

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دعای پیش از مطالعه

اَللّٰهُمَّ اَخْرِجْنِيْ مِنْ ظُلُمَاتِ الْوَهْمِ وَاكْرِمْنِيْ بِنُورِ الْفَهْمِ
اَللّٰهُمَّ افْتَحْ عَلَيْنَا اَبْوَابَ رَحْمَتِكَ وَاَنْشُرْ عَلَيْنَا خَزَائِنَ عُلُوْمِكَ
بِرَحْمَتِكَ يَا اَرْحَمَ الرَّاحِمِيْنَ

پروردگارا، خارج کن مرا از تاریکی های فکر و گرامی بدار به نور فهم
پروردگارا، بگشای بر ما در های رحمت را و بگستران کنج های دانشت را به امید رحمت
تو ای مهربان ترین مهربانان

بیایید به حقوق دیگران احترام بگذاریم

دوست عزیز، این کتاب حاصل دسترنج چندین ساله ی مؤلف، مترجم و ناشر آن است. تکثیر و فروش آن به هر شکلی بدون اجازه از پدیدآورنده کاری غیراخلاقی، غیرقانونی، غیرشرعی و کسب درآمد از دسترنج دیگران است، نتیجه ی این عمل نادرست، موجب رواج بی اعتمادی در جامعه و بروز پی آمدهای ناگوار در زندگی و محیط ناسالم برای خود و فرزندانمان می گردد.



درسنامه آمار ریاضی و احتمال

ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار زیستی

**تألیف و گردآوری:
افشین یعقوبی**

سرشناسه

: یعقوبی، افشین، ۱۳۶۸-

عنوان و نام پدیدآور

AGK: درسنامه آمار ریاضی و احتمال: ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار زیستی / تألیف و گردآوری
افشین یعقوبی.

مشخصات نشر

: تهران: آناهید گستر خلیلی، ۱۴۰۳.

مشخصات ظاهری

: ۱۰۰ ص؛ مصور؛ ۲۲ × ۲۹ س.م.

شابک

: 978-622-4907-43-1

وضعیت فهرست‌نویسی

: فیپا

موضوع

: آمار ریاضی -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

Mathematical statistics -- Study and teaching -- Examinations, questions, etc (Higher)

احتمالات -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

Probabilities -- Study and teaching -- Examination, questions, etc. (Higher)

رده‌بندی کنگره

: QA۲۷۶/۲

رده‌بندی دیویی

: ۵۱۹/۵۰۷۶

شماره کتابشناسی ملی

: ۹۸۵۸۳۲۵



انتشارات آناهید گستر خلیلی

نام: AGK: درسنامه آمار ریاضی و احتمال

(ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار زیستی)

تألیف و گردآوری: افشین یعقوبی

ناشر: آناهید گستر خلیلی

نوبت و سال چاپ: اول. ۱۴۰۳

شمارگان: ۱۰۰۰

چاپ و صحافی: گیلان

مدیر تولید: امیرحسین خلیلی

مدیر فنی و هنری: مریم آرده

تایپ و صفحه‌آرایی: آرزو راضی

بهاء: ۲۲۰۰۰۰ تومان

آموزشگاه/فروشگاه: ۰۲۱۶۶۵۶۸۶۲۱

مرکز پخش: ضلع جنوب غربی میدان انقلاب . جنب بانک پارسیان . مجتمع تجاری پارس . طبقه اول

مدیر فروش: ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ (ارتباط از طریق پیامک)

 agkpublisher@gmail.com

 www.agkins.com

طلیحه سخن مدیر تولید:

سپردن کار به اهلش نشانه‌ی خردمندی است.

برای تولید بسته‌های آموزشی تمام تلاش خود را به کار گرفته‌ایم تا محصولی شایسته را تقدیم شما عزیزان نماییم.

مجموعه‌ای که پیش روی شماست براساس معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور و به قلم مجرب‌ترین اساتید تألیف شده است و مطالعه آن موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه شما خواهد شد. ارائه بالاترین آمار قبولی در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری در دهه اخیر بیان‌گر توانایی این مجموعه در راستای اهداف آموزشی خود می‌باشد. اینک با اتکا به تجربه‌ای ۱۷ ساله می‌توانیم ادعا کنیم که مجموعه حاضر، بی‌شک از جمله کامل‌ترین و به‌روزترین بسته‌های آموزشی موجود در عرصه کنکور می‌باشد.

❧ برخی از ویژگی‌های بسته‌های آموزشی:

- منطبق با معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور
- گردآوری و تألیف توسط مجرب‌ترین اساتید کنکور
- تدریس مطالب از سطح پایه تا پیشرفته به بیان ساده و روان
- انتقال بهتر مفاهیم با استفاده از شکل، جدول و نمودار
- تألیف مبتنی بر نحوه‌ی طراحی سوالات کنکور
- مطالعه یک منبع منسجم به جای مطالعه چندین منبع مختلف
- منبعی خودآموز و بدون نیاز به مدرس

اینک علاوه بر مطالعه بسته‌های آموزشی استفاده از خدمات و محصولات زیر را به عنوان ضمانتی برای قبولی به شما داوطلبان عزیز توصیه می‌کنم؛

❧ آزمون‌های آزمایشی: خوش بود گر محک تجربه آید به میان

داوطلب شجاع کیست؟ داوطلبی است که خود را مورد سنجش (خود را با خود) و ارزیابی (خود را با دیگران) قرار دهد تا پیش از کنکور به نقاط ضعف خود پی ببرد و آن‌ها را تقویت نماید. آزمون‌های آزمایشی دارای یک برنامه‌ریزی منسجم است و به شما اولتیماتوم می‌دهد. یعنی شما باید در یک زمان معین مطالب معینی را مطالعه نمایید.

آزمون‌های آزمایشی مجموعه دارای سوالات استاندارد، پاسخنامه تشریحی و کارنامه تحلیلی می‌باشد. صادقانه شرکت در آزمون‌های آزمایشی را به شما عزیزان توصیه می‌کنم.

❧ مشاوره تخصصی و برنامه‌ریزی: زیر نظر حرفه‌ای‌ها درس بخوانید ...

در صورتی که نمی‌توانید با توجه به زمان آزادتان برنامه‌ی مطالعاتی استاندارد را برای خود تدوین کنید حتماً از افراد متخصص کمک بخواهید. افرادی که تجربیات خود را صادقانه در اختیار شما قرار می‌دهند و برنامه‌ریزی مناسب با شرایط شما را انجام می‌دهند.

📖 کتاب تست:

کوچک‌ترین واحد یادگیری در کنکور، تست است.

شما می‌توانید برای این‌که سطح یادگیری خود را پس از مطالعه بسنجید از کتاب‌های تست مجموعه (تست کنکور) و ماطراحان (تست‌های تألیفی) استفاده کنید. این کتاب‌ها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده‌اند و می‌توانند نحوه‌ی طرح سوالات کنکور و سطح آن‌ها را به‌صورت واضح به شما نشان دهند.

📖 درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم مناسب‌ترین منابع برای دوران مرور و جمع‌بندی:

بیش‌تر داوطلبان حین مطالعه نگران خلاصه‌نویسی و مرور آموخته‌های خود هستند و برای خلاصه‌نویسی زمان زیادی را صرف می‌کنند. اینک به شما مژده می‌دهیم که این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است و دیگر با استفاده از درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم نیاز به خلاصه‌نویسی ندارید.

شما می‌توانید نظرات، انتقادات و پیشنهادهای سازنده خود را در مورد بسته‌های آموزشی به شماره‌تلفن همراه ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ فقط و فقط پیامک نمایید.

مشاور و مدیر تولید

امیرحسین خلیلی

طلیحه سخن مؤلف:

هر ساله شاهد رقابت فشرده‌تری در تمامی سطوح کنکور می‌باشیم، رشته‌ی آمار زیستی هم از این امر مستثنی نمی‌باشد. این درس برای داوطلبان رشته‌ی آمار زیستی دارای ضریب ۲ می‌باشد، با توجه به سؤالات سال‌های گذشته، مؤلف این درسنامه سعی بر آن داشته تا مطالب این درس را طوری شرح دهد که پاسخگوی تمامی سؤالات این درس باشد. از مزیت‌های این کتاب می‌توان به خلاصه‌گویی مطالب درسنامه، صرف‌نظر از اثبات قضایا و ... و همچنین سؤالات سال‌های گذشته رشته‌ی آمار زیستی و همچنین برخی از سؤالات رشته‌ی آمار ریاضی در وزارت علوم و حل آن‌ها به‌طور کاملاً تشریحی نام برد.

لذا داوطلبانی که به نمره مطلوب در این درس می‌اندیشند، با خواندن این درسنامه و پاسخگویی به سؤالات هر فصل، می‌توانند به‌طور کامل به هدف خود برسند.

درضمن، در تمام درسنامه علامت () نماد نکته می‌باشد و حائز اهمیت ویژه است.

و در پایان از تمامی معلمان و اساتید بزرگوارم از کلاس اول ابتدایی تا مقطع فعلی، نهایت سپاس و قدردانی را دارم.

با آرزوی موفقیت برای تمامی داوطلبان عزیز

ارادتمند شما

افشین یعقوبی

فصل اول: اصول شمارش	۹
فصل دوم: احتمال	۱۵
فصل سوم: متغیر تصادفی	۲۶
فصل چهارم: متغیرهای تصادفی گسسته	۳۱
فصل پنجم: متغیرهای تصادفی پیوسته	۴۱
فصل ششم: متغیرهای تصادفی توأم	۵۰
فصل هفتم: امید ریاضی و خواص آن	۵۷
فصل هشتم: روش‌های به‌دست آوردن تابع چگالی احتمال و روابط بین توزیع‌های آماری	۷۲
فصل نهم: برآورد	۸۶
فصل دهم: قضایای حدی	۹۵

اصول شمارش

- اصل ضرب: اگر انجام عمل A به n_1 طریق و انجام عمل B که متمایز از عمل A می باشد، به n_2 طریق انجام شود، آنگاه کل حالات برابر با $n_1 \times n_2$ می باشد.
- اصل جمع: اگر انجام عمل A به n_1 طریق و انجام عمل B که متمایز از عمل A است به n_2 طریق انجام شود، آنگاه تعداد روش های انجام عمل A یا عمل B عبارت از: $n_1 + n_2$.

جایگشت

- تعداد حالات n شی متمایز در یک ردیف، $n!$ می باشد.
- تعداد حالات r شی از میان n شی متمایز ($r \leq n$) به طوری که ترتیب مهم نباشد، را با P_r^n نمایش می دهیم و مقدارش از رابطه زیر محاسبه می گردد.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad \forall n \geq r$$

$$P_r^n = 0, \quad \forall n < r$$

- ترکیب: تعداد حالات r شی از میان n شی متمایز ($r \leq n$) به طوری که ترتیب مهم نباشد، را با $C(n, r)$ نمایش می دهیم و مقدارش از رابطه زیر محاسبه می گردد.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad \forall n \geq r$$

$$C_r^n = 0, \quad \forall n < r$$

❖ ترکیب r شی از میان n شی متمایز را با $\binom{n}{r}$ نیز نمایش می دهند.

جایگشت با تکرار

- تعداد حالات تقسیم n شی مختلف به k گروه، به طوری که n_1 تای آن ها از نوع یک و n_2 تای آن ها از نوع ۲، $\dots$ ، n_k تای آن ها از نوع k باشند، به گونه ای که $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ، برابر است با:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

جایگشت دایره ای

- تعداد حالات n شی متمایز، دور یک دایره برابر با $(n-1)!$ می باشد.

- **فضای نمونه:** کل حالات یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می‌گوییم، و با S نمایش می‌دهند. مانند پرتاب یک سکه‌ی سالم که یا شیر می‌آید و یا خط. یا پرتاب یک تاس سالم ۶ وجهی، که کلیه حالاتش، ۶ می‌باشد یعنی یا خال یک می‌آید یا خال ۲ می‌آید و ... یا خال ۶ می‌آید. فضای نمونه سکه سالم: $S = \{H, T\}$ که در آن H معرف شیر بودن سکه و T معرف خط بودن سکه می‌باشد و فضای نمونه تاس سالم $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می‌باشد.
 - **پیشامد:** هر زیرمجموعه از فضای نمونه را پیشامد می‌گوییم.
- مثلا پیشامد این که در پرتاب یک سکه‌ی سالم، شیر مشاهده کنیم یا در پرتاب یک تاس سالم، پیشامد این که خال زوج مشاهده کنیم و الی آخر.

تابع احتمال

- تابع احتمال را با نماد P نمایش می‌دهند و تابعی است که به ازای هر عضو از فضای نمونه، عددی است که بین صفر و یک می‌باشد.
- $$P: S \rightarrow [0, 1]$$
- یا اگر یک ω دلخواه وجود داشته باشد که متعلق به فضای نمونه باشد، یعنی:
- $$\forall \omega \in S \rightarrow 0 \leq P(\omega) \leq 1$$
- مثال:** در پرتاب دو تاس سالم، اولاً فضای نمونه را تشکیل دهید، ثانیاً احتمال‌های زیر را حساب کنید.
- (الف) احتمال آن که دو عدد یکسان باشند؟
- (ب) احتمال آن که دو عدد مضرب هم باشند؟
- (ج) احتمال آن که جمع آن‌ها حداقل ۹ باشد؟
- اگر تاس اول را با x نمایش دهیم و تاس دوم را با y نمایش دهیم، آنگاه فضای نمونه، عبارت از:

$$S = \left\{ (x, y) : \begin{matrix} x = 1, 2, \dots, 6 \\ y = 1, 2, \dots, 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)\}$$

$$N(S) = 6^2 = 36$$

لازم به ذکر است که تعداد حالات یک پیشامد، مانند S را با $N(S)$ نمایش می‌دهیم.

متغیر تصادفی

- **تعریف:** متغیر تصادفی تابعی است که دامنه‌ی آن اعضای فضای نمونه و برد آن عدد حقیقی می‌باشد. یعنی: $X: S \rightarrow \mathbb{R}$
- متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ نمایش می‌دهند و یافته‌های آن را با حروف کوچک نمایش می‌دهند.
- مثال:** سکه‌ای سالم را دوبار پرتاب می‌کنیم، اگر متغیر تصادفی X را تعداد شیرهای ظاهر شده در این دو پرتاب معرفی کنیم، مقادیر این متغیر تصادفی را بیابید.
- ابتدا بعد از شناخت خوب از متغیر تصادفی که در مسئله بیان شده، کفایت که فضای نمونه‌ای این سکه که دوبار پرتاب شده است را بدست آورد. اگر سکه شیر بیاید را با H نشان دهیم و ظاهر شدن خط در سکه را با T نشان دهیم. داریم:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \rightarrow \begin{cases} X(HH) = 2 \\ X(HT) = X(TH) = 1 \\ X(TT) = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0, 1, 2$$

انواع متغیر تصادفی

- (۱) متغیر تصادفی گسسته: متغیری است که برد آن شمارش‌پذیر باشد.
- (۲) متغیر تصادفی پیوسته: متغیری است که بر آن به‌صورت بازه یا زیر بازه‌هایی از اعداد حقیقی باشد.
- (۳) متغیر تصادفی آمیخته: ترکیبی از دو متغیر تصادفی گسسته و پیوسته باشد.
- **تابع توزیع تجمعی:** تابع توزیع تجمعی را با $F_X(x)$ نمایش می‌دهیم و عبارتست از احتمال آنکه متغیر تصادفی X کمتر یا مساوی در یک نقطه مانند x باشد و به‌صورت $F_X(x) = P(X \leq x)$ نمایش می‌دهیم. حال اگر این متغیر تصادفی پیوسته باشد، آنگاه:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X = t)$$

و اگر متغیر تصادفی X گسسته باشد، آنگاه:

تابع چگالی

- اگر X متغیر تصادفی پیوسته باشد، آنگاه تابع چگالی متغیر تصادفی X را با $f_X(x)$ نشان می‌دهیم. و اگر X متغیر تصادفی گسسته باشد، آنگاه تابع توزیع متغیر تصادفی X را با $P(X=x)$ نشان می‌دهیم.

متغیرهای تصادفی گسسته

گفتیم که X یک متغیر تصادفی گسسته است، اگر تکیه‌گاه این متغیر تصادفی به صورت مجموعه‌ای شمارش‌پذیر متناهی یا شمارش‌پذیر نامتناهی باشد. قبل از این‌که به سراغ تابع توزیع‌های مهم و پرکاربرد در حالت گسسته برویم لازم است یک تعریف کلی از امید ریاضی و واریانس و تابع مولد گشتاور در حالت گسسته داشته باشیم.

امید ریاضی

در حالت گسسته، امید ریاضی متغیر تصادفی X را با $E(X)$ یا μ_X نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x \cdot P(X = x)$$

و همچنین اگر $h(X)$ یک تابع از متغیر تصادفی X باشد، آنگاه:

$$E(h(X)) = \sum_{x \in S_X} h(x) \cdot P(X = x)$$

واریانس: را با $Var(X)$ یا σ_X^2 نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

یا

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

تابع مولد گشتاور نیز به صورت $M_X(t)$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x \in S_X} e^{tx} \cdot P(X = x)$$

توزیع برنولی

یک آزمایش دوحالتی است که یا به برد (موفقیت) و یا به باخت (شکست) منجر می‌شود. مانند پرتاب یک سکه سالم،

به دنیا آمدن یک فرزند از نظر جنسیتی و ...

$$P(X = x) = P^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

$$E(X) = p, \quad Var(X) = P(1-p) = pq, \quad p+q=1, \quad 0 < p < 1$$

$$M_X(t) = [pe^t + (1-p)] = [pe^t + q]$$

$X \sim Ber(p)$ یعنی p پارامتر X دارای توزیع برنولی با پارامتر p است

$$X \sim Ber(p) \Rightarrow \begin{cases} 1) X^k \sim Ber(p), k > 0 \\ 2) 1-X \sim Ber(1-p) \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی پیوسته

در فصل‌های قبل گفتیم که متغیر تصادفی X متغیری پیوسته است، هرگاه برد آن به صورت یک بازه یا اجتماعی از چند زیر بازه باشد، مانند طول عمر یک وسیله و ...
در حالت پیوسته، $f_X(x)$ را یک تابع احتمال گویند، هرگاه:

$$۱) \forall x \in S_X : f_X(x) \geq 0$$

$$۲) \int_{x \in S_X} f_X(x) dx = 1$$

امید ریاضی یک متغیر تصادفی پیوسته مانند X با تابع چگالی $f_X(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(X) = \int_{x \in S_X} x f_X(x) dx$$

$$\text{Var}(X) = \int_{x \in S_X} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$$

همچنین واریانس به صورت زیر تعریف می‌شود.

تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی مانند X با تابع چگالی $f_X(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{x \in S_X} e^{tx} f_X(x) dx$$

توزیع یکنواخت پیوسته

متغیر تصادفی X در بازه‌ی (a, b) دارای توزیع یکنواخت باشد، هرگاه به ازای هر نقطه متعلق به (a, b) ، $f_X(x)$ یکسان داشته باشد. به عبارتی گویند $X \sim u(a, b)$ هرگاه:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}, t \neq 0$$

و تابع توزیع تجمعی‌اش به صورت $a \leq x \leq b$ و $F_X(x) = \frac{x}{b-a}$ می‌باشد.

متغیرهای تصادفی توأم

متغیرهای تصادفی توأم

در فصل‌های گذشته با متغیر تصادفی آشنا شدیم و دیدیم که یک متغیر تصادفی دارای چه خصوصیاتی است و با یک متغیر تصادفی چه در حالت پیوسته و چه در حالت گسسته آشنا شدیم. متغیرهای تصادفی توأم: اگر X یک متغیر تصادفی و Y نیز یک متغیر تصادفی باشد آنگاه می‌توان تمامی شرایطی که در متغیر تصادفی در حالت یک بعدی بیان کردیم را در حالت دو بعدی نیز بیان کنیم.

تابع احتمال توأم

تابع احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y را با $P(X=x, Y=y)$ نمایش می‌دهیم. (در حالت گسسته) و اگر در شرایط زیر صادق باشند.

$$\begin{aligned} ۱) & \forall x \in S_X, \forall y \in S_Y : P(X=x, Y=y) \geq 0 \\ ۲) & \forall x \in S_X, \forall y \in S_Y : \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} P(X=x, Y=y) = 1 \end{aligned}$$

تابع توزیع تجمعی توأم

توزیع تجمعی X و Y در حالت گسسته به صورت زیر می‌باشد.

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{m \leq x} \sum_{n \leq y} P(X=m, Y=n)$$

در تابع توزیع تجمعی توأم دو متغیر تصادفی مانند X و Y داریم:

$$\begin{aligned} ۱) & F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = 0 \\ ۲) & F_{X,Y}(+\infty, y) = F_Y(y), \quad F_{X,Y}(x, +\infty) = F_X(x) \\ ۳) & F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1 \\ ۴) & \text{اگر } a < b, c < d \Rightarrow P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \\ ۵) & \forall x, y: \quad F_X(x) + F_Y(y) - 1 \leq F(x,y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)} \end{aligned}$$

امید ریاضی و خواص آن

امید ریاضی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f_X(x)$ باشد، امید ریاضی متغیر تصادفی X را با $E(X)$ یا μ_X نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x \cdot P(X = x) \quad (1) \text{ اگر } X \text{ گسسته باشد:}$$

$$E(X) = \int_{x \in S_X} x \cdot f_X(x) dx \quad (2) \text{ اگر } X \text{ پیوسته باشد:}$$

نحوه‌ی محاسبه‌ی امید ریاضی با استفاده از تابع توزیع تجمعی: اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی ($X \geq 0$) با تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ باشد، امید ریاضی را به روش زیر محاسبه می‌کنیم.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) \quad \text{اگر } X \text{ گسسته باشد:}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X \geq x) dx = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx \quad \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد:}$$

برخی از خواص امید ریاضی:

$$1) E(C) = C \quad \text{ثابت } C$$

$$2) E(aX + b) = aE(X) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$3) E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

$$4) E(\bar{X}) = E(X) = \mu_X$$

✚ اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} E(X) = E(E(X|Y)) \\ E(Y) = E(E(Y|X)) \end{cases}$$

روش‌های به‌دست آوردن تابع چگالی احتمال و روابط بین توزیع‌های آماری

روش تابع توزیع

با یک مثال شروع می‌کنیم.

فرض کنید $X \sim \chi^2(2)$ باشد، تابع $Y = 2X$ دارای چه توزیعی می‌باشد.

حل: $X \sim \chi^2(2) \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}, x \geq 0$

حال می‌خواهیم تابع احتمال Y را بدست آوریم. یکی از راه‌حل‌های این مثال، استفاده از تابع توزیع می‌باشد. پس:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{2}\right) = F_X\left(\frac{y}{2}\right)$$

چون X یک متغیر تصادفی پیوسته می‌باشد، پس اگر از تابع توزیع تجمعی مشتق بگیریم، تابع چگالی بدست می‌آید. پس:

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)} \right) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}y}$$

پس اگر $X \sim \exp\left(\frac{1}{2}\right)$ باشد، آنگاه: $Y = 2X \sim \exp\left(\frac{1}{4}\right)$

✚ کای اسکور با ۲ درجه آزادی همان توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

مثال: اگر $X \sim N(0,1)$ باشد، آنگاه توزیع $Y = |X|$ دارای چه توزیعی می‌باشد؟

حل: $X \sim N(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, -\infty < x < \infty$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = P(X \leq y) - P(X \leq -y) \Rightarrow F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y) - \frac{d}{dy} F_X(-y) \Rightarrow f_Y(y) = f_X(y) - (-1)f_X(-y) = f_X(y) + f_X(-y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-y)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2}y^2} + e^{-\frac{1}{2}y^2} \right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

برآورد

یک تخمین است که از روی نمونه‌ای که گرفتیم بتواند تخمین مناسبی برای جامعه باشد. به عبارتی می‌خواهیم از روی نمونه یک برآورد θ پیدا کنیم و با استنتاج‌های آماری آن را بر کل جامعه تعمیم بدهیم.

برآورد نااریب

$\hat{\theta}$ را یک برآورد نااریب می‌گویند، اگر $E(\hat{\theta}) = \theta$

برآورد کارا

اگر $\hat{\theta}_1$ یک برآورد نااریب برای θ و $\hat{\theta}_2$ یک برآورد نااریب دیگر برای θ باشد، آنگاه در میان این دو برآورد نااریب، آن که واریانس کمتری داشته باشد کاراتر می‌باشد. به عبارتی گوییم $\hat{\theta}_1$ کاراتر از $\hat{\theta}_2$ هست، اگر $\text{Var}(\hat{\theta}_1) < \text{Var}(\hat{\theta}_2)$. کارایی

دو برآورد $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ را به صورت $e(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\text{Var}(\hat{\theta}_2)}{\text{Var}(\hat{\theta}_1)}$$

سازگاری

$\hat{\theta}$ را یک برآوردکننده سازگار برای θ گوییم، اگر و فقط اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم؛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$$

اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نااریب برای θ باشد ($E(\hat{\theta}) = \theta$). برای n های بزرگ، اگر حد واریانس $\hat{\theta}$ به سمت صفر

میل کند، آنگاه $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده سازگار برای θ می‌باشد. به عبارتی اگر:

$E(\hat{\theta}) = \theta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}) = 0 \Rightarrow$ یک برآورد سازگار برای θ می‌باشد

قضایای حدی

نامساوی مارکف

اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی ($X \geq 0$) باشد و برای هر a مثبت، داریم:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

همچنین اگر h تابعی از متغیر تصادفی X باشد، به طوری که $h(X)$ نامنفی باشد، آنگاه به ازای هر $a > 0$ ، داریم:

$$P(h(X) \geq a) \leq \frac{E(h(X))}{a}$$

نامساوی چبشیف

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد ($\sigma^2 < \infty$)، آنگاه به ازای هر $k > 0$ ، داریم:

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

یا

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

نامساوی جنسن

اگر $h(X)$ یک تابع محدب باشد ($h''(X) > 0$) آنگاه:

$$E(h(X)) \geq h(E(X))$$

قانون قوی اعداد بزرگ

اگر $X_1, X_2, \dots$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ_i ($i=1, \dots$) باشند آنگاه:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mu\right) = 1$$

یعنی، میانگین نمونه، وقتی $n \rightarrow \infty$ برود، با احتمال ۱ به سمت میانگین جامعه (μ) می‌رود.

قضیه حد مرکزی

اگر $X_1, X_2, \dots$ و ... متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 باشند، آنگاه وقتی که

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim (n\mu, n\sigma^2), \quad \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \sim N(0, 1)$$

به سمت نرمال می‌رود. $n \rightarrow \infty$

اگر $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال باشد، آنگاه هر کدام از X_i ها ($i=1, \dots, n$) دارای توزیع نرمال می‌باشد و برعکس، اگر

$X_1, \dots, X_n$ هر کدام دارای توزیع نرمال باشند، آنگاه $\sum_{i=1}^n X_i$ دارای توزیع نرمال خواهد بود.

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

شماره تماس با نمایندگی‌های فعال و رسمی آناهید گستر خلیلی

شماره تماس	نمایندگی	شماره تماس	نمایندگی
۰۹۱۰۱۷۱۱۸۷۲	سبزوار (آقای شریفان)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۵۰	اراک (آقای حسینی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۱	شاهرود (آقای سلمانی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۸	اردبیل (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۹	شهرکرد (خانم تقی‌پور)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۱	ارومیه (آقای آرمیون)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	شیراز (آقای فروردین / خانم هوشمندی)	۰۹۱۹۶۳۲۱۸۵۲	اسفراین (خانم اسماعیل‌زاده)
۰۹۱۹۳۷۱۳۷۴۲	فسا (خانم شعبانی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۰	اصفهان (آقای کیانی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۹	قزوین (خانم چگینی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۴	اهواز (آقای دکتر رضازاده)
۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۷۱	کرج (آقای دکتر علیرضاپور)	۰۹۱۹۰۹۸۰۳۱۸	ایلام (آقای دکتر بوچانی)
۰۹۱۳۱۹۸۱۲۷۰	کرمان (خانم ضمانتی‌یار)	۰۹۱۹۶۸۵۳۱۱۶	بروجرد (آقای احمدی‌صدر)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کرمانشاه (آقای ابراهیمی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۹	بم (خانم سرحدی‌نژاد)
۰۹۱۹۵۳۷۱۸۹۰	کوهدشت (خانم یاریان)	۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۳	بیرجند (آقای دکتر بهروان)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۷	گرگان (آقای شاه‌علی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۷	تبریز (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	مراغه (آقای صمدی)	۰۹۰۱۳۷۳۷۸۹۶	جهرم (آقای یاعلی جهرمی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۴	مشهد (خانم دکتر شجاعی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۰	جیرفت (خانم دکتر محمدی)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	میاندوآب (آقای صمدی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۸	خرم‌آباد (خانم میر)
۰۹۱۹۶۳۵۰۷۶۸	نیشابور (آقای موسوی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۳	رشت (خانم تنها)
۰۹۱۹۵۷۳۳۲۸۴	هرمزگان (آقای زارعی)	۰۹۱۹۶۸۲۹۲۸۰	رفسنجان (آقای یوسفی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۵	همدان (آقای سوری)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۵	زاهدان (آقای مهمان‌دوست)
۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۴	یاسوج (آقای مرتضوی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۱	زنجان (خانم دکتر هوشیار)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۳	یزد (خانم آزاد)	۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۴	ساری (آقای دکتر اکبری)

بانک کتاب ناهید



«هر کتابی، از هر انتشاراتی را از ما بخواهید»

✓ جامع‌ترین بانک کتاب

✓ تحویل روزانه

✓ ارسال به تمامی نقاط کشور

✓ سفارش کتاب به صورت تلفنی و آنلاین

www.NIBS.ir



کتاب دانشگاهی، فنی و مهندسی، علوم پزشکی، علوم انسانی، عمومی،
ادبی، مذهبی، کمک آموزشی، کودک و نوجوان و کتاب نفیس

فروشگاه: تهران - خیابان انقلاب - روبه روی درب اصلی دانشگاه تهران

پاساژ فروزنده - طبقه همکف - پلاک ۳۳۱

تلفن: ۶۶۴۸۹۳۷۵ - ۰۲۱ - ۶۶۴۸۹۳۴۹ - ۰۲۱