

$ax^2+bx+c=0 \rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$
 $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$
 $\alpha+\beta=S-2P$, $\alpha+\beta=S-2PS$
 $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
 نکات معادله درجه ۲
 $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k}$
 یک درجه k برابر دیگری



مثال: در معادله $x^2-(m+1)x+m=0$ به ازای چه مقادیری از m یکی از ریشه ها ۲ برابر دیگری است؟
 $K=2$
 $\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k} \rightarrow \frac{(m+1)^2}{m}=\frac{9}{2}$

$2m^2+5m+2=9m$
 $2m^2-4m+2=0 \rightarrow m=\frac{-d \pm \sqrt{\Delta}}{2} \begin{cases} m=-2 \\ m=1 \end{cases}$

مثال: اگر α, β ریشه های معادله $x^2-4x+4=0$ باشند مطلوب است تعیین:

الف) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{4^2 - 2 \times 4}{4} = 2$ $\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$

ب) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{S^3 - 3PS}{P} = \frac{4^3 - 3 \times 4 \times 4}{4} = \frac{16}{1} = 16$

ج) $\frac{\alpha}{\alpha^2+4} + \frac{\beta}{\beta^2+4}$
 $= \frac{\alpha}{4\alpha} + \frac{\beta}{4\beta} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
 ریشه α : $\alpha^2-4\alpha+4=0$
 $\alpha^2+4=4\alpha$
 ریشه β : $\beta^2-4\beta+4=0$
 $\beta^2+4=4\beta$

د) $\frac{\beta}{(\alpha-4)^2} + \frac{\alpha}{(\beta-4)^2}$ ریشه α است
 $\alpha^2-4\alpha+4=0$
 $\alpha(\alpha-4)=-4 \rightarrow \alpha-4=-\frac{4}{\alpha}$

$\frac{\beta}{(-\frac{4}{\alpha})^2} + \frac{\alpha}{(-\frac{4}{\beta})^2} = \frac{1}{16}(\alpha^2\beta + \beta^2\alpha) = \frac{1}{16}(\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2)$
 $= \frac{1}{16} \times P \times (S^2 - 2P)$
 $= \frac{1}{16} \times 4 \times (16 - 8) = \frac{4 \times 8}{16} = 2$

ه) $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

$A^2 = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2 = \frac{S^2 - 2P}{P} + 2$

$A^2 = 9 \rightarrow A = \pm 3$

و) $B = \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$

$B^2 = (\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha})^2 = \alpha^2\beta + \beta^2\alpha + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta}$
 $= \alpha\beta(\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}) = 4(4 + 4) = 32$
 $B = \pm\sqrt{32}$



نوشتن معادله درجه دوم با دانستن ریشه ها (α, β)

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha \rightarrow x - \alpha = 0 \\ x = \beta \rightarrow x - \beta = 0 \end{array} \right\} \rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

* معادله درجه دوم بنویسید، ریشه ها $\sqrt{3} + 2, \sqrt{3} - 2$ باشد.

$$\left. \begin{array}{l} S = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4 \\ P = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

در معادله $x^2 - 4x + 6 = 0$ ، α, β ریشه ها هستند.
معادله درجه دوم بنویسید که ریشه هایش
(الف) از سه برابر ریشه های معادله فوق ۴ واحد کمتر باشند.

$$\left. \begin{array}{l} S = 3\alpha - 4 + 3\beta - 4 = 3(\alpha + \beta) - 8 = 18 - 8 = 10 \\ P = (3\alpha - 4)(3\beta - 4) = 9\alpha\beta - 12\alpha - 12\beta + 16 = 9\alpha\beta - 12(\alpha + \beta) + 16 \\ = 36 - 72 + 16 = -20 \end{array} \right\}$$

(ب) از نصف ریشه های معادله فوق ۳ واحد بزرگتر باشند.

$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{\alpha}{3} + 3 + \frac{\beta}{3} + 3 = \frac{1}{3}(\alpha + \beta) + 6 = 9 \\ P = (\frac{\alpha}{3} + 3)(\frac{\beta}{3} + 3) = \frac{\alpha\beta}{9} + \frac{3}{3}\alpha + \frac{3}{3}\beta + 9 = 1 + \frac{1}{3}(4) + 9 = 19 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 4x + 19 = 0$$

(ج) معکوس ریشه های معادله فوق شوند.

$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{4}{6} \\ P = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{6} = 0$$

کافی است جای α, β را عوض کنیم

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

(ه) قرینه ریشه های معادله فوق باشند.
کافی است α و β را قرینه کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} S = (-\alpha) + (-\beta) = -(\alpha + \beta) = -4 \\ P = (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta = 6 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + 4x + 6 = 0$$

(و) مربع ریشه های معادله فوق باشند.

$$\left. \begin{array}{l} S = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16 - 8 = 8 \\ P = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 36 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 8x + 36 = 0$$



بخت بیامون علامت
ریشه های معادله درجه دوم

دوریه حقیقی دارد $\Delta > 0 \rightarrow$

دوریه هم علامت $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} > 0 \rightarrow$

دوریه مثبت دارند $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} > 0$

دوریه منفی دارند $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} < 0$

دوریه مختلف علامت $P = \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \rightarrow$

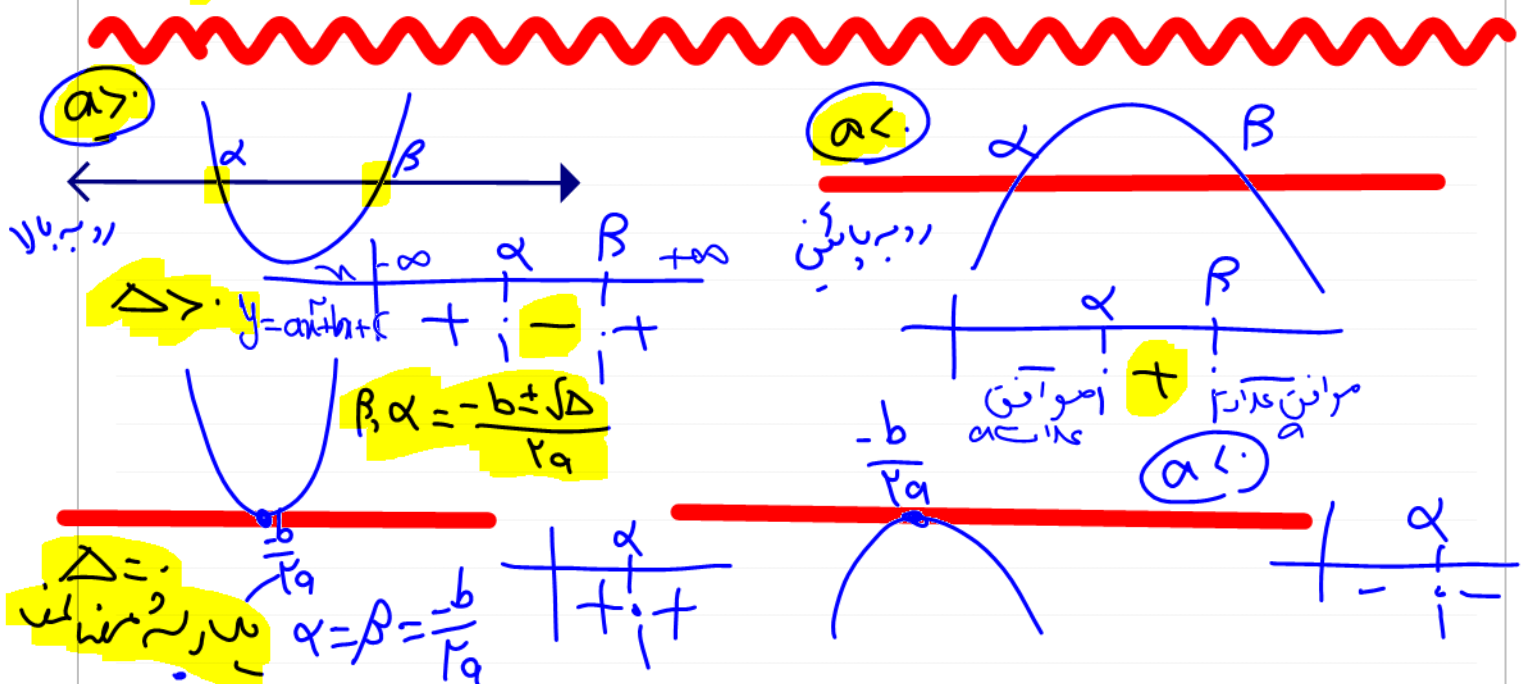
دوریه مثبت $\alpha < 0 < \beta$ یک ریشه مثبت یک ریشه منفی

دوریه قرینه دارند $S = 0 \rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \rightarrow b = 0$

تذکر : $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow$ یکی مثبت یکی منفی $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

دوریه مختلف علامت دارد $\Rightarrow$ ریشه ها را در دو طرف مبدأ اعداد می گذارد : تذکر

دوریه مختلف علامت دارد $\Rightarrow$ ریشه ها از هر دو ناحیه می گذرد : تذکر



کلاس های تابستان ۱۴۰۴

همواره مثبت $\Delta < 0$: < 0 ضرب > 0 ضرب

همواره منفی $\Delta < 0$: < 0 ضرب > 0 ضرب



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = mx + h$$

$$ax^2 + bx + c = mx + h$$

$\Delta >$
نقاط

$\Delta <$
نقاط

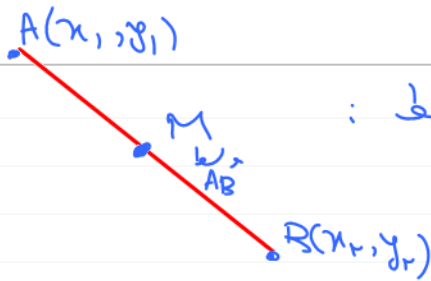
مقادیر درجه ۲
مقادیر نقاط $\Delta = 0$
نقاط



بنام خدا

هندسه تحلیلی

۱) طول پاره خط :



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

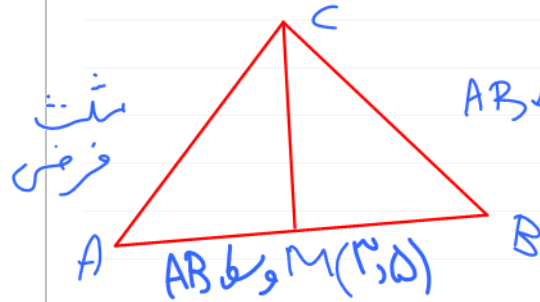
$A(2, 5) \quad B(7, 1)$

$$AB = \sqrt{(7-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25}$$

$$M \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

۲) مختصات وسط پاره خط

مسئله: اگر $A(2, 3)$, $B(5, 7)$, $C(-3, 10)$ باشد طول میانه وار در مثل ABC درشت



AB وسط M

$$\begin{cases} x_M = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3.5 \\ y_M = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

$M(3.5, 5)$

$C(-3, 10)$

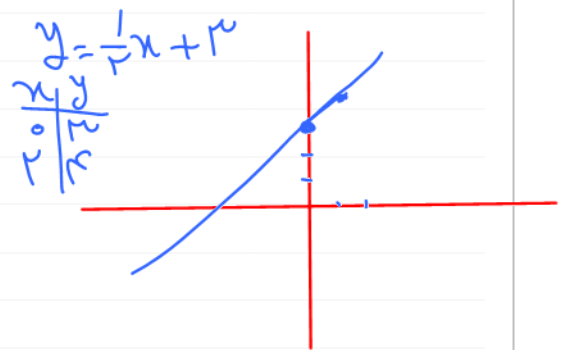
$$CM = \sqrt{(3.5 - (-3))^2 + (5 - 10)^2} = \sqrt{34 + 25} = \sqrt{59}$$

۳) شیب خط

الف) $y = mx + b$

عرض از مبدأ $\rightarrow$ b

شیب $\rightarrow$ m

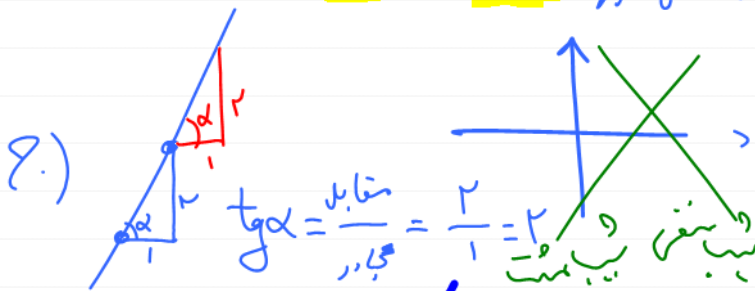


ب) $A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$

تفاضل عمودی Δy

تفاضل طولی Δx

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



۳) $ax + by + c = 0$

$$m = -\frac{a}{b}$$

$$2x + 3y - 7 = 0 \rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

$$-3x + y - 2 = 0$$

$$m = \frac{3}{1} = 3$$



$$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

$$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

مثال: $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \rightarrow m_1 = -\frac{2}{3} \\ 5x + 4y - 7 = 0 \rightarrow m_2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$
خط موازی

$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} \\ 2x - y + 3 = 0 \rightarrow m_2 = 2 \end{cases}$

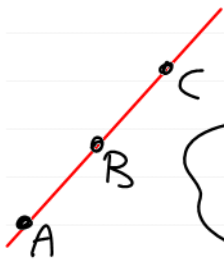
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} & \text{منطبقه} \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} & \text{موازی} \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} & \text{مقاطعند} \end{cases}$$

مثال منطبق: $\begin{cases} 2x + 3y + 0 = 0 \\ 5x + 4y + 10 = 0 \end{cases}$

(۵) شرط اینکه سه نقطه A, B, C بر یک راست باشند

امتداد
استقامت



$$m_{AB} = m_{BC}$$

مثال: $A(2m, -1), B(1, -3), C(7, -3)$

آیا سه نقطه بر یک خط است؟
بازای چه m قرار میگیرد؟

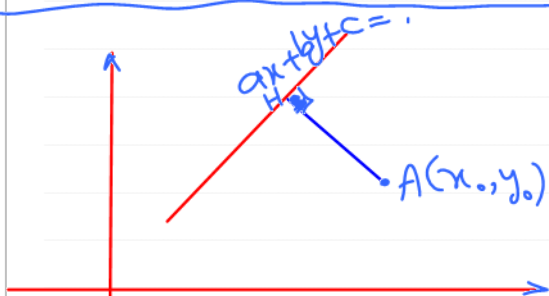
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{-1 - (-3)}{2m - 1} = \frac{1 - 7}{-3 - (-3)} \Rightarrow \frac{2}{2m - 1} = \frac{-6}{0}$$

$$2m - 1 \neq 0$$

$$2m - 9m^2 - 12 + 9m = -12m + 11$$

$$-9m^2 + 29m - 20 = 0$$

$$\Delta = 0$$



(۶) فاصله نقطه از خط

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: $2x + 5y - 7 = 0$
 $A(-2, -3)$

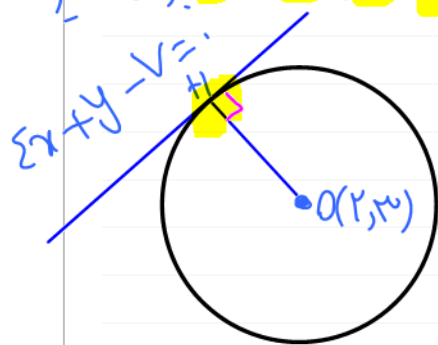
$$AH = \frac{|2(-2) + 5(-3) - 7|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{21}{\sqrt{29}}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ A(-1, -3) \end{cases}$$

$$AH = \frac{|2(-1) + 3(-3) - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{14}{\sqrt{13}}$$



مثال: اگر یک خط باشد شعاع دایره را بیابید. مرکز دایره ای باشد خط $\Sigma x + y - v = 0$ بر آن دایره



$$OH = ?$$

$$OH = \frac{|\Sigma(2) + 3 - v|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = R$$

$A(2,3)$
 $m = v \rightarrow y = ax + b$

$$y = vx + b$$

$$3 = 1 \cdot 2 + b \rightarrow b = -1$$

نوشتن معادله خط با معادله بردار نقطه شیب

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = v(x - 2)$$

$$y = vx - 1$$

$$y = vx - 1$$

۸) مساحت مثلث با معادله بردار متفاوتهای

$A(1,2)$

$B(2,0)$

$C(3,4)$

A	1	2
B	2	0
C	3	4
A	1	2

$$S = \frac{1}{2} |(2+1+4) - (4+10+4)| = \frac{1}{2} \times 8 = 2$$

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by + c' = 0$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۹) فاصله دو خط موازی

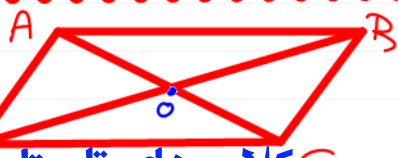
$$2x + y - 5 = 0$$

$$2x + y - 1 = 0$$

مثال: فاصله دو خط موازی

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(-1) - (-5)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

نکته ۱۰



کلاس های تابستان ۱۴۰۴

$$AC \text{ و } O = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)$$

$$BD \text{ و } O.D = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right)$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$



اگر $b = a + 1$ باشد، میسر از زیری های $x^2 - 2bx + \epsilon = 0$ میسر است.

$$\frac{-2}{a} \quad \frac{2}{a} \quad \frac{-2}{a} \quad \frac{2}{a}$$

$$a=1 \\ b=2$$

$$x^2 - \epsilon x + \epsilon = 0 \\ (x-2)^2 = 0 \\ x=2$$

$$\Delta = 4b^2 - 4a$$

$$\frac{2b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a}}{2a} \\ \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a}}{a}$$

$$\frac{a+1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1 - a}}{a} = \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2 + a + 1}}{a}$$

$$\frac{a+1 \pm |a-1|}{a}$$

$$\frac{a+1 + a-1}{a} = 2$$

$$\frac{(a+1) - (a-1)}{a} = \frac{2}{a}$$



معادلات گنگ

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{5x+1} = 9$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = (9 - \sqrt{5x+1})^2$$

$$x+2 = 81 + 5x+1 - 18\sqrt{5x+1}$$

$$10\sqrt{5x+1} = 15x + 80 = 5(3x+16)$$

$$10(5x+1) = 9(x^2 + 14x + 49)$$

$$50x + 100 = 9x^2 + 126x + 441$$

$$9x^2 - 204x + 341 = 0$$

$$x=2$$

$$\frac{204 \pm 22}{18}$$

$$\frac{226}{18}$$

$$\frac{113}{9} = 12.55$$

$$* \sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3 \rightarrow (\sqrt{x+3})^2 = (3 - \sqrt{x})^2$$

$$x+3 = 9 + x - 6\sqrt{x}$$

$$6\sqrt{x} = 6 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x=1$$





































