

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دعای پیش از مطالعه

اَللّٰهُمَّ اَخْرِجْنِيْ مِنْ ظُلُمَاتِ الْوَهْمِ وَاكْرِمْنِيْ بِنُورِ الْفَهْمِ
اَللّٰهُمَّ افْتَحْ عَلَيْنَا اَبْوَابَ رَحْمَتِكَ وَاَنْشُرْ عَلَيْنَا خَزَائِنَ عُلُوْمِكَ
بِرَحْمَتِكَ يَا اَرْحَمَ الرَّاحِمِيْنَ

پروردگارا، خارج کن مرا از تاریکی های فکر و گرامی بدار به نور فهم
پروردگارا، بگشای بر ما در های رحمت را و بگستران کنج های دانشت را به امید رحمت
تو ای مهربان ترین مهربانان

بیایید به حقوق دیگران احترام بگذاریم

دوست عزیز، این کتاب حاصل دسترنج چندین ساله ی مؤلف، مترجم و ناشر آن است. تکثیر و فروش آن به هر شکلی بدون اجازه از پدیدآورنده کاری غیراخلاقی، غیرقانونی، غیرشرعی و کسب درآمد از دسترنج دیگران است، نتیجه ی این عمل نادرست، موجب رواج بی اعتمادی در جامعه و بروز پی آمدهای ناگوار در زندگی و محیط ناسالم برای خود و فرزندانمان می گردد.



درسنامه کنترل سیستم‌های خطی

ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی پزشکی «بیوالکتریک»

**تألیف و گردآوری:
امین ابوطالبی**

سرشناسه

: ابوطالبی، امین، ۱۳۶۴ -، گردآورنده

عنوان و نام پدیدآور

: AGK درسنامه کنترل سیستم‌های خطی: ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی پزشکی

«بیوالکتریک»/ تألیف و گردآوری امین ابوطالبی

مشخصات نشر

: تهران: آناهید گستر خلیلی، ۱۴۰۴.

مشخصات ظاهری

: ۱۱۰ ص.: مصور، جدول، نمودار؛ ۲۲×۲۹ س.م.

شابک

: 978-622-4907-81-3

: فیپا

وضعیت فهرست‌نویسی

: سیستم‌های کنترل خطی -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

موضوع

Linear control systems -- Study and teaching -- Examinations, questions, etc (Higher)

مهندسی پزشکی -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

Biomedical engineering -- Study and teaching -- Examinations, questions, etc (Higher)

: TJ۲۲۰

رده‌بندی کنگره

: ۶۲۹/۸۳۲۰۷

رده‌بندی دیویی

: ۹۹۰۱۵۹۳

شماره کتابشناسی ملی



انتشارات آناهید گستر خلیلی

نام: AGK درسنامه کنترل سیستم‌های خطی

(ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی پزشکی «بیوالکتریک»)

تألیف و گردآوری: امین ابوطالبی

ناشر: آناهید گستر خلیلی

نوبت و سال چاپ: اول. ۱۴۰۴

شمارگان: ۱۰۰۰

چاپ و صحافی: گیلان

مدیر تولید: امیرحسین خلیلی

مدیر فنی و هنری: مریم آرده

تایپ و صفحه‌آرایی: آرزو راضی

بهاء: ۲۵۰۰۰۰ تومان

آموزشگاه/ فروشگاه: ۰۲۱۶۶۵۶۸۶۲۱

مرکز پخش: ضلع جنوب غربی میدان انقلاب . جنب بانک پارسیان . مجتمع تجاری پارس . طبقه اول

مدیر فروش: ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ (ارتباط از طریق پیامک)

 agkpublisher@gmail.com

 www.agkins.com

طلیحه سخن مدیر تولید:

سپردن کار به اهلش نشانه‌ی خردمندی است.

برای تولید بسته‌های آموزشی تمام تلاش خود را به کار گرفته‌ایم تا محصولی شایسته را تقدیم شما عزیزان نماییم.

مجموعه‌ای که پیش روی شماست براساس معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور و به قلم مجرب‌ترین اساتید تألیف شده است و مطالعه آن موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه شما خواهد شد. ارائه بالاترین آمار قبولی در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری در دهه اخیر بیان‌گر توانایی این مجموعه در راستای اهداف آموزشی خود می‌باشد. اینک با اتکا به تجربه‌ای ۱۷ ساله می‌توانیم ادعا کنیم که مجموعه حاضر، بی‌شک از جمله کامل‌ترین و به‌روزترین بسته‌های آموزشی موجود در عرصه کنکور می‌باشد.

❧ برخی از ویژگی‌های بسته‌های آموزشی:

- منطبق با معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور
- گردآوری و تألیف توسط مجرب‌ترین اساتید کنکور
- تدریس مطالب از سطح پایه تا پیشرفته به بیان ساده و روان
- انتقال بهتر مفاهیم با استفاده از شکل، جدول و نمودار
- تألیف مبتنی بر نحوه‌ی طراحی سوالات کنکور
- مطالعه یک منبع منسجم به جای مطالعه چندین منبع مختلف
- منبعی خودآموز و بدون نیاز به مدرس

اینک علاوه بر مطالعه بسته‌های آموزشی استفاده از خدمات و محصولات زیر را به عنوان ضمانتی برای قبولی به شما داوطلبان عزیز توصیه می‌کنم؛

❧ آزمون‌های آزمایشی: خوش بود گر محک تجربه آید به میان

داوطلب شجاع کیست؟ داوطلبی است که خود را مورد سنجش (خود را با خود) و ارزیابی (خود را با دیگران) قرار دهد تا پیش از کنکور به نقاط ضعف خود پی ببرد و آن‌ها را تقویت نماید. آزمون‌های آزمایشی دارای یک برنامه‌ریزی منسجم است و به شما اولتیماتوم می‌دهد. یعنی شما باید در یک زمان معین مطالب معینی را مطالعه نمایید.

آزمون‌های آزمایشی مجموعه دارای سوالات استاندارد، پاسخنامه تشریحی و کارنامه تحلیلی می‌باشد. صادقانه شرکت در آزمون‌های آزمایشی را به شما عزیزان توصیه می‌کنم.

❧ مشاوره تخصصی و برنامه‌ریزی: زیر نظر حرفه‌ای‌ها درس بخوانید ...

در صورتی که نمی‌توانید با توجه به زمان آزادتان برنامه‌ی مطالعاتی استاندارد را برای خود تدوین کنید حتماً از افراد متخصص کمک بخواهید. افرادی که تجربیات خود را صادقانه در اختیار شما قرار می‌دهند و برنامه‌ریزی مناسب با شرایط شما را انجام می‌دهند.

📖 کتاب تست:

کوچک‌ترین واحد یادگیری در کنکور، تست است.

شما می‌توانید برای این‌که سطح یادگیری خود را پس از مطالعه بسنجید از کتاب‌های تست مجموعه (تست کنکور) و ماطراحان (تست‌های تألیفی) استفاده کنید. این کتاب‌ها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده‌اند و می‌توانند نحوه‌ی طرح سوالات کنکور و سطح آن‌ها را به‌صورت واضح به شما نشان دهند.

📖 درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم مناسب‌ترین منابع برای دوران مرور و جمع‌بندی:

بیش‌تر داوطلبان حین مطالعه نگران خلاصه‌نویسی و مرور آموخته‌های خود هستند و برای خلاصه‌نویسی زمان زیادی را صرف می‌کنند. اینک به شما مژده می‌دهیم که این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است و دیگر با استفاده از درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم نیاز به خلاصه‌نویسی ندارید.

شما می‌توانید نظرات، انتقادات و پیشنهادهای سازنده خود را در مورد بسته‌های آموزشی به شماره‌تلفن همراه ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ فقط و فقط پیامک نمایید.

مشاور و مدیر تولید

امیرحسین خلیلی

طلیحه سخن مؤلف:

رشته‌ی نسبتاً نوپای مهندسی پزشکی که امروزه با سرعتی بسیار زیاد در حال فراگیر شدن است، نه فقط به دلیل عمر کم، بلکه علاوه بر آن به خاطر ماهیت بین رشته‌ای آن نیز دچار کم لطفی‌های بسیاری گشته و علی‌رغم تلاش‌های گوناگون متخصصان، استادان و دانشجویان آن، هنوز تا کسب جایگاه واقعی خود در دانشگاه، جامعه، صنعت و حوزه سلامت فاصله زیادی دارد.

درس «کنترل سیستم‌های خطی» یکی از دروس تخصصی دانشجویان مهندسی پزشکی محسوب می‌شود که از مجموعه دروس پایه رشته مهندسی برق می‌باشد. این درس پایه و اساس رشته مهندسی پزشکی بوده که به بررسی، تجزیه و تحلیل و کنترل انواع سیستم‌های مورد استفاده در رشته مهندسی پزشکی (بیوالکتریک) پرداخته و نحوه عملکرد آن‌ها را به صورت تئوری و با استفاده از روابط ریاضی بیان می‌دارد و سعی در ساده نمودن روابط مربوطه با استفاده از تکنیک‌های خطی‌سازی دارد که دانستن این مفاهیم پایه، لازمه کار با این سیستم‌ها می‌باشد. از سوی دیگر این درس یکی از مواد امتحانی مهم مورد نیاز دانشجویان مهندسی پزشکی در آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری محسوب می‌گردد و به همین خاطر ضرورت وجود منبعی مناسب و کامل برای این درس به خوبی محسوس است. کتاب پیش‌رو که برای پاسخ به همین ضرورت و نیاز ارائه گردیده است، حاصل تجربه‌ی تدریس نویسنده کتاب در دانشگاه‌ها و مراکز آموزش عالی مختلف در رشته مهندسی برق و مهندسی پزشکی و آنالیز سوالات آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری در رشته‌های مختلف مهندسی برق، مهندسی مکانیک، مهندسی پزشکی و ... می‌باشد.

در تألیف این کتاب سعی شده با استفاده از جدیدترین و بروزترین روش‌ها، مباحث مربوطه توضیح داده شوند و در بیان مسائل آزمونی حداکثر ساده‌سازی و نکات مهم و کلیدی بیان شوند.

همچنین مطالب این کتاب به صورتی کامل و در عین حال خلاصه و مختصر و مفید جمع آوری و سعی شده است تا علاوه بر این که شامل کلیه سرفصل‌های یک درس دانشگاهی باشد، تمامی نکات مورد نیاز داوطلبان آزمون‌های کارشناسی ارشد دکتری را نیز پوشش دهد.

استقبال کم نظیر دانشجویان، استادان و علاقه‌مندان از کتاب‌های «کنترل سیستم‌های خطی» در طی این چند سال، همواره انگیزه بخش نگارنده این کتاب در تألیف کتابی جامع و کامل با بیانی ساده و مورد نیاز آزمون‌های تحصیلات تکمیلی بوده است.

البته ناگفته نماند که هیچ‌گاه چاپ این کتاب امکان‌پذیر نمی‌شد مگر با پیگیری مداوم و مستمر دست‌اندرکاران انتشارات آناهیدگستر خلیلی به‌ویژه جناب آقای دکتر احمد خلیلی، جناب آقای امیر حسین خلیلی و سرکار خانم مریم آرده که بی‌شک سزاوار ادای احترام خالصانه مؤلف کتاب کنترل سیستم‌های خطی هستند.

نگارنده کتاب دست تمامی منتقدان و صاحب‌نظران وادی بی‌انتهای مهندسی برق و بیوالکتریک را می‌فشارند و بی‌صبرانه مهبای شنیدن هرگونه نظر و پیشنهادی به منظور افزایش کیفیت این اثر ناقابل می‌باشد.

با تشکر

امین ابوطالبی

aminabutalebi@gmail.com

۹	فصل اول: تابع تبدیل
۱۲	فصل دوم: سیگنال فلوگراف و روش ساده سازی میسون
۱۹	فصل سوم: انواع سیستم های کنترل
۲۵	فصل چهارم: خطا در حالت ماندگار
۳۰	فصل پنجم: پاسخ گذاری سیستم ها
۳۹	فصل ششم: پایداری
۴۹	فصل هفتم: مکان هندسی ریشه ها (ایوانس)
۵۹	فصل هشتم: حساسیت
۶۱	فصل نهم: پاسخ فرکانسی و دیاگرام بود
۷۰	فصل دهم: پاسخ فرکانسی و نمودارهای قطبی (دیاگرام نایکوئیست)
۸۰	فصل یازدهم: حد بهره و حد فاز
۸۷	فصل دوازدهم: جبران کننده ها و کنترلرها
۹۴	فصل سیزدهم: فضای حالت

تابع تبدیل

۱. تعریف سیستم

یک سیستم مجموعه اجزایی هستند که هدف مشخصی را دنبال می کنند. مهم ترین اجزای یک سیستم عبارت است از: مجموعه ورودی (ها)، مجموعه خروجی (ها)، مجموعه عملگر (ها).

یک سیستم را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:
سیستم هایی که در این درس به بررسی آن ها می پردازیم دارای چهار ویژگی اصلی زیر می باشند:
۱. سیستم خطی است. یعنی سیستم دارای خاصیت همگنی و جمع پذیری باشد. به عبارت دیگر:

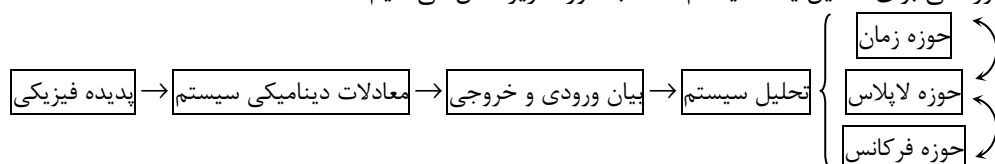
$$\begin{aligned} x_1(t) \rightarrow \boxed{\text{system}} \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow \boxed{\text{system}} \rightarrow y_2(t) \end{aligned} \Rightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow \boxed{\text{system}} \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

۲. سیستم تغییرناپذیر با زمان است. یعنی مدل سیستم با گذشت زمان تغییر نکند.

۳. سیستم علی است. یعنی خروجی به ورودی در همان لحظه و لحظات قبل وابسته است و به ورودی لحظات بعد وابسته نمی باشد.

۴. سیستم یک ورودی و یک خروجی است. (SISO)

سیستم های خطی تغییرناپذیر با زمان یک ورودی و یک خروجی را به اختصار سیستم LTI می نامیم.
به طور کلی برای تحلیل یک سیستم LTI به صورت زیر عمل می کنیم:



۲. تحلیل سیستم در حوزه زمان

در حالت کلی معادله سیستم در حوزه زمان به دو صورت به دست می آید:

۱. معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم

۲. فضای حالت (که در فصلی جداگانه بررسی می شود).

$$r(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI سیستم}} \rightarrow y(t)$$

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

کلی‌ترین فرم معادله دیفرانسیل حاکم بر یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) به صورت زیر است:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

که n مرتبه سیستم، $r(t)$ ورودی سیستم که مشخص است، $y(t)$ خروجی سیستم هستند که برای حل آن نیاز به n شرط اولیه می‌باشد:

$$y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)$$

به صورت زیر می‌توان خروجی سیستم را به دست آورد:

$$y(t) = y_n(t) + y_p(t)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

پاسخ حالت صفر پاسخ ورودی صفر

برای ورودی صفر، پاسخ ناشی از شرایط اولیه وقتی ورودی صفر است و پاسخ حالت صفر، پاسخ ناشی از ورودی وقتی شرایط اولیه صفر است.

به روش‌های مختلفی می‌توان معادله دیفرانسیل فوق را حل نمود. یکی از روش‌های مرسوم استفاده از تبدیل لاپلاس می‌باشد؛ زیرا همواره توسط تبدیل لاپلاس یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به یک معادله جبری تبدیل می‌شود که معمولاً محاسبه پاسخ آن ساده‌تر است.

بر اساس رابطه زیر می‌توان گفت:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &\xrightarrow{L} S^n Y(s) - S^{n-1}y(0) - S^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \\ &\rightarrow a_n (S^n Y(s) - S^{n-1}y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)) + \dots + a_1 (SY(s) - y(0)) + a_0 Y(s) \\ &= (b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_0) R(s) \end{aligned}$$

که در آن $f(s, y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0))$ تابعی است بر حسب S و شرایط اولیه. در نتیجه خواهیم داشت:

$$Y(s) = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0} R(s) - \frac{f(s, y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0))}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}$$

پاسخ ورودی صفر که ناشی از شرایط اولیه است پاسخ حالت صفر که ناشی از ورودی است و شرایط اولیه در آن تأثیری ندارد. و ورودی در آن تأثیری ندارد.

۳. تعریف تابع تبدیل یک سیستم SISO

تبدیل لاپلاس خروجی سیستم ($Y(s)$) به تبدیل لاپلاس ورودی سیستم ($R(s)$) در صورتی که شرایط اولیه صفر باشند را تابع تبدیل یک سیستم SISO می‌نامیم:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \bigg|_{y(0^-)=y'(0^-)=\dots=y^{(n-1)}(0^-)=0} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}$$

تابع تبدیل فقط برای سیستم‌های LTI تعریف می‌شود.

تابع تبدیل، خروجی سیستم را به ورودی آن مرتبط می‌سازد و هیچ اطلاعاتی در مورد ساختار سیستم نمی‌دهد. بنابراین ممکن است دو سیستم کاملاً متفاوت، تابع تبدیل یکسانی داشته باشند.

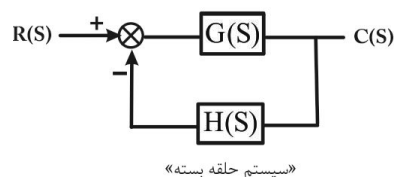
تابع تبدیل همان پاسخ ضربه سیستم است، زمانی که همه شرایط اولیه صفر باشند.

انواع سیستم‌های کنترل

تعریف: تابع تبدیل $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0}{s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0}$

- سره (مناسب) است اگر درجه مخرج بزرگتر یا مساوی درجه صورت باشد. ($n \geq m$)
- ناسره (نامناسب) است اگر درجه صورت بیش‌تر از مخرج باشد. ($n < m$)

این تابع تبدیل، می‌تواند از یک سیستم حلقه باز و یا یک سیستم حلقه بسته ناشی شده باشد. جدول زیر، به اختصار مزایا و معایب سیستم‌های کنترل حلقه باز و حلقه بسته را خلاصه می‌کند.



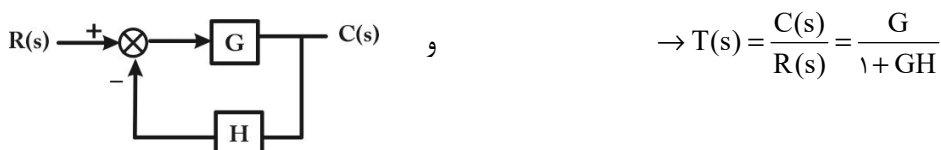
$$R(s) \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G(s)$$

برای نوشتن تابع تبدیل حلقه باز، کلیه بهره‌های موجود در مسیر ورودی به خروجی را در هم ضرب می‌کنیم و برای نوشتن تابع تبدیل حلقه بسته باید از روش میسون استفاده نماییم.

سیستم کنترل حلقه بسته	سیستم کنترل حلقه باز
۱- طراحی پیچیده‌تر	۱- طراحی ساده‌تر
۲- دقت بالا	۲- دقت پایین
۳- حساسیت پایین به تغییرات (ورودی یا نویز)	۳- حساسیت بالا به تغییرات (ورودی یا نویز)
۴- پاسخ سریع	۴- پاسخ آهسته
۵- قابلیت حذف نویز	۵- عدم قابلیت حذف نویز

یک سیستم خوب سیستمی است که نسبت به تغییر پارامترهای سیستم واکنش نشان ندهد، اما نسبت به کوچک‌ترین تغییر در ورودی، واکنش نشان دهد.



اگر P پارامتری از سیستم باشد، حساسیت تابع تبدیل حلقه بسته نسبت به پارامتر P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_P^T = \frac{\frac{\partial T}{T}}{\frac{\partial P}{P}} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} = \frac{\partial T}{\partial P} \times \frac{P}{T}$$

$\frac{\partial P}{P}$: تغییرات نسبی P

$\frac{\partial T}{T}$: تغییرات نسبی T در اثر P

قاعده‌ی زنجیری

$$S_P^T = S_G^T S_{G_1}^{G_1} \dots S_P^{G_n}$$

به عنوان مثال با به کارگیری قاعده‌ی زنجیری در بلوک دیاگرام سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی، می‌توانیم بنویسیم:

$$S_P^T = S_G^T \times S_P^G = S_H^T \times S_P^H$$

نکات

۱. اگر پارامتر P فقط در مسیر پیش‌رو $\frac{1}{1+GH}$ قرار داشته باشد و در مسیر فیدبک وجود نداشته باشد، حساسیت

$$S_P^T = \frac{1}{1+GH} \times \frac{\partial G}{\partial P} \times \frac{P}{G}$$

تابع تبدیل حلقه بسته برابر است با:

۲. اگر پارامتر P در مسیر پیش‌رو وجود نداشته و فقط در مسیر فیدبک $(H(s))$ موجود باشد، حساسیت تابع تبدیل

$$S_P^T = \frac{1}{1+GH} \times \frac{\partial H}{\partial P} \times (-PG)$$

حلقه بسته برابر است با:

۳. با توجه به روابط فوق، حساسیت سیستم حلقه بسته با فیدبک منفی با ضریب $\frac{1}{1+GH}$ ، کمتر از حساسیت سیستم حلقه باز می‌باشد.

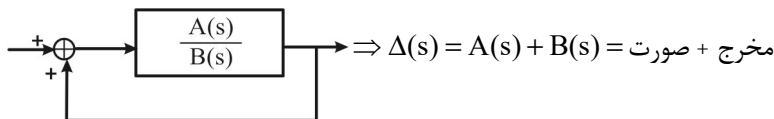
انواع حساسیت

در یک تقسیم‌بندی، حساسیت سیستم را بر حسب فرکانس کار سیستم محاسبه می‌کنیم. بر این اساس، دو نوع حساسیت استاتیکی و دینامیکی قابل تعریف است.

استاتیک: مقدار حساسیت در فرکانس صفر ($s \rightarrow 0$)

دینامیک: مقدار حساسیت در کلیه فرکانس‌ها به جز فرکانس صفر ($s \rightarrow j\omega$)

در سیستم‌های با فیدبک منفی واحد، معادله مشخصه برابر است با:



مثال: در یک سیستمی فیدبک واحد منفی با $G(s) = \frac{1}{s(1 + \tau s)}$ چنانچه τ به میزان ۱۰٪ افزایش یابد، آن گاه ...

(۱) ξ به میزان ۵ درصد کاهش می‌یابد. (۲) ξ به میزان ۵ درصد افزایش می‌یابد.

(۳) ξ به میزان ۱۰ درصد کاهش می‌یابد. (۴) ξ به میزان ۱۰ درصد افزایش می‌یابد.

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$\Delta(s) = \tau s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow \Delta(s) = s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{1}{\tau}$$

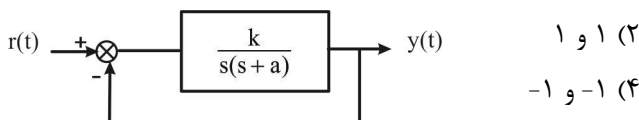
$$\omega_n^2 = \frac{1}{\tau} \xrightarrow{\xi \omega_n = \frac{1}{\tau}} 2 \times \xi \times \sqrt{\frac{1}{\tau}} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}$$

$$\frac{\xi'}{\xi} = \sqrt{\frac{\tau}{\tau'}} = \sqrt{\frac{\tau}{1/12}} = 95/35\%$$

بنابراین اگر $\tau' = 1/12$ شود خواهیم داشت:

بنابراین ξ به اندازه‌ی ۴/۶۵٪ کاهش می‌یابد.

مثال: در سیستم کنترل شکل زیر حساسیت خطای حالت دائمی به ورودی شیب واحد نسبت به k و a به ترتیب کدام است؟



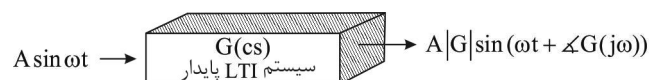
حل: گزینه (۳) صحیح است.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + GH(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \times \frac{1}{s^2}}{1 + \frac{K}{s(s+a)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+a)}{s(s+a) + K} = \frac{a}{K}$$

$$S_K^{e_{ss}} = \frac{\partial e_{ss}}{\partial K} \times \frac{K}{e_{ss}} = \frac{-a}{K^2} \times \frac{K}{\frac{a}{K}} = -1$$

$$S_a^{e_{ss}} = \frac{\partial e_{ss}}{\partial a} \times \frac{a}{e_{ss}} = \frac{1}{K} \times \frac{a}{\frac{a}{K}} = 1$$

پاسخ فرکانسی و دیاگرام بود



۱. منحنی بود^۱ (لگاریتمی): با استفاده از پاسخ فرکانسی O.L، پایداری سیستم C.L را بررسی می‌کند.
 ۲. منحنی نایکوئیست^۲ (قطبی): با استفاده از پاسخ فرکانسی O.L، پایداری سیستم C.L را بررسی می‌کند.
 ۳. منحنی نیکولز
- تعریف پاسخ فرکانسی: به سیستم ورودی سینوسی می‌دهیم و در خروجی حالت ماندگار آن را بررسی می‌کنیم.

مزایای پاسخ فرکانسی

۱. ساده بودن
۲. قابل به کارگیری در کاربردهای عملی
۳. مینیمم کردن اثر نویز در طراحی سیستم‌ها
۴. مینیمم کردن اثر اغتشاش در طراحی سیستم‌ها

معایب پاسخ فرکانسی

۱. رابطه‌ی غیرمستقیم پاسخ فرکانسی و پاسخ گذرا (به جز در سیستم‌های مرتبه دوم)

نمودارهای بودی

در روش آقای Bode برای تحلیل تابع حلقه باز $G(\omega)$ ، از دو منحنی استفاده می‌شود:

۱. منحنی $|G(j\omega)|$: در این منحنی $20 \log |G(j\omega)|$ را برحسب ω رسم کنید.
۲. منحنی $\angle G(j\omega)$: در این منحنی $\angle G(j\omega)$ را برحسب درجه یا رادیان رسم کنید.

روش عمومی رسم نمودار Bode

۱. بازنویسی تابع به فرم استاندارد: کلیه «عوامل پایه» را به صورت $1 + \dots$ بنویسید (این کار باعث می‌شود مجانب فرکانس پایین «عوامل پایه»، خط dB باشد).
۲. به دست آوردن فرکانس‌های گوشه‌ها
۳. رسم نمودار تقریبی دامنه
۴. رسم نمودار تقریبی فاز

عوامل پایه در نمودار Bode

۱. عامل گین: K

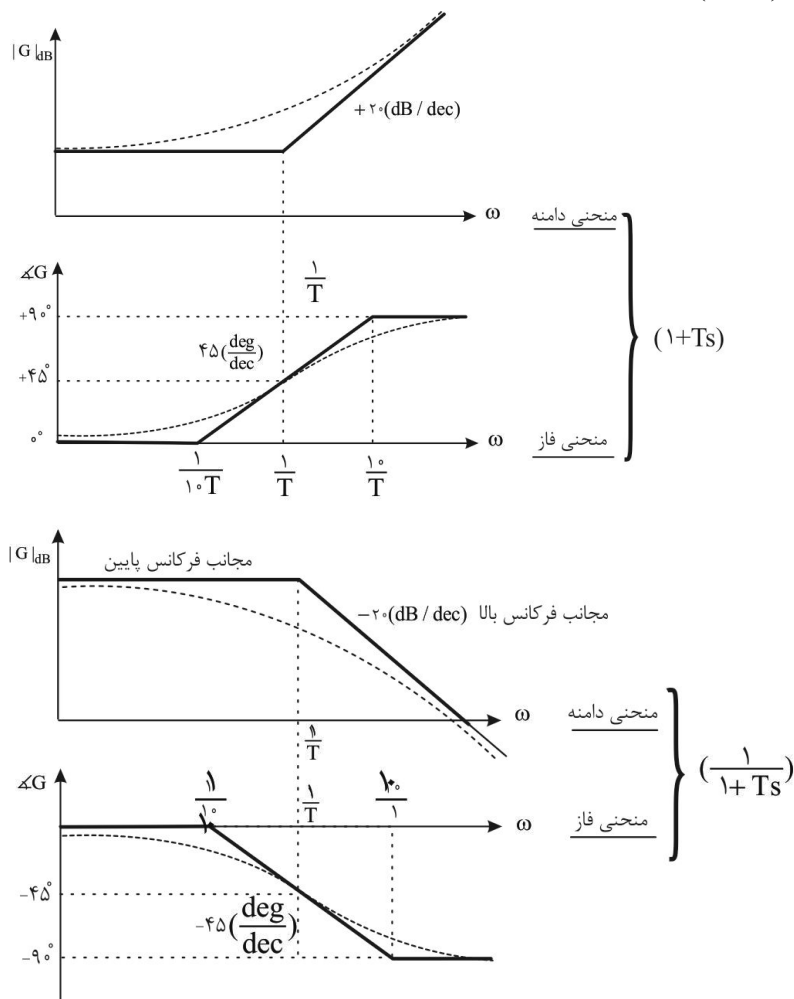
۲. عوامل مشتق‌گیری (صفر در مبداء) و انتگرال‌گیری (قطب در مبداء): $s^{\pm n}$

۳. عوامل مرتبه اول (صفر و قطب‌های ساده): $(1 + Ts)^{\pm 1}$

۴. عوامل مرتبه دوم (صفر و قطب‌های مختلط): $(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2)^{\pm 1}$

نحوه‌ی به‌کار بردن عوامل پایه در رسم نمودار Bode:

۱. عامل گین K
 - منحنی: به ازای $K > 1$ ، منحنی دامنه به اندازه $20 \log |K|$ بالا می‌رود.
 - دامنه: به ازای $K < 1$ ، منحنی دامنه به اندازه $20 \log |K|$ پایین می‌رود.
 - منحنی فاز: $K > 0$ ، تأثیری بر منحنی فاز ندارد.
 - منحنی فاز: $K < 0$ ، منحنی فاز را 180° درجه جابه‌جا می‌کند، (بالا و پایین فرقی ندارد)
۲.
 - الف) عامل مشتق‌گیری (s^n)
 - منحنی دامنه: یک منحنی با شیب $+20n \left(\frac{dB}{dec}\right)$ است. (در کلیه‌ی فرکانس‌ها)
 - منحنی فاز: زاویه‌ی فاز همواره $+90^\circ n$ است. (در کلیه‌ی فرکانس‌ها)
 - ب) عامل انتگرال‌گیری $\left(\frac{1}{s^n}\right)$
 - منحنی دامنه: یک منحنی با شیب $-20n \left(\frac{dB}{dec}\right)$ است. (در کلیه‌ی فرکانس‌ها)
 - منحنی فاز: زاویه‌ی فاز همواره $-90^\circ n$ است. (در کلیه‌ی فرکانس‌ها)
۳. عوامل مرتبه اول $(1 + Ts)^{\pm 1}$



نمایش مدل با فضای حالت

نمایش فضای حالت علاوه بر اطلاعات ورودی - خروجی، به ما امکان اطلاع یافتن از متغیرهای درونی سیستم را می‌دهد. به همین دلیل به این نوع نمایش توصیف داخلی و به مدل تابع تبدیل نمایش خارجی می‌گویند.

تعاریف و مزایا

۱. حالت: کوچک‌ترین مجموعه از متغیرها در نمایش فضای حالت است. اگر مقدار حالت را در لحظه t_0 و ورودی را برای $t \geq t_0$ بدانیم، می‌توان مقدار حالت را برای تمامی $t \geq t_0$ به دست آورد. توجه شود که حالت‌های یک سیستم منحصر به فرد نیستند و می‌توان با توجه به انتخاب‌های مختلف به نمایش‌های متفاوتی از فضای حالت برای یک سیستم رسید.

❖ الزاما همه حالت‌های سیستم قابل اندازه‌گیری و قابل مشاهده نیستند.

۲. متغیرهای حالت: متغیرهایی هستند که هر کدام بخشی از دینامیک سیستم را توصیف می‌کنند. اگر حداقل تعداد متغیرهای لازم برای توصیف سیستم n باشد، این n متغیر را حالت می‌نامند.

❖ اولین قدم در به کارگیری مفاهیم فضای حالت، انتخاب متغیرهای حالت سیستم است.

❖ متغیرهای حالت سیستم منحصر به فرد نمی‌باشند. به همین دلیل در سوالات کنکور عموماً توسط طراح سوال مشخص می‌شوند.

۳. بردار حالت: معمولاً برای نمایش همه متغیرهای حالت یک سیستم آن‌ها را به فرم برداری نشان می‌دهند. مثلاً اگر

$x = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\}^T$ n متغیر حالت سیستم به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشند، بردار حالت برابر است با:

۴. فضای حالت: فضایی است n بعدی که محورهای آن را $x_1, x_2, \dots, x_n$ تشکیل می‌دهند.

۵. معادلات فضای حالت: این معادلات به سه نوع متغیر برای مدل کردن یک سیستم نیاز دارند:

✓ متغیرهای حالت

✓ متغیرهای ورودی

✓ متغیرهای خروجی

در حالت کلی هر سیستمی (خطی یا غیرخطی، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان) را می‌توان با رابطه زیر در فرم

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

معادلات فضای حالت مدل کرد:

معادله اول کامل‌ترین فرم معادله حالت و معادله دوم کامل‌ترین فرم معادله خروجی در نمایش فضای حالت سیستم‌ها را نشان می‌دهند. در رابطه فوق f و g می‌توانند توابعی غیرخطی و متغیر با زمان باشند که دینامیک‌های سیستم را توصیف می‌کنند و $x(t)$ ، $u(t)$ و $y(t)$ به ترتیب متغیرهای حالت، سیگنال ورودی و سیگنال خروجی هستند. اگر سیستم خطی و متغیر با زمان باشد، آن‌گاه f و g نیز توابعی خطی خواهند بود و معادلات فضای حالت به صورت زیر بیان می‌گردد:

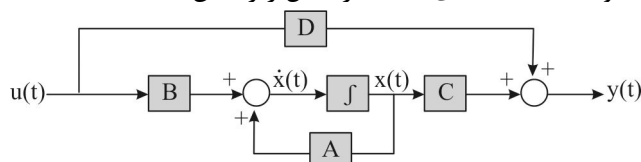
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

معادله اول، معادله حالت و معادله دوم، معادله خروجی است.

تغییرپذیر بودن سیستم نیز از تابع زمان بودن ماتریس‌های A ، B ، C و D مشخص است. چراکه این ماتریس‌ها نسبت به زمان تغییر می‌کنند. اگر سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان باشد، نمایش فضای حالت آن ساده‌تر می‌شود و دیگر ماتریس‌های A ، B ، C و D تابعی از زمان نمی‌باشند.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

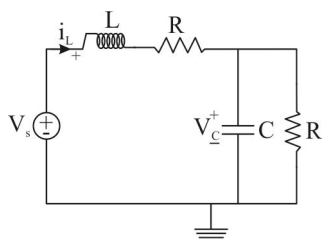
معادله اول، معادله حالت و معادله دوم، معادله خروجی است. در توصیف فضای حالت خطی، ماتریس‌های A ، B ، C و D به ترتیب ماتریس حالت، ماتریس ورودی، ماتریس خروجی و ماتریس انتقال سیستم نامیده می‌شوند. نمودار بلوکی سیستم توصیف شده و با معادلات فضای حالت در شکل زیر نشان داده شده است:



❖ در معادلات فضای حالت اگر $D=0$ باشد، تابع تبدیل اکیدا سره و اگر $D \neq 0$ باشد، تابع تبدیل به‌دست آمده از معادلات فضای حالت سره می‌باشد.

❖ معمولا برای انتخاب متغیرهای حالت یک سیستم در توصیف فضای حالت از عناصر ذخیره‌کننده انرژی استفاده می‌کنند. به‌عنوان مثال در مدارهای الکتریکی ولتاژ خازن (V_C) برای خازن و جریان سلف (I_L) برای سلف انتخاب می‌شوند.

مثال: اگر ولتاژ سلف به‌عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته شود، توصیف درونی این سیستم را بنویسید.



حل: متغیرهای حالت را به صورت $\begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}$ انتخاب می‌کنیم که این دو ذخیره‌کننده‌های انرژی در مدار داده شده هستند. با استفاده از قوانین KVL و KCL مشتق متغیرهای حالت در نظر گرفته شده را پیدا می‌کنیم.

$$-V_s + Ri_L + L \frac{di_L}{dt} + V_C = 0 \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}(-V_C - Ri_L + V_s)$$

$$-V_C + R(i_L - C \frac{dV_C}{dt}) = 0 \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{RC}(Ri_L - V_C)$$

در نتیجه فرم ماتریسی معادلات مدار داده شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dV_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_s$$

هم‌چنین با توجه به خروجی تعریف شده در سوال، معادله خروجی مدار برابر است با:

$$V_L = [-R \quad -1] \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} + [1] V_s$$

در نتیجه:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [-R \quad -1], \quad D = 1$$

حل: برای محاسبه تابع تبدیل سیستم باید $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ را به دست آوریم:

$$\frac{\Psi(s)}{U(s)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0$$

$$= \frac{1}{s^2 + s + 1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{s+5}{s^2 + s + 1}$$

یادآوری:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

قطر اصلی درایه‌ها جابه‌جا و قطر فرعی در منفی ضرب می‌شوند.
گزینه (۱) صحیح است.

مثال: معادلات حالت سیستم پیوسته‌ی خطی به شکل زیر است. تابع تبدیل سیستم عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$G(s) = \frac{5}{s+4} + \frac{2}{s+2} \quad (2)$$

$$G(s) = \frac{5}{s+7} + \frac{4}{s+2} \quad (4)$$

$$G(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+3} \quad (1)$$

$$G(s) = \frac{7}{s+3} + \frac{2}{s+4} \quad (3)$$

حل: از رابطه $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ تابع تبدیل سیستم را به دست می‌آوریم. از آن جایی که ماتریس A قطری است، به دست آوردن $(sI - A)^{-1}$ ساده است. در نتیجه داریم:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{5}{s+4} + \frac{2}{s+2}$$

یادآوری: اگر ماتریس قطری باشد برای محاسبه وارون آن کافی است درایه‌های قطر اصلی را وارون کرد.
گزینه (۲) صحیح است.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad w = \dot{x}_1 + y, \quad u = r - w$$

مثال: معادلات فضای حالت سیستمی عبارتند از:

که در آن r ورودی مرجع، y خروجی، x بردار حالت، w یک فیدبک داخلی و u سیگنال کنترل است. تابع تبدیل سیستم حلقه بسته کدام است؟

$$g(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (2)$$

$$g(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (4)$$

$$g(s) = \frac{1}{s+1} \quad (1)$$

$$g(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2} \quad (3)$$

حل: هدف به دست آوردن نسبت خروجی y به ورودی مرجع r است. برای به دست آوردن تابع تبدیل داریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u = r - w, \quad w = \dot{x}_1 + y \Rightarrow u = r - \dot{x}_1 - y$$

$$\Rightarrow u = r - x_1 - 2x_2 = r + \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

معادلات حالت را با u به دست آمده بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (r - x_1 - 2x_2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

با استفاده از رابطه زیر تابع تبدیل سیستم را به دست می‌آوریم:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

گزینه (۱) صحیح است.

مثال: توصیف فضای حالت یک سیستم به صورت: $D=2$, $C=[1, 0]$, $B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ است که در

آن k_1 و k_2 مقادیر ثابت‌اند. اگر پاسخ پله سیستم برای $t \geq 0$ به صورت: $2/2 + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-\delta t}$ باشد، حاصل $C_1 + C_2$ کدام است؟

$$\frac{2}{15} \quad (4)$$

$$0/2 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$-0/2 \quad (1)$$

$$y(t) = 2/2 + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-\delta t}$$

حل: روش اول:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s).R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = D = 2$$

چون $D \neq 0$ در نتیجه سیستم سره است و $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = D$ است. بنابراین $2/2 + C_1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0/2$

روش دوم: در پاسخ پله قطب‌ها یا مودهای سیستم مشخص است؛ یعنی $s = -2, -\delta$ دو قطب سیستم هستند. در نتیجه برای معادله مشخصه باید داشته باشیم:

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(s) = \begin{vmatrix} s+1 & -2 \\ -k_1 & s-k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (1-k_2)s + (-k_2 - 2k_1) = s^2 + \gamma s + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = -6$$

تابع تبدیل سیستم با استفاده از معادلات فضای حالت را به دست می‌آوریم.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{2s^2 + 14s + 22}{s^2 + \gamma s + 1}$$

مقدار پاسخ پله در لحظه صفر را با استفاده از قضیه مقدار اولیه به دست می‌آوریم.

$$\lim_{t \rightarrow 0} s \times \frac{2s^2 + 14s + 22}{s^2 + \gamma s + 1} \times \frac{1}{s} = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 + 2/2 = 2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0/2$$

گزینه (۱) صحیح است.

- ❖ اگر تابع تبدیل سیستم را از رابطه $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ به دست آوریم، ممکن است حذف صفر و قطب رخ دهد و تمامی قطبها به دست نیاید.
 - ❖ برای محاسبه تمامی قطبهای سیستم از معادلات حالت و از رابطه $\det(sI - A) = 0$ که همان معادله مشخصه سیستم است، استفاده می کنیم.
 - ❖ به قطبهایی که با صفرها حذف می شوند مود پنهان می گویند.
- مثال: قطبهای سیستم زیر را به دست آورید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

حل: روش اول:

$$\det(sI - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -2 & -2 & s+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow s^3 + s^2 - 2s - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (s+1)(s^2 - 2) = 0 \Rightarrow s = -1, s = \pm\sqrt{2}$$

روش دوم: چون فرم کانونی است، مخرج تابع تبدیل که همان معادله مشخصه است را مستقیم می توان نوشت.

$$s^3 + s^2 - 2s - 2 = 0 \Rightarrow s = -1, s = \pm\sqrt{2}$$

توجه کنید اگر تابع تبدیل را از رابطه $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$ به دست آوریم، داریم:

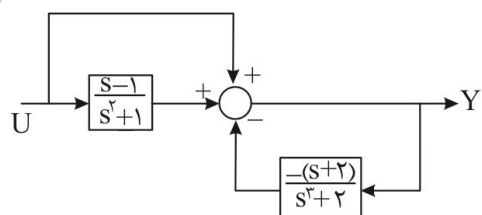
$$T(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 2s - 2} = \frac{1}{s^2 - 2}$$

همان طور که مشخص است قطب $s = -1$ یا صفر $s = -1$ حذف شده است. در این جا $s = -1$ را مود پنهان سیستم می نامند.

مثال: مودهای پنهان سیستم زیر کدام اند؟ (راهنمایی؛

مود پنهان مقدار ویژه ای است که به صورت قطب

ظاهر نمی شود)



۰ (۲

$\pm j, +1$ (۱

۰, +1 (۴

۰, -1 (۳

حل: مودهای پنهان قطبهایی هستند که در تابع تبدیل به دلیل حذف صفر و قطب ظاهر نمی شوند، پس در تابع تبدیل حلقه بسته نباید حذف صفر و قطبی را انجام دهیم. تابع تبدیل حلقه بسته را به دست می آوریم.

$$T(s) = \frac{\frac{s-1}{s^2+1} + 1}{1 - \frac{s+2}{s^2+2}} = \frac{(s^2+s)(s^2+2)}{(s^2+1)(s^2-s)} = \frac{s(s+1)(s^2+2)}{s(s+1)(s-1)(s^2+1)}$$

همان طور که در تابع تبدیل می توان دید، حذف صفر و قطب در $s = 0, -1$ رخ می دهد. پس این دو مقدار ویژه،

مدهای پنهان سیستم هستند.

گزینه (۳) صحیح است.

حل معادلات فضای حالت

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$

از طرفین معادله تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

پس از جای‌گذاری ماتریس‌های A و B و شرایط اولیه و ورودی $U(s)$ که تمامی معلوم هستند $X(s)$ در فضای لاپلاس و با لاپلاس وارون گرفتن $x(t)$ به‌دست می‌آید. برای محاسبه‌ی خروجی از طرفین معادله دوم تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \Rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

❖ برای محاسبه‌ی تابع کافی $x(0) = 0$ را قرار می‌دهیم و داریم:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C(sI - A)^{-1}B + D]$$

❖ اگر سیستم اکیدا سره باشد $D = 0$ است.

مثال: معادلات فضای حالت سیستمی با شرایط اولیه $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ داده شده است. برای ورودی پله واحد پاسخ کامل خروجی را به‌دست آورید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

حل: از طرفین معادلات تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$sX(s) - x(0) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s) \Rightarrow \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} X(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s+4 & -2 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s+4-\frac{2}{s} \\ 1+\frac{s+1}{s} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} \frac{s^2+4s-2}{s} \\ \frac{2s+1}{s} \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s^2+4s-2}{s} \\ \frac{2s+1}{s} \end{bmatrix} \Rightarrow Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} + \frac{-5}{s+3} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{6} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}$$

با لاپلاس وارون گرفتن از $Y(s)$ ، $y(t)$ به‌دست می‌آید.

محاسبه و معرفی خصوصیات ماتریس انتقال حالت

اگر پاسخ ورودی صفر را بخواهیم به‌دست آوریم، کافی است معادله $\dot{x} = Ax$ را حل کنیم.

$$x(t) = ke^{At} \Rightarrow x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{At} \quad (1)$$

$\phi(t) = e^{At}$ را ماتریس انتقال حالت می‌نامند. از طرفی معادله فوق را به روش زیر هم می‌توان محاسبه کرد:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = x(0) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) \Rightarrow x(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}x(0)$$

با مقایسه رابطه (۱) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\phi_{n \times n}(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots$$

با توجه به رابطه فوق خواص زیر را می‌توان در مورد $\phi(t)$ نوشت.

$$1. \phi(t_1)\phi(t_2) = \phi(t_1 + t_2)$$

$$2. \phi(0) = I$$

$$3. \left. \frac{d^m \phi(t)}{dt^m} \right|_{t=0} = A^m, \quad \left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=0} = A$$

$$4. \phi^{-1}(t) = \phi(-t)$$

$$5. \phi^m(t) = \phi(mt)$$

6. $\phi(t)$ برای تمام مقادیر t ناویژه است، به عبارت دیگر دترمینان $\phi(t)$ همواره مخالف صفر است.

مثال: ماتریس انتقال حالت سیستمی $\dot{x} = Ax + Bu$ به صورت زیر است. ماتریس A کدام است؟

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

حل: می‌دانیم $\left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=0} = A$ است در نتیجه:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + e^{-t} - te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \\ -e^{-t} + te^{-t} & -e^{-t} - e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \phi'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

گزینه (3) صحیح است.

مثال: ماتریس انتقال حالت سیستمی با $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-2t} - 1 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^{-2t} - 1) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2t} \\ 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (3)$$

حل: روش اول:

گزینه 1 و 4 غلط است $\Rightarrow$ می‌دانیم $\phi(0) = I$ است.

گزینه 2 غلط است $\Rightarrow$ می‌دانیم $\phi'(0) = A$

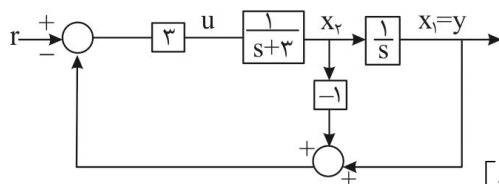
در نتیجه پاسخ گزینه 3 است.

روش دوم (تشریحی):

$$\phi(t) = L^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \right\}$$

$$\phi(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right\} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

گزینه (3) صحیح است.



مثال: ماتریس انتقال حالت (state Transition Matrix) سیستم برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 3e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 3e^{-3t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \sqrt{3}t & \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{3}t \\ -\sqrt{3} \sin \sqrt{3}t & \cos \sqrt{3}t \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \sqrt{3}t & \sin \sqrt{3}t \\ -3 \sin \sqrt{3}t & \cos \sqrt{3}t \end{bmatrix} \quad (3)$$

حل: روش اول:

گزینه ۱ و ۲ غلط است. $\phi(0) = I \Rightarrow$

گزینه ۴ صحیح است $\Rightarrow$ گزینه ۳ غلط است $\Rightarrow \phi^{-1}(t) = \phi(-t)$

روش دوم:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{s} \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \\ \frac{x_2}{u} = \frac{1}{s+3} \Rightarrow \dot{x}_2 = -3x_2 + u \\ (r + x_2 - x_1) \times 3 = u \Rightarrow u = 3r + 3x_2 - 3x_1 + 3r \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} r \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\phi(t) = L^{-1}(sI - A)^{-1} = L^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\}$$

$$\phi(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 3} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \cos \sqrt{3}t & \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{3}t \\ -\sqrt{3} \sin \sqrt{3}t & \cos \sqrt{3}t \end{bmatrix}$$

گزینه (۴) صحیح است.

مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0/5 \end{bmatrix} u$ اگر ورودی $u = [-1 \quad +1]x$ به سیستم اعمال

شود، عنصر (۱, ۱) از ماتریس انتقال حالت سیستم حلقه بسته برابر کدام است؟

$$1 - e^{-t} \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad e^{-2t} \quad (2) \quad e^{-t} \quad (1)$$

حل: برای به دست آوردن ماتریس انتقال حالت سیستم کافی است ماتریس A را با توجه به u معرفی شده به دست آوریم.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0/5 \end{bmatrix} u, \quad u = [-1 \quad 1]x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0/5 \end{bmatrix} [-1 \quad 1]x \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گزینه ۴ غلط است $\phi(0) = I \Rightarrow$

$$\left. \frac{d\phi(t)}{dt} \right|_{t=0} = A \Rightarrow \text{گزینه ۱ و ۲ غلط است}$$

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

شماره تماس با نمایندگی‌های فعال و رسمی آناهید گستر خلیلی

شماره تماس	نمایندگی	شماره تماس	نمایندگی
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	شیراز (آقای فروردین/ خانم هوشمندی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۵۰	اراک (آقای حسینی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۲	فسا (خانم شعبانی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۸	اردبیل (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۹	قزوین (خانم چگینی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۱	ارومیه (آقای آرمیون)
۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۷	کرج (آقای دکتر علیرضاپور)	۰۹۱۹۶۳۲۱۸۵۲	اسفراین (خانم اسماعیل‌زاده)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۶	کاشان (خانم صادق‌پور)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۰	اصفهان (آقای نصری)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کردستان (آقای ابراهیمی)	۰۹۱۹۰۹۸۰۳۱۸	ایلام (آقای دکتر بوچانی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کرمانشاه (آقای ابراهیمی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۴	اهواز (آقای امین‌فر)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	کهگیلویه (آقای فروردین/ خانم هوشمندی)	۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۳	بیرجند (آقای دکتر بهروان)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۷	گرگان (آقای شاه‌علی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۷	تبریز (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	مراغه (آقای صمدی)	۰۹۰۱۳۷۳۷۸۹۶	جهرم (آقای یاعلی جهرمی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۴	مشهد (خانم دکتر شجاعی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۸	خرم‌آباد (خانم میر)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	میاندوآب (آقای صمدی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۱	زنجان (خانم دکتر هوشیار)
۰۹۱۹۵۷۳۳۲۸۴	هرمزگان (آقای زارعی)	۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۴	ساری (آقای دکتر اکبری)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۵	همدان (آقای سوری)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۱	سمنان (آقای دکتر سلمانی)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۳	یزد (خانم مهندس آزاد)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۹	شهرکرد (خانم تقی‌پور)

بانک کتاب ناهید



«هر کتابی، از هر انتشاراتی را از ما بخواهید»

✓ جامع‌ترین بانک کتاب

✓ تحویل روزانه

✓ ارسال به تمامی نقاط کشور

✓ سفارش کتاب به صورت تلفنی و آنلاین

www.NIBS.ir



کتاب دانشگاهی، فنی و مهندسی، علوم پزشکی، علوم انسانی، عمومی،
ادبی، مذهبی، کمک آموزشی، کودک و نوجوان و کتاب نفیس

فروشگاه: تهران - خیابان انقلاب - روبه روی درب اصلی دانشگاه تهران

پاساژ فروزنده - طبقه همکف - پلاک ۳۳۱

تلفن: ۶۶۴۸۹۳۷۵ - ۰۲۱ - ۶۶۴۸۹۳۴۹ - ۰۲۱