

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

حاصل عبارت $2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} - \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}}$ ، کدام است؟

- ☐ ۱ $1 + \sqrt{3}$
☐ ۲ $-1 + \sqrt{2}$
☐ ۳ $1 - \sqrt{2}$
☐ ۴ $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} &= \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} \times \frac{5 + \sqrt{6}}{5 + \sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt{12} + 15\sqrt{3} + 3\sqrt{18}}{25 - 6} \\ &= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{19} = \frac{19\sqrt{2} + 19\sqrt{3}}{19} = \frac{19(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{19} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \frac{2}{\sqrt[4]{3^2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \sqrt{3} + 1$$

پس: $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} &= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} \times \sqrt{3})} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{27})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{8} + \sqrt{27}} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

مرجع: smart- ۱۳۹۹

مقدار عبارت $\frac{4}{1 + \sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{4}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$ کدام است؟

- ☐ ۱ $2\sqrt{n+2} - 1$
☐ ۲ $2\sqrt{n+2} - 2$
☐ ۳ $\sqrt{n+2} - 1$
☐ ۴ $4\sqrt{n+2} - 4$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا تک تک عبارات صورت سوال را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \\ \frac{4}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} &= 4 \times \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n+2 - n} = 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \end{aligned}$$

در نتیجه صورت سؤال برابر است با:

$$2(\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n-2]{n-2} - \sqrt[n]{n}) = 2(\sqrt[n+2]{n+2} - 1) = 2\sqrt[n+2]{n+2} - 2$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

اگر $A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ باشد، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ ، کدام است؟

۱ [۴]

۰٫۷۵ [۳]

۰٫۵ [۲]

۰٫۲۵ [۱]

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ است.

$$A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{2^2 \times \sqrt[3]{2^4}} \times 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{2^2 \times 2^{\frac{4}{3}}} \times 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{2^{\frac{10}{3}}} \times 2^{\frac{4}{3}}$$

$$= \left(2^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{10}{15}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^2$$

$$\text{پس: } (2A)^{-\frac{1}{3}} = (2 \times 2^2)^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = ۰٫۵$$

فرض کنید $a = \sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b = \sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$ مقدار $(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱۶(۲ - \sqrt{3}) [۴]

۱۶(۲ + \sqrt{3}) [۳]

۴(۲ - \sqrt{3}) [۲]

۴(۲ + \sqrt{3}) [۱]

پاسخ: گزینه ۴ برای پاسخ به سؤال ابتدا صورت عبارت خواسته شده را کمی ساده می‌کنیم در این سؤال اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 \stackrel{\text{مربع دو جمله‌ای}}{=} ((a-b)^2)^2 ((a+b)^2)^2 \\ = (a-b)^4 (a+b)^4 = ((a-b)(a+b))^4 = (a^2 - b^2)^4$$

$$\text{و اما } a^2 = \sqrt{\sqrt{6}-2} \text{ و } b^2 = \sqrt{\sqrt{6}+2} \text{ می‌شوند پس داریم:}$$

$$((\sqrt{\sqrt{6}-2} - \sqrt{\sqrt{6}+2})^2)^2 = (\sqrt{6}-2 + \sqrt{6}+2 - 2\sqrt{\sqrt{6}-2}\sqrt{\sqrt{6}+2})^2 = (2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2 \\ = 24 + 8 - 8\sqrt{12} = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2 - \sqrt{3})$$

فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$ باشند مقدار $x_1 + x_2$ کدام

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

است؟

۲ [۴]

۱ [۳]

صفر [۲]

-۱ [۱]

پاسخ: گزینه ۴ داخل پرانتز اول مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x} = \frac{(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2} - 1)}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

می‌دانیم معادله درجه ۲ به صورت $x^2 - sx + p$ است. درواقع مجموع ریشه‌ها ۲ خواهد بود.

داریم:

$$x_1 + x_2 = s = 2$$

اگر $\frac{1}{a^3+1} + \frac{16}{a^3-1} = 2$ باشد، حاصل $(\frac{1}{a^3-\sqrt{a^3+1}} + \frac{1}{a^3+\sqrt{a^3+1}})^{1401}$ چقدر است؟

پاسخ: گزینه ۳ در فرض سؤال در سمت چپ، مخرج مشترک گرفته و داریم:

$$\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{a^3-1} = 2 \Rightarrow \frac{a^3-1+a^3+1}{(a^3+1)(a^3-1)} = 2 \Rightarrow \frac{2a^3}{a^6-1} = 2 \Rightarrow \frac{a^3}{a^6-1} = 1 \Rightarrow a^6-1=a^3 \Rightarrow a^6=a^3+1 \quad (1)$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a^3+\sqrt{a^3+1}} + \frac{1}{a^3-\sqrt{a^3+1}} \right)^{1401} = \left(\frac{a^3+\sqrt{a^3+1}+a^3-\sqrt{a^3+1}}{(a^3+1-\sqrt{a^3})(a^3+1+\sqrt{a^3})} \right)^{1401} = \left(\frac{2a^3+2}{(a^3+1)^2-a^3} \right)^{1401} \xrightarrow{(1)} \left(\frac{2a^3+2}{a^6+2a^3+1-a^3} \right)^{1401} \\ & \left(\frac{2a^3+2}{2a^3+1-a^3} \right)^{1401} = \left(\frac{2a^3+2}{2a^3+2} \right)^{1401} = 1^{1401} = 1 \end{aligned}$$

مرجع: ۱۳۹۸ smart-

اگر $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \sqrt[3]{x}f(x) + 1$ باشد، جواب معادله $f(x) = -1$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۴ می دانیم $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ است.

اول مخرج کسر سمت چپ تساوی را گویا می کنیم:

$$A = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1} = \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$$

حال براساس خواسته مسئله در دو جمله اول از $\sqrt[3]{x}$ فاکتور می گیریم:

$$\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}+1)+1 = \sqrt[3]{x}f(x)+1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x}+1$$

اکنون معادله $f(x) = -1$ را حل می کنیم:

$$\sqrt[3]{x}+1 = -1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x = -8$$

مرجع: ۱۳۹۹ smart-

اگر $3 = \sqrt{x^3+2} + \sqrt{x^3-\frac{1}{2}} - \sqrt{x^3+2} - \sqrt{x^3-\frac{1}{2}}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x^3-4} - \sqrt{x^3+2}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۲ در این سؤال از اتحاد مزدوج کمک می گیریم:

$$\underbrace{(\sqrt{x^3-4} + \sqrt{x^3+2})(\sqrt{x^3-4} - \sqrt{x^3+2})}_3 = x^3-4 - (x^3+2)$$

$$\rightarrow 3(\sqrt{x^3-4} - \sqrt{x^3+2}) = -6 \rightarrow \sqrt{x^3-4} - \sqrt{x^3+2} = -2$$

مرجع: ۱۳۹۹ smart-

اگر ریشه هفتم عدد ab برابر $\frac{3}{14}, \frac{2}{14}$ و $a = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}$ باشد، مقدار x کدام است؟

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$\sqrt[3]{ab} = 2^{\frac{3}{14}} \Rightarrow (ab)^{\frac{1}{14}} = 2^{\frac{3}{14}} \xrightarrow{\text{ب توان ۷}} ab = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$ab = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x}} = 2^{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{9 - 4}{6} \Rightarrow x = 3$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1 + \sqrt[4]{7}}$ کدام است؟

۲ $\sqrt[4]{2}$ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt[4]{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \times \sqrt{1 + \sqrt[4]{7}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4 + \sqrt{7}}} \times \sqrt{(1 + \sqrt[4]{7})^2} = \frac{1}{\sqrt[4]{4 + \sqrt{7}}} \times \sqrt[4]{1 + 7 + 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[4]{8 + 2\sqrt{7}}}{\sqrt[4]{4 + \sqrt{7}}} = \sqrt[4]{\frac{2(4 + \sqrt{7})}{4 + \sqrt{7}}} = \sqrt[4]{2}$$

اگر تساوی $\frac{3x^2 - x + 2}{x^3 - 8} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + 1}{x^2 + 2x + 4}$ یک اتحاد باشد، حاصل $B - A$ کدام است؟ (عبارت‌ها

مرجع: smart- ۱۳۹۸

تعریف شده هستند.)

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ از آنجایی که $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ ، کفایت طرفین تساوی را در $x^3 - 8$ ضرب کنیم. لذا تساوی به شکل زیر درمی‌آید:

$$3x^2 - x + 2 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + 1)(x - 2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x + 2 = (A + B)x^2 + (2A - 2B + 1)x + 4A - 2$$

حال با مقایسه ضرایب نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} 4A - 2 = 2 \\ A + B = 3 \\ 2A - 2B + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = 2$$

بنابراین:

$$B - A = 2 - 1 = 1$$

ریشه هفتم عدد مثبت a ، مساوی ۲۷ برابر عدد a با توان $\frac{15}{7}$ است. $(\frac{1}{a} - 3)$ چند برابر $(1 + \sqrt{3})$ است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۶ + $3\sqrt{3}$ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۶ - $3\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{7}}} = 27a^{\frac{15}{7}} \Rightarrow 27a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{27} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{\frac{1}{a} - 3}{1 + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 3}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{3(4 - 2\sqrt{3})}{2} = 6 - 3\sqrt{3}$$

عبارت مورد نظر :

مرجع: ۱۳۹۹ smart-

اگر $a < 0$ باشد، آن گاه کدامیک از مقایسه‌های زیر درست است؟

(۴) $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a^2}$

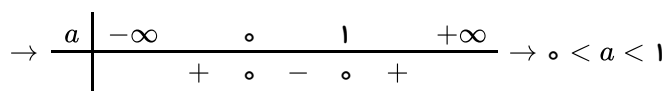
(۳) $a^{-2} < a^{-3}$

(۲) $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{5}}$

(۱) $a^3 < a^4$

پاسخ: گزینه ۳

$$a^2 - a < 0 \rightarrow a(a - 1) < 0$$



$$y = a^x \quad (0 < a < 1)$$

به ازای $0 < a < 1$ نمودار تابع $y = a^x$ یک نمودار نمایی و نزولی است. که نمودارش به صورت است.

گزینه ۱: طبق نمودار مشخص است که $a^3 > a^4$

گزینه ۲: طبق نمودار داریم: $a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{5}}$

گزینه ۳: طبق نمودار مشخص است که $a^{-3} > a^{-2}$

گزینه ۴: برای مقایسه دو رادیکال با فرجه‌های غیریکسان، ابتدا باید فرجه‌ها را یکسان کنیم.

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}, \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$$

حال کافی است a^3 و a^4 را با هم مقایسه کنیم که داریم $a^3 > a^4$. پس:

$$\sqrt[6]{a^3} > \sqrt[6]{a^4} \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt[3]{a^2}$$

اگر $\alpha = \sqrt[6]{5\sqrt{2} - 7}$ و $\beta = \sqrt[6]{5\sqrt{2} + 7}$ ؛ آنگاه حاصل $A = (\alpha^3 + \beta^3 - 2\alpha\beta)(\alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha\beta)$ کدام

است؟

مرجع: ۱۳۹۸ smart-

(۴) $10\sqrt{2} + 1$

(۳) $10\sqrt{2} - 2$

(۲) $10\sqrt{2}$

(۱) $10\sqrt{2} + 2$

پاسخ: گزینه ۳

$$A = (\alpha^3 + \beta^3 - 2\alpha\beta)(\alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha\beta) \stackrel{\text{مزدوج}}{=} (\alpha^3 + \beta^3)^2 - (2\alpha\beta)^2 = \alpha^6 + \beta^6 + 2(\alpha \cdot \beta)^3 - 4(\alpha\beta)^2$$

$$= 5\sqrt{2} - 7 + 5\sqrt{2} + 7 + 2 \left(\sqrt[6]{\underbrace{(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)}_{50 - 49}} \right)^3 - 4 \left(\sqrt[6]{\underbrace{(5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)}_{50 - 49}} \right)^2$$

$$= 10\sqrt{2} + 2 - 4 = 10\sqrt{2} - 2$$

مرجع: ۱۳۹۹ smart-

حاصل عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{7}-3} \times \sqrt[3]{16+6\sqrt{7}}$ کدام است؟

(۴) $\sqrt[3]{2}$

(۳) ۲

(۲) $-\sqrt[3]{2}$

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$16 + 6\sqrt{7} = (\sqrt{7} + 3)^2 \Rightarrow \sqrt[3]{16 + 6\sqrt{7}} = \sqrt[3]{(\sqrt{7} + 3)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{7} + 3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{7} + 3} \times \sqrt[3]{\sqrt{7} + 3} = \sqrt[3]{(\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3)} \stackrel{\text{بنابر اتحاد مزدوج}}{=} \sqrt[3]{7 - 9} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times 16^{-\frac{3}{4}}}$ کدام است؟

(۴) $8\sqrt[3]{2}$

(۳) $8\sqrt{2}$

(۲) $16\sqrt[3]{2}$

(۱) $16\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۴

$$2\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{32}$$

$$2\sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8}$$

$$16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times 16^{-\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{32}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8}} \times 2^{-3}} = \frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{8} \times \frac{1}{8}} = 8\sqrt[3]{\frac{32}{8}} = 8\sqrt[3]{4} = 8\sqrt[3]{2}$$

مرجع: ۱۳۹۹ smart-

اگر $x = 2^{\frac{3}{4}}$ و $y = \sqrt[3]{8\sqrt{2}}$ باشد، $\frac{x}{y}$ کدام است؟

(۴) ۱

(۳) $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

(۲) $\sqrt[12]{\frac{1}{32}}$

(۱) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{x}{y} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{8\sqrt{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{2^3 \times 2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{2^{\frac{7}{2}}}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{7}{6}}} = 2^{\frac{3}{4} - \frac{7}{6}} = 2^{\frac{9-14}{12}} = 2^{-\frac{5}{12}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{\frac{1}{32}}$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

اگر $B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{8}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}$ باشد، حاصل $3B + 1$ کدام است؟

(۴) $2\sqrt{7}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) $\sqrt{7}$

(۱) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲

$$B = \frac{2 + \sqrt{28}}{8 + \sqrt{28}} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{8 + 2\sqrt{7}} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}}$$

$$3B + 1 = \frac{3 + 3\sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}} + 1 = \frac{7 + 4\sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} + 4)}{4 + \sqrt{7}} = \sqrt{7}$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱۹ حاصل عبارت $2 - \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3} - 1}}{\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}}$ کدام است؟

۱) $2 - \sqrt{3}$ ۲) $-\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{6}$

پاسخ: گزینه ۴

فرض: $\frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{3} - 1}}{\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} = A \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$

$$\frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = A^2 \Rightarrow \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = A^2 \xrightarrow{\text{مزدوج مخرج } x}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{1} \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{6} + 2 \Rightarrow \text{حاصل عبارت مطلوب} = \sqrt{6} + 2 - 2 = \sqrt{6}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۳

حاصل عبارت $A = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) \cdot \sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) 2 ۳) $1 + \sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۴

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2 + \sqrt{3}})^2 \sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2} = A^2 > 0$$

$$\Rightarrow A^2 = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{4 - 3}) \times \left(\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2}\right)^2 = 6 \times 2 = 12 \Rightarrow A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $(2m - 1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟ (با تغییر)

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) $(-2, 2, 5) - \{0\}$ ۲) $(-2, 3, 5) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ۳) $(-1, 3, 5) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ۴) $(-1, 2, 5) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

پاسخ: گزینه ۳ برای اینکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد باید $\Delta > 0$ باشد بنابراین:

$$\Delta \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m - 1)(m - 2) > 0 \Rightarrow 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = (m+1)(2m-7) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 3,5$$

در ضمن ضریب x^2 نباید صفر باشد یعنی $m \neq \frac{1}{2}$ است.

$$m \in (-1, 3,5) - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

معادله درجه دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟
مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

$$\frac{7}{2} \quad \text{①} \qquad 3 \quad \text{②} \qquad -1 \quad \text{③} \qquad -\frac{5}{2} \quad \text{④}$$

پاسخ: گزینه ۱ اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم داده شده باشند طبق فرض داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{a}{c} \rightarrow a^2 = -bc \rightarrow a^2 + bc = 0 \rightarrow 9 + (2m-1)(2-m) = 0$$

$$\rightarrow 9 + 4m - 2m^2 - 2 + m = 0 \rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} m = -1, m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 36 < 0 \text{ ریشه حقیقی ندارد}$$

$$m = \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \Delta = 36 + 18 > 0 \text{ قابل قبول}$$

فرض کنید نقاط $(-2, 5), (0, 5), (1, 11)$ ، بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟
مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

$$(2, 15) \quad \text{④} \qquad (2, 9) \quad \text{③} \qquad (-1, 4) \quad \text{②} \qquad (-1, 3) \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۱ کافی است که مختصات سه نقطه داده شده را در تابع صدق دهیم.

$$A \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} B \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 4a - 2b + 5 \rightarrow 4a - 2b = 0 \\ C \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 11 = a + b + 5 \rightarrow a + b = 6 \end{array} \right\} \rightarrow a = 2, b = 4$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ است که نقطه $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ روی این تابع قرار دارد.

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x = 0$ باشند و $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

$$125x^2 + 12x = 1 \quad \text{④} \qquad 125x^2 = 12x + 1 \quad \text{③} \qquad 125x^2 = 16x + 1 \quad \text{②} \qquad 125x^2 + 16x = 1 \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۱ معادله به صورت $x^2 + x = 5$ است که در آن $S = x_1 + x_2 = -1$ و $P = x_1 x_2$ است. از طرفی $5 = x(x+1)$ است.

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1+1} = \frac{x_1}{5}, \quad \frac{1}{x_2+1} = \frac{x_2}{5}$$

پس معادله‌ای پیدا می‌کنیم که ریشه‌هایش $\frac{x_1^3}{125}$ و $\frac{x_2^3}{125}$ باشد:

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{125}(x_1^3 + x_2^3) = \frac{1}{125}(S^3 - 3SP) = \frac{-16}{125} \\ P' = \frac{1}{5^6}(x_1 x_2)^3 = \frac{1}{5^6}P^3 = -\frac{1}{125} \end{cases}$$

پس معادله مورد نظر به صورت $x^2 + \frac{16}{125}x - 1 = 0$ است:

$$\Rightarrow 125x^2 + 16x = 1$$

ریشه‌های معادله $0 = x^2 - ax + b = 2x^2 - ax + b = 0$ نیم واحد از ریشه‌های معادله $0 = 6 - ax + 2ax^2$ بیشتر است. مقدار $[\frac{ab}{4}]$

کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۴

۲) ۳

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به اینکه ریشه‌های معادله اولی، نیم واحد از ریشه‌های معادله دومی بیشتر است بنابراین مجموع ریشه‌های معادله اولی، یک واحد از مجموع ریشه‌های معادله دومی بیشتر است.

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2}, \quad \alpha' + \beta' = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\alpha\beta = \frac{b}{2}, \quad \alpha'\beta' = (\alpha - 0.5)(\beta - 0.5) = \alpha\beta - 0.5(\alpha + \beta) + 0.25 = -\frac{6}{2\alpha} = -3$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{b}{2} = -3 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow [\frac{ab}{4}] = [-\frac{6}{4}] = -2$$

اگر مجموع $2p^2 - 3sp + 2s$ حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $0 = x^2 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب s و p باشند حاصل عبارت

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

کدام است؟

۱) $59 - 7\sqrt{69}$

۲) $7 + \sqrt{69}$

۳) 50

۴) $59 + 7\sqrt{69}$

پاسخ: گزینه ۴

برای حل معادله دو مجذوری از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = \sqrt{69} \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \xrightarrow{t=x^2>0} x^2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

چون دو ریشه قرینه یکدیگرند پس جمع آنها صفر است و برای حاصل ضرب داریم:

$$P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ p = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \Rightarrow p^2 = \frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4} = \frac{59 + 7\sqrt{69}}{2} \Rightarrow 2p^2 = 59 + 7\sqrt{69} \end{cases}$$

توجه: چون $S = 0$ است بنابراین $2P^2 - 3(0)P + 2(0) = 2P^2$

صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۴ $\Rightarrow$ مجموع ضرایب معادله روبه‌رو صفر است. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}$

$x = 0 \Rightarrow y = m$ $S = \frac{1}{2} \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right| = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow |m(m-2)| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$ رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ $\begin{cases} \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$

به‌ازای چند مقدار a ، سهمی $y = ax^2 + (3+2a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

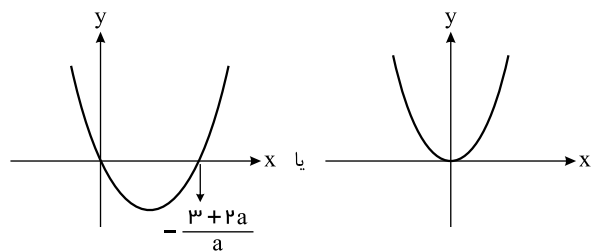
① هیچ مقدار a ② تمام مقادیر a ③ ۱ ④ ۲

پاسخ: گزینه ۱ سهمی $y = ax^2 + (3+2a)x$ مبدأ گذر است، زیرا:

$y = 0 \Rightarrow ax^2 + (3+2a)x = 0 \Rightarrow x(ax + 3 + 2a) = 0 \Rightarrow x = 0, ax + 3 + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{3+2a}{a}$

برای آن که سهمی از ناحیه سوم عبور نکند، باید رو به بالا بوده و ریشه معادله

$y = 0$ یعنی $x = -\frac{3+2a}{a}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



$\Rightarrow a > 0 \Rightarrow -\frac{3+2a}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{3+2a}{a} \leq 0 \xrightarrow{a>0} 3+2a \leq 0 \Rightarrow 2a \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{3}{2}$

چون اشتراک $a > 0$ و $a \leq -\frac{3}{2}$ سهمی است، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ محور تقارن سهمی، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

① $x = 2$ ② $x = 2,5$ ③ $x = 3$ ④ $x = 3,5$

پاسخ: گزینه ۱ عرض رأس سهمی $y = \frac{-\Delta}{4a}$ است پس:

$$y = mx^2 - 12x + 5m - 1$$

$$\frac{-\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow \Delta = -8a \Rightarrow 144 - 4m(5m - 1) = -8m \Rightarrow 144 - 20m^2 + 4m = -8m$$

$$\Rightarrow 20m^2 - 12m - 144 = 0 \xrightarrow{\div 4} 5m^2 - 3m - 36 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 9 - 4 \times 5 \times (-36) = 729 \Rightarrow m = \frac{3 \pm 27}{10} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{24}{10} \end{cases}$$

چون سهمی دارای کمترین مقدار است پس $m > 0$ و $m = 3$ قابل قبول است.

$$y = 3x^2 - 12x + 14 \Rightarrow \text{محور تقارن: } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 3} = 2$$

α و β ریشه‌های معادله $ax^2 - 8x + 4 = 0$ است. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های برابر

مرجع: سراسری-۱۴۰۲

$\alpha^2\beta$ و $\alpha\beta^2$ باشند، مقدار $\log_{\sqrt{2}} a$ کدام است؟ ($a > 0$)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha^2\beta \cdot \alpha\beta^2 \xrightarrow{\div \alpha\beta} \alpha + \beta = \alpha^2\beta^2$$

$$\Rightarrow S = P^2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\frac{-(-8)}{a} = \left(\frac{4}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{8}{a} = \frac{16}{a^2} \Rightarrow a = 2$$

$$\log_{\sqrt{2}} = 2: \text{ مقدار مورد نظر}$$

محور تقارن‌های سهمی‌های $y = x^2 + ax - 2$ و $y = -x^2 - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض

مرجع: سراسری-۱۴۰۲

یکسان روی دو سهمی خط $y = 1$ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

-۴ (۲)

-۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ محور تقارن دو سهمی یکسان است، پس:

$$\begin{cases} y = x^2 + ax - 2 \rightarrow \text{محور تقارن: } x = \frac{-a}{2(1)} \\ y = -x^2 - 2x + b \rightarrow \text{محور تقارن: } x = \frac{-(-2)}{2(-1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

طبق فرض، دو سهمی در دو نقطه به عرض ۱ مشترک اند، پس:

$$y = x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

جایگذاری $x=1$ در سهمی دوم

$$\rightarrow 1 = -1^2 - 2(1) + b \Rightarrow b = 4$$

توجه: می‌توانستیم به جای $x = 1$ ، ریشه $x = -3$ را در معادله سهمی دوم جایگذاری کنیم.

به ازای دو مقدار a ، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a ، کدام

مرجع: سراسری-۱۴۰۱

است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ باشند، داریم:

$$\alpha = 3\beta, \alpha\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\beta^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \beta = \pm \frac{2}{3}$$

ریشه معادله در معادله صدق می کند، پس:

$$\beta = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x^2 - ax + 4 = 0 \Rightarrow 3 \times \frac{4}{9} - \frac{2a}{3} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{2a}{3} + 4 = 0 \xrightarrow{\times 3}$$

$$4 - 2a + 12 = 0 \Rightarrow 16 = 2a \Rightarrow a = 8$$

$$\beta = -\frac{2}{3} \Rightarrow 3x^2 - ax + 4 = 0 \Rightarrow 3 \times \frac{4}{9} + \frac{2a}{3} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2a}{3} + 4 = 0 \xrightarrow{\times 3}$$

$$4 + 2a + 12 = 0 \Rightarrow a = -8$$

$$\text{اختلاف مقادیر} = 8 - (-8) = 16$$

روش دوم:

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر یکی از ریشه ها k برابر ریشه دیگر باشد، داریم:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

طبق نکته فوق $k = 3$ است و داریم:

$$3x^2 - ax + 4 = 0, k = 3 \Rightarrow \frac{(-a)^2}{3 \times 4} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{12} = \frac{16}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{12 \times 16}{3} = 64 \Rightarrow a = \pm 8$$

اگر α و β ریشه های سهمی $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات

قرار دارد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۴) چهارم

۳) سوم

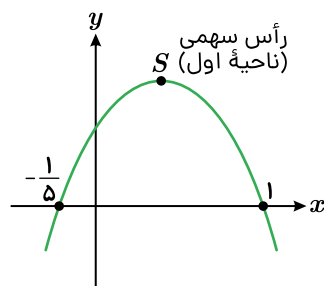
۲) دوم

۱) اول

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا به کمک مجموع و حاصل ضرب ریشه ها، α و β را محاسبه می کنیم.

$$y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta \Rightarrow \begin{cases} \text{ضرب: } \alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{25} \\ \text{جمع: } \alpha + \beta = \frac{-4}{25\alpha} * \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{5} + \beta = \frac{-4}{5} \Rightarrow \beta = -1 & (\beta > \alpha) \text{ غقی} \times \\ \alpha = -\frac{1}{5} \rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{-4}{-5} \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{معادله سهمی } y = -5x^2 + 4x + 1$$

توجه: چون جمع ضرایب صفر است یک ریشه ۱ و بعدی $\frac{c}{a} = -\frac{1}{5}$ است.

اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^2 - ax - b = 0$ و $4\alpha\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 17$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{④}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{③}$$

$$\frac{2}{5} \quad \text{②}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۴ طبق فرض داریم:

$$ax^2 - ax - b = 0 (*) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-(-a)}{a} = 1 \\ \alpha\beta = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

$$4\alpha\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 17 \xrightarrow{\alpha=1-\beta} 4\alpha\beta^2 + 2\alpha + 2\alpha\beta^2 - 4\alpha\beta - 2\alpha\beta = 17 \Rightarrow 6\alpha\beta^2 - 6\alpha\beta + 3 = 0 \quad (1)$$

معادله (*) را ساده کرده و از رابطه استفاده می‌کنیم:

$$a(x^2 - x) - b = 0 \xrightarrow{\beta: \text{ریشه}} a(\beta^2 - \beta) - b = 0 \xrightarrow{(1)} a\left(-\frac{3}{6}\right) = b \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} = \alpha\beta$$

مقدار $|\alpha - \beta|$ برابر است با:

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{1^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

$$\frac{2}{3} \quad \text{④}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{③}$$

$$-\frac{2}{3} \quad \text{②}$$

$$-\frac{1}{3} \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم که نمودار سهمی، نسبت به محور تقارن سهمی (که از رأس می‌گذرد)، متقارن است. دو نقطه $A(3, y)$ و $B(-5, y)$

$$x_s = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_s = \frac{-5 + 3}{2} = -1$$

که عرض برابری دارند نسبت به محور تقارن سهمی باید متقارن باشند، پس:

$$y = a(x - (-1))^2 + 1 = a(x + 1)^2 + 1$$

معادله سهمی را با محور x ها تلاقی می‌دهیم:

$$a(x + 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow ax^2 + 2ax + (a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-2a}{a} = -2 \\ \alpha\beta = \frac{a+1}{a} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \Rightarrow 5 = 4 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) \Rightarrow \frac{a+1}{a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2a + 2 = -a \Rightarrow a = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = \frac{-2}{3}(x + 1)^2 + 1 \xrightarrow{\text{تلاقی با محور } y \text{ها}} y = \frac{-2}{3}(0 + 1)^2 + 1 = \frac{-2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

سهمی $y = 2ax^2 - 5x + 18a$ در نقطه A بر نیمساز ناحیه سوم محورهای مختصات مماس است. مقدار a کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

$$\frac{5}{2} \quad \text{④}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{③}$$

$$-\frac{1}{2} \quad \text{②}$$

$$-\frac{5}{2} \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۲ چون سهمی $y = 2ax^2 - 5x + 18a$ در نقطه A بر نیمساز ناحیه سوم محورهای مختصات مماس است؛ پس باید تلاقی آنها دارای ریشه مضاعف باشد یعنی داریم:

$$\begin{cases} y = 2ax^2 - 5x + 18a \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2ax^2 - 5x + 18a = x$$

$$2ax^2 - 6x + 18a = 0 \Rightarrow ax^2 - 3x + 9a = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4a(9a) = 0 \Rightarrow 1 - 4a^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{اگر } a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{غ ق}$$

چون منحنی در ناحیه سوم بر خط $y = x$ مماس است پس باید طول نقطه تماس منفی باشد به همین دلیل $a = \frac{1}{2}$ غیر قابل قبول است و باید

$$a = -\frac{1}{2} \text{ باشد.}$$

در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف a ، بیشترین مقدار سهمی $y = ax^2 + x + 2a$ برابر $-\frac{1}{2}$ است؟

۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ مرجع: سراسری-۱۴۰۳

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به گزینه‌های داده شده، به نظر می‌رسد، منظور طراح این بوده که سهمی رو به پایین است و بیشترین مقدار سهمی یعنی عرض رأس سهمی برابر $-\frac{1}{2}$ است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y_{\text{رأس}} &= -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{4a(2a) - 1}{4a} &= -\frac{1}{2} \Rightarrow 8a^2 - 1 = -2a \Rightarrow \end{aligned}$$

$$8a^2 + 2a - 1 = 0$$

چون $\frac{c}{a} < 0$ است پس معادله فوق دارای یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت است و بنابراین فقط مقدار منفی a قابل قبول است یعنی فقط یک مقدار برای a وجود دارد که به ازای آن بیشترین مقدار سهمی برابر $-\frac{1}{2}$ است.

برای چند عدد طبیعی n ، بازه $(\frac{3-n}{2}, \frac{n+3}{n})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟

مرجع: سراسری-۱۴۰۴

۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐

پاسخ: گزینه ۱

$$\left(\frac{3-n}{2}, \frac{n+3}{n}\right) = \left(\frac{3}{2} - \frac{n}{2}, 1 + \frac{3}{n}\right)$$

به ازای هر عدد طبیعی n ، ابتدای بازه کوچک تر از $\frac{3}{2}$ و انتهای بازه بزرگ تر از ۱ است؛ بنابراین فقط اعداد ۱ و ۲ می‌توانند اعداد مورد نظر باشند.

اگر بخواهیم بازه مورد نظر فقط شامل عدد صحیح ۲ باشد، باید $\frac{3-n}{2} \geq 1$ و $\frac{n+3}{n} \leq 3$ باشد که در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{3-n}{2} \geq 1 \Rightarrow 3-n \geq 2 \Rightarrow n \leq 1 \\ \frac{n+3}{n} \leq 3 \xrightarrow[n>0]{n \in \mathbb{N}} n+3 \leq 3n \Rightarrow n \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \emptyset = \text{اشتراک}$$

پس باید بازه مورد نظر فقط شامل عدد صحیح ۱ باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{3-n}{2} \geq 0 \Rightarrow n \leq 3 \\ \frac{n+3}{n} \leq 2 \Rightarrow n \geq 3 \end{cases} \Rightarrow n = 3 : \text{اشتراک}$$

بنابراین فقط یک عدد طبیعی n در شرایط مسئله صدق می‌کند.

راه دوم: به‌ازای جای‌گذاری مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... به‌جای n مشخص می‌شود که به‌ازای $n \geq 4$ امکان‌پذیر نیست و فقط به‌ازای $n = 3$ بازه موردنظر فقط شامل یک عدد صحیح خواهد بود.

به‌ازای چند مقدار صحیح m ، نقطهٔ مینیمم تابع $y = x^2 - mx + 2 - m$ در ناحیهٔ اول محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

پاسخ: گزینه ۲ مختصات نقطهٔ مینیمم تابع مختصات نقطهٔ رأس سهمی است؛ پس داریم:

$$y = x^2 - mx + 2 - m \Rightarrow S \left| \begin{array}{c} \frac{m}{2} \\ \frac{4(2-m)-m^2}{4} \end{array} \right. \text{ رأس سهمی}$$

باید طول و عرض نقطهٔ رأس سهمی مثبت باشد تا در ناحیهٔ اول باشد.

$$\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0 & (I) \\ \frac{8-4m-m^2}{4} > 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 8 < 0, \Delta = 16 + 32 = 48 \Rightarrow m = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} \end{cases}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{1} = -2 \pm 2\sqrt{3} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 - 2\sqrt{3} < m < -2 + 2\sqrt{3} \quad (II)$$

$$(I), (II) \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 < m < -2 + 2\sqrt{3}$$

بنابراین تنها عدد صحیحی که در این بازه وجود دارد، $m = 1$ است.

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + x - 1 - m^2 = 0$ باشد، کمترین مقدار ممکن برای $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۳

۳) ۵

۴) ۷

مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

پاسخ: گزینه ۲ فرم کلی معادله‌ای که مجموع ریشه‌ها S و حاصل‌ضرب ریشه‌ها P باشد، به‌صورت: $x^2 - Sx + P = 0$ است؛ پس:

$$x^2 + x - 1 - m^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = -1 - m^2 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = (-1)^2 - 2(-1 - m^2) = 3 + 2m^2$$

بدیهی است که همواره $2m^2 \geq 0$ ؛ بنابراین کمترین مقدار عبارت $\alpha^2 + \beta^2$ برابر ۳ است.

مرجع: smart- ۱۴۰۰

عبارت $P(x) = 6mx^2 + 4x - 1$ همواره منفی است. حدود m کدام است؟

۱) $m < 0$

۲) $m < -\frac{1}{6}$

۳) $-\frac{1}{6} < m < 0$

۴) $m > -\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۲ برای این‌که عبارت درجه دوم همواره منفی باشد، باید ضریب x^2 منفی و Δ هم منفی باشد. پس:

$$6m < 0 \Rightarrow m < 0$$

$$\Delta = 4 + 24m < 0 \Rightarrow 24m < -4 \Rightarrow m < -\frac{1}{6}$$

بنابراین به ازای $m < -\frac{1}{6}$ عبارت مورد نظر همواره منفی است.

ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۴

$$x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (4) \quad x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ روش اول:

می دانیم برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه هایش عکس ریشه های معادله درجه دوم داده شده ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه هایش k واحد کمتر از ریشه های معادله درجه دوم داده شده ای باشد، باید x را به $x + k$ تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 1 = 0 & \xrightarrow[\text{جای } a, c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow[\text{یک واحد کمتر}]{x \rightarrow x+1} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0 \\ \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 & \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \end{aligned}$$

به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه ی حقیقی منفی است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۷

$$3 < m < 6 \quad (4) \quad 0 < m < 3 \quad (3) \quad m > 3 \quad (2) \quad m < -6 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

تعیین علامت

$$\longrightarrow m < -6 \quad \text{یا} \quad m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (II)$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6 \quad (III)$$

از اشتراک جواب های I و II و III به جواب $3 < m < 6$ می رسیم.

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ ، همواره پایین محور x ها

است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

$$2 < m < 6 \quad (4) \quad 2 < m < 4 \quad (3) \quad 2 < m < 5 \quad (2) \quad 1 < m < 5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور x ها باشد، آن است که $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد:

$$a < 0 \Rightarrow 1-m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I)$$

$$\Delta < 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac < 0} 4(m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \xrightarrow{\div 4} (m-3)^2 + (1-m) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $2 < m < 5$ می رسیم.

به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $\frac{1}{8}x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟
مرجع: سراسری- ۱۳۹۶

۴ ۶

۳ ۵

۲ ۴

۱ ۳

پاسخ: گزینه ۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را α و β بنامیم در این صورت $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$ است. ($\alpha, \beta > 0$)

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{16} \end{cases} \rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \rightarrow \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} S + 2\sqrt{P} = 4$$

$$\rightarrow \frac{m+1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \rightarrow \frac{m+2}{2} = 4 \rightarrow m+2 = 8 \rightarrow m = 6$$

اگر $[x] = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x-3| - |x-4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است).
مرجع: خراج از کشور- ۱۳۹۷

۴ فاقد نقطه‌ی مشترک

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم: $[x] = n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow n \leq x < n+1$

$$[x-2] = 1 \rightarrow [x] - 2 = 1 \rightarrow [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4$$

در این بازه، قدر مطلق اول مثبت و قدر مطلق دوم منفی است.

$$f(x) = x - 3 - (-x + 4) = 2x - 7$$

اکنون باید توابع $f(x)$ و $g(x)$ را تلاقی دهیم.

$$2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 1 + 80 = 81$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+9}{4} = \frac{5}{2} \text{ غرق} \\ x = \frac{1-9}{4} = -2 \text{ غرق} \end{cases}$$

هیچ کدام از دو بدست آمده در بازه‌ی $3 \leq x < 4$ نمی‌باشند. بنابراین دو تابع فاقد نقطه‌ی مشترک در بازه‌ی داده شده هستند.

به ازای کدام مقدار a ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۶

۴ $5 < a < 14$

۳ $2 < a < 14$

۲ $2 < a < 5$

۱ $-2 < a < 2$

پاسخ: گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0 \rightarrow (a-2)^2 - (14-a) > 0$$

$$\rightarrow a^2 + 4 - 4a - 14 + a > 0 \rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 5 : I$$

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow 14 - a > 0 \rightarrow a < 14 : II$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \rightarrow 2(a-2) > 0 \rightarrow a-2 > 0 \rightarrow a > 2 : III$$

از اشتراک I و II و III به جواب $5 < a < 14$ می‌رسیم.

معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

☐ ۱ $(-4, 0)$
☐ ۲ $(-4, -2)$
☐ ۳ $(-6, 0)$
☐ ۴ $(-6, -4)$

پاسخ: گزینه ۴ برای این منظور باید $\Delta > 0, S > 0, P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow m^2 - 8(m+6) > 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0 \rightarrow (m-12)(m+4) > 0$$

تعیین علامت

$$\rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12 \text{ (I)}$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \rightarrow -m > 0 \rightarrow m < 0 \text{ (II)}$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \rightarrow m+6 > 0 \rightarrow m > -6 \text{ (III)}$$

از اشتراک I, II, III به جواب $-6 < m < -4$ می‌رسیم.

به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۶

$$x^2 - x - 2 = 0 \text{ می‌باشد؟}$$

☐ ۱ ۹
 ☐ ۲ ۱۱
 ☐ ۳ ۱۳
 ☐ ۴ ۱۵

پاسخ: گزینه ۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 2 = 0$ را α و β در نظر بگیریم در این صورت ریشه‌های معادله‌ی $8x^2 - mx - 8 = 0$ برابر α^3 و β^3 هستند.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$\text{داریم: } \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$\alpha^3 \cdot \beta^3 = (\alpha \cdot \beta)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم: } x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{13}{8}x - 1 = 0 \rightarrow 8x^2 - 13x - 8 = 0$$

مقایسه با $8x^2 - mx - 8 = 0$

$$\rightarrow m = 13$$

فرض کنید $A(-1, 5)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر،

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

می‌گذرد؟

☐ ۱ $(5, -7)$
☐ ۲ $(5, -9)$
☐ ۳ $(2, 5)$
☐ ۴ $(1, 5)$

پاسخ: گزینه ۲

در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی از رابطه $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید و این طول را در تابع قرار می‌دهیم عرض آن به

دست می‌آید.

$$-\frac{b}{2a} = -1 \rightarrow 2a = b$$

$$f(-1) = 9 \rightarrow a - b + c = 9 \xrightarrow{b=2a} -a + c = 9$$

$$\left| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = 9a + 3b + c \xrightarrow{b=2a} 15a + c = 1 \rightarrow \begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{17}{2}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$ است که نقطه $\left| \begin{array}{c} 5 \\ -9 \end{array} \right|$ روی این تابع قرار دارد.

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟
مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۵

① $m > 1$ یا $m < -2$ ② $-2 < m < 1$ ③ فقط $m < -2$ ④ فقط $m > 1$

گزینه ۱: پاسخ

یعنی این معادله درجه دوم باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1$$

توجه کنید که چون $\frac{c}{a} < 0$ است، معادله قطعاً دو ریشه حقیقی دارد. پس $\Delta > 0$ بررسی نمی‌گردد

به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ ، دارای دو ریشه مثبت است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۶

① $-2 < a < 2$ ② $2 < a < 5$ ③ $2 < a < 14$ ④ $5 < a < 14$

پاسخ: گزینه ۴ شرط وجود دو ریشه مثبت در معادله درجه دوم این است که $\Delta, S, P > 0$ باشد:

$$(I) \quad (a-2)^2 - 4(14-a) > 0 \Rightarrow 4a^2 - 12a - 40 > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5$$

$$S = -\frac{-2(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (II)$$

$$P = \frac{14-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 14 \quad (III)$$

$$I \cap II \cap III \Rightarrow 5 < a < 14$$

توجه: در معادله درجه دوم هرگاه $\frac{c}{a} > 0$ باید شرط $\Delta > 0$ بررسی گردد و اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، معادله دو ریشه حقیقی دارد و نیاز به بررسی $\Delta > 0$ نیست.

به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۶

① $a < 1$ ② $a < -2$ ③ $a > 3$ ④ $-2 < a < 1$

پاسخ: گزینه ۲ شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد (بالای محور x ها باشد) آن است که $a > 0$ (ضریب x^2) و $\Delta < 0$ باشد.

$$a > 0 \rightarrow 1-a > 0 \rightarrow a < 1 : I$$

$$\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow 24 - 4(1-a)(-a) < 0 \rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\div(-4)} a^2 - a - 6 > 0 \rightarrow (a-3)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 3 : II$$

از اشتراک I و II به جواب $a < -2$ می‌رسیم.

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

(۱) $-1 < m < 0$ (۲) $m < 0$ (۳) $2 < m < 8$ (۴) $m > 8$

پاسخ: گزینه ۱ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$ باشد.

$$S > 0 \rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow -(m - 2) > 0 \rightarrow m - 2 < 0 \rightarrow m < 2$$

بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند.

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow m + 1 > 0 \rightarrow m > -1 \rightarrow$$

بنابراین بدون اینکه شرط $\Delta > 0$ را اعمال کنیم گزینه‌ی اول انتخاب می‌شود.

به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

(۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$

پاسخ: گزینه ۲ توجه: تابع درجه‌ی دوم $y = Ax^2 + Bx + C$ همواره بالای محور x ها قرار دارد. هرگاه $\begin{cases} A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ باشد.

$$\begin{cases} 1 - a > 0 \rightarrow a < 1 & (1) \\ \Delta < 0 \rightarrow 24 + 4a(1 - a) < 0 \rightarrow 4a^2 - 4a - 24 > 0 \rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \\ \rightarrow (a - 3)(a + 2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 3 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) = a < -2$$

به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

(۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۳ فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $8x^2 - mx - 8 = 0$ و α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - x - 2 = 0$ باشند.

$$x_1 = \alpha^3, \quad x_2 = \beta^3 \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$x_1 + x_2 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$x_1 x_2 = \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = -1$$

$$x^2 - \frac{13}{8}x - 1 = 0 \xrightarrow{\times 8} 8x^2 - 13x - 8 = 0$$

با مقایسه‌ی این معادله و معادله‌ی صورت سؤال، مشخص می‌شود که $m = 13$ است.

رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 57$ روی سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b - a$ چقدر است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

(۱) -6 (۲) ۶ (۳) -18 (۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۲ رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ روی سهمی $y = -ax^2 + ax + 57$ قرار می‌گیرد.

$$x = -\frac{a}{2(-a)} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{a}{4} + \frac{a}{2} + 2 = \frac{a}{4} + 2$$

$$\text{رأس} \left(\frac{1}{2}, \frac{a}{4} + 2 \right)$$

نقطه فوق بر روی سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ قرار دارد.

$$\frac{a}{4} + 2 = 2b \times \frac{1}{4} - \frac{b}{2} - 1 \Rightarrow \frac{a}{4} + 2 = -1 \Rightarrow \frac{a}{4} = -3 \Rightarrow a = -12$$

حال رأس سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ را می‌یابیم:

$$x = -\frac{-b}{2 \times 2b} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 2b \times \frac{1}{16} - \frac{b}{4} - 1 = \frac{b}{8} - \frac{b}{4} - 1 \Rightarrow y = -\frac{b}{8} - 1 \Rightarrow \text{رأس} \left(\frac{1}{4}, -\frac{b}{8} - 1 \right)$$

نقطه فوق بر روی سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ قرار دارد.

$$-\frac{b}{8} - 1 = -\frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 2 = \frac{39}{16} + 2 \xrightarrow{a=-12} -\frac{b}{8} - 1 = \frac{-36}{16} + 2 \Rightarrow -\frac{b}{8} - 1 = -\frac{9}{4} + 2$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{8} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = -6 \Rightarrow b - a = -6 - (-12) = 6$$

به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

مرجع: سراسری-۱۳۹۶

۴

۵

۲

۱

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم که در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع جذر هر دو ریشه برابر است با:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}, \quad S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

پس در این سؤال داریم:

$$2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{2}, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow m = 6$$

به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به

مرجع: سراسری-۱۳۹۵

طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

هیچ مقدار m ۴

هر مقدار m ۳

$-1 < m < 2$ ۲

$m > 2$ ۱

پاسخ: گزینه ۴

سهمی موردنظر محور x ها را در دو نقطه به طول منفی قطع می‌کند، یعنی معادله زیر دو ریشه منفی دارد. پس باید سه شرط $\Delta > 0$ (زیرا دو

ریشه دارد) و $\frac{c}{a} > 0$ (ضرب دو عدد منفی، مثبت است) و $-\frac{b}{a} < 0$ (جمع دو عدد منفی، منفی است) را لحاظ کنیم.

$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-2(m+1))^2 - 4(m-2)(12) > 0$$

$$\Rightarrow 4(m^2 + 2m + 1 - 12m + 24) > 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}} (m^2 - 10m + 25) > 0 \Rightarrow (m-5)^2 > 0$$

$$\Rightarrow m \in R - \{5\}$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (1)$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \xrightarrow{m-2 > 0} m+1 < 0 \Rightarrow m < -1 \quad (2)$$

مجموعه‌های (۱) و (۲) هیچ اشتراکی ندارد.

اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ ، $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ باشد، مقدار k چقدر است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۳ (۴)

-۳ (۳)

$\frac{27}{5}$ (۲)

$-\frac{27}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ از روی $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ دو تا از ریشه‌ها یعنی α و β به دست می‌آیند.

$$x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$x = -1$ را در معادله $4x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ قرار می‌دهیم.

$$4(-1)^3 + k - 9(-1) - 2 = 0 \Rightarrow -4 + k + 9 - 2 = 0 \Rightarrow k = 3$$

سهمی $y = -x^2 + 4x + 1$ خط راست گذرا از نقطه $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ -1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصله رأس سهمی از نقطه M ، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$y = -x^2 + 4x + 1 \rightarrow S \begin{vmatrix} -\frac{b}{2a} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

معادله خط گذرنده از نقطه $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ و عرض از مبدأ -1 به صورت $y = x - 1$ است.

$$\text{تلاقی: } x - 1 = -x^2 + 4x + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 2, x = -1$$

$$\rightarrow x_M = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{y=x-1} y_M = -\frac{1}{2}$$

$$S \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}, M \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \rightarrow SM = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

بنابراین این اندازه $\frac{1}{2}$ برابر $\sqrt{26}$ است.

اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

است؟

۱۲ (۴)

۹ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ چون a و b ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ هستند، داریم:

$$a - b = \frac{a + b - 1}{1} \Rightarrow ab = a + b - 1 \quad (1)$$

$$a + b = \frac{-(a^2 + b^2 - 12)}{1} = a^2 + b^2 - 12$$

از اتحاد $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ استفاده می‌کنیم:

$$a + b = (a + b)^2 - 2ab - 12 \xrightarrow{(1)} a + b = (a + b)^2 - 2(a + b - 1) - 12$$

با فرض $a + b = t$ داریم:

$$t = t^2 - 2(t - 1) - 12 = t^2 - 2t + 2 - 12 \Rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t - 5)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -2 \end{cases}$$

نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

$-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{7}{6}$ (۳) $-\frac{5}{18}$ (۲) $-\frac{1}{18}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ معادله تلاقی سهمی داده شده و خط $y = -x$ باید ریشه مضاعف بدهد.

$$\begin{cases} y = 3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3} \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3} = -x$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2mx - x + m + \frac{4}{3} = -x \Rightarrow 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \times 3(m + \frac{4}{3}) = 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - 3(m + \frac{4}{3}) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 4)(m + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}$$

ریشه مضاعف معادله (۱) باید در ناحیه دوم باشد، پس داریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m}{2 \times 3} = -\frac{m}{3} < 0 \Rightarrow m > 0$$

بنابراین $m = 4$ قابل قبول است و داریم:

$$y = 3x^2 + (2 \times 4 - 1)x + 4 + \frac{4}{3} = 3x^2 + 7x + \frac{16}{3}$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2 \times 3} = -\frac{7}{6}$$

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2(a + 1)x + 2a - 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار a ، به ترتیب سه عدد a ، α و β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

1 (۴) -1 (۳) 2 (۲) -2 (۱)

پاسخ: گزینه ۴ با نوشتن شرط تشکیل دنباله هندسی داریم:

$$x^2 + 2(a + 1)x + 2a - 1 = 0$$

$$\alpha, a, \beta \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} a^2 = \alpha \cdot \beta = p \Rightarrow a^2 = \frac{2a - 1}{1} = 2a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

توجه کنید که به ازای $a = 1$ معادله حاصل دارای دو ریشه متمایز است.

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0$$

از تقسیم انداز قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

$\frac{2}{3 + \sqrt{5}}$ (۴) $\frac{2}{1 + \sqrt{5}}$ (۳) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

به $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ عدد طلایی گویند.

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{(\cdot)^2} \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

ریشه‌های معادله $x^2 - (a+1)x + a = 0$ دو عدد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (3a+1)x + b = 0$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

- ۱) ۳۳ ۲) ۲۱ ۳) ۱۳ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲

$$x^2 - (a+1)x + a = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = a \end{cases} \xrightarrow{\text{دو ریشه فرد متوالی}} a = 3$$

$$x^2 - (3a+1)x + b = 0 \xrightarrow{a=3} x^2 - 10x + b = 0 \xrightarrow{\text{دو ریشه زوج متوالی}} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 6 \end{cases} \quad S=10$$

$$y_1 \times y_2 - x_1 \times x_2 = 24 - 3 = 21$$

فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4x = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_1^3 + \frac{1}{x_1}$ و $x_2^3 + \frac{1}{x_2}$ است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

- ۱) $4x^2 = 51x + 221$ ۲) $4x^2 + 51x = 221$ ۳) $4x^2 = 51x + 197$ ۴) $4x^2 + 51x = 197$

پاسخ: گزینه ۱ در معادله اولیه $x^2 - 4x = 0$ داریم: $P = -4$ و $S = 1$

$$S' = x_1^3 + \frac{1}{x_1} + x_2^3 + \frac{1}{x_2} = (x_1^3 + x_2^3) + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = (S^3 - 3PS) + \frac{S}{P} \xrightarrow[S=-4]{S=1} S' = 1 + 12 - \frac{1}{4} = \frac{51}{4}$$

نکته: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های یک معادله درجه ۲ باشند داریم:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS \end{cases}$$

$$P' = (x_1^3 + \frac{1}{x_1})(x_2^3 + \frac{1}{x_2}) = (x_1 x_2)^3 + x_1^2 + x_2^2 = P^3 + S^2 - 2P + \frac{1}{P}$$

$$= -64 + 1 + 8 - \frac{1}{4} = -\frac{221}{4}$$

$$x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 51x - 221 = 0$$

بُرد تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ برابر $[b, c]$ است. اگر $k = a^2 - 3a + 3$ باشد، حاصل ضرب مقادیر a کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

- ۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

پاسخ: گزینه ۱

$$b \leq f(x) \leq c \xrightarrow{\times k} b = kb \leq kf(x) \leq ck = c$$

$$\Rightarrow k = 1$$

$$\Rightarrow 1 = a^2 - 3a + 3 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ضرب مقادیر ممکن برای } a = 2 \times 1 = 2$$

در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف a ، کمترین مقدار سهمی $y = ax^2 + 3x + a$ برابر $\frac{7}{8}$ است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

هیچ مقدار a (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$y = ax^2 + 3x + a, y_{\min} = y_s = \frac{7}{8}$$

از آنجایی که سهمی دارای کمترین مقدار است، a باید مثبت باشد.

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{9a^2 - 9}{4a} = \frac{7}{8} \Rightarrow 8a^2 - 7a - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(8a + 9) = 0 \Rightarrow a = 2 \checkmark, a = -\frac{9}{8} \text{ غ ق}$$

صفرهای تابع $y = mx^2 - 4x - (m + 4)$ و نقطه تقاطع آن با محور y ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این

مثلث برابر ۳ باشد، اختلاف طول رأس سهمی‌های رسم شده توسط مقادیر مختلف m کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

$\frac{9}{2}$ (۴)

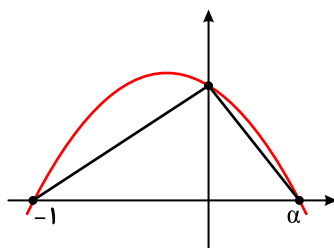
$\frac{7}{4}$ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

$\frac{7}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به آنکه مجموع ضرایب جمله درجه دوم و عدد ثابت با ضریب جمله درجه یک

برابر است، از این روی یکی از ریشه‌ها ۱- و دیگری $\frac{m+4}{m}$ است و داریم:



$$f(0) = -(m + 4); |a - (-1)| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16 + 4m^2 + 16m}}{|m|} = \frac{2|m + 2|}{|m|}$$

$$S = \frac{|a - (-1)| \times |-(m + 4)|}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\left| \frac{2(m + 2)}{m} \times (m + 4) \right|}{2} \Rightarrow m^2 + 6m + 8 = 3|m| \xrightarrow{m < 0} \begin{cases} m = -1 \\ m = -8 \end{cases}$$

$$y = mx^2 - 4x - (m + 4) \begin{cases} \xrightarrow{m = -1} y = -x^2 - 4x - 3 \Rightarrow x_A = -2 \\ \xrightarrow{m = -8} y = -8x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x_A = -\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \left| -2 - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| = \frac{7}{4}$$

سهمی $16a$ $y = ax^2 + 7x + 1$ در نقطه A بر نیمساز ناحیه چهارم محورهای مختصات مماس است. مقدار a ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

-۱ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$-\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ معادله حاصل از برخورد خط و سهمی باید ریشه مضاعف داشته باشد، پس:

$$-x = ax^2 + 7x + 16a \Rightarrow ax^2 + 8x + 16a = 0$$

$$\Delta = 64 - 4a \times 16a \Rightarrow 64 - 64a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

به ازای $a = 1$ ریشه مضاعف مقداری منفی است. پس نقطه مماس در ناحیه چهارم قرار نمی گیرد. پس $a = 1$ غیر قابل قبول است.

به ازای $a = -1$ طول نقطه مماس مثبت و در ناحیه چهارم است.

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x-3}{x+1} < 3$ ، به کدام صورت است؟

$x < -6$ (۴)

$x > 4$ (۳)

$\mathbb{R} - [-4, 6]$ (۲)

$\mathbb{R} - [-6, 4]$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جوابها اشتراک می گیریم.

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & + & + \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4$$

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -6 & -1 & +\infty \\ \hline & - & + & - & - \end{array} \Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1$$

$\Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1$ (II)

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x > 4$ یا $x < -6$ می رسیم که همان $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

مجموعه جواب نامعادله $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ ، به صورت بازه، کدام است؟

$(-1, 2)$ (۴)

$(-1, 2) \cup (2, 4)$ (۳)

$(2, 4)$ (۲)

$(-4, 1) \cup (2, 3)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ روش اول:

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\rightarrow \frac{7x-8-x^2-x}{(x-2)(x+1)} > 0 \rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2-6x+8}{(x-2)(x+1)} < 0 \rightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x-4}{x+1} < 0 \xrightarrow[\text{توجه کنید } x=2 \text{ مخرج را صفر می کند.}]{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & 2 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & - & + & + \end{array}$$

$\rightarrow -1 < x < 2 \text{ یا } 2 < x < 4 \rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می کنیم.

گزینه دوم حذف می شود $\rightarrow$ درست : $x = 0 \rightarrow \frac{-8}{-2} > 0$

گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند $\rightarrow$ درست : $x = 3 \rightarrow \frac{13}{4} > 3$

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x-1}{x+1} < 3$ ، کدام است؟

$\mathbb{R} - [-4, -1]$ (۴)

$\mathbb{R} - [-4, 0]$ (۳)

$(4, +\infty)$ (۲)

$(0, +\infty)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1}{1} > 0 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-1} \mid \begin{array}{c} -\infty \quad -1 \quad 0 \quad +\infty \\ + \quad - \quad + \quad - \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \quad (I)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3}{1} < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x-4}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-1} \mid \begin{array}{c} -\infty \quad -4 \quad -1 \quad +\infty \\ - \quad + \quad - \quad + \end{array} \Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

اشتراک II, I $\Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-4, 0]$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

نامعادله
گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند. $\Rightarrow$ درست : $x = -5 \rightarrow -1 < \frac{11}{4} < 3$

نامعادله
گزینه چهارم حذف می‌شود. $\Rightarrow$ نادرست : $x = 0 \rightarrow -1 < -1 < 3$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

مجموعه جواب نامعادله $\frac{x+1}{2x-1} < 3$ ، کدام است؟

$(0, 8, 2)$ (۴)

$(1, 2)$ (۳)

$(0, 8, 1, 2)$ (۲)

$(0, 6, 1, 5)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{1} > 0 \rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x}{-1} \mid \begin{array}{c} -\infty \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad +\infty \\ - \quad + \quad - \quad + \end{array} \rightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \quad (I)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - \frac{3}{1} < 0 \rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x}{-1} \mid \begin{array}{c} -\infty \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{5} \quad +\infty \\ - \quad + \quad - \quad + \end{array} \rightarrow x > \frac{1}{2} \text{ یا } x < \frac{4}{5} \quad (II)$$

$$(۲ < x < ۸) \text{ از اشتراک } I \text{ و } II \text{ به جواب } ۲ < x < \frac{۴}{۵} \text{ می‌رسیم}$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم

$$x = ۱,۵ \xrightarrow{\text{نامعادله}} ۱ < \frac{۲,۵}{۲} < ۳ \text{ : درست} \rightarrow \text{گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند}$$

$$x = ۱ \xrightarrow{\text{نامعادله}} ۱ < ۲ < ۳ \text{ : درست} \rightarrow \text{گزینه سوم حذف می‌شود}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۶

$$\text{مجموعه جواب نامعادله } ۳ < \frac{۳x+۱}{x-۳} < -۱, \text{ به کدام صورت است؟}$$

$$\text{① } x < \frac{۱}{۲} \quad \text{② } x < ۳ \quad \text{③ } -\frac{۱}{۲} < x < ۳ \quad \text{④ } \frac{۱}{۲} < x < ۳$$

پاسخ: گزینه ۱ روش اول:

نامعادله‌ی داده شده را به دو نامعادله تبدیل کرده و از جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{۳x+۱}{x-۳} > -۱ \rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۳} + ۱ > ۰ \rightarrow \frac{۳x+۱+x-۳}{x-۳} > ۰ \rightarrow \frac{۴x-۲}{x-۳} > ۰$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & 3 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & + \end{array} \rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > 3 \quad (I)$$

$$\frac{۳x+۱}{x-۳} < ۳ \rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۳} - ۳ < ۰ \rightarrow \frac{۳x+۱-۳x+۹}{x-۳} < ۰ \rightarrow \frac{۱۰}{x-۳} < ۰ \rightarrow x-۳ < ۰ \rightarrow x < 3 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $x < \frac{1}{2}$ می‌رسیم.

روش دوم:

تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = ۱ \xrightarrow{\text{نامعادله}} -۱ < \frac{۴}{-۲} < ۳ \rightarrow \text{نادرست است (گزینه‌های دوم و سوم و چهارم حذف می‌شوند).}$$

$$\text{در بازه } (a, b) \text{ عبارت } ۱۵x^۲ + ۷۳x + ۱۴ \text{ منفی و عبارت } \left| \frac{x-۱}{۲} - ۱ \right| \text{ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار } b-a$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

کدام است؟

$$\text{① } \frac{۵}{۳} \quad \text{② } \frac{۲۳}{۳} \quad \text{③ } \frac{۴}{۱۵} \quad \text{④ } \frac{۶۷}{۱۵}$$

پاسخ: گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$۱۵x^۲ + ۷۳x + ۱۴ < ۰ \Rightarrow \underbrace{(۵x+۱)}_{x=-\frac{1}{5}} \underbrace{(۳x+۱۴)}_{x=-\frac{14}{3}} < ۰ \Rightarrow \frac{-۱۴}{۳} < x < \frac{-۱}{۵} \quad (I)$$

$$\left| \frac{x-۱}{۲} - ۱ \right| > ۳ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-۱}{۲} - ۱ > ۳ \Rightarrow \frac{x-۱}{۲} > ۴ \Rightarrow x > ۹ \\ \frac{x-۱}{۲} - ۱ < -۳ \Rightarrow \frac{x-۱}{۲} < -۲ \Rightarrow x < -۳ \end{array} \right\} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I), (II)}} -\frac{۱۴}{۳} < x < -۳ \Rightarrow \max(b-a) = -۳ - \left(-\frac{۱۴}{۳}\right) = \frac{۵}{۳}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

اگر $0 < \frac{1-3x}{x+1} < 2$ باشد، مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{2}\right]$ چند عضو دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا نامعادله دوطرفه $0 < \frac{1-3x}{x+1} < 2$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{1-3x}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x}{1-3x} \quad \begin{array}{c|ccc} & -1 & & \frac{1}{3} \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1-3x}{x+1} > -2 \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1-3x+2x+2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3-x} \quad \begin{array}{c|ccc} & -1 & & 3 \\ \hline & - & 0 & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow -1 < x < 3 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب نامعادله است.

$$(1) \cap (2) : \frac{1}{3} < x < 3$$

حال حدود $\frac{x}{2}$ و سپس $\left[\frac{x}{2}\right]$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0, 1$$

سهمی $y = -mx^2 + mx + 1$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند

مقدار صحیح است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۴ (۴) صفر

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ معادله تلاقی خط و سهمی نباید ریشه داشته باشد:

$$\begin{cases} y = -mx^2 + mx + 1 \\ y = -m - x \end{cases} \Rightarrow -mx^2 + mx + 1 = -m - x \Rightarrow -mx^2 + (m+1)x + (m+1) = 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow (m+1)^2 + 4m(m+1) < 0 \Rightarrow (m+1)(m+1+4m) < 0$$

$\Delta m+1$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \frac{x}{-1 \quad -\frac{1}{5}} \quad \begin{array}{c|ccc} & -1 & & -\frac{1}{5} \\ \hline & + & 0 & - & + \end{array} \quad -1 < m < -\frac{1}{5} \Rightarrow \text{هیچ مقدار صحیح}$$

$m = -1, m = -\frac{1}{5}$

به ازای چند مقدار طبیعی از دامنه تابع $y = -\frac{1}{3-x}$ ، نمودار این تابع بالای $y = -4$ و پایین $y = 0$ قرار دارد؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۴ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ضابطه تابع را بین -4 و صفر قرار می‌دهیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

$$-4 < \frac{-1}{3-x} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - \frac{1}{3-x} > 0 \Rightarrow \frac{11-4x}{3-x} > 0 & (1) \\ \frac{-1}{3-x} < 0 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{11-4x}{3-x} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x & \frac{11}{4}=2.75 & 3 & \\ \hline & + & - & + \end{array} \Rightarrow (-\infty, 2.75) \cup (3, +\infty) \quad (1)$$

$$\frac{-1}{3-x} < 0 \Rightarrow \frac{1}{3-x} > 0 \Rightarrow 3-x > 0 \rightarrow x < 3 \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ \rightarrow x \in \mathbb{R} - [2.75, 3] \\ (2) \\ \rightarrow x < 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x < 3 \xrightarrow{\text{اعداد}} x = 1, 2 \xrightarrow{\text{طبیعی}}$$

بازه $(0, \frac{1}{4})$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار تابع $y = 2x^2 + \frac{3}{2}x + c$ پایین نمودار تابع $y = \frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

$$\begin{array}{llll} -\frac{3}{4} \quad (1) & -\frac{1}{2} \quad (2) & -\frac{1}{4} \quad (3) & -\frac{3}{8} \quad (4) \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۳

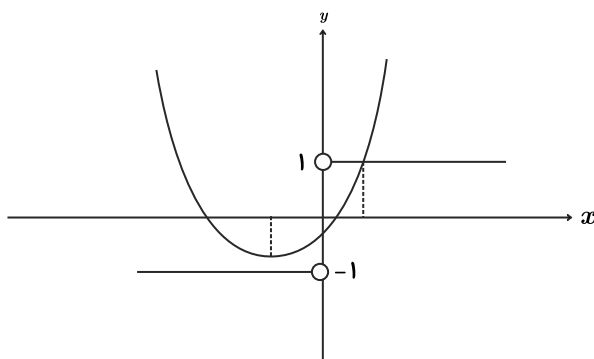
چون در بازه $(0, \frac{1}{4})$ مقادیر x مثبت است؛ پس تابع $y = \frac{x}{|x|}$ به تابع ثابت $y = 1$ تبدیل می‌شود. حال چون نمودار تابع $y = 2x^2 + \frac{3}{2}x + c$ پایین خط $y = 1$ قرار دارد پس باید داشته باشیم:

$$2x^2 + \frac{3}{2}x + c < 1 \Rightarrow 2x^2 + \frac{3}{2}x + c - 1 < 0$$

حال باید با توجه به بازه داده شده، مقدار $x = \frac{1}{4}$ ریشه عبارت درجه دوم $(2x^2 + \frac{3}{2}x + c - 1)$ باشد یعنی باید داشته باشیم:

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + c - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + c - 1 = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$



توجه شود که با توجه به شکل فوق جواب به دست آمده با اطلاعات مسئله مطابقت دارد.

بازه $(-\frac{5}{4}, 0)$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که نمودار $y = -2x^2 - \frac{3}{2}x + c$ بالای نمودار $y = \frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$x \in (-\frac{5}{4}, 0) \Rightarrow -2x^2 - \frac{3}{2}x + c > -1$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 3x - (2c + 2) < 0$$

با توجه به بازه داده شده $-\frac{5}{4}$ باید ریشه عبارت درجه دوم بالا باشد.

$$4(-\frac{5}{4})^2 + 3(-\frac{5}{4}) - (2c + 2) = 0$$

$$\frac{25}{4} - \frac{15}{4} - 2 = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

مجموعه جوابی نامعادله $(2a + 3)x^2 + (4b - 5)x + 4c + 1 < 0$ به صورت بازه $(a, +\infty)$ است. اگر b عدد طبیعی باشد، مقدار $\frac{a}{c}$ کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۴

$-2,4$ (۴)

$2,4$ (۳)

$-1,2$ (۲)

$1,2$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ چون مجموعه جواب نامعادله درجه دوم به صورت بازه $(a, +\infty)$ است؛ پس نامعادله نمی‌تواند درجه دوم باشد (زیرا در نامعادله درجه دوم باید مجموعه جواب یا بین دو ریشه یا خارج دو ریشه باشد)؛ پس به‌ناچار باید $2a + 3 = 0$ یعنی $a = -\frac{3}{2}$ است. در این صورت نامعادله به صورت زیر خواهد بود:

$$(4b - 5)x + 4c + 1 < 0$$

بنابراین برای اینکه مجموعه جواب به صورت $(a, +\infty)$ باشد، باید ضریب x منفی باشد تا جهت نامعادله عوض شود.

$$x > \frac{-4c - 1}{4b - 5}$$

چون b طبیعی است، برای اینکه $4b - 5 < 0$ باید الزاماً $b = 1$ باشد.

$$\Rightarrow x > \frac{-4c - 1}{-1} \Rightarrow x > 4c + 1$$

طبق فرض باید $a = 4c + 1$ که در این صورت داریم:

$$4c + 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow c = -\frac{5}{8} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{5}{8}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۴

برای چند عدد طبیعی، ریشه دوم عبارت $\frac{1-a}{9-3a}$ وجود ندارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه عبارت $\frac{1-a}{9-3a}$ در صورتی فاقد ریشه دوم است که منفی باشد؛ یعنی داشته باشیم:

a	۱	۳
$1-a$	+	-
$9-3a$	+	-
$\frac{1-a}{9-3a}$	+	-

$$\frac{1-a}{9-3a} < 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها: } a=1, a=3$$

طبق جدول تعیین علامت: $1 < a < 3$

همچنین اگر $a=3$ باشد، عبارت تعریف نشده خواهد بود؛ پس به ازای دو مقدار $a=2$ و $a=3$ ریشه دوم عبارت مورد نظر وجود ندارد.

سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته

است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

مرجع: سراسری-۱۳۹۸

$$x=vt \Rightarrow t=\frac{x}{v}$$

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم که $x=vt$ و از آنجا $t=\frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v در نظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب $100+v$ و در خلاف جهت حرکت آب $100-v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1200}{100+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1200}{100-v} \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = 5 \Rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$15 - 10 = 5 \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{1200(100+v) - 1200(100-v)}{(100-v)(100+v)} = \frac{120000 + 1200v - 120000 + 1200v}{10000 - v^2} = 5$$

$$\Rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \Rightarrow 480v = 10000 - v^2$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = (v-20)(v+500) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v=20 \text{ فوق} \\ v=-500 \text{ غرق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v=20$ برسید.

پرنده‌ای فاصله ۱ کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در

ساعت و مدت رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

مرجع: خارج از کشور-۱۳۹۸

۱۵ (۴)

۱۳٫۵ (۳)

۱۲٫۵ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم که $x=vt$ و از آنجا $t=\frac{x}{v}$ است. اگر سرعت پرواز پرنده را v در نظر بگیریم، در این صورت سرعت رفت $v+5$

و سرعت برگشت $v-5$ است.

$$\frac{x}{v}$$

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1}{v+5} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1}{v-5} \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{9}{60}$$

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{9}{60} \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{v - 5 + v + 5}{(v + 5)(v - 5)} = \frac{2v}{v^2 - 25} = \frac{3}{20} \Rightarrow 3v^2 - 75 = 40v$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 1600 + 900 = 2500} \begin{cases} v_1 = \frac{40 + 50}{6} = 15 \text{ قق} \\ v_2 = \frac{40 - 50}{6} = \frac{-5}{3} \text{ غق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v = 15$ برسید.
بهر روز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{k+9+k}{k(k+9)} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k(k+9)} = \frac{1}{20}$$

پاسخ: گزینه ۴ اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به تنهایی در $k+9$ ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k(k+9)} = \frac{1}{20} \Rightarrow 2k(k+9) = k^2 + 9k \Rightarrow 2k^2 + 18k = k^2 + 9k \Rightarrow k^2 + 9k = 0 \Rightarrow k(k+9) = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ یا } k = -9$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

$$\text{مجموع ریشه‌های معادله } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9} \text{ کدام است؟}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1,75 & 2 & 2,25 \end{matrix}$$

پاسخ: گزینه ۳ طرف سمت چپ را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{x^2 + (x^2 - 2x + 1)}{[x(1-x)]^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2(1-x)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\xrightarrow{x^2 - x = t} \frac{2t + 1}{t^2} = \frac{160}{9} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2} = \frac{160 + 9}{9} \Rightarrow \left(\frac{t+1}{t}\right)^2 = \frac{169}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{t} = \frac{13}{3} \\ 1 + \frac{1}{t} = \frac{-13}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{10}{3}, \frac{-16}{3} \Rightarrow t = \frac{3}{10}, \frac{-3}{16} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = \frac{3}{10} \\ x^2 - x = \frac{-3}{16} \end{cases}$$

هر دو معادله $x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$ و $x^2 - x + \frac{3}{10} = 0$ دارای جواب هستند و مجموع ریشه‌های هر کدام برابر ۱ است، پس مجموع جواب‌های معادله برابر $1 + 1 = 2$ است.

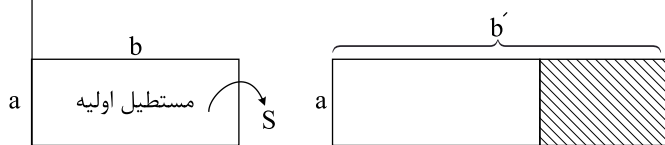
نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,3 + \sqrt{5} & 0,2(1 + \sqrt{5}) & 0,6 + 0,2\sqrt{5} & 0,4(1 + \sqrt{5}) \end{matrix}$$

پاسخ: گزینه ۴


 $\frac{b}{a} = \frac{5}{4}$, مستطیل طلایی $\frac{b'}{a} = \frac{b' + a}{b'} \Rightarrow b'^2 - ab' - a^2 = 0$

$\Rightarrow \Delta = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow b' = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = a(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2})$

$\Rightarrow b' = a(\frac{1 + \sqrt{5}}{2})$ ق ق $\frac{s'}{s} = \frac{ab'}{ab} = \frac{a(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{\frac{5}{4}a} = \frac{2}{5}(1 + \sqrt{5}) = 0,4(1 + \sqrt{5})$

$\frac{s'}{s} = \frac{ab'}{ab} = \frac{a(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{\frac{5}{4}a} = \frac{2}{5}(1 + \sqrt{5}) = 0,4(1 + \sqrt{5})$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

اگر $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$ باشد، حاصل $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

۴٫۵ (۴)

۳٫۵ (۳)

۲٫۵ (۲)

۱٫۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ برای حل معادلات گنگ طرفین را به توان مناسب می‌رسانیم تا رادیکال‌ها از بین بروند.

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a \rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 - 112 = 144 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{16 + 12}{14} = 2 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند.)} \\ a = \frac{16 - 12}{14} = \frac{2}{7} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4,5$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۴

حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از تغییر متغیر $x^2 + 4x + 5 = t$ داریم:

$$x^2 + 4x + 5 - 2 = \sqrt{x^2 + 4x + 5} \Rightarrow t - 2 = \sqrt{t} \quad (I)$$

چون عبارت سمت راست همواره مثبت است باید عبارت سمت چپ هم همواره مثبت باشد.

$$t - 2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$$

حال طرفین عبارت I را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(t - 2)^2 = (\sqrt{t})^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow \text{با توجه به اینکه } t \geq 2 \text{، پس غیر قابل قبول است.} \\ t = \frac{c}{a} = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 5 = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0 \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

اگر $1 = 2a + \sqrt{3a^2 + 16}$ باشد، عدد $4a + 9$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۵ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$2a + \sqrt{3a + 16} = 1 \rightarrow \sqrt{3a + 16} = 1 - 2a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3a + 16 = 1 + 4a^2 - 4a$$

$$\rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 240 = 289} \begin{cases} a = \frac{7 + 17}{8} = 3 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ a = \frac{7 - 17}{8} = \frac{-5}{4} \text{ قق} \end{cases}$$

$$\text{پس: } 4a + 9 = 4\left(\frac{-5}{4}\right) + 9 = 4$$

فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ تا مبدأ مختصات کدام است؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۰

گزینه ۱ $\sqrt{3}$ گزینه ۲ $\sqrt{6}$ گزینه ۳ $2\sqrt{3}$ گزینه ۴ $\sqrt{15}$

پاسخ: گزینه ۴ کافی است دو معادله را در یک دستگاه حل کنیم تا محل تلاقی به دست آید. دقت کنید $y \geq 3$ است.

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 = y + 3 + y - 3 - 2\sqrt{y^2 - 9} \xrightarrow{x^2 = 2y} \sqrt{y^2 - 9} = 0 \Rightarrow y = \pm 3$$

$y \geq 3 \rightarrow y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6} \Rightarrow \text{محل تلاقی: } A(\sqrt{6}, 3)$

نکته: فاصله هر نقطه با فرم $A(x, y)$ تا مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\xrightarrow{\text{فاصله}} d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{4-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۲

گزینه ۱ ۳ گزینه ۲ ۲ گزینه ۳ ۱ گزینه ۴ صفر

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، مقداری نامنفی است، پس:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ \sqrt{4-x} \rightarrow 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

یعنی فقط $x = 2$ می‌تواند قابل قبول باشد که آن را امتحان می‌کنیم.

$$\underbrace{\sqrt{2 \times 2 - 3}}_1 = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2-2}}}_{\sqrt{2}} - \underbrace{\sqrt{4-2}}_0 \quad \times \quad \text{قق}$$

در نتیجه معادله داده شده، فاقد ریشه حقیقی است.

معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشه مثبت دارد؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۱

گزینه ۱ صفر گزینه ۲ ۱ گزینه ۳ ۲ گزینه ۴ ۳

پاسخ: گزینه ۲ $x > 1$: شرط معادله

$$\frac{\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \sqrt{x+1} \left(\frac{1}{3+\sqrt{x-1}} - \frac{1}{3-\sqrt{x-1}} \right) = \frac{x-1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} \left(\frac{3 - \sqrt{x-1} - 3 - \sqrt{x-1}}{(3 + \sqrt{x-1})(3 - \sqrt{x-1})} \right) = (x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{x+1} \times \frac{-2\sqrt{x-1}}{9 - (x-1)} = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}}{9 - x + 1} = \sqrt{x-1}$$

با توجه به معادله اصلی $x \neq 1$ است و می توان $\sqrt{x-1}$ را در معادله فوق از طرفین ساده کرد.

$$\frac{-2\sqrt{x+1}}{10-x} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = x-10 \quad (1) \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(x+1) = (x-10)^2 \Rightarrow x^2 - 20x + 100 = 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 24x + 96 = 0 \Rightarrow \Delta = (-24)^2 - 4 \times 1 \times 96 = 192$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{192}}{2} = \frac{24 \pm 8\sqrt{3}}{2} = 12 \pm 4\sqrt{3}$$

در معادله (۱) باید $x \geq 10$ باشد که در این صورت فقط $x = 12 + 4\sqrt{3}$ قابل قبول است. پس معادله فوق فقط یک ریشه مثبت دارد.

تعداد جواب های معادله $\sqrt{x + \sqrt{-x^3 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} = x + 2$ ۹۶
است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۴) صفر

۳) ۱

۲) ۲

۱) ۳

پاسخ: گزینه ۳ لازم است زیر رادیکال ها نامنفی باشد، بنابراین داریم:

$$1) -x^3 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \Rightarrow -x^2(x-4) + 25(x-4) \geq 0 \Rightarrow (x-4)(-x^2 + 25) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(5+x)(5-x) \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -5 & 4 & 5 \\ \hline & + & - & + \end{array} \Rightarrow x \leq -5 \quad 4 \leq x \leq 5 \quad (I)$$

$$2) -x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(-x+4) \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 2 & 4 & \\ \hline & - & + & - \end{array} \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \quad (II)$$

لازم است ریشه متعلق به اشتراک جواب های به دست آمده باشد. اشتراک این دو جواب $\{4\}$ است؛ پس معادله نمی تواند ریشه ای غیر از $x = 4$ داشته باشد. به ازای $x = 4$ معادله به تساوی درست $6 = 4 + 2$ تبدیل می شود، پس $x = 4$ تنها ریشه معادله است.

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

معادله $\frac{1}{\sqrt{2-x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{297x}{5\sqrt{2-x}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

۴) ۳

۳) ۲

۲) ۱

۱) صفر

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{2-x} = t$ داریم:

$$\frac{1}{2+t} - \frac{1}{2-t} = \frac{t^2}{5t} = \frac{t}{5} \Rightarrow \frac{2-t-(2+t)}{(2+t)(2-t)} = \frac{t}{5} \Rightarrow \frac{-2t}{4-t^2} = \frac{t}{5}$$

یکی از ریشه های معادله فوق $t = 0$ است، داریم:

$$\frac{-2}{4-t^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow 4-t^2 = -10 \Rightarrow t^2 = 14 \Rightarrow t = \pm\sqrt{14}$$

چون $t = \sqrt{2-x} \geq 0$ پس $t = -\sqrt{14}$ غیر قابل قبول است، داریم:

$$t = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$t = \sqrt{14} \Rightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{14} \Rightarrow 2-x = 14 \Rightarrow x = -12$$

توجه کنید که $x = 2$ غیر قابل قبول است، زیرا در سمت راست معادله مخرج را صفر می‌کند، بنابراین معادله جواب مثبت ندارد.

مرجع: سراسری-۱۴۰۳ اگر $4 = \sqrt{x+a} - \sqrt{x-4}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - 2$ کدام است؟
 ۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{a}{4}$ ۴) $\frac{a}{2}$

پاسخ: گزینه ۴ طبق فرض $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2$ است. حال اگر فرض کنیم $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} = t$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2 \\ \sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} = t \end{cases} \xrightarrow{\text{در هم ضرب}} (x+a) - (x-4) = 2t$$

$$a+4 = 2t \Rightarrow t = \frac{a+4}{2}$$

حاصل عبارت مطلوب برابر $2-t$ است که خواهیم داشت:

$$t - 2 = \frac{a+4}{2} - 2 = \frac{a}{2}$$

مجموعه جواب‌های معادله $\frac{x}{x-1} + \frac{a}{x} + \frac{3}{x^2-x} = 0$ فقط یک عضو دارد. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام

مرجع: متآزمون-۱۴۰۱

است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ دو طرف معادله را در $x^2 - x$ ضرب می‌کنیم:

$$x^2 + ax - a + 3 = 0 \quad (*)$$

اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله (*) فقط یک جواب دارد:

$$\Delta = a^2 - 4(-a+3) = 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+6) = 0 \Rightarrow a = 2, -6$$

اگر $a = 2$ باشد، جواب معادله $x = -1$ است و اگر $a = -6$ باشد، جواب معادله $x = 3$ است. دقت کنید که این جواب‌ها مخالف ۱ و ۰ هستند و بنابراین قابل قبول هستند.

همچنین اگر معادله (*) یکی از جواب‌هایش $x = 0$ یا $x = 1$ باشد، معادله موردنظر مسأله فقط یک جواب خواهد داشت، زیرا $x = 0$ و $x = 1$ قابل قبول نیستند.

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 0 - a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + a - a + 3 = 0 \quad \text{غ ق ق}$$

پس a می‌تواند ۲، -۶ و ۳ باشد که مجموع آن‌ها -۱ است.

فاصله نقطه تلاقی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}}$ و تابع ثابت $g(x) = \sqrt{6}$ از مبدأ مختصات کدام

مرجع: متآزمون-۱۴۰۱

است؟

۱) $3\sqrt{4}$ ۲) $3\sqrt{6}$ ۳) $5\sqrt{6}$ ۴) $5\sqrt{8}$

پاسخ: گزینه ۳

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{\frac{20}{x} + 1} + \sqrt{\frac{20}{x} - 1} = \sqrt{6} \xrightarrow{\frac{20}{x} = t} \sqrt{t+1} + \sqrt{t-1} = \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{t+1} = \sqrt{6} - \sqrt{t-1}$$

توان ۲

$$\rightarrow t+1 = 6 + t - 1 - 2\sqrt{2(t-1)} \Rightarrow \sqrt{6(t-1)} = 2 \Rightarrow 6(t-1) = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{20}{x} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = 12 \checkmark$$

$$\Rightarrow A(12, \sqrt{6}) \Rightarrow OA = \sqrt{144 + 6} = 5\sqrt{6}$$

مرجع: متآزمون- ۱۴۰۲

اگر $x = a$ جواب معادله $x + \sqrt{x-2} = 8$ باشد، حاصل $\frac{a}{a+2}$ کدام است؟

۱٫۵ (۴)

۱٫۲۵ (۳)

۰٫۵ (۲)

۰٫۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ در معادله داده شده، عبارت $\sqrt{x-2}$ را تنها در یک طرف تساوی قرار داده و داریم:

$$x + \sqrt{x-2} = 8 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 8 - x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x - 2 = (8 - x)^2 \Rightarrow x - 2 = 64 - 16x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 17x + 66 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 11 \end{cases}$$

جوابها را در معادله اصلی آزمایش می‌کنیم.

$$x = 6 \Rightarrow 6 + \sqrt{6-2} = 8 \Rightarrow 6 + 2 = 8 \checkmark$$

$$x = 11 \Rightarrow 11 + \sqrt{11-2} = 8 \Rightarrow 11 + 3 = 8 \times$$

پس $x = 6$ تنها جواب معادله است و داریم:

$$\frac{a}{a+2} = \frac{6}{6+2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$$

مرجع: متآزمون- ۱۴۰۳

مساحت یک مستطیل طلایی برابر $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ است. محیط آن کدام است؟

$\sqrt{5} + 1$ (۴)

$\sqrt{5} - 1$ (۳)

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ در مستطیل طلایی نسبت طول به عرض برابر $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (عدد طلایی) است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{عرض} = x \\ \text{طول} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x \end{array} \right\} \rightarrow S = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}$$

$$\rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

بنابراین:

$$\text{عرض مستطیل} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{طول مستطیل} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 1$$

خواهیم داشت:

$$\text{محیط} = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1\right) = \sqrt{5} + 1$$

مرجع: متآزمون- ۱۴۰۳

معادله $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{603}{x^2 - 2x + 4}$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ۱ فرض می‌کنیم $x^2 - 2x + 2 = t$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} = \frac{6}{t+2} \Rightarrow \frac{t+1+2t}{t(t+1)} = \frac{6}{t+2}$$

$$\Rightarrow \frac{3t+1}{t^2+t} = \frac{6}{t+2} \Rightarrow 3t^2 + 6t + t + 2 = 6t^2 + 6t$$

$$\Rightarrow 3t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{6} = \frac{1 \pm 5}{6} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \\ \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 - 2x + 2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{8}{3} = 0 \\ \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

پس معادله دارای فقط یک ریشه $x = 1$ است.

مرجع: متآزمون- ۱۴۰۳

معادله $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x-1}{2x+1} = \frac{1,504}{x^2 + 1,5x + 0,5}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به اینکه $x \neq -1$ و $x \neq -\frac{1}{2}$ است عبارت $(x+1)(2x+1)$ را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x-1}{2x+1} = \frac{1,5}{x^2 + 1,5x + 0,5} \rightarrow (2x-1)(2x+1) + (x-1)(x+1) = 3$$

$$\rightarrow 5x^2 - 2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \checkmark \\ \text{غ ق ق} \end{matrix}$$

معادله تنها یک ریشه حقیقی دارد.

مرجع: متآزمون- ۱۴۰۳

معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt[5]{x} - 2$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ۱ با شرط $x \geq 0$ و $\sqrt{x} - 2 \geq 0$ دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 2 \rightarrow x + \sqrt{x} = x - 4\sqrt{x} + 4 \rightarrow 5\sqrt{x} = 4 \rightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{5}$$

معادله جواب حقیقی ندارد.

در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه وسط این بازه

کدام است؟

۱) -۲

۲) -۱٫۵

۳) -۱

۴) -۰٫۵

پاسخ: گزینه ۳ برای این منظور باید نامعادله $-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x|$ را حل کنیم.

$$x \geq 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + x \rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	1	$+\infty$		
عبارت < 0		+	۰	-	۰	+
$\rightarrow \frac{-9}{2} < x < 1$	اشتراک با شرط $0 \leq x < 1$					
	(I)					

$$x < 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x - x \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

	x	$-\infty$	-۳	$\frac{۳}{۲}$	$+\infty$
$\rightarrow$					
عبارت	< ۰		$+$	۰	$-$
				۰	$+$
$\rightarrow$	$-۳ < x < \frac{۳}{۲}$	اشتراک با شرط			$-۳ < x < ۰$
					(II)

از اجتماع I و II به جواب $-3 < x < 1$ می‌رسیم که طول نقطه وسط بازه -1 است. $\frac{-3+1}{2}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

مجموع جواب‌های معادله $|2x - 1| + |x + 2| = 3$ ، کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) ۱

۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

ریشه‌های داخل قدر مطلقها $x = -2$ و $x = \frac{1}{2}$ هستند.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$		-	۰	+
$x + 2$		-	۰	+

$$x < -2 \Rightarrow -2x + 1 - x - 2 = 3 \Rightarrow -3x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$
 غ ق

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2x + 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$
 ق ق

$$x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$
 ق ق

$$\text{مجموع جواب‌ها} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x + 1$ ، به صورت کدام بازه‌ها است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۱) $(-2, 1)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $(-1, 2)$ ۴) $(1, 2)$

پاسخ: گزینه ۴
روش اول:

$$2x + 1 - |x - 2| > \underbrace{|x^2 + 1|}_{+} \rightarrow 2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

$$x \geq 2: 2x + 1 - (x - 2) > x^2 + 1 \rightarrow 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \quad (I)$$

$$x < 2: 2x + 1 - (-x + 2) > x^2 + 1 \rightarrow 2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < 2 \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $1 < x < 2$ یا $x \in (1, 2)$ می‌رسیم.

روش دوم:

در نامعادله داده شده به جای x ، عدد صفر قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \rightarrow 0 + 1 - 2 > 1 \rightarrow -1 > 1$$

به نتیجه غلطی رسیدیم، پس گزینه‌های ۱ و ۲ که همگی شامل صفر هستند حذف می‌شوند و گزینه چهارم، جواب صحیح است.

مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $1 < \left| \frac{2-x}{2x-3} \right|$ ، به صورت کدام بازه است؟ (با تغییر) مرجع: ۱: سراسری - ۱۳۹۵

۱) $(1, \frac{3}{2})$ ۲) $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ ۳) $(1, \frac{5}{3})$ ۴) $(\frac{5}{3}, 2)$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم که $\left| \frac{f}{g} \right| = \frac{|f|}{|g|}$ است.

$$\frac{|2-x|}{|2x-3|} > 1 \rightarrow |2-x| > |2x-3| \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 + x^2 - 4x > 4x^2 + 9 - 12x$$

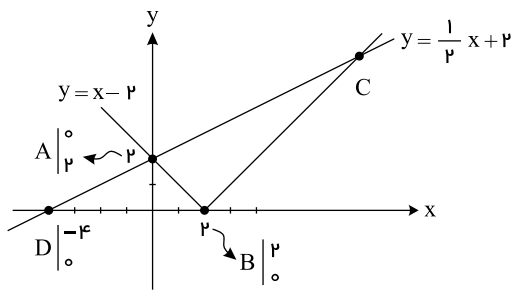
$$\rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < \frac{5}{3}$$

ولی دقت کنید که $x = \frac{3}{2}$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از مجموعه‌ی جواب باید حذف شود و جواب به صورت $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ در می‌آید.

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $y = \frac{1}{x} + 2$ ، کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۴ دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ و $y = \frac{1}{x} + 2$ را رسم می‌کنیم.



نقطه C محل برخورد شاخه $y = x - 2$ با خط $y = \frac{1}{2}x + 2$ است:

$$\frac{1}{2}x + 2 = x - 2 \Rightarrow x = 8, y = 6 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 8 \\ 6 \end{vmatrix}$$

پس مساحت مثلث ABC (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle BDC} - S_{\triangle ABD} \\ &= \left(\frac{1}{2}BD \times y_C\right) - \left(\frac{1}{2}BD \times y_A\right) = \frac{1}{2}BD(y_C - y_A) \\ &= \frac{1}{2}(2 - (-4))(6 - 2) = 12 \end{aligned}$$

در بازه (a, b) نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام

است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ روش اول: باید نامعادله $|2x^2 - 4| < 2x$ را حل کنیم می‌دانیم که ریشه‌های داخل قدرمطلق $\pm\sqrt{2}$ هستند.

$$x < -\sqrt{2} : 2x^2 - 4 < 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} : -2x^2 + 4 < 2x \rightarrow 2x^2 + 2x - 4 > 0 \rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < \sqrt{2}$$

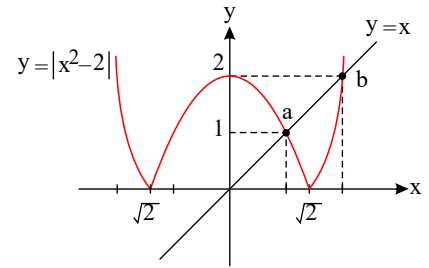
$$x > \sqrt{2} : 2x^2 - 4 < 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \sqrt{2} < x < 2$$

از اجتماع جواب‌های بدست آمده به جواب $(1, 2)$ می‌رسیم بنابراین $b - a = 1$ است.

روش دوم: تابع $y = |2x^2 - 4|$ و $y = 2x$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم در چه بازه‌ای تابع $y = |2x^2 - 4|$ زیر تابع $y = 2x$ قرار دارد.

$$|2x^2 - 4| < 2x \rightarrow |2(x^2 - 2)| < 2x \rightarrow |x^2 - 2| < x$$



برای این منظور باید نقاط a, b را پیدا کنیم.

$$|x^2 - 2| = x \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 & b \\ x = -1 & \text{غ ق} \end{cases} \\ x^2 - 2 = -x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق} \\ x = 1 & a \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین جواب مسئله بازه $(1, 2)$ است و $b - a = 1$ است.

اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{4x + 1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$

کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۵

۴ (۴)

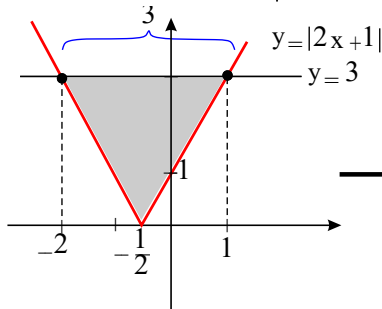
۴٫۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + 1) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1|$$



$$\rightarrow S = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

دقت کنید که نقاطی به طول‌های $x = -2$ و $x = 1$ از تلاقی تابع $y = |2x + 1|$ با خط $y = 3$ به دست آمده‌اند.

$$|2x + 1| = 3 \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 2x + 1 = -3 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۵

مساحت ناحیه‌ای محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

۳ (۴)

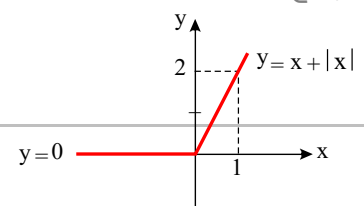
$\frac{8}{3}$ (۳)

$\frac{7}{3}$ (۲)

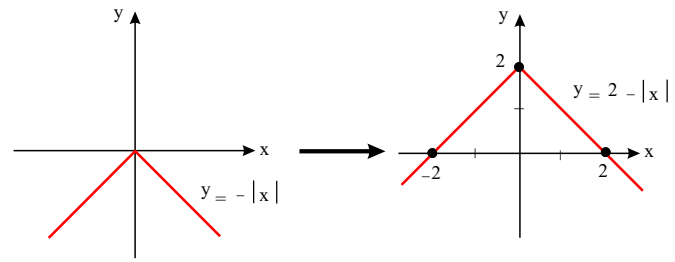
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$y = x + |x| \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow y = x + x \rightarrow y = 2x, & A \begin{vmatrix} 0 & B \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ x < 0 \rightarrow y = x - x \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

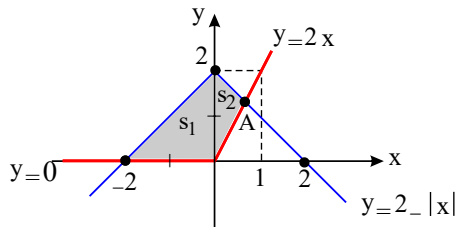


$$y = 2 - |x| \rightarrow$$



حال، کافی است این دو شکل را با هم رسم کنیم. برای پیدا کردن طول نقطه A ، کافی است که خط $y = 2 - x$ و $y = 2x$ را با هم تلاقی دهیم.

$$2x = 2 - x \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x_A = \frac{2}{3}$$



$$S_1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2, \quad S_2 = \frac{\frac{2}{3} \times 2}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow S_{\text{کل}} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = 2 - \frac{3}{2}x$ و $y = |x| - x$ ، کدام است؟

۶ (۴)

$\frac{16}{3}$ (۳)

۴ (۲)

$\frac{8}{3}$ (۱)

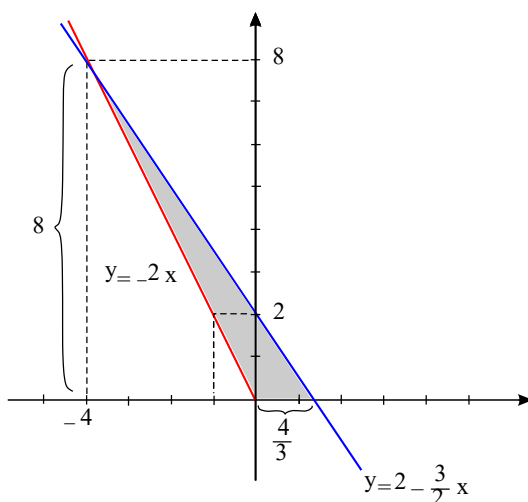
پاسخ: گزینه ۳

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x & x \geq 0 \\ -x - x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

خط افقی $y = 0$ را به شرط $x \geq 0$ و خط $y = -2x$ با شرط $x < 0$ رسم می‌کنیم. برای رسم خط $y = -2x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

و $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ را روی آن در نظر می‌گیریم و برای رسم خط $y = 2 - \frac{3}{2}x$ دو نقطه‌ی دلخواه $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ را روی آن در نظر

می‌گیریم.



$$\Rightarrow S = \frac{8 \times \frac{4}{3}}{2} = \frac{16}{3}$$

دقت کنید برای پیدا کردن محل برخورد دو خط به معادلات $y = 2 - \frac{3}{2}x$ و $y = -2x$ ، آنها را تلاقی می‌دهیم.

$$2 - \frac{3}{2}x = -2x \xrightarrow{\times 2} 4 - 3x = -4x \rightarrow x = -4$$

و x بدست آمده را در معادلات یکی از دو خط، قرار دهیم، عرض نقطه‌ی تلاقی ۸ می‌شود.

در بازه (a, b) نمودار تابع $y = (x - 1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^2$ است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

$\frac{5}{2}$ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ باید نامعادله $(x - 1)^2 > 4x^2$ را حل کنیم.

$$(x - 1)^2 > 4x^2 \rightarrow \sqrt{(x - 1)^2} > \sqrt{4x^2} \rightarrow |x - 1| > 2x^2$$

$$x \geq 1 : x - 1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 - x + 1 < 0 \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{\text{اشتراک با شرط } a > 0, \Delta < 0} \emptyset \xrightarrow{(I)} \emptyset$$

$$x < 1 : -x + 1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 + x - 1 < 0$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
		+	-	+

$$\rightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$$

اشتراک با شرط

$$\rightarrow -1 < x < \frac{1}{2} \quad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $x \in (-1, \frac{1}{2})$ می‌رسیم و بیش‌ترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{3}{2} - (-1) = \frac{5}{2}$ است.

نمودارهای دو تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ و $y = x + 7$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره‌خط AB ،

کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

$10\sqrt{2}$ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

$8\sqrt{2}$ (۱)

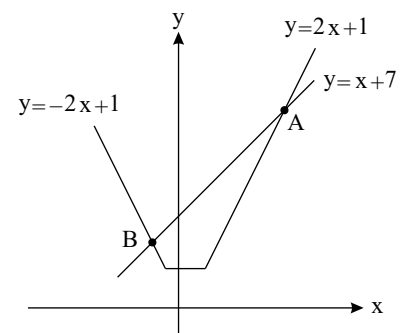
پاسخ: گزینه ۴ تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ یک تابع گلدانی است که به ازای $x < -1$ اکیداً نزولی و به ازای $x > 2$ اکیداً صعودی و در

فاصله $-1 \leq x \leq 2$ ثابت است.

$$x < -1 : y = -x + 2 - x - 1 \rightarrow y = -2x + 1$$

$$-1 \leq x \leq 2 : y = -x + 2 + x + 1 \rightarrow y = 3$$

$$x > 2 : y = x - 2 + x + 1 \rightarrow y = 2x - 1$$



$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \rightarrow x = 8, y = 15 \rightarrow A \begin{vmatrix} 8 \\ 15 \end{vmatrix}, \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \rightarrow x = -2, y = 5 \rightarrow B \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{پس: } AB = \sqrt{(8 + 2)^2 + (15 - 5)^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x|$ و $y = 5 - |x - 1|$ ، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۱۲ (۴)

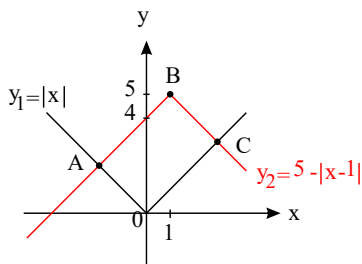
۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا نمودار این دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم تا شکل ناحیه محدود مشخص شود.



با توجه به شکل، ناحیه محدود به دو تابع یک مستطیل است که برای محاسبه مساحت آن باید ابتدا نقاط برخورد آنها را بیابیم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow |x| = 5 - |x - 1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{نقطه } C \xrightarrow{x > 1} x = 5 - (x - 1) \rightarrow x = 3 \Rightarrow C(3, 3) \\ \text{نقطه } A \xrightarrow{x < 0} -x = 5 + (x - 1) \rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, -2) \end{cases}$$

$$OC = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}, OA = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} = \sqrt{18} \times \sqrt{8} = \sqrt{144} = 12$$

در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = \sqrt{x+3}$ ، در بالای نمودار تابع $f(x) = |x-1| - 2$ قرار دارد. بیشترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

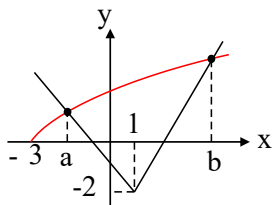
۹ [۴]

۸ [۳]

۷ [۲]

۶ [۱]

پاسخ: گزینه ۳ نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x+3}$ و $f(x) = |x-1| - 2$ را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل a محل تلاقی شاخه منفی $f(x)$ با تابع y و b محل تلاقی شاخه مثبت $f(x)$ با تابع y است.



$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= -x-1 \xrightarrow{\text{توان دو}} x+3 = x^2 + 2x + 1 \\ \rightarrow x^2 + x - 2 &= 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \rightarrow a = -2 \\ \sqrt{x+3} &= x-3 \rightarrow x+3 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \\ \rightarrow (x-1)(x-6) &= 0 \rightarrow b = 6 \rightarrow b-a = 6+2 = 8 \end{aligned}$$

اگر مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2| < |x+1| - 1$ بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۲ [۴]

۱٫۵ [۳]

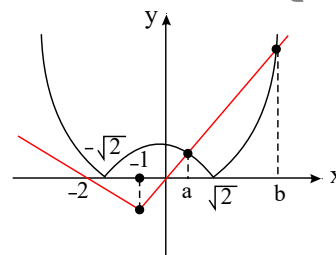
۱ [۲]

۰٫۵ [۱]

پاسخ: گزینه ۳ طبق نمودار در بازه (a, b) این نامساوی برقرار است و a در بازه $(0, \sqrt{2})$ و b در بازه $(\sqrt{2}, +\infty)$ قرار دارد.

$$\begin{aligned} a: x = 2 - x^2 &\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \\ b: x = x^2 - 2 &\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(a, b) = (1, 2) \rightarrow m = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$



نمودارهای دو تابع $y = |x + 2| + |x - 1|$ و $3y + x = 17$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

$4\sqrt{3}$ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

$4\sqrt{5}$ (۲)

$2\sqrt{10}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ نمودارهای دو تابع به صورت زیر هستند.

$$y = |x + 2| + |x - 1| = \begin{cases} x + 2 + x - 1 = 2x + 1, & x \geq 1 \\ x + 2 - (x - 1) = 3, & -2 \leq x < 1 \\ -x - 2 - x + 1 = -2x - 1, & x < -2 \end{cases}$$

$$3y + x = 17 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 3y + x = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2x + 1) + x = 17 \\ 7x = 14 \rightarrow x = 2 \\ y = 2 \times 2 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3y + x = 17 \end{cases} \Rightarrow 3(-2x - 1) + x = 17 \Rightarrow -5x = 20 \Rightarrow x = -4$$

$$y = -2(-4) - 1 = 7 \Rightarrow A \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(2 + 4)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

مجموعه جواب نامعادله $x^2 - 2x < |x - 2|$ به صورت کدام بازه است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

$(1, 2)$ (۴)

$(0, 2)$ (۳)

$(-1, 2)$ (۲)

$(-1, 1)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ روش اول:

قدر مطلق را تعیین علامت می کنیم:

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2x < x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) < 0$$

تعیین علامت $\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \quad (I)$

$$x < 2 \Rightarrow x^2 - 2x < -x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0$$

تعیین علامت $\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < 2 \quad (II)$

$$(I) \cup (II) : -1 < x < 2$$

روش دوم:

نامعادله را به روش عددگذاری حل می کنیم.

نامعادله $x = 0 \xrightarrow{\text{نامعادله}} 0 < 2$ درست است گزینه های (۳ و ۴ حذف می شوند)

نامعادله $x = 1 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < 1$ درست است (گزینه ۱ حذف می شود)

مساحت ناحیه ای محدود به نمودار تابع $f(x) = |2x - 1|$ و محور x ها و دو خط $x = 1$, $x = -1$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

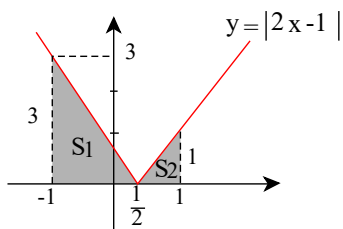
$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ نمودار تابع داده شده را رسم می کنیم.



$$\rightarrow \left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\frac{3}{2} \times 3}{2} = \frac{9}{4} \\ S_2 &= \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow S_{\text{کل}} = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

مجموعه جواب نامعادله $|x - 4| < 2x - 5$ به کدام صورت است؟

(۱) $(1, 5)$ (۲) $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$

(۳) $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

پاسخ: گزینه ۴

با کمک ریشه داخل قدر مطلق که $x = 0$ است بازه بندی را به صورت زیر انجام می دهیم:

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x < 2x - 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 5) < 0 \Rightarrow x \in (1, 5)$$

$$x < 0 \Rightarrow -x^2 + 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0 \xrightarrow{x < 0} x \in (-\infty, 1 - \sqrt{6})$$

	1	5
$x - 5$	-	-
$x - 1$	-	+
p	+	-

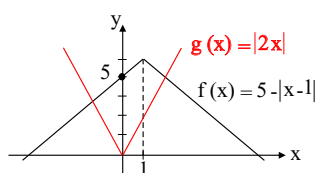
مجموعه جواب: $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

در کدام بازه از مقادیر x نمودار تابع $f(x) = 5 - |x - 1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |2x|$ قرار دارد؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

(۱) $(-\frac{4}{3}, 1)$ (۲) $(-\frac{2}{3}, 1)$ (۳) $(-\frac{4}{3}, 2)$ (۴) $(-\frac{2}{3}, 2)$

پاسخ: گزینه ۳



با توجه به نمودارهای دو تابع f و g ، یک نقطه تقاطع مثبت (که عددی بزرگ تر از ۱ است) و یک نقطه

تقاطع منفی وجود دارد که آنها را به دست می آوریم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \rightarrow 5 - (x - 1) = 2x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \\ x < 0 \rightarrow 5 + (x - 1) = -2x \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

با توجه به نمودار، در بازه $(-\frac{4}{3}, 2)$ نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g قرار دارد.

اگر رابطه $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$ به رابطه ی تساوی تبدیل شود الزاماً سه عدد غیر صفر x, y, z چگونه اند؟

(۱) مساوی هم (۲) هم علامت (۳) مثبت (۴) منفی

مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

پاسخ: گزینه ۲ نامساوی مثلثی برای n عدد وقتی به تساوی تبدیل می شود که همگی هم علامت باشند.

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n|$$

همگی هم علامت باشند

$$\rightarrow |x_1 + x_2 + \dots + x_n| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

(۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{25}{8}$ (۴) $\frac{25}{4}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= 0 \\ x - y - \frac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

شیب هر دو خط یک است یعنی این دو خط موازی اند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله بین این دو، ضلع مربع را می دهد.

(در محاسبه فاصله بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله خط باید یکسان باشند).

$$\begin{aligned} \text{ضلع مربع} = d &= \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-\frac{3}{2})|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ S_{\text{مربع}} &= (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8} \end{aligned}$$

برای محاسبه فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می کنیم.

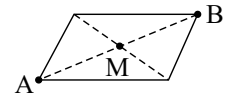
نقطه $M(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

- ① (۴, ۳) ② (۳, ۴) ③ (۳, ۵) ④ (۱, ۵)

پاسخ: گزینه ۳

مختصات نقطه A در هیچ یک از معادلات دو خط صدق نمی کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه B به دست آید.

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$$



می دانیم نقطه M وسط پاره خط AB قرار دارد یعنی:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 + (-1)}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟ مرجع: خراج از کشور - ۱۳۹۲

- ① ۶ ② ۶٫۵ ③ ۷ ④ ۷٫۵

پاسخ: گزینه ۲ روش اول: هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)| \\ &= \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)| = \frac{1}{2} |-4 - 9 + 0| = \frac{13}{2} = 6.5 \end{aligned}$$

روش دوم: ابتدا طول یکی از اضلاع مانند BC را به دست می آوریم و آن را به عنوان قاعده مثلث در نظر می گیریم. سپس با پیدا کردن معادله ضلع BC فاصله A را تا این خط پیدا می کنیم تا ارتفاع مثلث (AH) معلوم شود و در نهایت مساحت مثلث به دست آید.

$$B(3, 0), C(0, 2) \quad m_{BC} = \frac{2 - 0}{0 - 3} = -\frac{2}{3}$$

$$BC \text{ معادله خط } y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y + \frac{2}{3}x - 2 = 0$$

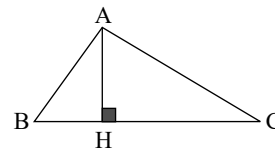
$$AH = \frac{|\frac{1}{3} + (\frac{2}{3} \times 2) - 2|}{\sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2}} = \frac{\frac{3}{3} + \frac{4}{3} - \frac{6}{3}}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{5}{9}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} = \frac{13}{2} = 6,5$$

مثلی با رأس‌های $A(1, 5)$, $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) $4\sqrt{2}$ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹



پاسخ: گزینه ۴ شکل فرضی را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادله خطی را که از دو نقطه B و C می‌گذرد

می‌نویسیم و سپس فاصله نقطه A از خط را به دست می‌آوریم.

$$BC: \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 7} = \frac{3 - (-2)}{7 - 2} = 1 \Rightarrow y - 3 = x - 7 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1, 5) \\ x - y - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow AH = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

توجه کنید فاصله نقطه A از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

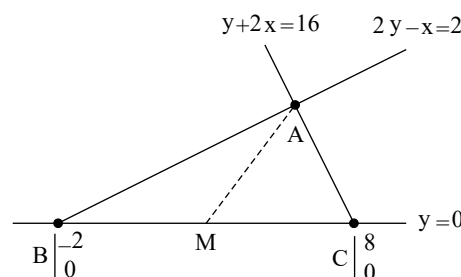
اضلاع مثلی، مطابق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$ ، $2y - x = 2$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی

این مثلث در صفحه مختصات کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

- ۱) $2\sqrt{5}$ ۲) ۵ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



خطوط $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ را تلاقی می‌دهیم تا مختصات نقطه A به دست آید.

$$\times 2 \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \rightarrow 5y = 20 \rightarrow y = 4, x = 6 \rightarrow A \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$BC \text{ وسط } M \left| \begin{array}{c} x_B + x_C \\ 2 \\ y_B + y_C \\ 2 \end{array} \right| \rightarrow M \left| \begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right|, A \left| \begin{array}{c} 6 \\ 4 \end{array} \right| \rightarrow AM = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۱۲٫۸ (۴)

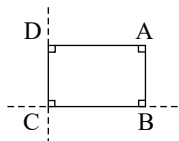
۱۱٫۴ (۳)

۹٫۶ (۲)

۷٫۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$2y + x = 6 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad 2x - y = 7 \rightarrow m' = 2$$



چون شیب‌ها عکس و قرینه‌ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه‌ی A در معادله‌ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی‌کند پس می‌توان شکل را در این گونه در نظر گرفت.

برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array} \right|, \quad x + 2y - 6 = 0 \rightarrow AD = \frac{|8 + 10 - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \\ A \left| \begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array} \right|, \quad 2x - y - 7 = 0 \rightarrow AB = \frac{|16 - 5 - 7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = AD \times AB = \frac{48}{5} = 9.6$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right|$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

نقطه‌ی $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله‌ی $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

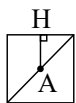
۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۴۵ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



فاصله‌ی وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.

$$A \left| \begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array} \right|, \quad x - 2y + 5 = 0 \rightarrow AH = \text{نصف ضلع مربع} = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت مربع} = (\text{ضلع مربع})^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right|$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

شیب نیم‌خطی AB نقطه‌ی شروع $A(2, 4)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم که نقطه‌ی B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-3, -1)$ باشد. محیط مستطیل کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

$3\sqrt{10}$ (۴)

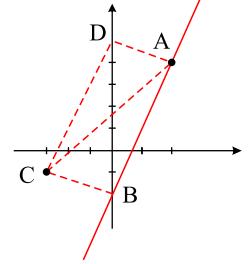
$6\sqrt{10}$ (۳)

۱۸ (۲)

۲۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا معادله خط گذرنده از A را می‌یابیم: $A(2, 4)$ و $m = 3$.

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 2$$



حال فاصله نقطه C از خط فوق که A و B روی آن قرار دارند محاسبه می‌کنیم.

این مقدار طول یا عرض مستطیل است.

$$|CH| \text{ یا } |CB| = \frac{|y - 3x + 2|}{\sqrt{1+9}} \xrightarrow{(-3, -1)} \frac{|-1 - 3(-3) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

قطر مستطیل AC است آن را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$|AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{50}$$

$$\triangle ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 50 = AB^2 + 10 \Rightarrow |AB| = \sqrt{40}$$

و در آخر محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط} : 2\sqrt{10} + 2\sqrt{40} = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

نقطه $H(2, 1)$ را روی خط $3x - y = 5$ در نظر بگیرید مثلث متساوی الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم به طوری

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

که محیط مثلث $\sqrt{270}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟

(۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{6})$

(۳) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

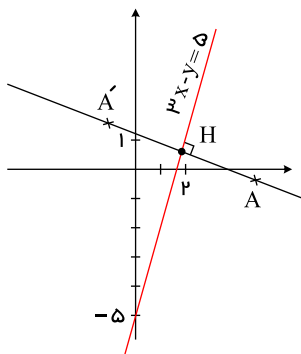
(۲) $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$

(۱) $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$

پاسخ: گزینه ۲

محیط مثلث مدنظر $\sqrt{270} = 3\sqrt{30}$ است پس طول هر ضلع آن $\sqrt{30}$ خواهد بود و از طرفی می‌دانیم در

$$\text{مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ضلع است یعنی: } AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{30} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$



پس باید فاصله A تا H برابر با $\frac{\sqrt{90}}{2}$ باشد. دقت کنید A روی خط عمود بر $3x - y = 5$ است.

$$\Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow m = 3 \xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} m' = -\frac{1}{3}$$

معادله خط گذرنده از A و H را می‌یابیم مختصات $H(2, 1)$ و $m' = -\frac{1}{3}$ را داریم.

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + x = 5$$

$$\Rightarrow |AH| \Rightarrow (\alpha - 2)^2 + \underbrace{\left(\frac{5 - \alpha}{3} - 1\right)^2}_{\left(\frac{2 - \alpha}{3}\right)} = \frac{90}{4} \Rightarrow (\alpha - 2)^2 \left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{90}{4}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 2)^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow \alpha - 2 = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{13}{2} \Rightarrow A\left(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{در گزینه ها نیست.} \end{cases}$$

نقاط B, C و $M(3, 2)$ روی خط $x + 2y = 7$ قرار دارند. مثلث متساوی الساقین ABC را چنان می سازیم که اندازه میانه AM برابر $5\sqrt{5}$ واحد و BC قاعده مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A ، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

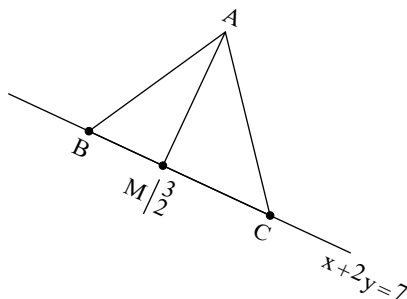
۴ -۸

۳ -۵

۲ -۲

۱ ۵

پاسخ: گزینه ۲



چون فاصله نقطه A از دو رأس B و C با هم برابر است بنابراین نقطه A روی عمودمنصف پاره خط BC قرار دارد.

$$x + 2y = 7 \rightarrow m_{\text{خط}} = -\frac{1}{2} \rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = 2$$

بنابراین معادله عمودمنصف $y - 2 = 2(x - 3) \rightarrow y = 2x - 4$ است. نقطه A را روی آن در نظر می گیریم که فاصله اش از نقطه $M\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ باید برابر $5\sqrt{5}$ باشد.

$$AM = 5\sqrt{5} \rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 4 - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 6)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + 4(\alpha - 3)^2} \\ = \sqrt{5(\alpha - 3)^2} = \sqrt{5}|\alpha - 3| = 5\sqrt{5} \rightarrow |\alpha - 3| = 5 \rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = 5 \rightarrow \alpha = 8 \\ \alpha - 3 = -5 \rightarrow \alpha = -2 \end{cases}$$

فاصله نقطه A روی خط $x + y = a$ از دو نقطه $B(-3, 2)$ و $C(-1, 4)$ به ترتیب برابر $\sqrt{29}$ و 5 است. مقدار a چقدر است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۴ -۲

۳ $-\frac{1}{2}$

۲ $\frac{1}{2}$

۱ ۲

پاسخ: گزینه ۱

$$x + y = a \Rightarrow y = a - x$$

نقطه A روی خط $y = a - x$ به صورت $A(k, a - k)$ است. حال طبق فرض سؤال داریم:

$$B(-3, 2) \Rightarrow AB = \sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{(k + 3)^2 + (a - k - 2)^2} = \sqrt{29} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (k + 3)^2 + (a - k - 2)^2 = 29 \quad (1)$$

$$C(-1, 4) \Rightarrow AC = 5 \Rightarrow \sqrt{(k + 1)^2 + (a - k - 4)^2} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (k + 1)^2 + (a - k - 4)^2 = 25 \quad (2)$$

طرفین روابط ۱ و ۲ را از هم کم می کنیم.

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

طول ارتفاع AM در مثلثی با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(3, 3)$ و $C(7, 11)$ کدام است؟

۶ (۴)

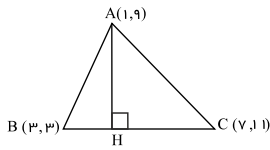
$2\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{10}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به شکل فرضی مقابل، ابتدا معادله ضلع BC را می‌یابیم.



$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{11 - 3}{7 - 3} = \frac{8}{4} = 2$$

$$B(3, 3) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 3) = 2x - 6 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

فاصله نقطه $A(1, 9)$ از خط فوق همان ارتفاع AH است.

$$AH = \frac{|2 \times 1 - 9 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y - ax = 1$ و $ay - x = a - 1$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

برابر ۵ و نقطه $(1, 2)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

$2\sqrt{34}$ (۴)

$\sqrt{46}$ (۳)

$3,5$ (۲)

$2,5$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به فرض، باید دو خط داده شده با هم موازی باشند:

$$\begin{cases} d_1 : y - ax = 1 \Rightarrow m_1 = a \\ d_2 : ay - x = a - 1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{a} \end{cases} \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} m_1 = m_2 \Rightarrow a = \frac{1}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

نقطه $(1, 2)$ یک رأس مستطیل است، پس روی یکی از خطوط d_1 و d_2 قرار دارد:

$$a = 1 : \begin{cases} y = x \\ y = x + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شامل } (1,2)} 2 = 1 + 1$$

$$a = -1 : \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x + 2 \end{cases} \rightarrow \text{(غ قق)}$$

اندازه یک ضلع مستطیل، برابر با فاصله دو خط $y = x + 1$ و $y = x$ است:

$$h = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

قطر مستطیل برابر ۵ است، لذا اندازه ضلع دیگر مستطیل را از قضیه فیثاغورس به دست می‌آوریم:

$$k^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow k = \sqrt{25 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = k \cdot h = \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3,5$$

نقطه $(2, 5)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ هستند. بیشترین

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

$\sqrt{17}$ (۴)

$2\sqrt{17}$ (۳)

$\frac{\sqrt{17}}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ مختصات نقطه $(2, 5)$ در هیچ یک از معادلات داده شده، صدق نمی‌کند و شکل به صورت روبه‌روست:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|4.5 - 8 - 5|}{\sqrt{1 + (-4)^2}} = \frac{8.5}{\sqrt{17}} = \frac{\frac{17}{2}}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \text{فاصله } M \text{ از اضلاع} \\ \frac{|18 + 2 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{17}}{4} : \min \\ \frac{\sqrt{17}}{2} : \max \end{array} \right.$$

نقاط $A(0, 4)$, $B(3, 1)$, $C(x, y)$ و $D(-1 - x, y + 3)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$\text{شیب خط } AB = \frac{4 - 1}{-1 - 3} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{شیب خط } CD = \frac{y + 3 - y}{-1 - x - x} = \frac{3}{-1 - 2x} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{شیب خط } BC = \frac{y - 1}{x - 3} = \frac{y - 1}{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{AB \perp BC} \frac{y - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = -1$$

$$\text{طول } AB = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 - 1)^2} = 5 \quad \text{طول } BC = \sqrt{(1 + 1)^2 + (3 - \frac{3}{2})^2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{محیط } ABCD = 2(5 + \frac{5}{2}) = 15$$

نقاط $A(2, 0)$ و $C(0, -1)$ دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

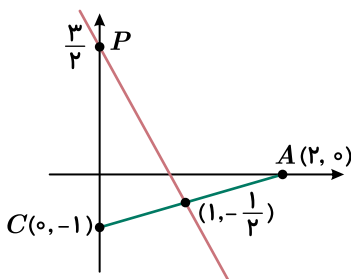
($\frac{5}{4}, \frac{1}{4}$) (۴)

($\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}$) (۳)

($\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$) (۲)

($0, \frac{3}{2}$) (۱)

پاسخ: گزینه ۲



$$\text{معادله خط } AC: \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1$$

$$\Rightarrow x - 2y - 2 = 0$$

$$\text{شیب } AC = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{شیب قطر دیگر} = -2$$

$$\text{معادله قطر دیگر: } y = -2x + \frac{3}{2}$$

نقاط $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$ و $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ روی خط بالا نیستند پس حذف می‌شوند. نقطه $(0, \frac{3}{2})$ نیز حذف می‌شود زیرا زاویه بین PC و AC از 45°

بیشتر است پس گزینه ۲ درست است.

نقاط $A(x, y)$ و $B(-1-x, y-3)$ ، $C(0, -3)$ و $D(-4, 0)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های A و B مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

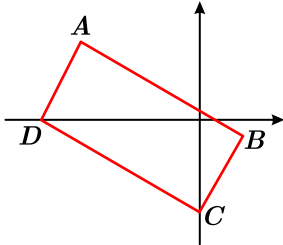
۱۲٫۵ (۴)

۱۵ (۳)

۱۵٫۵ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳



$$m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{y - y + 3}{x + 1 + x} = \frac{-3 - 0}{0 - (-4)} \Rightarrow 2x + 1 = -4 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$BC \perp CD \Rightarrow m_{BC} \times m_{CD} = -1 \Rightarrow \frac{y}{-1 + \frac{5}{2}} \times \frac{-3}{4} = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$$

$$A(-\frac{5}{2}, 2), B(-\frac{3}{2}, -1)$$

$$BC = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-3 + 1)^2} = \frac{5}{2}, AB = \sqrt{(\frac{3}{2} + \frac{5}{2})^2 + (-1 - 2)^2} = 5;$$

$$\text{محیط} = 2(\frac{5}{2} + 5) = 15$$

سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y + 2x = 7$ ، $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند. طول ارتفاع BH ، کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

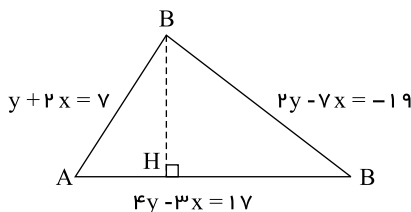
۱ (۴)

۲٫۵ (۳)

۳ (۲)

۴٫۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



با توجه به شکل فرضی مقابل ابتدا مختصات نقطه B یعنی نقطه برخورد دو خط $y + 2x = 7$ و $2y - 7x = -19$ را می‌یابیم.

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2y - 4x = -14 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \Rightarrow -11x = -33 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{y+2x=7} y + 6 = 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(3, 1)$$

فاصله نقطه $B(3, 1)$ از خط $4y - 3x = 17$ برابر با ارتفاع BH است.

$$3x - 4y + 17 = 0 \Rightarrow BH = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 1 + 17|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|9 - 4 + 17|}{\sqrt{25}} = \frac{22}{5} = 4٫۴$$

نقطه $A(4, 0)$ یک رأس مثلثی است که دو رأس دیگر آن روی خط $x - 3y = 1$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از این خط بوده و نقطه $(\frac{y}{2}, \frac{1}{2})$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیه اول محورهای مختصات کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

۱٫۳۵ (۴)

۱٫۶۵ (۳)

۰٫۹ (۲)

۰٫۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

نقطه $A(45, -1)$ یک رأس مثلثی است که یک ضلع آن روی خط $x - 2y = 1$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از این خط بوده و نقطه $(-4, -2)$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیه سوم محورهای مختصات کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

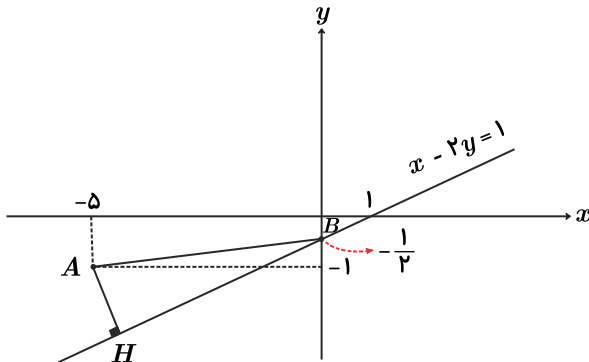
۶٫۴ (۴)

۶ (۳)

۴٫۲ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲



چون طبق فرض طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از خط $x - 2y = 1$ است در واقع منظور طراح این بوده که اگر از نقطه A بر خط $x - 2y = 1$ عمود رسم کنیم یکی از اضلاع مثلث، پاره خط AH خواهد بود. حال با فرض اینکه نقطه $(-4, -2)$ داخل این مثلث قرار دارد، برای اینکه بزرگ ترین مثلث (یعنی مثلثی با بیشترین مساحت) در ناحیه سوم محورهای مختصات داشته باشیم باید رأس دیگر این مثلث نقطه $(0, -\frac{1}{2})$ باشد (یعنی محل برخورد خط با محور عرض‌ها)

در این صورت خواهیم داشت:

$$AH = \frac{|-5 + 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$x - 2y = -1 = 0$: فاصله نقطه A از خط

از طرفی طبق شکل داریم:

$$AB = \sqrt{25 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{101}}{2}$$

$$BH = AB^2 - AH^2 = \frac{101}{4} - \frac{16}{5} = \frac{441}{20} \Rightarrow BH = \frac{21}{2\sqrt{5}}$$

$$S = \text{مساحت مثلث} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{21}{2\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} = 4.2$$

نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AC و BC مثلث ABC ، انتخاب شده‌اند. اگر $AM = 3CM$ و مساحت مثلث

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

ABC ، ۲ برابر مساحت مثلث CMN باشد، مقدار $\frac{BN}{CN}$ کدام است؟

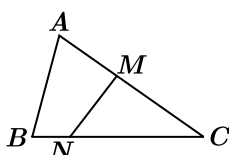
۰٫۲ (۴)

۰٫۸ (۳)

۰٫۷۵ (۲)

۰٫۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



$$\begin{aligned} AM = 3CM &\Rightarrow AM = \frac{3}{4}AC \Rightarrow AM + MC = \frac{4}{4}AC \\ &\Rightarrow AC = \frac{4}{4}CM \end{aligned}$$

خط L در نقطه $A(-3, -4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است. اگر خط عمود بر L در ناحیه دوم بر این دایره مماس باشد، حاصل ضرب طول و عرض مختصات نقطه برخورد دو خط کدام است؟
مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

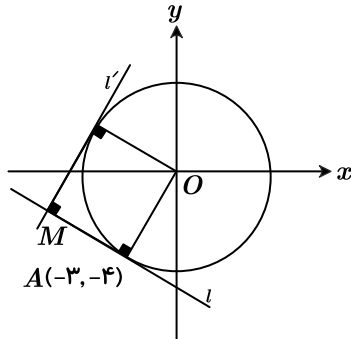
۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ طبق شکل داریم:



$$m_{OA} = \frac{4}{3} \Rightarrow m_l = -\frac{3}{4}$$

$$l \text{ معادله خط: } y + 4 = -\frac{3}{4}(x + 3)$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

چون خط l' بر خط l عمود است؛ پس خواهیم داشت:

$$l' \text{ معادله: } y = \frac{4}{3}x + k$$

توجه شود که شعاع دایره $OA = \sqrt{9 + 16} = 5$ است؛ پس فاصله O تا خط l' نیز برابر ۵ است و داریم:

$$Ol' = \frac{|0 - 0 + k|}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{|k|}{\frac{5}{3}} = \frac{3|k|}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3|k|}{5} = 5 \Rightarrow |k| = \frac{25}{3} \xrightarrow{k > 0} k = \frac{25}{3}$$

برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{n^2 - 2n} \right]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح ۱۴۸ است.
مرجع: سراسری- ۱۳۹۱

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ روش اول:

$$\underbrace{4n^2 - 4n + 1}_{(2n-1)^2} < 4n^2 - 3n + 1 < \underbrace{4n^2}_{(2n)^2} \rightarrow 2n - 1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] = 2n - 1$$

$$\underbrace{n^2 - 4n + 4}_{(n-2)^2} < n^2 - 2n < \underbrace{n^2 - 2n + 1}_{(n-1)^2} \rightarrow n - 2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n - 1 \Rightarrow \left[\sqrt{n^2 - 2n} \right] = n - 2$$

$$\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{n^2 - 2n} \right] = (2n - 1) - 2(n - 2) = 3$$

روش دوم: کافی است یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ مثلاً $n = 3$ را قرار دهیم.

$$n = 3 \rightarrow \left[\sqrt{36 - 9 + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{9 - 6} \right] = \underbrace{\left[\sqrt{28} \right]}_{5, \dots} - 2 \underbrace{\left[\sqrt{3} \right]}_{1, \dots} = 5 - 2(1) = 3$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

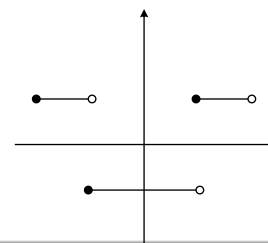
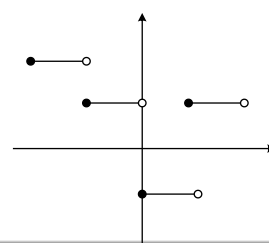
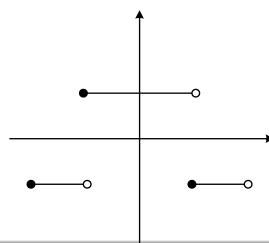
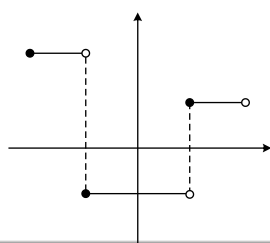
نمودار تابع $y = 2 \lfloor [3x] \rfloor - 1$ به ازای $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ کدام است؟

(۴)

(۳)

(۲)

(۱)

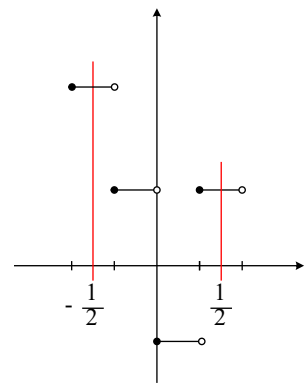


$$\text{اگر } -\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{اگر } -\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{اگر } 0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

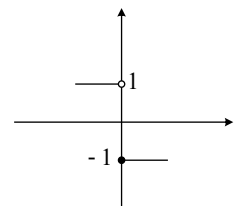
$$\text{اگر } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$$



روش دوم: کافی است در حوالی صفر تابع را بررسی کنیم:

$$if: x \rightarrow 0^+ \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$if: x \rightarrow 0^- \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$



فقط در گزینه ۲ تابع در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است.

نمودار تابع $y = [x^2]$ روی بازه $x \in (-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱ ۷ (۴)

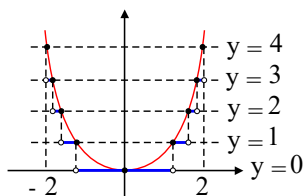
۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

همان طور که مشاهده می کنید، تابع $y = [x^2]$ روی بازه $(-2, 2)$ ، از ۷ پاره خط تشکیل شده است.



در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۲٫۷۵ (۴)

۲٫۵ (۳)

۲٫۲۵ (۲)

۱٫۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 3 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2[1,7] = 3 - 2(1) = 1$$

$$f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})) = f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^2 - 2[-\frac{1}{2}] = \frac{1}{4} - 2(-1) = 2,25$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

اگر $\frac{4+52x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$\frac{4-2x}{3x+1}$	-	ت	+	-

بنابراین $2 \leq x < -\frac{1}{3}$ و داریم:

$$-\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6 \Rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, \dots, 6$$

مجموعه مقادیر $[3x]$ شامل ۸ عضو است.

اگر n عددی طبیعی بوده و داشته باشیم $[\sqrt{n^2 + 4n + 1}] = 9$ ، حاصل $[\sqrt{2n^2 + n + 1}]$ کدام است؟ $(\quad)$ ، نماد جزء صحیح است.

مرجع: ۱۳۹۴ - smart-

- ۱۱ ☐ ۱۲ ☐ ۱۳ ☐ ۱۴ ☐ ۱۵ ☐

پاسخ: گزینه ۱ به ازای هر عدد طبیعی n به راحتی می توان نشان داد که:

$$\underbrace{n^2 + 2n + 1}_{(n+1)^2} < n^2 + 4n + 1 < \underbrace{n^2 + 4n + 4}_{(n+2)^2} \Rightarrow n+1 < \sqrt{n^2 + 4n + 1} < n+2$$

$$\Rightarrow n \in \mathbb{N} : [\sqrt{n^2 + 4n + 1}] = n+1 \xrightarrow{\text{طبق فرض}} n+1 = 9 \Rightarrow n = 8$$

$$[\sqrt{2n^2 + n + 1}] = [\sqrt{128 + 8 + 1}] = [\sqrt{137}] = [11, \dots] = 11$$

پس داریم:

اگر مجموعه جواب معادله $2[x] = 1 - [-x]$ به صورت $\{c\} \cup (a, b)$ باشد، $a + b + c$ کدام است؟ $(\quad)$ ، نماد جزء صحیح است.

مرجع: ۱۳۹۵ - smart-

- ۳ ☐ ۴ ☐ ۵ ☐ ۶ ☐ ۷ ☐

پاسخ: گزینه ۴ دقت کنید:

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = 0 \rightarrow [-x] = -[x]$$

$$x \notin \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = -1 \rightarrow [-x] = -[x] - 1$$

باتوجه به این توضیحات به حل معادله $2[x] = 1 - [-x]$ می پردازیم.

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow 2[x] = 1 - (-[x]) \rightarrow 2[x] = 1 + [x] \rightarrow [x] = 1 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} 1 \leq x < 2 \rightarrow x = 1$$

$$x \notin \mathbb{Z} \rightarrow 2[x] = 1 - (-[x] - 1) \rightarrow [x] = 2 \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} 2 \leq x < 3 \rightarrow 2 < x < 3$$

بنابراین جواب معادله عبارت است از $\{1\} \cup (2, 3)$ و در نتیجه $a + b + c = 6$ می باشد.

اگر $[\frac{11-55x}{x}] = 1$ ، آن گاه تعداد مقادیر ممکن برای عبارت $[-6x]$ کدام است؟ $(\quad)$ ، نماد جزء صحیح است.

مرجع: ۱۳۹۴ - smart-

- ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۵ ☐

پاسخ: گزینه ۱

$$[\frac{1-x}{x}] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1-x}{x} < 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} - 1 < 2 \rightarrow 2 \leq \frac{1}{x} < 3$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\frac{1}{x}} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times (-6)} -2 > -6x \geq -3 \Rightarrow [-6x] = -3$$

توجه کنید اگر طرفین یک نامعادله که هم علامت باشند را معکوس کنیم جهت نامساوی عوض می شود.

نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ در فاصله $1 \leq x \leq 16$ از پاره خط ساخته شده که طول بلندترین آن‌ها است. ([] نماد جزء صحیح است.)

مرجع: ۱۳۹۷ - smart

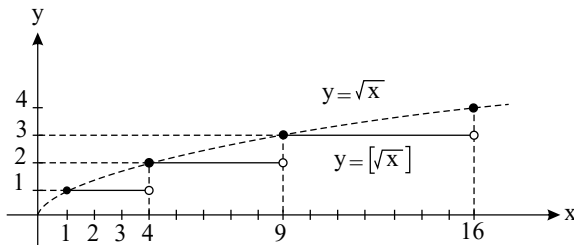
۵.۴ [۴]

۷.۴ [۳]

۷.۳ [۲]

۵.۳ [۱]

پاسخ: گزینه ۲ برای رسم $y = [f(x)]$ ابتدا $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس خطوط افقی $y = k$ را به فاصله یک واحد از هم رسم می‌کنیم هر کجا این خطوط شکل را قطع کردند آنجا توپر است و هر آنچه از شکل بین دو خط افقی قرار گرفت روی خط پایین تصویر می‌کنیم.



با توجه به شکل بالا، نمودار از سه خط پاره خط به طول‌های $3 = 4 - 1$ ، $5 = 9 - 4$ و $7 = 16 - 9$ تشکیل شده است.

مرجع: ۱۳۹۸ - smart

اگر مجموعه جواب معادله $\left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{3}{2}\right] = 3$ بازه $[a, b)$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۳ [۴]

۲.۵ [۳]

۲ [۲]

۱.۵ [۱]

پاسخ: گزینه ۲

عدد صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می‌آید و می‌دانیم اگر $[x] = n$ و $n \in \mathbb{Z}$ باشد آن‌گاه $n \leq x < n + 1$ است.

$$\begin{aligned} \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{3}{2}\right] &= 3 \rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2} + 1\right] = 3 \\ \rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1 &= 3 \rightarrow 2\left[x + \frac{1}{2}\right] = 2 \rightarrow \left[x + \frac{1}{2}\right] = 1 \\ \rightarrow 1 \leq x + \frac{1}{2} < 2 \rightarrow \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \rightarrow x &\in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = [a, b) \\ \rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \rightarrow a + b &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{aligned}$$

مرجع: ۱۳۹۴ - smart

اگر $\left[x + \frac{15}{2}\right] = -2$ باشد، حاصل $[2x]$ کدام می‌تواند باشد؟ ([]، نماد جزء صحیح است)

-۱ [۴]

-۶ [۳]

-۴ [۲]

-۲ [۱]

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} \left[x + \frac{1}{2}\right] &= -2 \Rightarrow -2 \leq x + \frac{1}{2} < -1 \Rightarrow -2 - \frac{1}{2} \leq x < -1 - \frac{1}{2} \\ \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x < -\frac{3}{2} \Rightarrow -5 \leq 2x < -3 \Rightarrow [2x] &= -5, -4 \end{aligned}$$

مرجع: ۱۳۹۴ - smart

اگر $|2x^2 + 49x + 1| < 1$ حاصل $[x^2] + [x]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

-۱ [۴]

۲ [۳]

۱ [۲]

۰ [۱]

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا نامعادله‌ی $|2x^2 + 49x + 1| < 1$ را حل می‌کنیم:

$$|2x^2 + 49x + 1| < 1 \Rightarrow -1 < 2x^2 + 49x + 1 < 1 \Rightarrow -2 < 2x^2 < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = -1 \\ 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \end{cases} \Rightarrow [x] + [x^2] = -1$$

مرجع: ۱۳۹۵ smart-

اگر $2 = \left[\frac{2x+1}{3} \right]$ آن گاه حاصل $\left[\frac{1-x}{2} \right]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

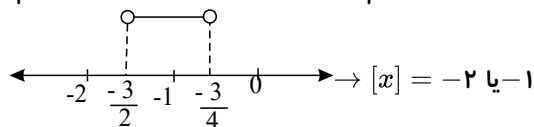
- (۱) فقط ۱ (۲) صفر یا ۱ (۳) ۱ یا ۲ (۴) فقط ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$\left[\frac{2x+1}{3} \right] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{2x+1}{3} < 3 \Rightarrow 6 \leq 2x+1 < 9 \Rightarrow 5 \leq 2x < 8 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq x < 4$$

اکنون باید حدود $\frac{1-x}{2}$ را پیدا کنیم.

$$\frac{5}{2} \leq x < 4 \Rightarrow -4 < -x \leq -\frac{5}{2} \Rightarrow -3 < 1-x \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < \frac{1-x}{2} \leq -\frac{3}{4}$$



مجموعه جواب معادله $[x] + [3x] = 0$ بازه $[a, b)$ است؛ مقدار $b - a$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

مرجع: ۱۳۹۴ smart-

- (۱) ۳ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۶ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ چون همواره $[x] \cdot [3x] \geq 0$ ، پس مجموع $[x]$ ، زمانی صفر است که هر دو برابر صفر باشند:

$$[x] + [3x] = 0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 & (*) \\ [3x] = 0 \Rightarrow 0 \leq 3x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{3} & (**) \end{cases}$$

از اشتراک نامعادله‌های (*) و (**)، مجموعه جواب معادله، بازه $[0, \frac{1}{3})$ است، پس $a = 0$ ، $b = \frac{1}{3}$ ، بنابراین $b - a = \frac{1}{3}$ است.

اگر $f(x) = 1 + [2x]$ ، آنگاه $f(x)$ با کدام گزینه برابر نیست؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است. مرجع: ۱۳۹۷ smart-

- (۱) $f(-x)$ (۲) $\frac{1}{f(x)}$ (۳) $\sqrt{f(x)}$ (۴) $(f(x))^2$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \rightarrow [x] + [-x] = -1 \end{cases}$$

ابتدا ضابطه‌ی تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$x \in \mathbb{Z} \rightarrow f(x) = 1 + 0 = 1, \quad x \notin \mathbb{Z} \rightarrow f(x) = 1 - 1 = 0$$

واضح است که اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد $f(x) = 0$ است و $\frac{1}{f(x)}$ تعریف نشده می‌باشد بنابراین با $f(x)$ برابر نیست.

اگر $3 = \left[\frac{2x+1}{3} \right] = \left[\frac{4x-1}{5} \right]$ ، حاصل $\left[\frac{6x-1}{7} \right]$ کدام است؟ $[]$ ، نماد جزء صحیح است.

مرجع: متنازمن- ۱۴۰۱

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ از تساوی‌های داده شده محدوده x را به دست می‌آوریم:

$$\left[\frac{2x-1}{3} \right] = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{2x-1}{3} < 4 \Rightarrow 9 \leq 2x-1 < 12 \Rightarrow 5 \leq x < \frac{13}{2}$$

$$\left[\frac{4x-1}{5} \right] = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{4x-1}{5} < 4 \Rightarrow 15 \leq 4x-1 < 20 \Rightarrow 5 \leq x \leq \frac{21}{4}$$

از اشتراک مجموعه‌های بالا $5 \leq x \leq \frac{21}{4}$ به دست می‌آید. حال داریم:

$$30 \leq 6x < \frac{63}{2}$$

$$\Rightarrow 29 \leq 6x-1 < \frac{61}{2} \Rightarrow \frac{29}{6} \leq \frac{6x-1}{6} < \frac{61}{12} \Rightarrow \left[\frac{6x-1}{6} \right] = 4$$

مرجع: متآزمون-۱۴۰۳

تابع $y = \sqrt{[x]} - x$ با کدام تابع زیر برابر است؟

$y = 0$ (۱)
 $y = \sqrt{[x] + [-x]}$ (۲)
 $y = \sqrt{x - [x]}$ (۳)
 $y = \sqrt{[x] - |x|}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ دو تابع هنگامی باهم برابر هستند که دامنه و ضابطه آنها برابر باشد.

می‌دانیم $1 < x - [x] \leq 0$ می‌باشد بنابراین $1 < x - [x] \leq 0$ است. با توجه به تابع $y = \sqrt{[x]} - x$ باید $y = \sqrt{[x]} - x \geq 0$ باشد. در نتیجه:

$$[x] - x = 0 \rightarrow [x] = x \rightarrow x \in \mathbb{Z} \rightarrow D = \mathbb{Z}$$

$$y = 0 \rightarrow R = \{0\}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ است و با تابع اولیه برابر نیست.

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow y = \sqrt{[x] + [-x]} = 0 \quad x \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

گزینه ۲: دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ است و ضابطه آن $y = 0$ نمی‌باشد. در نتیجه با تابع اولیه برابر نیست.

گزینه ۳: دامنه تابع اعداد صحیح نامنفی است و با تابع اولیه برابر نیست.

مرجع: خوشخوان-۱۳۹۹

حاصل عبارت $\left[\frac{5x^2 + 10x + 365}{x^2 + 2x + 4} \right]$ به ازای $x = 1397$ کدام است؟

4 (۱)
 5 (۲)
 6 (۳)
 7 (۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$\left[\frac{5x^2 + 10x + 3}{x^2 + 2x + 4} \right] = \left[\frac{5x^2 + 10x + 20 - 17}{x^2 + 2x + 4} \right] = \left[\frac{5x^2 + 10x + 20}{x^2 + 2x + 4} - \frac{17}{x^2 + 2x + 4} \right] = \left[5 - \frac{17}{x^2 + 2x + 4} \right]$$

$$= \left[5 - \frac{17}{(1397)^2 + 2(1397) + 4} \right] = [5^-] = 4$$

تذکر: در حل چنین سؤالاتی باید ابتدا با تفکیک مناسب کسر داده شده، ضابطه تابع را به حالت ساده‌تری تبدیل کنیم. سپس مقدار عددی آن را به ازای مقدار تعیین شده برای متغیر x به دست آوریم.

مرجع: خوشخوان-۱۳۹۹

برد تابع $f(x) = [4x] 16[x]$ کدام است؟

$\{0, 3\}$ (۱)
 $\{0, 4\}$ (۲)
 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (۳)
 $\{0, 1, 2, 3\}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم اگر $n \in \mathbb{Z}$ آن‌گاه $[x] + n = [x + n]$ بنابراین داریم:

$$f(x) = [4x] - \overbrace{4[x]}^{\in \mathbb{Z}} = [4x - 4[x]] = [4(x - [x])]$$

می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ و بنابراین $0 \leq 4(x - [x]) < 4$ پس $[4(x - [x])]$ می‌تواند ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ باشد، یعنی:

$$R_f = \{0, 1, 2, 3\}$$

مرجع: خوشخوان- ۱۳۹۹

خط $x + y = -2$ نمودار تابع $f(x) = \frac{x[x] - 3[x]}{[x]}$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

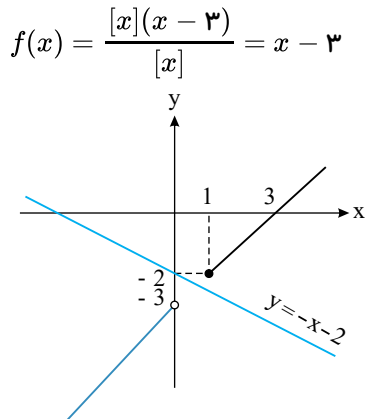
(۴) فاقد نقطه تلاقی

(۳) $(0, -2)$

(۲) $(1, -3)$

(۱) $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$

پاسخ: گزینه ۴



دامنه تابع فوق به ازای $x \neq 0$ به دست می‌آید. یعنی $D_f = \mathbb{R} - [0, 1)$ پس نمودار تابع f به صورت زیر است:

$$x \notin [0, 1) \Rightarrow (x - 3) \notin [-3, -2) \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - [-3, -2)$$

پس خط $x + y = -2$ نمودار تابع f را قطع نمی‌کند.

مرجع: خوشخوان- ۱۳۹۹

تعداد جواب‌های معادله $2[x^3] - 9[x^2] + 4[x] = x - 4$ کدام است؟

(۴) بی‌شمار

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ۳ توجه کنید که عبارت سمت چپ تساوی همواره مقداری صحیح است. بنابراین حاصل سمت راست نیز باید صحیح باشد، یعنی

$x - 4$ باید صحیح باشد و در نتیجه x هم باید صحیح باشد که در این صورت x^2 و x^3 نیز عددی صحیح خواهند بود. یعنی داریم:

$$[x] = x, [x^2] = x^2, [x^3] = x^3$$

$$\Rightarrow 2x^3 - 9x^2 + 4x = x - 4 \Rightarrow 2x^3 - 9x^2 + 3x + 4 = 0$$

چون مجموع ضرایب معادله برابر صفر است، پس یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ است و معادله بر $(x - 1)$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 9x^2 + 3x + 4 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{2x^3 - 2x^2} \\ -7x^2 + 3x + 4 \\ \underline{-7x^2 + 7x} \\ -4x + 4 \\ \underline{-4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

$$2x^3 - 9x^2 + 3x + 4 = (2x^2 - 7x - 4)(x - 1) = (x - 1)(x - 4)(2x + 1)$$

$$(x - 1)(x - 4)(2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \checkmark, x = 4 \checkmark, x = -\frac{1}{2}$$

یعنی مجموعه جواب معادله $\{1, 4\}$ است، یعنی دو عضو دارد.

مرجع: خوشخوان- ۱۳۹۸

مجموعه جواب نامعادله $|2x^2 - 9| \leq 7$ کدام است؟

$$(-3, -1) \cup [1, 3) \quad \boxed{2}$$

$$[-2\sqrt{2}, -1] \cup [1, 2\sqrt{2}] \quad \boxed{1}$$

$$(-3, 3) \quad \boxed{4}$$

$$[-3, 3] \quad \boxed{3}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$|2x^2 - 9| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 2x^2 - 9 \leq 7$$

$$2 \leq 2x^2 \leq 16 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 8 \Rightarrow 1 \leq x^2 < 9 \Rightarrow (-3, -1) \cup [1, 3)$$

مرجع: خوشخوان- ۱۳۹۹

اگر $\left[\frac{6}{P}\right] + \left[-\frac{176}{P}\right] = 0$ باشد، P چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد؟

$$12 \quad \boxed{4}$$

$$6 \quad \boxed{3}$$

$$8 \quad \boxed{2}$$

$$4 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ می دانیم اگر $[x] + [-x] = 0$ ، آن گاه $x \in \mathbb{Z}$ خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\left[\frac{6}{P}\right] + \left[-\frac{6}{P}\right] = 0 \Rightarrow \frac{6}{P} \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \text{ مقسوم علیه عدد } 6 \text{ باشد}$$

بنابراین باید P یکی از مقادیر $1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ و ± 6 باشد، یعنی ۸ مقدار صحیح برای P وجود دارد.