]{Cosx}$

ه) $y = tan^4(6x^2+1)$

و) $y = (x^3-2)\times\sqrt{5-x^2}$

ز) $y = \frac{(x^2-3x)^5}{\sqrt{6x-1}}$

تابع	مشتق	مثال
$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}\times u'$	$y = (x^2-3x)^4 \to y'$
$y = \frac{1}{u}$	$y' = \frac{-u'}{u^2}$	$y = \frac{1}{6x^2+x} \to y'$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{3-\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[3]{u}$	$y' = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$	$y = \sqrt[3]{x^2-4x}$
$y = Sinu$	$y' = u'\times Cosu$	$y = Sin(6x-x^2)$
$y = Cosu$	$y' = -u'\times Sinu$	$y = Cos(x^3+1)$
$y = tanu$	$y' = u'(1+tan^2u)$	$y = tan(\sqrt[3]{x})$
$y = Cotu$	$y' = -u'(1+Cot^2u)$	$y = cotx^3$

مثال: اگر $f(x^2+2) = 2g(3x-1)+5$ **و** $g'(5) = 12$ **باشد مقدار** $f'(6)$ **را حساب کنید.**

مثال: خط d **در نقطه** $(-1,5)$ **بر نمودار تابع** f **مماس است اگر شیب خط** d **برابر** $\frac{-1}{2}$ **و** $g(x) = \sqrt[3]{x} \times f(x)$ **باشد مقدار** $g'(1)$ **کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)**

۱) $\frac{-4}{3}$ **۲)** $\frac{-1}{3}$ **۳)** $\frac{7}{6}$ **۴)** $\frac{13}{6}$

نکته: اگر ضابطه تابع ساده شود بهتر است ابتدا آن را ساده کنیم و سپس مشتق بگیریم.

مثال: مشتق توابع زیر را در نقاط خواسته شده پیدا کنید.

الف) $y = 2x(x-1)(x+1)(x^2+1)$ $\quad x = \frac{1}{2}$

ب) $y = Cos^2x - Sin^2x$ $\quad x = \frac{\pi}{6}$

ج) $y = \frac{x\sqrt{x+5}+\sqrt{x}(x+5)}{\sqrt{x^2+5x}}$ $\quad x = 4$

د) $y=(\sqrt{x^3+2x}-\sqrt{x^3})^{10}\times(\sqrt{x^3+2x}+\sqrt{x^3})^{10} \qquad x=\frac{1}{2}$

مشتق عامل صفر شونده: اگر $y=f(x)\times g(x)$ و f و g در $x=a$ پیوسته باشند و $f(a)=0$ برای محاسبه مشتق تابع $y=f(x)\times(x)$ در $x=a$ تنها کافی است از تابع f (عبارت صفر شونده) مشتق گرفته و در تابع g ضرب کنیم و سپس مقدار $x=a$ را قرار دهیم.

مثال: **مشتق تابع $f(x)=\frac{(x-2)\sqrt{5x-6}}{x^3-6x}$ را در $x=2$ بدست آورید.**

مثال: **مشتق تابع $y=(x^2-3x+2)(x^6-3x)^5$ را در $x=1$ بدست آورید.**

نکته: اگر توان عامل شونده عددی بزگتر از ۱ باشد؛ مشتق آن تابع در ریشه های عامل صفر شونده؛ صفر است.

مثال: **مشتق تابع $f(x)=\frac{(x^2-6x+9)\sqrt[3]{x+5}}{x}$ را در $x=3$ حساب کنید.**

نکته: اگر برای محاسبه مشتق توابع قدر مطلقی و جزء صحیح باید ابتدا قدر مطلق را با تعیین علامت و جزء صحیح را با تعیین مقدار حذف کنیم و سپس مشتق را محاسبه کنیم؛ البته به شرط آنکه تابع در نقطه داده شده مشتق پذیر باشد.

مثال: مشتق توابع زیر را در نقاط خواسته شده در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x) = \left|x^2 - 1\right| + |x - 3| \qquad x = 2$

ب) $f(x) = \left|x^2 - 1\right| \qquad x = 1$

ج) $f(x) = x^2 + [4x + 1] \qquad x = \frac{1}{3}$

د) $f(x) = x^2[x] + |x - 2| \qquad {f'}_{+}(2)$

.:::نیم یادداشت:::.

مشتق پذیری روی یک بازه:

تابع روی بازه (a,b) مشتق پذیر است هرگاه f در هر نقطه از این بازه مشتق پذیر باشد.

تابع روی بازه $[a,b)$ مشتق پذیر است هرگاه f در بازه (a,b) مشتق پذیر و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.

تابع روی بازه $(a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه f در بازه (a,b) مشتق پذیر و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

تابع روی بازه $[a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه f در بازه (a,b) مشتق پذیر و در نقطه a مشتق راست و در $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.

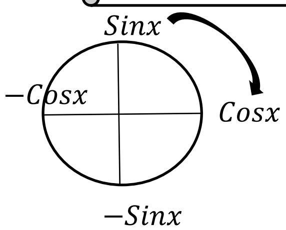
مثال: **نمودار تابع** $f(x)=\begin{cases} x^2 & -2\le x\le 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ **را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه های** $[-2,1]$ **و** $(1,+\infty)$ **و** $[1,2]$ **بررسی کنید.**

مثال: **اگر** $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & -1\le x<2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$ **نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه های** $[-1,1]$, $(2,5)$ **و** $[-2,0]$ **بررسی کنید.**

مشتق مرتبه دوم: اگر مشتق تابع $y=f(x)$ یک تابع مشتق پذیر باشد مشتق، مشتق تابع f را مشتق مرتبه دوم f گویند و به صورت $y''=f''(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال: اگر $y=5x^3+2x^2+x-2$ آنگاه y'' را پیدا کنید.

نکات:



۱) اگر $y=ax^n+bx^{n-1}+\cdots$ آنگاه $y^{(n)}=a.n!$ و $y^{(n+1)}=0$

۲) اگر $y=(ax+b)^n$ آنگاه $y^{(n)}=a^n.n!$ و $y^{(n+1)}=0$

۳) در توابع $y=Sinx$ و $y=Cosx$ پس از چهار بار مشتق گیری به خودشان برمی‌گردند.

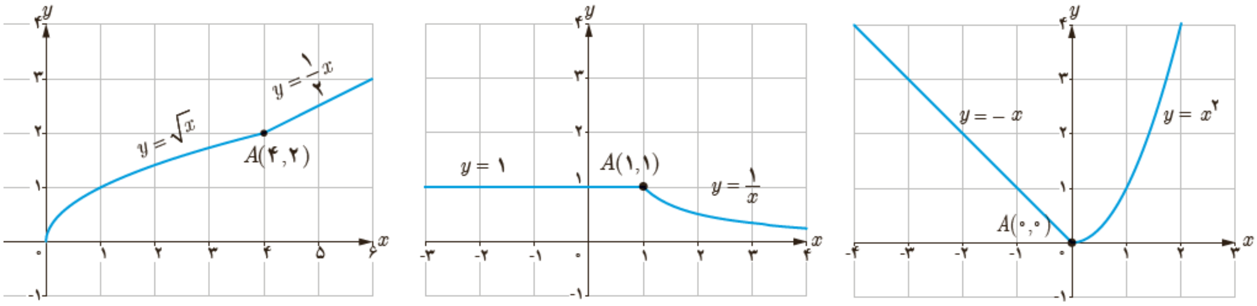
مثال: اگر $y=Sinx$ آنگاه $y^{(50)}$ را حساب کنید.

مثال: اگر $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(-1+h)-f'(-1)}{h}$ را بدست آورید.

تمرین

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=۲$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف) (ب) (پ)

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} ۵x - ۴ & x < ۰ \\ x^۲ & ۰ \le x \le ۳ \\ x + ۶ & x > ۳ \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(۰)$ و $f'(۳)$ وجود ندارند؟

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

ب) در $x=۲$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.

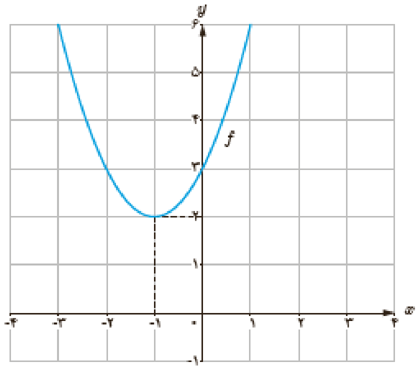
۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(۲)$ و $f'(-۱)$ و $f'(۰)$ و $f'(۳)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.



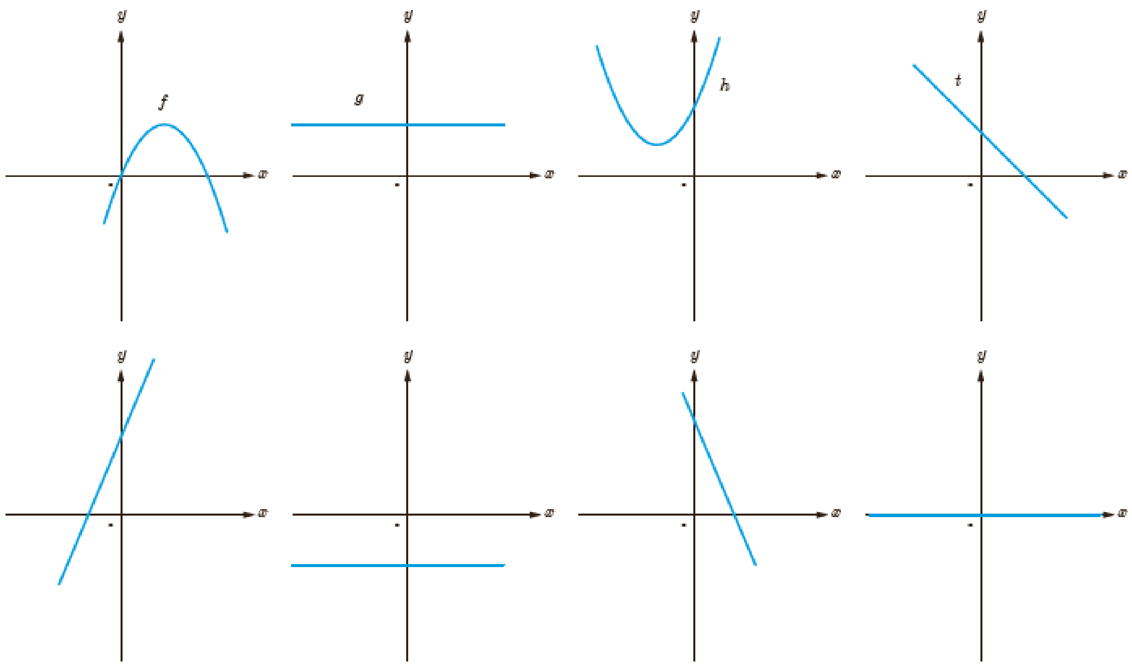
۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۳ & x\geq ۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

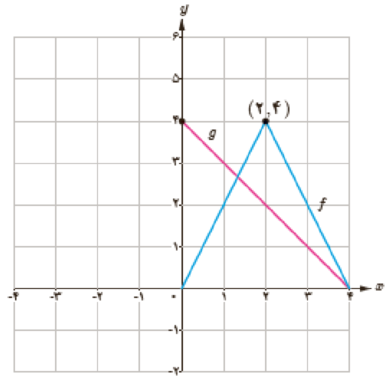
۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x)=|x^2-4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲−

۹ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را به‌دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

۱۰ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.





۱۱ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x)\,.\,g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

۱۲ اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

۱۳ اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le ۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

۱۴ مشتق توابع داده شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۳$

ب) $f(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۱}{-۳x+۲}$

پ) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱)$

ت) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

۱۵ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \sin^{۳} x + \cos^{۲} x$

ب) $f(x) = \frac{۱ - \sin x}{۱ + \sin x}$

پ) $f(x) = \tan^{۲} x - ۲\cos x$

ت) $f(x) = \sin x \cos ۲x$

۱۶ اگر $f(x) = \sin^{۲} x - \cos ۲x$، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $f''(\frac{\pi}{۶})$

ب) $f''(\frac{\pi}{۲}) - f'(\frac{\pi}{۲})$

آهنگ متوسط تغییرات: آهنگ متوسط تغییرات تابع f نسبت به x وقتی x از $x=a$ تا $x=b$ تغییر می‌کند برابر است با: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ در واقع همان شیب خط قاطع AB است.

آهنگ لحظه ای تغییرات: آهنگ لحظه ای تغییرات تابع f در $x=a$ از رابطه $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ بدست می‌آید درواقع همان شیب خط مماس بر منحنی f در $x=a$ است.

مثال: **خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t)=-5t^2+20t$ حرکت می‌کند؛ الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه $[1,2]$ بدست آورید. ب) سرعت لحظه ای را در $t=1$ و $t=2$ حساب کنید.**

مثال: **آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x^3-x+1$ در بازه $[1,k]$ با آهنگ لحظه ای تغییر آن در $x=\sqrt{7}$ برابر است؛ k را بدست آورید.**

مثال: **آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ نسبت به متغیر x روی بازه $[0,3]$ از آهنگ لحظه ای تابع در $x=\sqrt{2}$ چقدر کمتر است؟**

تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

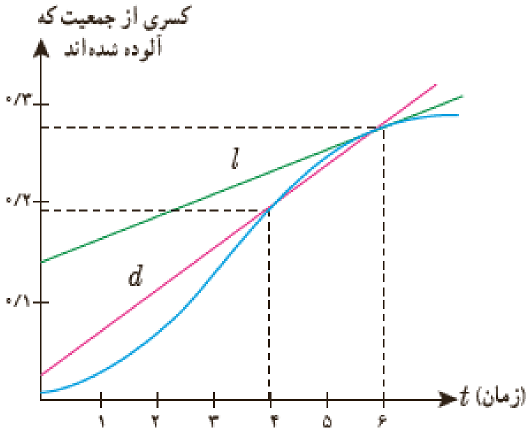
ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

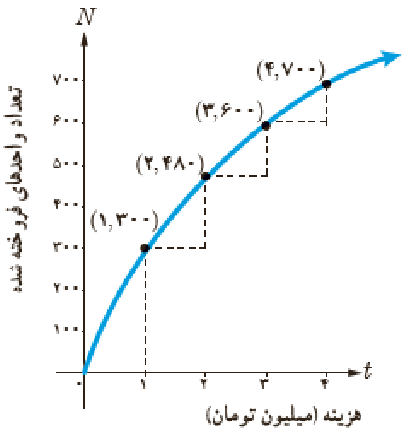


۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=۱$ ، $t=۲$ یا $t=۳$ بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=۴$ ، $t=۵$ و $t=۶$ بررسی کنید.



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخ از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

الف) ۱/۲۳m/s

ب) ۱۴/۹۱m/s

پ) ۱۱/۵m/s

ت) ۱۶/۰۳m/s

۶ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰,۱]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.
ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.
پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=۰$ و هم $f(a)=۰$

۷ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳\leq t\leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟
ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چقدر است؟

۸ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$ به‌دست آید :

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰,۱]$ چقدر است؟
ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ می‌شود؟

قاعده هوپیتال: اگر f و g در $x=a$ مشتق پذیر باشد و یکی از دو حالت مبهم $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ یا $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ را داشته باشم آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$؛ در این روابط a می‌تواند هر عدد حقیقی و یا ∞ باشد.

مثال: **حد های زیر را حساب کنید.**

الف) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{5-x}}=$

ب) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-2x^3-3x^2+4}=$

ج) $\lim_{x\to \frac{1}{4}}\frac{1-tan\pi x}{2x-\sqrt{x}}=$

نکته: در محاسبه برخی از حد می‌توانیم ابتدا از هم ارزی و سپس از هوپیتال (در صورت عدم رفع ابهام) استفاده کنیم یا برعکس

د) $\lim_{x\to 0}\frac{Cosx-Cos3x}{x^2}=$

.::یادداشت::.