

روابط بین ریشه های معادله درجه دو

اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه یا جواب ها را α و β بنامیم فرمول های زیر را داریم:

$$1) \text{ جمع دو ریشه: } \alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}$$

$$2) \text{ ضرب دو ریشه: } \alpha\beta = p = \frac{c}{a}$$

$$3) \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$4) \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$



جواب آخر را چند بلیغ → توان ۲ برسان → رادیکال و یا تقاضی → از جمله نکات طلایی!



مثال جمع بندی: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ باشد بدون حل مقادیر را حساب کنید.

1) $\alpha + \beta$

2) $\alpha\beta$

3) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

4) $\frac{2}{\alpha-1} + \frac{2}{\beta-1}$

5) $\alpha^{-3} + \beta^{-3}$

6) $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha$



$$7) \alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}$$

$$8) \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$9) \alpha^2 - 3\alpha + 15$$

$$10) \beta^2 - 4\beta - \alpha + 19$$

$$11) \left| \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right|$$





دامنه‌ی تابع:

(۱) اگر تابع بصورت چند جمله‌ای باشد. دامنه‌ی آن کل اعداد حقیقی \mathbb{R} است.



(۲) اگر تابع کسری باشد (صورت و مخارج چند جمله‌ای) دامنه‌ی آن برابر است با:

$\mathbb{R} - \{\text{ریشه مخارج}\}$

(۳) اگر تابع رادیکالی باشد. موارد زیر را داریم:

الف) $^{2k}\sqrt{f} \xrightarrow{\text{باید}} f \geq 0$

ب) $\frac{1}{\sqrt{f}} \xrightarrow{\text{باید}} f > 0$

ج) $\frac{1}{m + \sqrt{f}} \xrightarrow{\text{باید}} \begin{cases} f \geq 0 \\ m + \sqrt{f} \neq 0 \end{cases}$

د) $^{2k+1}\sqrt{f} \xrightarrow{\text{باید}} \text{دامنه } f \text{ را حساب می‌کنیم}$





۴) برای تعیین دامنه سینوس و کسینوس دامنه زاویه آن را مشخص می‌کنیم.

۵) برای تعیین دامنه تانژانت و کتانژانت داریم:

$$\tan \rightarrow \text{زاویه} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \cot \rightarrow \text{زاویه} \neq k\pi$$

۶) اگر تابع بصورت U و V داریم:

$$\log_v U \rightarrow \begin{cases} U > 0 \\ V > 0 \\ V \neq 1 \end{cases}$$





(۷) اگر تابع بصورت زیر باشد داریم:

$$y = \sqrt{\log_a U} \begin{cases} a > 1 & ; U \geq 1 \\ 0 < a < 1 & ; 0 < U \leq 1 \end{cases}$$

مثال: دامنه f تابع زیر را بدست آورید؟

$$1) f(x) = \frac{5x + 1}{|x + 2| + 7}$$



$$2) f(x) = \frac{3}{5 + \sin x}$$



$$3) f(x) = \frac{5x + 2}{|x| - 3} - 4$$



$$4) f(x) = \frac{5x - 1}{2x - x|x|}$$



$$5) f(x) = \sqrt{x+2} + 5x\sqrt{x+3}$$



$$6) f(x) = \frac{3x-1}{|x-1|+2-x}$$



$$7) f(x) = \frac{5x + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{1 - x}}$$



$$8) f(x) = \frac{5 + \sqrt{9 - x^2}}{1 - \sqrt{x - 1}}$$



$$9) f(x) = \sqrt{\sqrt{x-2} - 3}$$

$$10) f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{|x|}} + \sqrt{\frac{-3}{2-x}}$$





مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x - 1)}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $(1, 2]$ (۲) $[2, 10]$ (۳) $[1, 11)$ (۴) $(1, 11]$



ساوی بودن دو تابع:

دو تابع f, g در صورتی باهم مساوی اند که:

(۱) دامنه‌ها مساوی باشند یعنی $D_f = D_g$

(۲) ضابطه‌ها مساوی باشند یعنی: $f(x) = g(x)$



مثال:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - x}{x} \quad , \quad g(x) = x - 1$$



$$2) f(x) = \frac{|x|}{x^2} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{|x|}$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-3} \times \sqrt{x+2}$$



$$4) f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}} \quad , \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$$



$$5) f(x) = \log(x - 1)^2 \quad , \quad g(x) = 2 \log x - 1$$



مثال: a چه باشد تا $g(x) = x + 2$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & ; x \neq 1 \\ a-1 & ; x = 1 \end{cases}$ با هم برابر باشند.



مثال: کدام یک از توابع زیر با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

$\log \frac{x^2-4}{x^2-2x}$ (۲)

$\log(x-2) - \log x$ (۱)

$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$ (۴)

$\frac{1}{2} \log \left(\frac{x^2-4}{x}\right)^2$ (۳)



اعمال جبری روی توابع

اعمال جبری روی توابع روی اشتراک دامنه‌ها انجام می‌شود.

به صورت زیر:

$$\begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x) & ; & D_{f+g} = D_f \cap D_g \\ (f - g)(x) = f(x) - g(x) & ; & D_{f-g} = D_f \cap D_g \\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) & ; & D_{f \times g} = D_f \cap D_g \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} & ; & D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\} \end{cases}$$



مثال: اگر $f = \{(5, 9)(-1, 7)(4, 6)\}$ و $g = \{(5, 0)(1, 4)(4, -3)\}$ باشد، موارد زیر را محاسبه کنید؟

1) $(f + g)(4) =$

2) $(f - g)(-1) =$

3) $f \times g =$

4) $2f =$

5) $(2f + g)(5) =$

6) $\frac{f}{g} =$

7) $\frac{g}{f} =$



مثال: اگر $g(x) = \frac{3}{\sqrt{x+1}}$ و $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ مطلوبت؟

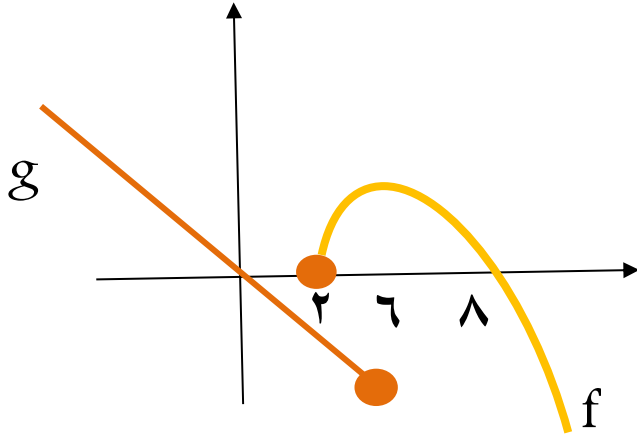
1) $D_{\frac{g}{h}} =$

2) $\left(\frac{h+2g}{g}\right)(0) =$

3) $\left(g^2 + \frac{1}{h}\right)(1) =$



مثال: نمودار توابع f , g مطابق شکل مقابل است. دامنه g تعریف تابع $\frac{g}{f}$ را بیابید؟



\sqrt{x}
 f_x
 Σ
 ∞
 π



تابع نمایی

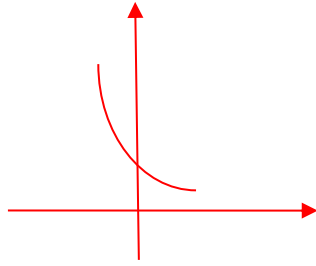
تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ ($a > 0$) تابع نمایی می شود و نمودار آن:

$$0 < a < 1$$

$$y = \left(\frac{0}{3}\right)^x$$

$$y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x}$$

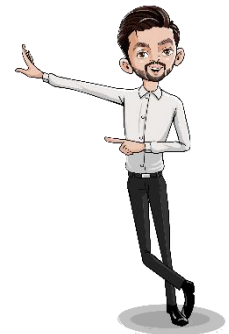
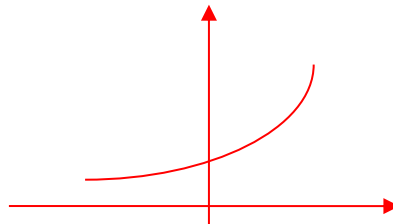


$$a > 1$$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$y = 7^x$$

$$y = \sqrt{2}^x$$



تابع لگاریتمی

اگر $c > 0, a > 0, a \neq 1$ داریم:

$$\log_a^c = b \Leftrightarrow a^b = c \quad \text{«} a \text{ مبنای قدرتم است»}$$

$$\log_A^1 = 0, \log_A^A = 1 \quad \text{بدیهی است که}$$

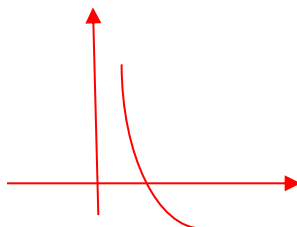


تابع با ضابطه $f(x) = \log_a^x$ که در آن $a > 0$ ، $a \neq 1$ می باشد، تابع گمارتیم خوانده می شود. که نمودار آن به ترتیب زیر است:

$$0 < a < 1$$

$$y = \log_{0/3}^x$$

$$y = \log_{\frac{2}{3}}^x$$

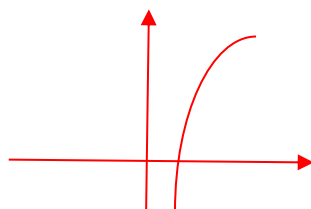


$$a > 1$$

$$y = \log_3^x$$

$$y = \log_{\sqrt{5}}^x$$

$$y = \log^x$$



تابع گمارتیم، معکوس تابع نمایش متناظرش است. مثلاً $y = \log_2^x$ ، $y = 2^x$ معکوس یکدیگرند، لذا نمودارهایشان نسبت به نیمه عمود اول و سوم قرینه است.

کنکور تجربی ۹۱: در تابع با ضابطه $f(x) = ab^x$ و $b > 0$ داریم $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ مقدار $f(\frac{3}{2})$ کدام است؟

ریاضی داخل 96: تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_2^{(bx-4)}$ از دو نقطه $(2,6)$, $(12,10)$ میگذرد a کدام است؟



به چهار درس زیر توجه کنید

*** درس اول ***

تمامی فرآیندهای که به شکل هم خانواده \log قابل محاسبه اند و قابل تبدیل به یک عدد می باشند.



تعریف: اگر a عددی اول یا عدد 10 باشد، کلیه اعداد به شکل $a^?$ مانند a^3 یا $\sqrt{a^2}$ یا $\frac{1}{a}$ یا $a\sqrt{a}$ اعداد هم خانواده a می نامیم.

$$\log_B^{A^m} = m \cdot \frac{1}{n} \log_B^A$$

به فرمول مقابل توجه کنید:

مثال:

1) $\log_{\frac{1}{5}}^{125}$

2) $\log_{100}^{\sqrt{0.001}}$

3) $\log_{e^3}^{e\sqrt{e}}$

4) $\log_5^{(\sqrt{125})^3}$



کنکور ۸۲ سراسری ریاضی

* درس نهم *

تمامی گزینیه های آمده در شمای مقابل از روی یکدیگر قابل محاسبه اند. بدین ترتیب که ابتدا گزینیه سردسته یعنی \log_3^2 محاسبه شده و سپس گزینیه مورد سوال محاسبه می شود.

$$\log_9^{2\sqrt{2}} \leftarrow \log_3^2 \rightarrow \log_{\frac{8}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

$$\downarrow$$

$$\log_{16}^{\sqrt{27}}$$

راه های تبدیل رادیکان به درجه:



مثال: ۱۲۰ درجه چند رادیکان می‌شود؟

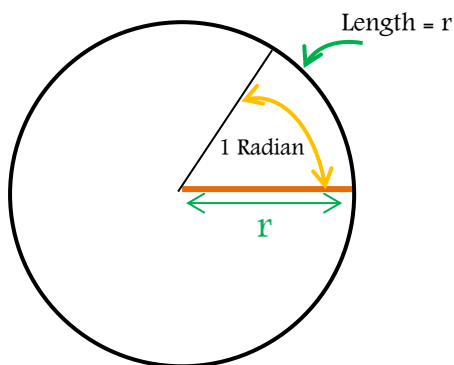
مثال: ۱۵ درجه چند رادیکان می‌شود؟

مثال: ۷۵ درجه چند رادیکان می‌شود؟

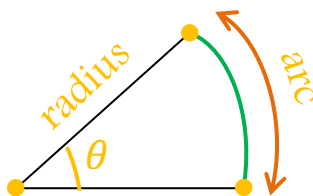


تعریف رادیان:

یک رادیان اندازه ک زاویه ک مرکزی می باشد که طول کمان رو به روی آن با شعاع دایره برابر باشد.



$$\theta = \frac{\text{arc length}}{\text{radius}}$$



به طور کلی:

برای حل سوالات زیریاد ادامه کافی است بدانیم:

کمان بخشی از محیط و قطاع بخشی از محدث دایره است.



مثال: دو چرخه سوار C روی یک میز دایره AC به شعاع ۹ متر در حال حرکت است. اگر این دو چرخه سوار حول مرکز دایره به اندازه C ۱۲۰ درجه بچرخند چه مسافتی را طی میکنند؟

مثال: طول تیغه های برف پاک کن یک اتومبیل ۲۴ سانتی متر است این تیغه طی حرکت خود به اندازه C $\frac{3\pi}{4}$ رادیان بچرخد چه مسافتی از شیشه را تمیز می کند؟





مثال: دو شهر A و B روی یک نصف انهار واقع اند. اگر اختلاف زاویه مرکزی آن ها 12° درجه باشد با در نظر گرفتن شعاع تقریبی کره زمین به اندازه 6400 کیلومتر فاصله C بین این دو شهر را بیابید؟

مثال: شعاع چرخ بزرگ یک تراکتور یک متر و شعاع چرخ کوچک 25 سانتی متر است. اگر چرخ بزرگ به اندازه C 180 درجه بچرخد چرخ کوچک چند دور می زند؟



مثال: قمره ای کوچک به شعاع ۱۵ سانتی متر توسط تسمه ای به یک قمره بزرگتر متصل است. اگر قمره بزرگ به اندازه ۱۰ درجه بچرخد قمره کوچک به اندازه $\frac{\pi}{9}$ رادیان می چرخد. شعاع قمره بزرگ چقدر است؟

مثال: زاویه کی بین عقربه کی ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت ۵:۴۰؟



مثال: زاویه بین عقربه C ساعت شمار و دقیقه شمار در ساعت $11:20$ ؟



نسبت های مشتق $(\pi \pm \alpha)$:

$$\sin(\pi - \alpha) =$$

$$\sin(\pi + \alpha) =$$

$$\cos(\pi - \alpha) =$$

$$\cos(\pi + \alpha) =$$

$$\tan(\pi - \alpha) =$$

$$\tan(\pi + \alpha) =$$

$$\cot(\pi - \alpha) =$$

$$\cot(\pi + \alpha) =$$



نسبت های مشتق $(2\pi \pm \alpha)$:

$$\sin(2\pi - \alpha) =$$

$$\sin(2\pi + \alpha) =$$

$$\cos(2\pi - \alpha) =$$

$$\cos(2\pi + \alpha) =$$

$$\tan(2\pi - \alpha) =$$

$$\tan(2\pi + \alpha) =$$

$$\cot(2\pi - \alpha) =$$

$$\cot(2\pi + \alpha) =$$

نسبت های مشتق $(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$



نسبت های مشتق $(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha)$:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

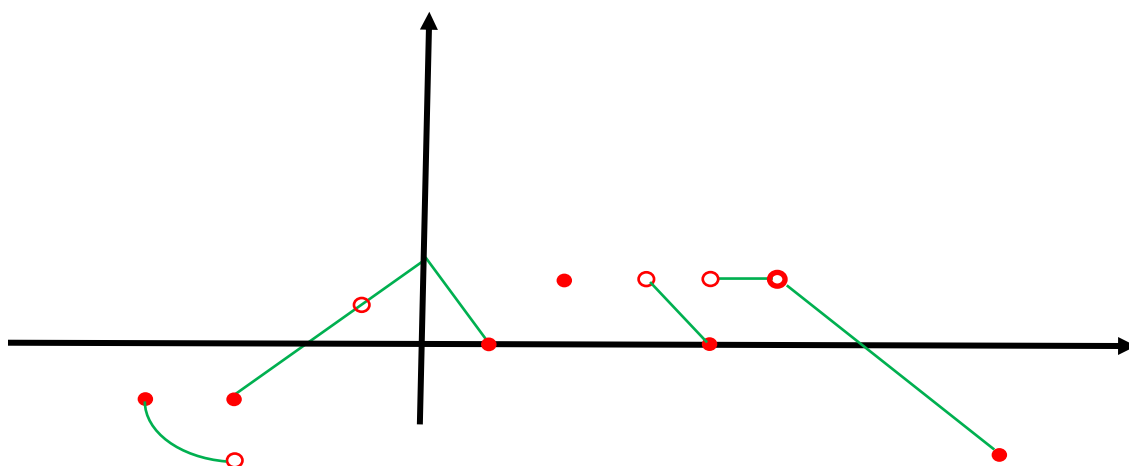
$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$$

حد و پیوستگی

نمودار تابع f مطابق شکل زیر است. در مورد وجود حد و پیوستگی تابع f در نقاط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ در نقاط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۱۰ و ۱۰۰- اظهار نظر کنید.



سوال: در مورد حد تابع در نقاط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ چه می گویند؟

سوال: در مورد پیوستگی تابع در نقاط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۱۰ و ۱۰۰ چه می گویند؟

مفهوم میل کردن:

$$: x \rightarrow a$$



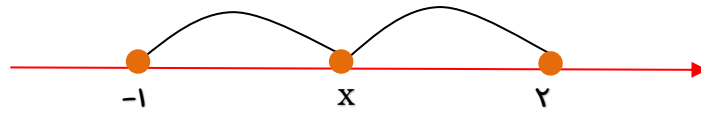
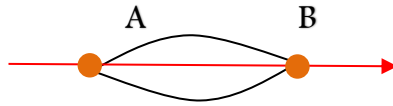
$$: x \rightarrow a^+$$

$$: x \rightarrow a^-$$

$$: x \rightarrow +\infty$$

$$: x \rightarrow -\infty$$

نکته: اگر A, B دو نقطه روی محور اعداد حقیقی باشند، فاصله C بین دو نقطه a, b به نهار $|a - b|$ یا $|b - a|$ نشان داده میشود.



بریم سال دهم:



فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت:
 ۱- اگر $|u| \leq a$ آن گاه $-a \leq u \leq a$.
 ۲- اگر $|u| \geq a$ آن گاه $u \geq a$ یا $u \leq -a$.

مثال

نامعادله‌های زیر را حل می‌کنیم.
 الف) $|x-3| \leq 2$

ب) $|2x-1| > 5$

برای حل نامعادله الف، با استفاده از خواص قدر مطلق آن را به یک نامعادله دوگانه تبدیل می‌کنیم.
 اکنون داریم:

پس مجموعه جواب این نامعادله، بازه $1 \leq x \leq 5$ است.
 برای نامعادله ب، بازه $1 < x < 3$ یا $x > 3$ است.

کار در کلاس

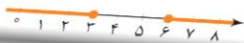
۱- در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $|\frac{x}{3} + 1| < \frac{2}{3}$

ب) $|5 - 2x| \geq 1$

۲- یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن بازه $(1, 9)$ باشد.

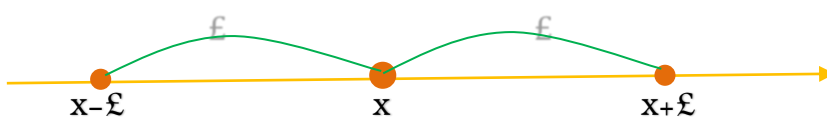
۳- یک نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد.



همایگی:

هر بازه شامل نقطه x یک همایگی نقطه x است.

همایگی متقارن: منظور از همایگی متقارن به مرکز x و شعاع ϵ تمامی نقاطی است که فاصله شان تا نقطه x کمتر از ϵ باشد که بازه ای به ترتیب زیر است:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قدر مطلق} \\ |X - x| < \epsilon \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{مرکز} = x \\ \text{شعاع} = \epsilon \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{بازه} \\ (x - \epsilon, x + \epsilon) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مرکز } x = \frac{a+b}{2} \\ \text{شعاع } \delta = \frac{b-a}{2} \end{array} \right\} \text{ است.} \quad \leftarrow \text{همایگی متقارن بازه } (a, b)$$

مثال:

$$? \longleftarrow \text{مرکز} = 5 \text{ و شعاع} = 0.2 \longrightarrow ?$$

مثال:

$$|5x+10| < 0.5 \longrightarrow \text{شعاع و مرکز} = ? \longrightarrow (??)$$

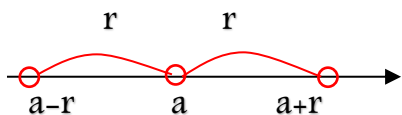
مثال:

$(1.2, 8.8)$ ← ؟ = شعاع و مرکز ← ؟

مثال: اگر $\{x \in \mathbb{R} : |3x - m + 3| < n/2\}$ هم‌پایه به مرکز ۲ و شعاع واحد باشد، مطلوبت m, n ؟

همایگی متقارن مخزوف:

مجموعه نقاط مطابق شکل مقابل یک همایگی متقارن مخزوف است.



شعاع = r و مرکز = a }

$$0 < |x - a| < r$$

$$(a-r, a+r) - \{a\}$$

$$(a-r, a) \cup (a, a+r)$$

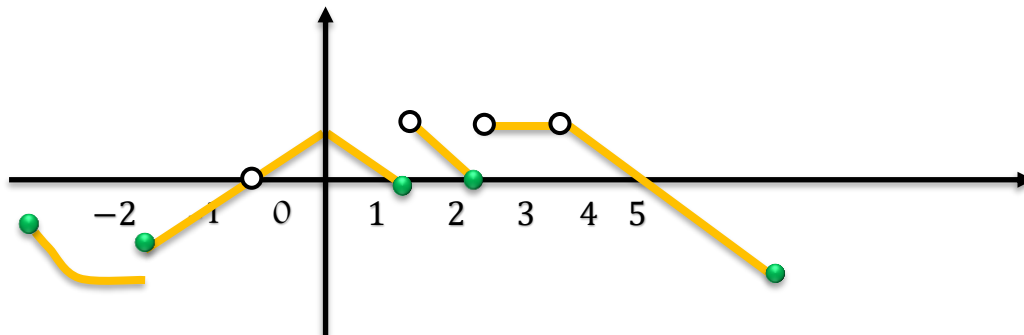
مثابه آنچه در همایی معمولی های قبل بیان شده، در همایی مخروف داریم:

$$(a,b) - \{x\} \cup (a,x) \cup (x,b) \longleftarrow \text{شعاع} = \frac{b-a}{2} \text{ و مرکز} = x = \frac{a+b}{2}$$

کنکور ۸۹ سراسری ریاضی: در همایی مخروف متقارن به صورت $\{3\} - (3a-7, a+5)$ شعاع همایی کدام است؟



نمودار تابع f مطابق شکل زیر است، در مورد وجود حد و پیوستگی تابع f اظهار نظر کنید.



پس بنابراین برای تعریف حد می‌گوییم:

و پیوستگی وقتی اتفاق می‌افتد که: