



اندازه دو قطر از متوازی الاضلاع ۱۲ و $۸\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه ۶۰° درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی الاضلاع کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۴ (۲)

۴۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بینشان به دست می آید.

$$S = \frac{1}{2}(12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ) = (48\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24 \times 3 = 72$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

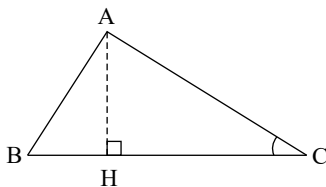
۲ در شکل زیر، $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2}$ و $AC = 96$. اندازه ارتفاع AH کدام است؟

۵۶ (۲)

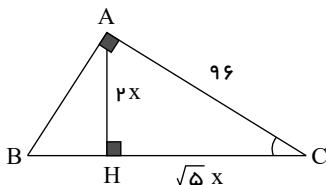
۴۸ (۱)

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)



پاسخ: گزینه ۳ چون $\cot C = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ است می توان $CH = \sqrt{5}x$ و $AH = 2x$ را در نظر گرفت.



$$\triangle AHC : (96)^2 = (2x)^2 + (\sqrt{5}x)^2 \rightarrow 96 \times 96 = 4x^2 + 5x^2 \rightarrow 96 \times 96 = 9x^2 \rightarrow x^2 = 32 \times 32 \rightarrow x = 32$$

$$\rightarrow AH = 2x = 64$$

ناظری به فاصله ۳۵ متر از پای ستونی که بر روی آن مجسمه ای قرار دارد، ایستاده است. زاویه رویت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق 45° و 40° درجه است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ ($\tan 40^\circ = 0.8$)
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

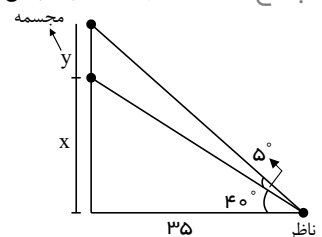
۷٫۲ (۴)

۷ (۳)

۶٫۴ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ با در نظر گرفتن شکل زیر داریم:

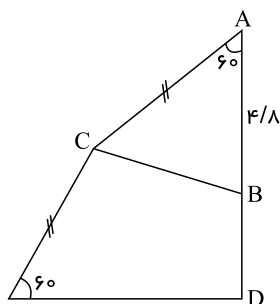


$$\tan 40^\circ = \frac{x}{35}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{x}{35} = \frac{1}{1} \Rightarrow x = 35m$$

$$\tan 45^\circ = \frac{x+y}{35} = 1 \Rightarrow x + y = 35 \Rightarrow 35 + y = 35$$

$$\Rightarrow y = 7m \text{ ارتفاع مجسمه ۷ متر است.}$$



در شکل زیر، مساحت مثلث ABC برابر $7.2\sqrt{3}$ است. فاصله D از C کدام است؟

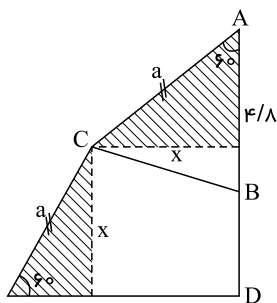
۱ $6\sqrt{6}$

۲ $3\sqrt{6}$

۳ $2\sqrt{2}$

۴ $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲ طبق مساحت سینوسی مثلث ABC داریم:



$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{1}{2} a \times \frac{4}{8} \times \sin 60^\circ \\ \text{فرض: } S_{ABC} = 7.2\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow 1.2a\sqrt{3} = 7.2\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$$

دو مثلث قائم‌الزاویه هاشورخورده با هم هم‌نهشت‌اند و داریم $x = a \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ پس CD قطر مربعی به ضلع $3\sqrt{3}$ است و در نتیجه:

$$CD = 3\sqrt{3} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{6}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ کدام است؟

۴ $\cos x$

۳ $\cos^2 x$

۲ $-\cos x$

۱ $-\cos^2 x$

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم که $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ است، انتهای کمان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است و داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) &= \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \\ &= -\cos^2 x \end{aligned}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل $\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right)$ کدام است؟

۴ $-\cos x$

۳ $-\sin x$

۲ $\cos x$

۱ $\sin x$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم که $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ و چون $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ است، انتهای کمان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است و داریم:

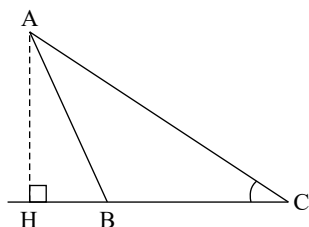


$$\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right) = \frac{1}{\cos x} (1 - \sin^2 x) = \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x)$$

$$= -\cos x$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟



۳٫۲۵ (۱)

۳٫۵ (۲)

۳٫۶ (۳)

۳٫۷۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} \rightarrow 1 + \cot^2 C = \frac{169}{25} \rightarrow \cot^2 C = \frac{144}{25} \rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AHC : \cot C = \frac{CH}{AH} \rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \rightarrow 12AH = 45 \rightarrow AH = 3.75$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

اگر $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

 $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۳) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به رابطه داده شده، مقدار کسینوس را به دست می آوریم:

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

می دانیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow[\cos \alpha < 0]{\text{ربع سوم}} \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

اگر $\frac{4}{3} = 2 \sin^2 x + \cos^2 x$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

 $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ طرفین $\frac{4}{3} = 2 \sin^2 x + \cos^2 x$ را بر $\cos^2 x$ تقسیم می کنیم و از رابطه $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ استفاده می کنیم.

$$\frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 \tan^2 x + 1 = \frac{4}{3} (1 + \tan^2 x)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 6 \tan^2 x + 3 = 4 + 4 \tan^2 x \Rightarrow 2 \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

روش دوم: از روابط $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ استفاده می کنیم.

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$



$$2 \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos^2 x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

۱۰

فرض کنید زاویه α در ناحیه چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|}$ کدام

است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

$$\frac{-4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{4(2 - \sqrt{5})}{3} \quad \text{۳}$$

$$\frac{4(-2 + \sqrt{5})}{3} \quad \text{۲}$$

$$\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا صورت عبارت را کمی ساده کنیم، می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$ و $\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ داریم:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{ربع چهارم}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{9}{4} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4}$$

حاصل عبارت موردنظر برابر می‌شود با:

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{5}{4} - 1|} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۱۱ حاصل عبارت $\frac{\sin^4 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

$$\sin 2\alpha \quad \text{۴}$$

$$\cos 2\alpha \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ روش اول: به‌ازای حاصل عبارت برابر ۱ و به‌ازای $\alpha = \frac{\pi}{2}$ برابر ۱- است که این تساوی‌ها فقط در گزینه «۳» دیده می‌شود.

روش دوم: در فرمول‌های مثلثاتی داریم:

$$\sin^4 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha)^2 = \cos^4 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\cos^4 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1$$

این فرمول‌ها را در صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم و سپس داریم:

$$\Rightarrow T = \frac{\cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha + 1} - \frac{\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 1} = \frac{(\cos^2 \alpha + 1)^2}{\cos^2 \alpha + 1} - \frac{(\sin^2 \alpha + 1)^2}{\sin^2 \alpha + 1} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$



مرجع: سراسری- ۱۳۹۴

۱۲ حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$ ، با فرض $\tan ۱۵^\circ = ۰٫۲۸$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{۱۶}{۹}$ ۲ $-\frac{۹}{۱۶}$ ۳ $\frac{۹}{۱۶}$ ۴ $\frac{۱۶}{۹}$

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا تمام زوایا را بر حسب ۱۵° می‌نویسیم:

$$\cos ۲۸۵^\circ = \cos(۲۷۰^\circ + ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ, \quad \sin ۲۵۵^\circ = \sin(۲۷۰^\circ - ۱۵^\circ) = -\cos ۱۵^\circ$$

$$\sin ۵۲۵^\circ = \sin(۵۴۰^\circ - ۱۵^\circ) = \sin(۱۸۰^\circ - ۱۵^\circ) = \sin ۱۵^\circ, \quad \sin ۱۰۵^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) = \cos ۱۵^\circ$$

$$\text{بنابراین داریم: } \frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ} = \frac{\sin ۱۵^\circ + \cos ۱۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ - \cos ۱۵^\circ}$$

صورت و مخرج را بر $\cos ۱۵^\circ$ تقسیم می‌کنیم. در نتیجه:

$$\frac{\tan ۱۵^\circ + ۱}{\tan ۱۵^\circ - ۱} = \frac{۰٫۲۸ + ۱}{۰٫۲۸ - ۱} = \frac{۱٫۲۸}{-۰٫۷۲} = \frac{-۱۲۸}{۷۲} = -\frac{۱۶}{۹}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱۳ حاصل عبارت $\sin(\frac{۱۷\pi}{۳}) \cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) + \tan(\frac{۱۹\pi}{۴}) \sin(\frac{-۱۱\pi}{۶})$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{۱}{۴}$ ۲ $-\frac{۱}{۲}$ ۳ $\frac{۱}{۴}$ ۴ $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی داده‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\sin \frac{۱۷\pi}{۳} = \sin(۶\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(\frac{-\pi}{۳}) = -\sin \frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) = \cos \frac{۱۷\pi}{۶} = \cos(۳\pi - \frac{\pi}{۶}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos \frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan \frac{۱۹\pi}{۴} = \tan(۵\pi - \frac{\pi}{۴}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan \frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\sin(\frac{-۱۱\pi}{۶}) = -\sin \frac{۱۱\pi}{۶} = -\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\sin(\frac{-\pi}{۶}) = \sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین خواسته سؤال به صورت زیر است:

$$\sin(\frac{۱۷\pi}{۳}) \cos(\frac{-۱۷\pi}{۶}) + \tan(\frac{۱۹\pi}{۴}) \sin(\frac{-۱۱\pi}{۶}) = (-\frac{\sqrt{۳}}{۲})(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) + (-۱)(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۴

۱۴ حاصل عبارت $\frac{\sin ۲۵۰^\circ + \sin ۷۰۰^\circ}{\cos ۵۶۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ}$ ، با فرض $\tan ۲۰^\circ = ۰٫۴$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{۳}{۴}$ ۲ $\frac{۳}{۴}$ ۳ $\frac{۷}{۳}$ ۴ $\frac{۵}{۸}$

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا تمام زوایا را بر حسب ۲۰° می‌نویسیم:



$$\sin 250^\circ = \sin(270^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ, \sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

$$\cos 56^\circ = \cos(54^\circ + 2^\circ) = \cos(18^\circ + 2^\circ) = \cos 20^\circ, \cos 11^\circ = \cos(9^\circ + 2^\circ) = \sin 20^\circ$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\sin 250^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

تمام جملات را بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم در نتیجه:

$$\frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0.36}{-1 + 0.36} = \frac{-1.36}{-0.64} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۱

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)$$

اگر $\tan \theta = 0.2$ باشد مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱٫۲ (۲)

-۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -(-\sin \theta) = \sin \theta$$

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \theta$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{2} = \frac{2}{4} + \frac{10}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

$$\tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$$

حاصل عبارت کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)پاسخ: گزینه ۲ زاویه‌ها را شکسته و بر حسب $\frac{\pi}{4}$ می‌نویسیم.

$$A = \tan \frac{11\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{4} \cos \frac{13\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{12\pi - \pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{16\pi - \pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{12\pi + \pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$A = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱۷ حاصل عبارت $\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3}$ کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad \boxed{۴}$$

$$۱ \quad \boxed{۳}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{۲}$$

$$-۱ \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\tan \frac{17\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{3} + \cos \frac{10\pi}{3} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\tan \frac{\pi}{6}\right) \left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \tan \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < 4x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ کدام است؟

$$0,5\sqrt{6} \quad \boxed{۴}$$

$$-0,75\sqrt{3} \quad \boxed{۳}$$

$$0,75\sqrt{3} \quad \boxed{۲}$$

$$-0,5\sqrt{6} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -3 \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3\pi < 4x < 4\pi \Rightarrow \frac{3}{4}\pi < x < \pi \Rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{1}{-\frac{4}{9}\sqrt{3}} = \frac{-9}{4\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} = -0,75\sqrt{3}$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-m}{2+m}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

$$(-1, 2) \quad \boxed{۴}$$

$$(-1, 2] \quad \boxed{۳}$$

$$(-2, 1] \quad \boxed{۲}$$

$$(-2, 1) \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ زاویه $\frac{\pi}{4} - x$ را تشکیل می‌دهیم:

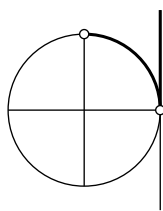
$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} > -x > -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4} - x > \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

فرض می‌کنیم $\alpha = \frac{\pi}{4} - x$ داریم:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \tan \alpha = \frac{1-m}{2+m}$$



از روی دایره مثلثاتی مقابل مشخص است که اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، آن گاه $\tan \alpha > 0$ پس داریم:



$$\frac{1-m}{2+m} > 0 \Rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0 \Rightarrow -2 < m < 1 \Rightarrow m \in (-2, 1)$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

اگر $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ و $\sin 2x = \frac{m-1}{4}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

(۴) $(-1, 1]$

(۳) $(-1, 1)$

(۲) $(-1, 5]$

(۱) $(-1, 5)$

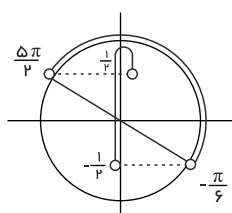
پاسخ: گزینه ۲ ابتدا حدود x را می‌یابیم:

$$-\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \xrightarrow{\times 2} -\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$$

با فرض $2x = \alpha$ و استفاده از دایره مثلثاتی داریم:

$$\sin \alpha = \frac{m-1}{4}, -\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$$

طبق دایره مثلثاتی مقابل، اگر $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$ ، $\sin \alpha$ از $-\frac{1}{2}$ تا ۱ افزایش یافته و سپس تا $\frac{1}{2}$ کاهش می‌یابد، بنابراین در کل داریم:



$$-\frac{1}{2} < \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq 4 \xrightarrow{+1} -1 < m \leq 5 \Rightarrow m \in (-1, 5]$$

اگر $\tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$ و $\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} = -\frac{1}{\cot \alpha} = \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

(۴) اول

(۳) دوم

(۲) سوم

(۱) چهارم

پاسخ: گزینه ۲

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 \alpha}} - \tan \alpha = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

$$\frac{1}{|\cos \alpha|} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$$

تساوی فوق زمانی برقرار است که $\cos \alpha < 0$ باشد؛ زیرا در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{-1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{-\cos \alpha}$$

$$\frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = \frac{-1}{\cot \alpha} \Rightarrow \frac{|\sin \alpha|}{\cos \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha < 0$$

با توجه به اینکه باید $\cos \alpha < 0$ و $\sin \alpha < 0$ باشد پس α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است.



مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

اگر $\cot x = 4$ باشد، مقدار $\frac{3 \cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ کدام است؟

۲٫۲ (۴)

۱٫۴ (۳)

۰٫۴ (۲)

۰٫۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{3 \cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{3 \cot x - 1}{\cot x + 1} \stackrel{\cot x=4}{=} \frac{12 - 1}{5} = 2.2$$

کامل عبارت $A = \sqrt{3} \cos(21^\circ) \sin(243^\circ) - \sqrt{2} \sin(135^\circ) \cos(153^\circ)$ چند برابر $\cos(27^\circ)$ است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۴

۰٫۵ (۴)

۱٫۵ (۳)

۲٫۵ (۲)

۳٫۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin(27^\circ - 27^\circ) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cos(18^\circ - 27^\circ) \\ &= +\frac{3}{2} \cos 27^\circ + \cos 27^\circ = \frac{5}{2} \cos 27^\circ \end{aligned}$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۴

اگر $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\cot(18^\circ - \alpha)$ کدام است؟ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{15}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲) $5\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\tan((\alpha + 12^\circ) + (18^\circ - \alpha)) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\tan(\alpha + 12^\circ) + \tan(18^\circ - \alpha)}{1 - \tan(\alpha + 12^\circ) \tan(18^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + \tan(18^\circ - \alpha)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \tan(18^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} + \sqrt{3} \tan(18^\circ - \alpha) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \tan(18^\circ - \alpha) \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \tan(18^\circ - \alpha) = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan(18^\circ - \alpha) = \frac{1}{5\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cot(18^\circ - \alpha) = 5\sqrt{3}$$



۲۵ اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $(1 + \cos \alpha)(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha})$ کدام

است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

$$-\sin \alpha \quad \boxed{۴}$$

$$-\cos \alpha \quad \boxed{۳}$$

$$\sin \alpha \quad \boxed{۲}$$

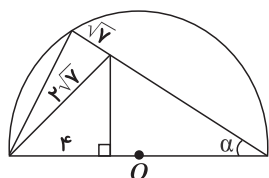
$$\cos \alpha \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به این که α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی است، داریم: $\cos \alpha < 0, \sin \alpha < 0$

$$\begin{aligned} & (1 + \cos \alpha)(\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha}) \\ &= (1 + \cos \alpha)(\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}) = (1 + \cos \alpha)(\frac{-1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}) \\ &= (1 + \cos \alpha)(\frac{-1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}) = \frac{-\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = -\sin \alpha \end{aligned}$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

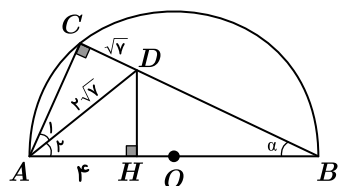
در نیم دایره شکل زیر، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

$$0,5\sqrt{3} \quad \boxed{۴}$$

$$0,4\sqrt{3} \quad \boxed{۳}$$

$$0,3\sqrt{3} \quad \boxed{۲}$$

$$0,2\sqrt{3} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا طبق شکل توجه شود که در مثلث قائم الزاویه $\triangle ACD$ داریم:

$$DC = \frac{1}{2}AD$$

$$\Rightarrow \widehat{DAC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{A}_1 = 30^\circ$$

$$\triangle AHD: AH^2 + HD^2 = AD^2 \Rightarrow HD = \sqrt{28 - 16} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (\widehat{DAH} + \widehat{DAC}) + \alpha = 90^\circ \Rightarrow$$

پس زاویه $\widehat{DAH} + \widehat{DAC}$ متمم زاویه α است و بنابراین داریم:

$$\tan \widehat{A} = \tan(\widehat{A}_1 + \widehat{A}_r) = \frac{\tan \widehat{A}_1 + \tan \widehat{A}_r}{1 - \tan \widehat{A}_1 \tan \widehat{A}_r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{5}{6}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \cot \widehat{A} = \frac{3}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \cot \widehat{A} = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0,2\sqrt{3}$$

روش دوم:



$$\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle DBH &\Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DH} = \frac{BC}{BH} \\ \begin{cases} AC^2 = AD^2 - DC^2 = 21 \Rightarrow AC = \sqrt{21} \\ DH^2 = AD^2 - AH^2 = 12 \Rightarrow DH = 2\sqrt{3} \end{cases} &\Rightarrow \frac{AC}{BH} = \frac{\sqrt{7}}{2} \\ \Rightarrow \frac{4 + BH}{BD} = \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7} + BD}{BH} \\ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7}BD - 2BH = 8 \\ \sqrt{7}BH - 2BD = 2\sqrt{7} \end{cases} &\Rightarrow BD = 4\sqrt{7}, BH = 10 \\ \Rightarrow \tan \alpha = \frac{DH}{BH} = \frac{2\sqrt{3}}{10} = \frac{1}{5}\sqrt{3} \end{aligned}$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۴

۲۷ اگر $\sin \alpha < 2$ و $\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ربع قرار دارد؟

[۴] چهارم

[۳] سوم

[۲] دوم

[۱] اول

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{\cot \alpha}{\sin \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$$

$$2 \sin \alpha < \sin 2\alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha < 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha) < 0 \Rightarrow \sin \alpha < 0$$

(همواره مثبت $\cos \alpha < 1$)

چون $\cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha < 0$ پس α در ربع چهارم قرار دارد.۲۸ در مثلث ABC ، اگر $\cot(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{2 \cos(\hat{B} + \hat{C}) + 1}{4 \sin \hat{B} \cos \hat{C}}$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

[۴] $\cot \hat{C}$ [۳] $\cot \hat{B}$ [۲] $\tan \hat{C}$ [۱] $\tan \hat{B}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\cot(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2 \cos(\hat{B} + \hat{C}) + 1}{4 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{2(\cos(\hat{B} + \hat{C}) + \frac{1}{2})}{4 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{\cos(\hat{B} + \hat{C}) + \cos(\hat{B} - \hat{C})}{2 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{2 \cos \hat{B} \cos \hat{C}}{2 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{\cos \hat{B}}{\sin \hat{B}} = \cot \hat{B}$$

۲۹ در مثلث ABC ، اگر $\tan(\hat{B} - \hat{C}) = \sqrt{3}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{1 - 2 \cos(\hat{B} + \hat{C})}{4 \sin \hat{B} \cos \hat{C}}$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

[۴] $\tan C$ [۳] $\tan B$ [۲] $-\frac{1}{2}$ [۱] -1



پاسخ: گزینه ۴

$$\tan(\hat{B} - \hat{C}) = \sqrt{3} \Rightarrow \cos(\hat{B} - \hat{C}) = \cos(\hat{C} - \hat{B}) = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{2(\frac{1}{2} - \cos(\hat{B} + \hat{C}))}{4 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{2(\cos(\hat{B} - \hat{C}) - \cos(\hat{B} + \hat{C}))}{4 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \frac{4 \sin \hat{B} \sin \hat{C}}{4 \sin \hat{B} \cos \hat{C}} = \tan \hat{C}$$

مرجع: سراسری-۱۴۰۳

اگر $3 \sin^2 x + a \cos^2 x = 4$ باشد، $\cot^2 x$ با کدام مورد برابر است؟

$$\frac{1}{3-a} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{1}{a-3} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{1}{4-a} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{1}{a-4} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ طرفین را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم.

$$3 + a \cot^2 x = 4(1 + \cot^2 x) \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{a-4}$$

مرجع: سراسری-۱۴۰۳

حاصل عبارت $(3 \cos 4x + \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x)$ به‌ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{4}$$

$$\sqrt{2} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{1}{2} \quad \boxed{2}$$

$$1 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$T = 3 \cos 4x + \sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3 \cos 4x + 2 \sin(x - \frac{\pi}{4}) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{12}} T = 3 \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

مرجع: خارج از کشور-۱۳۹۵

اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$ کدام است؟

$$2 \quad \boxed{4}$$

$$\frac{1}{2} \quad \boxed{3}$$

$$-\frac{1}{2} \quad \boxed{2}$$

$$-2 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{aligned} 1 + \cos u &= 2 \cos^2 \frac{u}{2} \\ \sin u &= 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} \end{aligned}$$

می‌دانیم:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}) = -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

مرجع: سراسری-۱۳۹۵

اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha)$ کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{3}{8} \quad \boxed{3}$$

$$-\frac{3}{8} \quad \boxed{2}$$

$$-\frac{3}{4} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم: $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - \sin 2a$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۶

اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad \text{۴}$$

$$\frac{4}{3} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{3}{2} \quad \text{۲}$$

$$-\frac{3}{4} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم: $\cot a - \tan a = 2 \cot 2a$

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = -(\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2}) = -2 \cot x = -2\left(\frac{1}{\tan x}\right) = -2\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۷۲

حاصل $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$ کدام است؟

$$-\frac{1}{3} \quad \text{۴}$$

$$-\frac{1}{4} \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$

$$\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{6\pi + \pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۸۸

اگر $\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{3} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{1}{3} \quad \text{۲}$$

$$-\frac{2}{3} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$

$$\tan \frac{2\pi}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$$

$$\Rightarrow -\tan \frac{\pi}{3} (-\cos x) = 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{1}{3} - 1 = \frac{-1}{3}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۶

حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ ، کدام است؟

$$2\sqrt{3} \quad \text{۴}$$

$$2\sqrt{2} \quad \text{۳}$$

$$\sqrt{6} \quad \text{۲}$$

$$2 \quad \text{۱}$$



پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم: $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{-\sqrt{2} \sin(15^\circ - 45^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 2(15^\circ)} = \frac{-\sqrt{2} \sin(-30^\circ)}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

۳۸ ساده‌شده کسر $\frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$ کدام است؟

۱۶sin^{-۴}۲θ [۴]

۱۶cos^{-۴}۲θ [۳]

۸sin^{-۲}۲θ [۲]

۸cos^{-۲}۲θ [۱]

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم: $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$, $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$, $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta)}{(1 - \sin^2 \theta) - \cos^2 \theta} &= \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{\frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}}{\underbrace{\cos^2 \theta(1 - \cos^2 \theta)}_{\sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sin^4 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2} \sin 2\theta)^4} = \frac{16}{\sin^4 2\theta} = 16 \sin^{-4} 2\theta \end{aligned}$$

۳۹ اگر زاویه α در ناحیه سوم دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

- $\frac{1056}{175}$ [۴]

- $\frac{96}{175}$ [۳]

- $\frac{1056}{175}$ [۲]

- $\frac{96}{175}$ [۱]

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا کمی عبارت را ساده کنیم.

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)}$$

دقت کنید که: $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ و $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin 2\alpha$

برای حل سؤال مقادیر $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ و $\cot 2\alpha$ را نیاز داریم، که آنها را محاسبه می‌کنیم.

۱) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + (\frac{3}{4})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

۲) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - (-\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \sin \alpha = -\frac{3}{5}$

۳) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2(-\frac{3}{5})(-\frac{4}{5}) = \frac{24}{25}$



$$۴) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$۵) \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

حال خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)} = \frac{\frac{24}{25} - \left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{7}{24}} = \frac{44 \times 24}{25 \times 7} = \frac{1056}{175}$$

اگر $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$ مقدار $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

$$\frac{6 + 3\sqrt{3}}{16} \quad (۴)$$

$$\frac{6 + \sqrt{3}}{16} \quad (۳)$$

$$\frac{6 - \sqrt{3}}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{6 - 3\sqrt{3}}{16} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \text{می دانیم}$$

ضابطه تابع f را در $\sin^2 3x$ ضرب و تقسیم می کنیم.

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{2} \sin 6x}{\sin 3x} \right)^2$$

دقت کنید:

$$\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 6x$$

$$\sin 6x \cos 6x = \frac{1}{2} \sin 12x$$

$$\sin 12x \cos 12x = \frac{1}{2} \sin 24x$$

$$\sin 24x \cos 24x = \frac{1}{2} \sin 48x$$

$$f(x) = 16 \left(\frac{\frac{1}{16} \sin 48x}{\sin 3x} \right)^2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16 \left(\frac{\sin \frac{48\pi}{36}}{16 \sin \frac{3 \times \pi}{36}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{3}}{16 \sin^2 \frac{\pi}{12}}$$

$$\text{از طرفی می دانیم } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \text{ و } \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و البته: } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{16\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}\right)} = \frac{3}{16(2-\sqrt{3})} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

سأگه شده عبارت $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

۱ - \sin 2\alpha \quad \boxed{4}

1 + \sin 2\alpha \quad \boxed{3}

\cos 2\alpha \quad \boxed{2}

\cos \alpha - \sin \alpha \quad \boxed{1}

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a\right) \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos a - \sin a) \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos a - \sin a) = (\cos a - \sin a)^2 \\ &= \cos^2 a + \sin^2 a - 2 \sin a \cdot \cos a = 1 - \sin 2a \end{aligned}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4$ باشد، مقدار صحیح $\tan \frac{x}{2}$ کدام است؟

-3 \quad \boxed{4}

3 \quad \boxed{3}

-2 \quad \boxed{2}

2 \quad \boxed{1}

پاسخ: گزینه ۴ از رابطه داده شده، مقدار $\sin x$ را محاسبه می کنیم.

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 4 + 4 \sin x = 1 - \sin x \Rightarrow 5 \sin x = -3 \Rightarrow \sin x = \frac{-3}{5}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه ۳}} \cos x = \frac{-4}{5}$$

حاصل $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ را می یابیم.

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)} \Rightarrow \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}} = 9 \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm 3$$

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

زاویه ای در ناحیه دوم است و در این ناحیه مقدار تانژانت منفی است، پس:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -3$$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

کامل $\cos 165^\circ \cos 15^\circ$ کدام است؟

$\frac{1}{2} \quad \boxed{4}$

$\frac{1}{4} \quad \boxed{3}$

$-\frac{1}{4} \quad \boxed{2}$

$-\frac{1}{2} \quad \boxed{1}$



پاسخ: گزینه ۳

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \text{ می‌دانیم}$$

$$\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ, \quad \cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\Rightarrow \cos 165^\circ \cdot \cos 105^\circ = \cos 15^\circ \sin 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

اگر $f(\alpha) = 4 \sin(\alpha) \cos(2\alpha) + 2 \sin(\alpha)$ باشد مقدار $f(\frac{41\pi}{9})$ کدام است؟

-۱ [۴]

۱ [۳]

$\sqrt{3}$ [۲]

$-\sqrt{3}$ [۱]

پاسخ: گزینه ۱

قبل از حل سؤال نحوه محاسبه $\sin 3\alpha$ و اتحاد مثلثاتی آن را بررسی می‌کنیم.

$$\sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

حال تابع $(f\alpha)$ را ساده می‌کنیم.

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha = 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = 2 \sin 3\alpha$$

$$\frac{41\pi}{9} = 2 \sin\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{36\pi + 5\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(4\pi + \frac{5\pi}{9}\right) = 2 \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{9}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{9} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۷۷

۴۵ حاصل عبارت $2 \cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x)$ برابر است با:

$\cos 2x$ [۴]

$-\sin 2x$ [۳]

$-\cos 2x$ [۲]

$\sin 2x$ [۱]

پاسخ: گزینه ۳

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = -\sin \alpha \text{ و } 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \text{ می‌دانیم}$$

$$2 \cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) = 1 + \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right)$$

طبق فرمول‌های فوق داریم:

$$2 \cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x) = 1 + \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right) - \cos^2 x \times \frac{1}{\cos^2 x} = \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right) = -\sin 2x$$

مرجع: سراسری- ۱۳۸۳

اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$ کدام است؟

$\cos^2 2a$ [۴]

$\sin^2 2a$ [۳]

$\cos 4a$ [۲]

$\sin 4a$ [۱]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \text{ می‌دانیم}$$



$$\Lambda \cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \Lambda \cos a \cos b \sin a \sin b$$

$$= 2(2 \sin a \cos a)(2 \sin b \cos b) = 2 \sin 2a \sin 2b$$

$$a+b=\frac{\pi}{2}$$

$$\longrightarrow 2 \sin 2a \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2 \sin 2a \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = 2 \sin 2a \cos 2a = \sin 4a$$

مرجع: سراسری- ۱۳۸۵

یلاکده شده عبارت $\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ)$ کدما برابر است؟

$$2 \cos 20^\circ \quad \boxed{4}$$

$$2 \sin 20^\circ \quad \boxed{3}$$

$$\cos 20^\circ \quad \boxed{2}$$

$$\sin 20^\circ \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\text{می دانیم: } \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) = \cos 50^\circ \times \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos 50^\circ \cos 10^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 50^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

توجه: اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ آنگاه $\sin \alpha = \cos \beta$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

اگر $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ کدما است؟

$$\frac{91}{105} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{16}{105} \quad \boxed{3}$$

$$-\frac{16}{105} \quad \boxed{2}$$

$$-\frac{91}{105} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$$

از طرفی:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{64}{225} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{225}{289} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17}$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می کنیم.

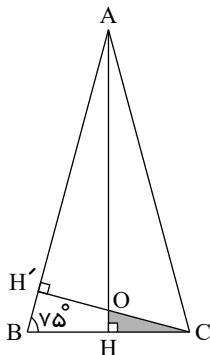
$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{8 \times 17 - 8 \times 15}{15 \times 17}}{\frac{-7}{17}} = \frac{\frac{16}{15}}{-7} = -\frac{16}{105}$$

دقت کنید اگر $\frac{\alpha}{2}$ در ربع اول باشد با توجه به مقدار $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ ، α نیز ربع اول خواهد بود و اگر $\frac{\alpha}{2}$ در ربع سوم باشد باز هم α در ربع اول خواهد بود.



۹۴ شکل زیر مثلث ABC متساوی الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰



۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{4}{3}$

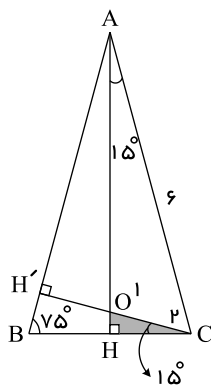
۳) $\frac{18}{7 + 4\sqrt{3}}$

۴) $\frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

می‌دانیم:



روش اول: دقت کنید در مثلث OHC داریم $\hat{H} = 90^\circ$, $\hat{C}_1 = 15^\circ$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه 15° ، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است.

$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} OC \times OC = \frac{OC^2}{8}$$

از طرفی در مثلث OAC طبق قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{OC}{\sin 15^\circ} = \frac{AC}{\sin \hat{O}_1} \Rightarrow \frac{OC}{\sin 15^\circ} = \frac{6}{\underbrace{\sin 105^\circ}_{\cos 15^\circ}} \Rightarrow OC = 6 \times \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 6 \tan 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin^2 15^\circ &= \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \\ \cos^2 15^\circ &= \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} \end{aligned} \Rightarrow \tan^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OHC} = \frac{(6 \tan 15^\circ)^2}{8} = \frac{36}{8} \times \frac{1}{(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$

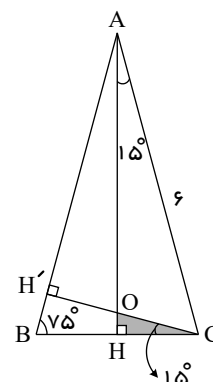


* این روش فراتر از کتاب ریاضی تجربی است و مناسب دانش آموزان رشته ریاضی است.

روش دوم:

$$\triangle AHC: \sin 15^\circ = \frac{HC}{AC} \xrightarrow{AC=6} HC = 6 \sin 15^\circ$$

$$\triangle OHC: \tan 15^\circ = \frac{OH}{HC} \Rightarrow OH = HC \times \tan 15^\circ$$



$$S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times HC \times OH$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OHC} = \frac{1}{2} \times (6 \sin 15^\circ) \times (HC \tan 15^\circ) = \frac{1}{2} \times 36 \sin^2 15^\circ \times \tan 15^\circ$$

می‌دانیم:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

از طرفی:

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow \tan^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

پس داریم:

$$S_{\triangle OHC} = 18 \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{4} \right) \times \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{9}{2(2 + \sqrt{3})^2} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$

اندازه زاویه $\hat{A}$ در مثلث $\triangle ABC$ ، 45° درجه بیشتر از اندازه زاویه $\hat{B}$ است. حاصل $2 \cos \hat{A} \sin \hat{B} - \sin \hat{C}$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{۳}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\hat{A} = \hat{B} + 45^\circ, \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + 45^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (45^\circ + 2\hat{B})$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{aligned}
2 \cos \hat{A} \sin \hat{B} - \sin \hat{C} &= 2 \cos(\hat{B} + 45^\circ) \sin \hat{B} - \sin(180^\circ - (45^\circ + 2\hat{B})) = \\
2(\cos \hat{B} \cos 45^\circ - \sin \hat{B} \sin 45^\circ) \sin \hat{B} - \sin(45^\circ + 2\hat{B}) &= \\
2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \hat{B} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \hat{B}\right) \sin \hat{B} - \sin 45^\circ \cos 2\hat{B} - \cos 45^\circ \sin 2\hat{B} &= \\
\sqrt{2} \sin \hat{B} \cos \hat{B} - \sqrt{2} \sin^2 \hat{B} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\hat{B} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\hat{B} &= \\
\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\hat{B} - \sqrt{2} \left(\frac{1 - \cos 2\hat{B}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\hat{B} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\hat{B} &= \\
-\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\hat{B}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\hat{B} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\hat{B} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\hat{B} = -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۵۱ ساده شده عبارت $\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} + \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ کدام است؟

$$2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \boxed{۴}$$

$$2 \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \boxed{۳}$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \boxed{۲}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ راه حل اول:

مخرج مشترک گرفته و ساده می کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos^2 \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \times 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\
&= 2 \cot \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۵۲ اگر $1 \circ (\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می تواند باشد؟

$$3 \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{1}{2} \quad \boxed{۳}$$

$$-2 \quad \boxed{۲}$$

$$-\frac{1}{3} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$1 \circ (\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{6\sqrt{5}}{1 \circ} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

طرفین تساوی فوق را به توان ۲ می رسانیم:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{9 \times 5}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow 1 + \sin 2\alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$



حال از رابطه $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow 4 + 4 \tan^2 \alpha = 1 \cdot \tan \alpha \Rightarrow 4 \tan^2 \alpha - 1 \cdot \tan \alpha + 4 = 0 \Rightarrow 4 \tan^2 \alpha - 5 \tan \alpha + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \times 4 \times 4 = 9 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \tan \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

اگر $f(x) = 32 \cos^2(x) \cos^2(2x) \cos^2(4x) \cos^2(8x) \cos^2(16x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

$$\frac{6 - \sqrt{27}}{32} \quad \text{۴}$$

$$\frac{6 - \sqrt{27}}{16} \quad \text{۳}$$

$$\frac{6 + \sqrt{27}}{16} \quad \text{۲}$$

$$\frac{6 + \sqrt{27}}{32} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱ روش اول:

$$f(x) = 32 (\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x)^2$$

عبارت داخل پرانتز را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$f(x) = 32 \left(\frac{\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x}{\sin x} \right)^2$$

$$f(x) = 32 \left(\frac{\frac{1}{2} \sin 2x}{\sin x} \right)^2 = \frac{\sin^2 2x}{32 \sin^2 x} = \frac{\sin^2 2x}{16(1 - \cos 2x)}$$

در عبارت قبلی از اتحادهای $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ و $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ استفاده کرده‌ایم.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sin^2 \frac{8\pi}{3}}{16(1 - \cos \frac{\pi}{6})} = \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{3}}{16(1 - \cos \frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{3}{4}}{16(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{32(2 - \sqrt{3})} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32} \end{aligned}$$

روش دوم: می‌توانیم $\cos 15^\circ$ را ابتدا محاسبه کرده و سپس در صورت سؤال قرار دهیم: $(\frac{\pi}{12} = 15^\circ)$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 32 \cos^2 15^\circ \cos^2 30^\circ \cos^2 60^\circ \cos^2 120^\circ \cos^2 240^\circ = 32 \times \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

اگر $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ چقدر است؟

۲٫۵ (۴)

۲٫۴ (۳)

۱٫۸ (۲)

۱٫۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به رابطه $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ داریم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5 - 5 \tan \alpha = 1 + \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5} = ۲٫۴$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۴

۵۵ حاصل عبارت $\frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{11\pi}{12}}$ کدام است؟

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۴)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۳)

$-\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$A = \frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{11\pi}{12}} \times \frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}$$

$$A = \frac{\sin^2 \frac{11\pi}{12} + \cos^2 \frac{11\pi}{12} + 2 \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin^2 \frac{11\pi}{12} - \cos^2 \frac{11\pi}{12}} = \frac{1 + \sin \frac{11\pi}{6}}{-\cos \frac{11\pi}{6}}$$

$$A = \frac{1 + \sin(2\pi - \frac{\pi}{6})}{-\cos(2\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{6}}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

راه حل دوم:



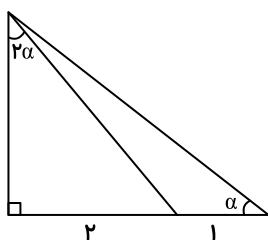
$$A = \frac{\sin \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}}{\sin \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{11\pi}{12}} \Rightarrow A^2 = \frac{1 + \sin \frac{11\pi}{6}}{1 - \sin \frac{11\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1 + \sin(2\pi - \frac{\pi}{6})}{1 - \sin(2\pi - \frac{\pi}{6})} = \frac{1 - \sin \frac{\pi}{6}}{1 + \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

چون $A < 0$ است $\rightarrow A = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

در شکل زیر، مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳



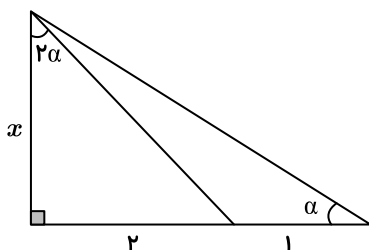
$\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - 2 \tan^2 \alpha}$



$$\tan 2\alpha = \frac{2}{x}, \quad \tan \alpha = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2 \times \frac{x}{3}}{1 - (\frac{x}{3})^2} \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{9} = \frac{x^2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4} = x^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{3}{x} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

۵۷ در معادله مثلثاتی $m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{6} \sin(2x) = \sqrt{6}$ اگر $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

است؟

۳ (۴)

۶ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ طبق فرض داریم:



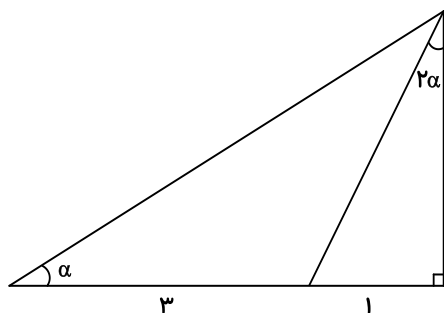
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

توان ۲

$$\rightarrow 1 - \underbrace{2\sin x \cos x}_{\sin 2x} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$$

جایگذاری در معادله

$$\rightarrow m \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{6} \times \frac{1}{3} = \sqrt{6} \Rightarrow m \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6} \Rightarrow m = 6$$



مرجع: سراسری-۱۴۰۳

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

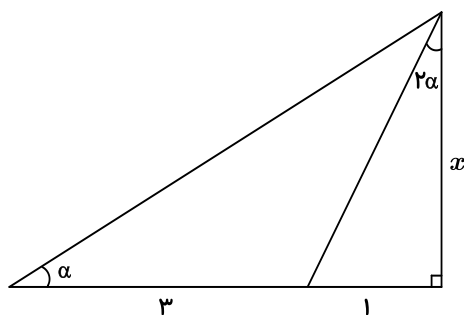
$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

در شکل زیر، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴



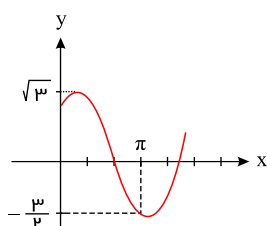
$$\tan \alpha = \frac{x}{4}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{1}{x}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x^2}{16}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{8x}{16 - x^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$$

مرجع: سراسری-۱۳۹۸

شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. b کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} \quad (3)$$



پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ بیشترین مقدار تابع، برابر $|a| + c$ است.

چون شکل فرمت خود سینوس است، $b > 0$ است.

$$Max = \sqrt{3} \rightarrow |b| + a = \sqrt{3} \rightarrow b + a = \sqrt{3}$$

نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در تابع صدق می‌کند، پس:

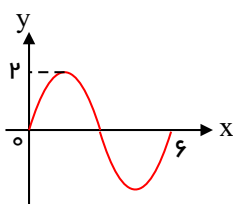
$$\left| \begin{array}{l} \pi \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{3}{2} = a + b \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) \rightarrow -\frac{3}{2} = a - b \sin \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \rightarrow -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

$$\begin{cases} b + a = \sqrt{3} \\ 2a - \sqrt{3}b = -3 \end{cases} \rightarrow -2b - \sqrt{3}b = -2\sqrt{3} - 3 \rightarrow 2b + \sqrt{3}b = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\rightarrow (2 + \sqrt{3})b = 2\sqrt{3} + 3 \rightarrow b = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 6 + 6 - 3\sqrt{3}}{4 - 3} = \sqrt{3}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟



۲ $\frac{5}{3}$

۴ $\frac{8}{3}$

۱ $\frac{4}{3}$

۳ $\frac{7}{3}$

پاسخ: گزینه ۳ دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ می‌باشد.

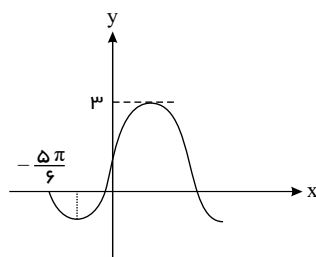
$$y = a \sin(b\pi x) \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{1}{3} \rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

با توجه به شکل داده‌شده a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند و چون همه گزینه‌ها مثبت می‌باشند پس $b = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. بیشترین

مقدار این تابع از روی شکل ۲ می‌باشد و بیشترین مقدار $y = a \sin(b\pi x)$ زمانی رخ می‌دهد که سینوس برابر ۱ باشد

بنابراین $a = 2$ است پس $a + b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱ 1.5

۲ 2

۳ 2.5

۴ $1 + \sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۲

$$y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x) = a + b \sin x$$



نقطه $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$\left| \frac{-5\pi}{6} \rightarrow 0 = a + b \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \rightarrow 0 = a - b \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right.$$

$$\rightarrow 0 = a - b \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow 0 = a - b \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \quad (I)$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار Max تابع از رابطه $|a| + c$ به دست می‌آید و چون تابع داده شده فرمت سینوس را دارد $ab > 0$ است و چون $y(0) > 0$ است پس $a > 0$ است و در نتیجه $b > 0$ است.

$$Max = |a| + c \rightarrow 3 = |b| + a \rightarrow 3 = b + a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ حاصل می‌شوند.

$$\text{پس: } f(x) = 1 + 2 \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۱

با کدام ضابطه $f(x)$ همواره تساوی $|f(x)| = (-1)^{[x]} f(x)$ برقرار است؟

$$\cos 2\pi x \quad (4)$$

$$\sin 2\pi x \quad (3)$$

$$\cos \pi x \quad (2)$$

$$\sin \pi x \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ اگر $[x]$ زوج باشد آنگاه:

$$(-1)^{[x]} f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \geq 0$$

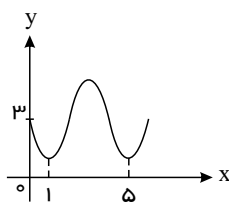
اگر $[x]$ فرد باشد آنگاه:

$$(-1)^{[x]} f(x) = |f(x)| \Rightarrow -f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \leq 0$$

تابع $f(x) = \sin \pi x$ ویژگی‌های بالا را دارد.

۶۳ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۳



$$2 \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

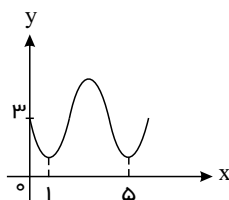
$$3 \quad (3)$$

$$3.5 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل روبه‌رو به راحتی پی می‌بریم که دوره تناوب اصلی تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ برابر $T = 4$ می‌باشد.

از طرفی عرض از مبدأ این تابع برابر ۳ است یعنی: $f(0) = 3 \rightarrow a = 3$



توجه کنید که دوره تناوب تابع $y = \sin kx$ برابر $T = \frac{2\pi}{|k|}$ است.

$$y = a + \sin(\underbrace{b\pi x}_k) \Rightarrow \text{دوره تناوب} = T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} \xrightarrow{T=4} \frac{2}{|b|} = 4 \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

چون به ازای $x > 0$ تابع ابتدا نزولی می‌باشد، پس مقدار b منفی می‌باشد، یعنی $b = -\frac{1}{2}$ است. داریم:



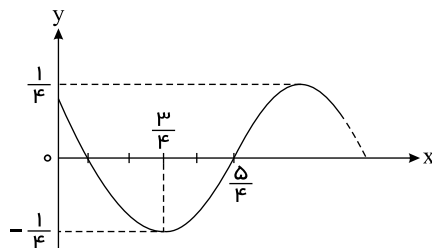
$$y = 3 + \sin\left(-\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\Rightarrow y\left(\frac{25}{3}\right) = 3 + \sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right) = 3 - \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 3 - \sin\frac{\pi}{6} = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$$

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > 0$ و $0 < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$

کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱



۱ (۲)

π (۴)

۱ (۱) $\frac{1}{16}$

۳ (۳) $\frac{1}{4\pi}$

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به نمودار و اینکه $0 < c < \pi, b > 0$ مشخص است که a مثبت است.

$$\max = |a| = \frac{1}{4} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{4} \rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \cos(bx + c)$$

نقطه $A\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ در تابع صدق می‌کند:

$$\frac{1}{4} \cos\left(\frac{3}{4}b + c\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{3}{4}b + c\right) = -1 \Rightarrow \frac{3}{4}b + c = \pi$$

همچنین در $x = \frac{5}{4}$ مقدار تابع برابر صفر است.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \cos\left(\frac{5}{4}b + c\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{5}{4}b + c\right) = 0$$

با توجه به نمودار در $x = \frac{5}{4}$ دومین بار است که نمودار تابع محور x ها را قطع می‌کند، پس داریم: $\frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2}$ و حال دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

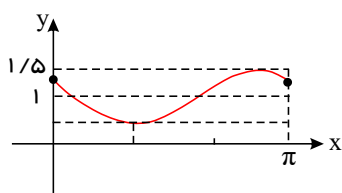
$$\begin{cases} \frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3}{4}b + c = \pi \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}} \frac{5}{4}b - \frac{3}{4}b = \frac{3\pi}{2} - \pi \Rightarrow \frac{2}{4}b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \pi$$

$$\frac{5}{4}b + c = \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{b=\pi} c = \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{a \cdot c}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$



۵۵ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۱ $\frac{1}{2}$

۲ ۱

۳ $\frac{3}{2}$

۴ ۲

پاسخ: گزینه ۳ دوره تناوب تابع برابر π است.

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

ماکزیم تابع برابر ۱٫۵ است، پس:

$$1 + |a| = 1.5 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

تابع در اطراف $x = 0$ نزولی است، پس a, b مختلف‌العلامت هستند و داریم:

$$a = \frac{1}{2}, b = -2 \Rightarrow a + b = -\frac{3}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 2 \Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

۶۶ نمودار تابع $y = 2^{| \sin x |}$ را ابتدا به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور y ها در جهت

منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله $[0, \pi]$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۴ $\frac{4}{4}$

۲ $\frac{3}{4}$

۱ $\frac{2}{4}$

۱ صفر

پاسخ: گزینه ۳

$$y = 2^{| \sin x |} \xrightarrow{\text{به راست } \frac{\pi}{2}} y = 2^{| \sin(x - \frac{\pi}{2}) |} = 2^{| \cos x |} \xrightarrow{\text{به پایین } \frac{3}{2}} y = 2^{| \cos x |} - \frac{3}{2} \xrightarrow{y=0} 2^{| \cos x |} = \frac{3}{2}$$

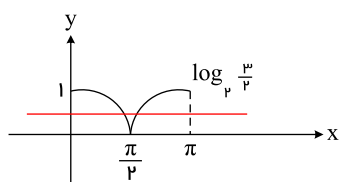
$$\Rightarrow \log_2 \frac{3}{2} = | \cos x |$$

$\log_2 \frac{3}{2}$ در واقع عدد بین صفر تا یک است؛ زیرا:

$$\underbrace{\log_2 1}_{\text{صفر}} < \log_2 \frac{3}{2} < \underbrace{\log_2 2}_1$$

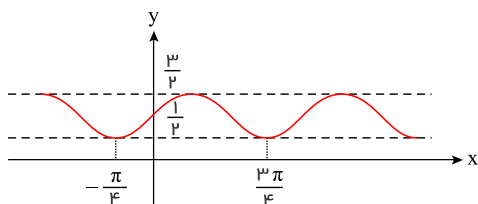
حال تابع $y = | \cos x |$ و خط $y = \log_2 \frac{3}{2}$ را رسم می‌کنیم.

خط و نمودار در دو نقطه تقاطع دارند.





مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟

$$\frac{3}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$3 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$y = \sin bx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

می‌دانیم:

$$y = 1 + a \cdot \sin bx \cdot \cos bx = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx$$

چون فاصله دو نقطهٔ مینیمم متوالی برابر با دورهٔ تناوب اصلی منحنی است پس:

$$T = \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

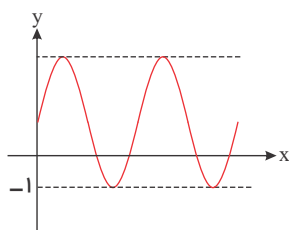
$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

$$y = 1 + \frac{a}{2} \cdot \sin 2bx \xrightarrow{\text{بیشترین مقدار}} 1 + \left|\frac{a}{2}\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

تابع در اطراف $x = 0$ صعودی است، پس a و b هم‌علامتند و داریم:

$$a + b = 2 \quad \text{یا} \quad a + b = -2$$

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۷

شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ ، در بازهٔ $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟

$$3 \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$5 \quad (3)$$

$$6 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم که در تابع $y = a \cdot \sin bx$ اگر $a \cdot b > 0$ باشد، تابع در نقطهٔ شروع $x = 0$ صعودی خواهد بود و اگر $a \cdot b < 0$ باشد، نزولی خواهد بود.

توجه:

$$y = k \cdot \sin ax \xrightarrow{\text{دوره تناوب}} T = \frac{2\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل، منحنی دو بار تکرار شده است. پس عدد $\frac{4}{3}$ دو برابر دورهٔ تناوب تابع است.

$$2T = \frac{4}{3} \Rightarrow T = \frac{2}{3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |b| = 3$$

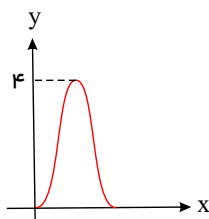
کمترین مقدار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ زمانی ایجاد می‌شود که مقدار سینوس عدد ۱ یا -۱ باشد و با توجه به شکل مقدار $\min$ عدد -۱ است. پس:



$$\min = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a + b = \begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ -2 - 3 = -5 \end{cases}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۷

شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است. b کدام است؟



-۱ (۲)

-۲ (۱)

۲ (۴)

۱ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ با توجه به شکل، منحنی از $(0, 0)$ و $(2, 4)$ عبور می کند پس:

$$\left. \begin{aligned} (0, 0) &\xrightarrow{\text{تابع}} 0 = a + b \cos(0) \Rightarrow a + b = 0 \\ (2, 4) &\xrightarrow{\text{تابع}} 4 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}(2)\right) = a + b \cdot \cos \pi = a - b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -2$$

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

دوله تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

 π (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

 $\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ روش اول: تابع را ساده تر می کنیم.

$$f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x) = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x} - \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x}{\sin \pi x \cos \pi x}$$

$$f(x) = \frac{-(\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x)}{\sin \pi x \cos \pi x} = \frac{-\cos 2\pi x}{\frac{1}{2} \sin 2\pi x} = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

روش دوم:

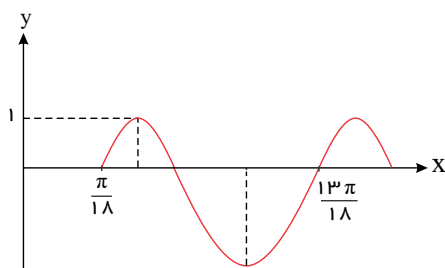
با توجه به اتحاد $\tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$ به راحتی حل می شود.

$$\tan(\pi x) - \cot(\pi x) = -2 \cot 2\pi x$$

$$T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$



شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۵



۱ (۲)

۱ (۱)

۲ (۴)

۳ (۳)

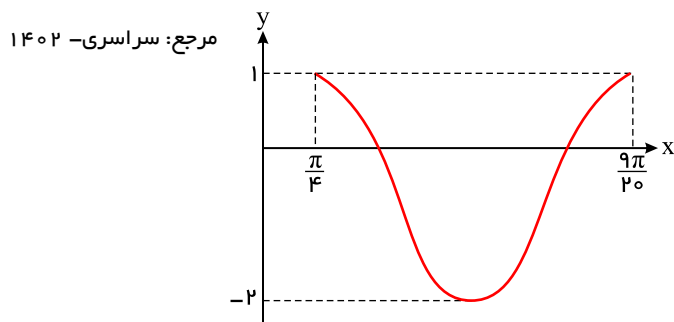
پاسخ: گزینه ۴ با توجه به رابطه $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ داریم:

$$f(x) = a - 2 \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = a + 2 \sin bx$$

$$\left. \begin{aligned} T = \frac{13\pi}{18} - \frac{\pi}{18} = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow b = 3 \text{ ق. ق.} \\ f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0 \Rightarrow a + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow a + b = -1 + 3 = 2$$

شکل زیر، نمودار تابع $y = a \cos^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



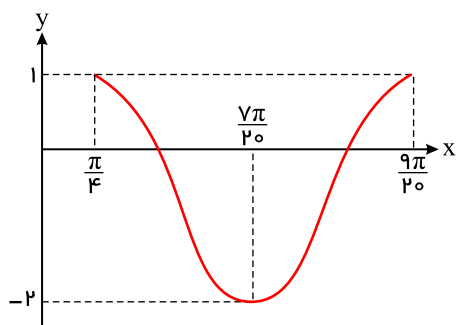
-۷,۵ (۴)

۷,۵ (۳)

-۱۵ (۲)

۱۵ (۱)

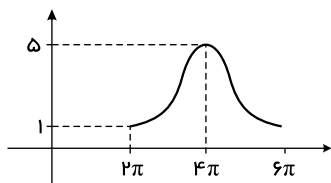
پاسخ: گزینه ۱



$$\left. \begin{aligned} T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow b = 2 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow a \cos^2\left(2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c = 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f\left(\frac{5\pi}{20}\right) = -2 \Rightarrow a \cos^2\left(2 \times \frac{5\pi}{20} - \frac{\pi}{4}\right) + c = -2 \Rightarrow c = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow ab = 6$$



۷۳ شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را در یک دوره تناوب، نشان می‌دهد. مقدار c کدام است؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۱



۴ (۲)

۵ (۱)

۱ (۴)

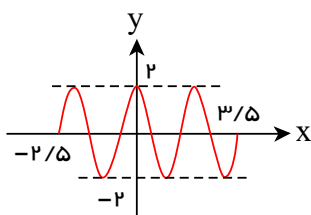
۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳ از روی نمودار، مشخص است که ماکزیمم تابع برابر ۵ و مینیمم تابع برابر ۱ است، پس داریم:

$$y = c + a \cos bx$$

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + c = 5 \\ \min &= -|a| + c = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

۷۴ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi(\frac{1}{2} + bx)$ است. $a \cdot b$ کدام است؟ ($b > 0$) مرجع: سراسری-۱۳۹۲



۲٫۵ (۲)

۲ (۱)

۳٫۵ (۴)

۳ (۳)

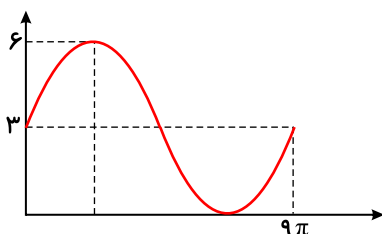
پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم که دوره تناوب تابع $y = k \cdot \cos ax$ برابر $T = \frac{2\pi}{|a|}$ است.

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\pi x\right) = a \cos(b\pi x)$$

چون برد تابع $[-2, 2]$ است و برد تابع کسینوس $[-1, 1]$ است پس $a = 2$ است. ($a > 0$ است زیرا نمودار نسبت به محور x ها قرینه نشده است.)

$$3T = 3/5 - (-2/5) = 6 \Rightarrow T = 2$$

از طرفی طبق شکل دوره تناوب ۲ است و داریم: $T = \frac{2\pi}{\pi b} = 2 \Rightarrow b = 1$ پس $ab = 2$ می‌باشد.



۷۵ اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2(cx - \frac{3\pi}{4})}$ باشد، مقدار $f(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور-۱۴۰۲

مرجع: خارج از کشور-۱۴۰۲

باشد، مقدار $f(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

۵ (۴)

۴٫۷۵ (۳)

۴٫۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از روابط مثلثاتی $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ و $\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$ داریم:



$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{2}{a} - b \cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{2}{a} - b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

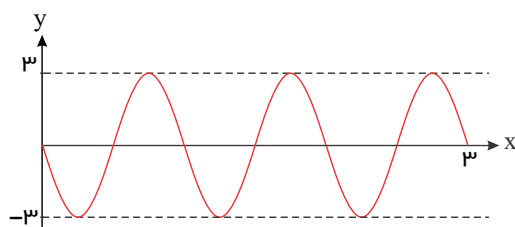
$$f(x) = \frac{-b}{2}\sin 2cx + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{b}{2}\sin(-2cx) + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \xrightarrow[\text{صعودی شروع شده}]{\text{سینوس به شکل درست}} \begin{cases} b > 0 \\ -2c > 0 \Rightarrow c < 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{2\pi}{|2c|} = 9\pi \Rightarrow |c| = \frac{1}{9} \xrightarrow{c < 0} c = -\frac{1}{9}; y_{\max} = \left|\frac{-b}{2}\right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 6 \xrightarrow{b > 0} \frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$y_{\min} = -\left|\frac{-b}{2}\right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 0 \xrightarrow{b > 0} -b + \frac{2}{a} = 0 \xrightarrow{(1)} b = 6$$

$$f(x) = 3\sin\left(\frac{2}{9}x\right) + 3 \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sin\left(\frac{2}{9} \times \frac{3\pi}{4}\right) + 3 \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4.5$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a \cdot b$ کدام می باشد؟

۱) ۶-

۲) ۳-

۳) ۴٫۵

۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱

سه برابر دوره تناوب برابر ۳ است.

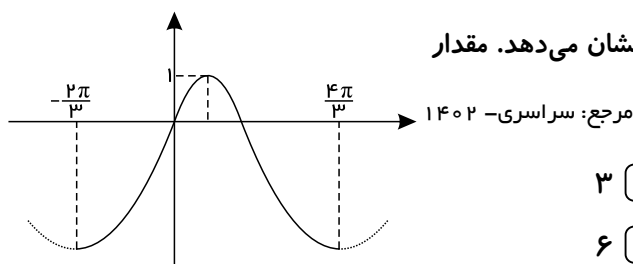
$$3T = 3 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$|a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

تابع در اطراف $x = 0$ نزولی است، پس a و b مختلف‌العلامت هستند.

$$a = 3, b = -2 \text{ یا } a = -3, b = 2 \Rightarrow a \cdot b = -6$$

شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b \cos\left(cx - \frac{\pi}{3}\right)$ را نشان می دهد. مقدار

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

 $b(c - a)$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ برای رسم نمودار داده شده، نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به سمت راست می بریم، سپس طول نقاط را بر c تقسیم کرده و درادامه، عرض نقاط را در b ضرب و با a جمع می کنیم.با مقایسه نمودار داده شده و نمودار $y = \cos x$ نتیجه می گیریم که b و c هر دو مثبت اند و داریم:

$$\begin{cases} (0, 0) \in \text{نمودار} \Rightarrow a + b \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (1) \\ y_{\max} = a + |b| = 1 \xrightarrow{b > 0} a + b = 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} a = -1, b = 2$$



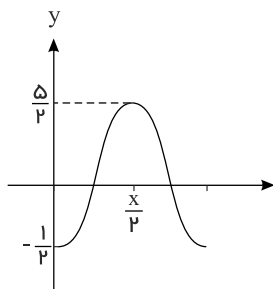
چون فاصله بین دو Min متوالی یا دو Max متوالی یک دوره تناوب است، پس دوره تناوب تابع هم برابر 2π است، $\frac{4\pi}{3} - \left(\frac{-2x}{3}\right) = 2\pi$ است،

پس:

$$\frac{2\pi}{|c|} = 2\pi \xrightarrow{c>0} c = 1$$

$$b(c - a) = 2(1 - (-1)) = 4 \quad \text{عبارت مورد نظر}$$

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را نشان می‌دهد، مقدار ac کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱



$$-2 \quad (2)$$

$$-5 \quad (1)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{5}{2} \quad (3)$$

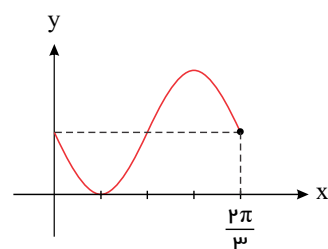
پاسخ: گزینه ۴ با توجه به نمودار، ماکزیمم تابع برابر $\frac{5}{2}$ و مینیمم تابع برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس:

$$\left. \begin{aligned} c + |a| &= \frac{5}{2} \\ c - |a| &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2c = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow 1 + |a| = \frac{5}{2} \Rightarrow |a| = \frac{3}{2}$$

چون نمودار در شکل برخورد با محور y ها دارای مینیمم است، پس a منفی است.

$$|a| = \frac{3}{2} \xrightarrow{a<0} a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot c = -\frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2}$$

شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟ ۷۹



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

$$\text{صفر} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

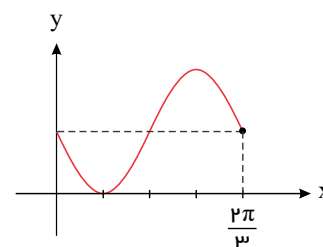
$$2 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم: $y = \sin ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$

با توجه به نمودار داریم:

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

$$y = 1 - \sin mx \rightarrow T = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow |m| = 3 \rightarrow m = \pm 3$$

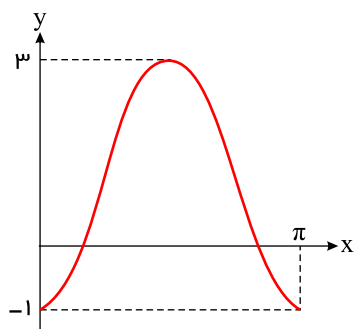


چون نمودار در آغاز رو به پایین حرکت می‌کند و ضریب سینوس منفی است پس باید کمان سینوس مثبت باشد پس $m > 0$ بوده و

$m = +3$ قابل قبول است.



$$y = 1 - \sin(+3x) = 1 - \sin 3x \xrightarrow{x = \frac{7\pi}{6}} y = 1 - \sin \frac{21\pi}{6} = 1 - \sin \frac{7\pi}{2} \rightarrow y = 1 + 1 = 2$$



۸۰ اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin(cx - \frac{3\pi}{4}) \cos(cx - \frac{3\pi}{4})$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

$$\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + b \sin(cx - \frac{3\pi}{4}) \cos(cx - \frac{3\pi}{4})$$

$$\Rightarrow f(x) = a + \frac{b}{2} \sin(2cx - \frac{3\pi}{2}) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق نمودار}} \begin{cases} a - \frac{b}{2} = -1 \\ a + \frac{b}{2} = 3 \end{cases} \rightarrow a = 1 \xrightarrow{f(0)=-1} -1 = 1 + \frac{b}{2} \Rightarrow b = -4$$

مقدار c را هم از دوره تناوب تابع به دست می‌آوریم:

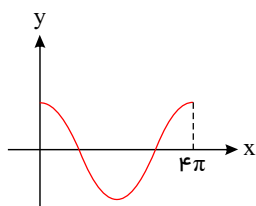
$$\frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - 2 \cos 2x \xrightarrow{\text{صفرهای } f} 1 - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \begin{cases} 2x_1 = \frac{\pi}{3} \\ 2x_2 = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{5\pi}{6} \\ x_1 = \frac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow x_2 - x_1 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

۸۱ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه $x = \frac{16\pi}{3}$ ، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶



$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم: $y = \cos ax \rightarrow T = \frac{2\pi}{a}$



با توجه به شکل، دوره تناوب تابع 4π است.

$$y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx \rightarrow T = \frac{2\pi}{m} = 4\pi \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{1}{2}x \xrightarrow{x = \frac{16\pi}{3}} f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cos\left(\frac{9\pi - \pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

مرجع: سراسری-۱۳۹۷

جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x \tan 3x = 1$ کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (4) \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \quad (3) \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (2) \quad x = \frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

از رابطه $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ استفاده می‌کنیم.

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\xrightarrow{\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha} 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

نمودار تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ ، روی بازه‌ی $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟ مرجع: سراسری-۱۳۹۱

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ برای آنکه تابع $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه‌ی $[-1, 1]$ بیشترین مقدار را داشته باشد، باید حاصل

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ کمترین مقدار، یعنی مقدار (-1) را به خود بگیرد. پس داریم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right) = -1 \rightarrow \frac{\pi}{4} - 3\pi x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{-2k}{3} - \frac{1}{4}$$

حال برای تعیین تعداد جواب‌های این معادله در بازه‌ی $[-1, 1]$ کافی است به k اعداد صحیح را نسبت دهیم:

k	-۲	-۱	۰	۱	۲
x	$\frac{13}{12}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{19}{12}$
	غ ق	✓	✓	✓	غ ق

بنابراین معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[-1, 1]$ ، دارای ۳ جواب است.

مرجع: سراسری-۱۳۹۶

جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (4) \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (2) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم:

$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$$

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2 \cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$



$$\rightarrow \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۲

۸۵ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴) \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad \text{می‌دانیم}$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4} \Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

توجه کنید که $\sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

مرجع: سراسری- ۱۳۹۴

۸۶ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

$$x = k\pi + \frac{\pi}{8} \quad (۴) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{8} \quad (۳) \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۲) \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$2\sin a \cos a = \sin 2a, \quad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad \text{می‌دانیم}$$

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 \rightarrow 2\sin x \cos x = 1 - 2\cos^2 x$$

$$\rightarrow 2\sin x \cos x = -(2\cos^2 x - 1) \rightarrow \sin 2x = -\cos 2x$$

طرفین را بر $\cos 2x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\rightarrow \tan 2x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۷

۸۷ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$ کدام است؟

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \quad (۴) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{5} \quad (۳) \quad x = \frac{2k\pi}{5} \quad (۲) \quad x = \frac{k\pi}{5} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۲ کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد.

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin 3x = -\sin 2x \rightarrow \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi - 2x \rightarrow 5x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \quad (\text{مخرج را صفر می‌کند}) \end{cases}$$



مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

$$5\pi \quad \boxed{4}$$

$$\frac{9\pi}{2} \quad \boxed{3}$$

$$4\pi \quad \boxed{2}$$

$$\frac{14\pi}{3} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$

$$\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \rightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \xrightarrow{k=0,1,2} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$ است.

مجموع تمام جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

$$11\pi \quad \boxed{4}$$

$$10\pi \quad \boxed{3}$$

$$9\pi \quad \boxed{2}$$

$$8\pi \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\text{نکته: } \sin u = \sin v \Rightarrow u = 2k\pi + v, u = 2k\pi + \pi - v$$

$$\sin 5x + \sin 4x = 1 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \rightarrow \sin 5x = -\sin 4x \rightarrow \sin 5x = \sin(-4x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi - 4x \rightarrow 9x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{9} \\ 5x = 2k\pi + \pi + 4x \rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

$$x = \frac{2k\pi}{9} \rightarrow \begin{array}{c|cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 \\ \hline x & 0 & \frac{2\pi}{9} & \frac{4\pi}{9} & \frac{6\pi}{9} & \frac{8\pi}{9} & \dots & 2\pi \end{array}$$

$$x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \pi$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{2\pi + 4\pi + 6\pi + \dots + 18\pi}{9} + \pi$$



$$= \frac{(2 + 4 + 6 + \dots + 18)\pi}{9} + \pi = \frac{90\pi}{9} + \pi = 10\pi + \pi = 11\pi$$

دقت کنید که $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ است روی همین اصل داریم:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 18 = 9(9 + 1) = 90$$

مرجع: سراسری-۱۳۹۵

جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ ، کدام است؟

$$x = k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \quad (3) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$\rightarrow 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3+5}{4} = 2 \rightarrow (-1 \leq \cos x \leq 1) \text{ امکان ندارد} \\ \cos x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۹۱ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin(\pi - x)\cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 3\cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

مرجع: سراسری-۱۳۸۷

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (4) \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (2) \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$2\sin(\pi - x)\cos(\frac{3\pi}{2} + x) + 3\cot x \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow 2\sin x \cdot \sin x + 3\frac{\cos x}{\sin x}(-\sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 + 3A - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 \rightarrow \begin{cases} A = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \\ A = \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$A = -2 \Rightarrow \cos x = -2 \text{ امکان ندارد } (-1 \leq \cos x \leq 1)$$

۹۲ نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه‌ی $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

مرجع: خارج از کشور-۱۳۹۱

$$5 \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ با محور x ها روی بازه‌ی $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ، کافی است معادله‌ی

$$3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \text{ را روی بازه‌ی مورد نظر حل کنیم. داریم:}$$

$$3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$



$$\xrightarrow{\text{حالت خاص}} \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow -2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$$

حال، جواب‌های قابل قبول x را که در بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ قرار دارند به دست می‌آوریم:

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7\pi}{8}, \quad k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \quad k = -1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

$$k = -2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$$

در نتیجه، پنج جواب قابل قبول وجود دارد.

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{۴} \quad x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{۳} \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{۲} \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\cos 3x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\xrightarrow{\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

توجه کنید چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ قابل قبول نمی‌باشد.

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۹۴ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$ به کدام صورت است؟

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{۴} \quad x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \quad \text{۳} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad \text{۲} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$ پس:

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1 \rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \xrightarrow{\sin x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi} \sin 3x = \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



چون $x \neq k\pi$ می باشد پس جواب $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ است.

مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۹۵ مجموع جواب های معادله مثلثاتی $4 \sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

$$5\pi \quad \boxed{4}$$

$$4\pi \quad \boxed{3}$$

$$3\pi \quad \boxed{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ می دانیم $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$$4 \sin x \cdot \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1 \rightarrow -4 \sin x \cos x = 1 \rightarrow -4(\frac{1}{2} \sin 2x) = 1 \rightarrow -2 \sin 2x = 1$$

$$\rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin(\frac{-\pi}{6})$$

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \xrightarrow{\text{به } k \text{ عدد می دهیم.}} x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جواب ها}} \frac{60\pi}{12} = 5\pi$$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۱

۹۶ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \boxed{4}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \boxed{3}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad \boxed{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{3} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x) \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$$

$$2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ \text{یا} \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

$x = \frac{2k\pi}{3}$ جواب های $x = 2k\pi$ را پوشش می دهد.

مرجع: سراسری- ۱۳۷۹

۹۷ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $(1 + \tan^2 x) \cos(\pi + 2x) = 2$ به کدام صورت است؟

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \boxed{4}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \boxed{3}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \boxed{2}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \boxed{1}$$



پاسخ: گزینه ۴

$$\boxed{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$(1 + \tan^2 x) \cdot \cos(\pi + 2x) = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\cos 2x) = 2 \Rightarrow 2 \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\Rightarrow 1 + \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \cos 2x = -1 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۹۸ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3}$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad \boxed{۴} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \boxed{۳} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \boxed{۲} \quad x = k\pi - \frac{\pi}{6} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot x$ ، پس:

$$(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3} \Rightarrow (\sin x - \tan x) \cot x = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \sin x \cot x - \tan x \cot x = -\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = -\cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۰۱ اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^f x$ باشند، ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

$$\frac{1}{2} \cos^2 2x \quad \boxed{۴} \quad \frac{1}{4} \cos^2 2x \quad \boxed{۳} \quad -\frac{1}{2} \sin^2 2x \quad \boxed{۲} \quad -\frac{1}{4} \sin^2 2x \quad \boxed{۱}$$

$$\boxed{1 - \sin^2 a = \cos^2 a, \quad \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a} \quad \text{پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم:}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin^f x) = \sin^f x - \sqrt{\sin^f x} = \sin^f x - \sin^{\frac{f}{2}} x$$

$$= \sin^2 x (\sin^{\frac{f}{2}} x - 1) = -\sin^2 x (1 - \sin^{\frac{f}{2}} x) = -\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$= -(\sin x \cdot \cos x)^2 = -\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4} \sin^2 2x$$

۱۰۰ مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^f x + \cos^f x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

$$4\pi \quad \boxed{۴} \quad \frac{7\pi}{2} \quad \boxed{۳} \quad 3\pi \quad \boxed{۲} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم $\sin^f a + \cos^f a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$ است.

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \sin 2x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \tan x \cos^2 x = 1$ به کدام صورت است؟

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (4) \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم: $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$$2 \tan x \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \sin x \cos x = 1$$

$$\rightarrow \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin 4x \cos 2x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \quad (3) \quad \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \quad (2) \quad \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \quad (1)$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \text{ و } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)$$

طبق صورت سؤال داریم:

$$\sin 4x \cos 2x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (2 \sin 2x \cos 2x)(\cos 2x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x)\right)^2 = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos^2 2x = \frac{1}{2}(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x})$$

$$\Rightarrow 4 \sin 2x(1 - \sin^2 2x) = 1 + \sin 2x \Rightarrow 4 \sin 2x - 4 \sin^3 2x = 1 + \sin 2x$$

$$\Rightarrow 3 \sin 2x - 4 \sin^3 2x = 1 \Rightarrow \sin 3(2x) = 1 \Rightarrow \sin 6x = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\tan(3x) \tan(x) = 1$ ، در بازه $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

$$\frac{11\pi}{2} \quad (4) \quad \frac{9\pi}{2} \quad (3) \quad 6\pi \quad (2) \quad 5\pi \quad (1)$$



پاسخ: گزینه ۲

$$\tan 3x \cdot \tan x = 1 \rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x} \rightarrow \tan 3x = \cot x \rightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\tan x = \tan \alpha \rightarrow x = k\pi + \alpha$$

k	۴	۵	۶	۷
x	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{8}$

$$\rightarrow \text{مجموع جوابها} = \frac{48\pi}{8} = 6\pi$$

۱۰۴ مجموع جوابهای معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

$$\frac{7\pi}{4} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{5\pi}{4} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{اگر } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{matrix} \sin \alpha = \cos \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \end{matrix}$$

$$\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{[0, 2\pi]} \begin{matrix} \text{amp; } x_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24} \\ x_2 = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{17\pi}{24} \end{matrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{18\pi}{24} = \frac{3\pi}{4}$$

۹۵ مجموع تمام جوابهای معادله مثلثاتی $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$ در بازه $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

$$\frac{11\pi}{3} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{9\pi}{4} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{7\pi}{4} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{می‌دانیم } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ و } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$



$$\sin 3x = \sin^3 x - \cos^3 x$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$$

$$\rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0 \rightarrow \cos 2x(2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \left\{ \frac{11\pi}{12} \right\} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{0 \leq x \leq \pi} \left\{ \frac{7\pi}{12} \right\} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$$

۱۰۶ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

مرجع: سراسری-۱۳۹۸

$$3\pi \quad \boxed{4}$$

$$2\pi \quad \boxed{3}$$

$$\frac{7\pi}{2} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

به کمک اتحاد $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ عبارت $\sin^3 x + \cos^3 x$ را تجزیه می‌کنیم.

$$(\sin x + \cos x) \cdot (\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$(\sin x + \cos x) \cdot (1 - \frac{1}{2} \sin 2x) - (1 - \frac{1}{2} \sin 2x) = 0$$

$$(1 - \frac{1}{2} \sin 2x) \cdot (\sin x + \cos x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 2 \text{ غلط} \\ \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = 0, 2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\text{جمع} = 0 + \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

۱۰۷ فرض کنید A مجموعه جواب‌های معادله مثلثاتی $\frac{1}{\lambda} = (1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha))$ در بازه

مرجع: سراسری-۱۴۰۰

$[0, \pi]$ باشد، ماکزیمم عضو مجموعه A ، کدام است؟

$$\frac{8}{9}\pi \quad \boxed{4}$$

$$\frac{7}{9}\pi \quad \boxed{3}$$

$$\frac{6}{7}\pi \quad \boxed{2}$$

$$\frac{5}{7}\pi \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 \alpha \times 2 \cos^2 2\alpha \times 2 \cos^2 4\alpha = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 4\alpha = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \pm \frac{1}{\lambda} \xrightarrow[\alpha \neq k\pi]{\times \sin \alpha} \underbrace{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 4\alpha} \cdot \cos 4\alpha = \frac{1}{4} \underbrace{\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}_{\frac{1}{2} \sin 8\alpha}$$

$$= \frac{1}{8} \sin 8\alpha = \pm \frac{1}{8} \sin \alpha \Rightarrow \sin 8\alpha = \pm \sin \alpha$$

$$(1) \sin 8\alpha = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} \Rightarrow \max : \frac{6\pi}{7} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} + \frac{\pi}{9} \Rightarrow \max : \frac{7\pi}{9} \end{cases}$$

$$(2) \sin 8\alpha = -\sin \alpha \Rightarrow \sin 8\alpha = \sin(-\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} \Rightarrow \max = \frac{8\pi}{9} \\ 8\alpha = 2k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{7} \Rightarrow \max = \frac{5\pi}{7} \end{cases}$$

* البته دقت کنید که $\alpha = \pi$ جواب قابل قبول برای معادله نیست. پس ماکزیمم جواب‌ها $\frac{8\pi}{9}$ است.

۱۴۰۰ حالا جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۰

$$6 \quad \boxed{4}$$

$$5 \quad \boxed{3}$$

$$3 \quad \boxed{2}$$

$$1 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ پس داریم:

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \Rightarrow \sin^2 x \cos 3x + \sin^2 x = 0$$



$$\sin^2 x (\cos 3x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \\ \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

معادله دوم نیز سه جواب دارد $(\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3})$ اما جواب π در هر دو معادله به دست آمد و تکراری است. پس در کل معادله فوق ۵ جواب $(0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ را خواهد داشت.

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $1 = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4})$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

$$\frac{5\pi}{4} \quad \boxed{۴} \qquad \frac{\pi}{4} \quad \boxed{۳} \qquad \frac{3\pi}{2} \quad \boxed{۲} \qquad \frac{\pi}{2} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از رابطه $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ عبارت $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ را به صورت زیر نوشته و در معادله جایگزین می‌کنیم.

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (x + \frac{\pi}{4})) = \cos(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$$

طبق رابطه (۱) داریم:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{4}) \quad (۱)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \xrightarrow{(۱)} \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \pm 1$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

۱۱۰ جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan 3x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ به کدام صورت است؟

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad \boxed{۴} \qquad x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \quad \boxed{۳} \qquad x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \quad \boxed{۲} \qquad x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \rightarrow \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \tan 3x$$

$$\rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۱۱۱ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2 \cos^2 x$ کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \boxed{۴} \qquad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \boxed{۳} \qquad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \boxed{۲} \qquad \frac{k\pi}{2} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \quad \text{می‌دانیم:}$$



$$\begin{aligned} \frac{x}{2} = 2 \cos^2 x &\rightarrow \frac{-4 \sin^2 x + 3 \sin x}{\sin x} = 2 \cos^2 x \rightarrow \frac{\sin x (-4 \sin^2 x + 3)}{\sin x} = 2(1 - \sin^2 x) \Rightarrow -4 \sin^2 x + 3 = 2 - 2 \sin^2 x \\ &\rightarrow -2 \sin^2 x = -1 \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) \\ &\text{طبق دایره مثلثاتی مقابل، جوابهای معادله فوق بصورت } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ است.} \end{aligned}$$

۱۱۲ اگر اختلاف جوابهای معادله $\frac{1}{\sin(\frac{\pi+4x}{2})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi+8x}{2})} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(2\alpha)$ کدام

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

است؟

$$-\sqrt{3} \quad \text{۴}$$

$$\sqrt{3} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{۲}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + 2x)} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} + 4x)} = 0 \Rightarrow \frac{-\sin 4x + \cos 2x}{(\cos 2x)(-\sin 4x)} = 0 \Rightarrow \sin 4x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = \cos 2x \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow \text{غ ق} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{12} \\ x_2 = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan(2\alpha) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

مرجع: سراسری- ۱۳۸۷

۱۱۳ جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{۴}$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad \text{۳}$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{۲}$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم: $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \cos x (-\sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

۱۱۴ جوابهای کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است، مجموعه مقادیر i کدام

مرجع: سراسری- ۱۳۸۳

است؟

$$\{1, 5, 9\} \quad \text{۴}$$

$$\{1, 4, 7\} \quad \text{۳}$$

$$\{1, 3, 5\} \quad \text{۲}$$

$$\{7, 9\} \quad \text{۱}$$



پاسخ: گزینه ۴

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

k	x
0	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{5\pi}{6}$
2	$\frac{9\pi}{6}$

$\in \{1, 5, 9\}$

مثلاً جواب‌های معادله مثلثاتی $8 \cos x - \tan^2 x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۱

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$8 \cos x - \tan^2 x = 1 \Rightarrow 8 \cos x = 1 + \tan^2 x$$

با استفاده از رابطه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$8 \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 8 \cos^3 x = 1 \xrightarrow{\text{فرجه}} 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۲ جواب است.

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ کدام است؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۱

 $\frac{11\pi}{6}$ (۴) $\frac{9\pi}{4}$ (۳) $\frac{7\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ در معادله $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ به جای $\frac{\pi}{3}$ را قرار داده و داریم:

$$\sin x + \tan \frac{\pi}{3} \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cos x}{\cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\times \cos \frac{\pi}{3}} \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

جواب‌های واقع در بازه $[-\pi, 2\pi]$ عبارتند از:



$$x = -\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$$

$$\text{مجموع جوابها: } -\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{23\pi}{12} = \frac{27\pi}{12} = \frac{9\pi}{4}$$

۱۱۷. نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ بر روی دایره‌ی مثلثاتی رأس‌های کدام چند ضلعی

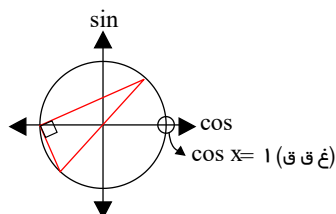
است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

- ۱) مربع ۲) مستطیل ۳) مثلث قائم الزاویه ۴) مثلث متساوی الساقین

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به این که $\cos x \neq 1$ (ریشه‌ی مخرج)، معادله‌ی مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x - \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin x - \cos x) = 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \\ \text{یا} \\ \sin x \neq 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

همان طور که در دایره‌ی مثلثاتی مشاهده می‌کنید، نقاط پایانی کمان جواب‌های معادله‌ی مفروض، رئوس یک مثلث قائم الزاویه هستند زیرا زاویه‌ی محاطی مقابل به قطر دارد.

مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

۱۱۸. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

- ۱) $2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم: $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

معادله را ساده می‌کنیم.

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۱۹. کمترین فاصله بین دو مقدار از جواب‌های معادله $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ کدام است؟

- ۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = (1 + \sin x)^2$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x = 1 + \sin^2 x + 2 \sin x \Rightarrow 2 \sin^2 x + 2 \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x (\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \text{غ ق ق (چرا؟)} \\ 1 + \sin x = 0 \end{cases}$$



جواب‌های معادله به صورت $k\pi$ هستند که فاصله هر دو جواب متوالی π است.

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹ جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$ کدام است؟

$$x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱ راه اول:

می‌دانیم:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x \rightarrow \sin x \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}) + \cos x \cdot (\frac{1}{2}) + \cos x \cdot (\frac{1}{2}) - \sin x \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}) = \cos 2x$$

$$\cos x = \cos 2x \rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

جوابهای $x = 2k\pi$ توسط $x = \frac{2k\pi}{3}$ نیز تولید می‌شوند، پس جواب کلی $x = \frac{2k\pi}{3}$ است.

راه دوم: این تست با عددگذاری نیز حل می‌شود. $x = 0$ در معادله صدق می‌کند ($\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} = \cos 0$) بنابراین گزینه‌های سوم و

چهارم حذف می‌شوند. $x = \frac{\pi}{3}$ در معادله صدق نمی‌کند ($\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{2\pi}{3} \neq \cos \frac{2\pi}{3}$) بنابراین گزینه دوم نیز حذف می‌شود و جواب

گزینه اول یعنی $x = \frac{2k\pi}{3}$ است.

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲ جواب‌های کلی معادله ی مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ کدام می باشد؟

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{6} \quad (4)$$

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (3)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

از رابطه $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ استفاده می‌کنیم.

$$2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$$

$$\Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \frac{\cos x}{\sin x} \sin x + \cot x \cdot \tan x = 4 \cos x + 1$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \begin{cases} \frac{3}{2} \text{ غ ق} \\ \frac{-1}{2} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$



مرجع: سراسری- ۱۳۹۲

جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x$ ، کدام است؟

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (1) \quad \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \quad (2) \quad \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \quad (3) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ می‌دانیم}$$

$$\sqrt{2} \sin x \cos x = \sin x + \cos x \rightarrow \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & (1) \\ 2x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$$

چون جواب‌های (۱) زیر مجموعه‌ی جواب‌های (۲) است بنابراین گزینه ۳ درست است.

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

تعداد جواب‌های معادله $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از رابطه $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ داریم:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ پس:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

جواب‌های واقع در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از:

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$$

تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $\frac{1}{8} = (1 + \cos(\alpha))(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))$ ، در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

$$7 \quad (1) \quad 10 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 14 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \times 2 \cos^2 \alpha \times 2 \cos^2 2\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow 64 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 2\alpha = 1 \Rightarrow 8 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos 2\alpha = \pm 1$$

دو طرف را در $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ ضرب می‌کنیم:

$$4 \underbrace{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)}_{\sin \alpha} \cos \alpha \cos 2\alpha = \pm \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \underbrace{2 \left(2 \sin \alpha \cos \alpha\right)}_{\sin 2\alpha} \cos 2\alpha = \pm \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin 4\alpha = \sin\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 2k\pi \pm \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}\alpha = 2k\pi \\ \frac{9}{2}\alpha = 2k\pi \end{cases} \\ 4\alpha = (2k+1)\pi \mp \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{2}\alpha = (2k+1)\pi \\ \frac{7}{2}\alpha = (2k+1)\pi \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{2}\alpha = k\pi \\ \frac{9}{2}\alpha = k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2k\pi}{7} \\ \alpha = \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

باید $\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ یعنی $\alpha \neq 2k\pi$ پس ریشه‌ها در بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \dots, \frac{12\pi}{7} & \text{جواب ۶} \\ \alpha = \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \dots, \frac{16\pi}{9} & \text{جواب ۸} \end{cases}$$

پس معادله در بازه $[0, 2\pi]$ ، ۱۴ جواب دارد.

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $2 \sin(x) \cos(2x) + \sin(x) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

$$\frac{7\pi}{2} \quad \boxed{۴}$$

$$3\pi \quad \boxed{۳}$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad \boxed{۲}$$

$$2\pi \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم $2 \sin^2 x - \cos 2x = 1$ پس می‌توان نوشت:

$$2 \sin x (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 1 \Rightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 1$$

سمت چپ معادله برابر $\sin 3x$ است، پس:

$$\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$$

بنابراین مجموع این سه ریشه برابر $\frac{5\pi}{2} = \frac{15\pi}{6}$ است.

مجموع جواب‌های معادله $\cos(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{6} - x) = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

$$\frac{9\pi}{4} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{7\pi}{4} \quad \boxed{۳}$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{\pi}{6} - x) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} + \cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6}) + \sin x (\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6}) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$x \in (0, 2\pi) \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \xrightarrow{\text{مجموع}} \frac{5\pi}{2}$$



۱۲۷ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos(\frac{17\pi}{8} + x)\cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \cos^2(\frac{\pi}{3})$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

$$\frac{\pi}{4} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad \boxed{۳}$$

$$\frac{\pi}{3} \quad \boxed{۲}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

سمت چپ معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\begin{cases} \cos(\frac{17\pi}{8} + x) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{8} + x) = \cos(x + \frac{\pi}{8}) \\ \cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{8} + x)) = \sin(x + \frac{\pi}{8}) \end{cases}$$

$$\text{معادله: } \cos(x + \frac{\pi}{8}) \sin(x + \frac{\pi}{8}) = (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} x_1 = -\frac{\pi}{12} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} x_2 = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۴

۲۸ فرم کلی جواب‌های معادلهٔ $\cos 2x = \sin(\frac{3\pi - 2x}{2})$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{k\pi}{3} + \pi \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad \boxed{۳}$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \boxed{۲}$$

$$2k\pi \pm \pi \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\cos 2x = \sin(\frac{3\pi - 2x}{2})$$

$$\cos 2x = \sin(\frac{3\pi}{2} - x) \Rightarrow \cos 2x = -\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

بنابراین به دو فرم جواب $x = (2k - 1)\pi$ و $x = \frac{(2k + 1)\pi}{3}$ رسیدیم. حال توجه می‌کنیم درحالتی که $2k + 1$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد،

داریم:



$$\frac{\overbrace{(2k+1)}^{\text{فرد}}}{3}\pi = \underbrace{(2k'-1)}_{\text{فرد}}\pi$$

که همان فرم دوم به دست آمده است. لذا کلیه جواب‌ها را می‌توان به فرم $\frac{(2k+1)\pi}{3}$ در نظر گرفت که همان گزینه (۳) است.

مرجع: سراسری-۱۴۰۳

۲۹ مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ در بازه $[-3\pi, \pi]$ کدام است؟

$$-4\pi \quad \boxed{4}$$

$$-3\pi \quad \boxed{3}$$

$$-\pi \quad \boxed{2}$$

$$\text{صفر} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$(1 - 2\sin^2 x) + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

k	۰	-۱	-۲	-۳
x	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{2}$

جواب‌های بازه $[-3\pi, \pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$ که مجموع آنها برابر -4π است.

مرجع: سراسری-۱۴۰۴

معادله مثلثاتی $\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi$ چند جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد؟

$$3 \quad \boxed{4}$$

$$4 \quad \boxed{3}$$

$$5 \quad \boxed{2}$$

$$6 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\tan 2x + \tan 3x = 0 \Rightarrow \tan 3x = -\tan 2x$$

$$\tan 3x = \tan(-2x) \Rightarrow 3x = k\pi - 2x \Rightarrow$$

$$5x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5}$$

k	۱	۲	۳	۴
x	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$

۴ جواب در بازه $(0, \pi)$

مرجع: سراسری-۱۴۰۳

تعداد جواب‌های معادله $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

$$4 \quad \boxed{4}$$

$$3 \quad \boxed{3}$$

$$2 \quad \boxed{2}$$

$$1 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{3\pi}{4} - x)$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{3\pi}{4} - x) \xrightarrow{-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}$$



۱۳۲ در معادله مثلثاتی $1 = 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ اگر $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ مقدار m کدام

است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

۴ -۳

۳ ۳

۲ $-\sqrt{3}$

۱ $\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\times 2\sqrt{3}} 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \quad (1)$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{2}{3}; \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) - \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = 1 \xrightarrow{(1), (2)} 2 + m \times \frac{1}{3} = 1 \rightarrow m = -3$$

اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ ریشه‌های معادله $0 = 2x^2 + 3x - 1$ باشند، $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۴ -۱

۳ -۳

۲ $\frac{3}{2}$

۱ ۱

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

چون $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ ریشه‌های معادله $0 = 2x^2 + 3x - 1$ هستند، پس داریم:

$$S = \tan \alpha + \tan \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

مرجع: سراسری - ۱۳۷۱

اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ و $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{1 - m}{2 + m}$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟

۴ $m < -2$

۳ $m > 1$

۲ $-2 < m < 1$

۱ $-1 < m < 2$

پاسخ: گزینه ۲

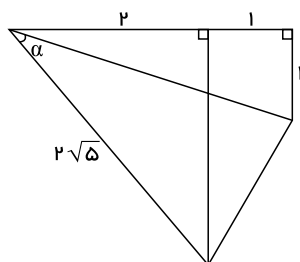
می‌دانیم:

$$\tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$



بنابراین $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-m}{2+m}$ داریم:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \Rightarrow \frac{1-m}{2+m} > 0 \Rightarrow -2 < m < 1$$



مرجع: سراسری-۱۴۰۲

۳ شکل زیر، مقدار $\cos a$ چقدر است؟

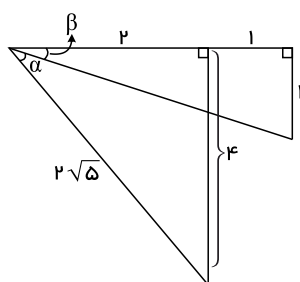
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{10} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{15} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲ مطابق شکل، زاویه مجاور α را β در نظر می‌گیریم. همچنین طبق قضیه فیثاغورس ضلع قائمه روبه‌روی زاویه $\alpha + \beta$ برابر ۴ می‌شود. طبق شکل داریم:



$$\begin{cases} \alpha = (a + \beta) - \beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1^2}}, \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \cos((\alpha + \beta) - \beta) = \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(راه‌حل دوم) از $\tan(\alpha + \beta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{\tan \alpha + \frac{1}{3}}{1 - \frac{\tan \alpha}{3}} \Rightarrow \tan \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مرجع: سراسری-۱۳۷۹

۶ فرض $f(x) = x^2 - 2$ مقدار $f(f(f(2 \cos x)))$ کدام است؟

$$2 \cos 8x \quad (4)$$

$$2 \sin 8x \quad (3)$$

$$2 \cos^8 x \quad (2)$$

$$2 \sin^8 x \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\cos^2 u - 1 = \cos 2u$$



$$f(2 \cos x) = 4 \cos^2 x - 2 = 2(\underbrace{2 \cos^2 x - 1}_{\cos 2x}) = 2 \cos 2x$$

$$f(f(2 \cos 2x)) = 4 \cos^2 2x - 2 = 2(\underbrace{2 \cos^2 2x - 1}_{\cos 4x}) = 2 \cos 4x$$

$$f(f(f(2 \cos x))) = 4 \cos^2 4x - 2 = 2(\underbrace{2 \cos^2 4x - 1}_{\cos 8x}) = 2 \cos 8x$$

مرجع: سراسری- ۱۳۷۹

$f(x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ و $g(x) = \tan x$ می‌باشد در این صورت $f(g(x))$ برابر است با:

$$\cos 2x \quad \boxed{4}$$

$$\cos^2 2x \quad \boxed{3}$$

$$\cos \frac{x}{2} \quad \boxed{2}$$

$$\cos x \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴

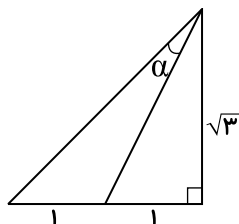
می‌دانیم:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$f(g(x)) = \frac{1 - (g(x))^2}{1 + (g(x))^2} = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos 2x}{1} = \cos 2x$$

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۲

در شکل زیر، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



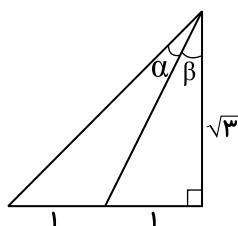
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{1}{5\sqrt{3}} \quad \boxed{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{3}$$

پاسخ: گزینه ۴



$$\tan \alpha = \tan((\alpha + \beta) - \beta) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \beta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

در یک مستطیل، جذر مساحت، نصف طول قطر است. اگر B و C دو زاویه ایجاد شده در یک طرف قطر باشد، مقدار تانژانت

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

$(\hat{B} - \hat{C})$ کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad \boxed{4}$$

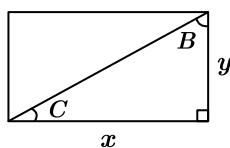
$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{1}{3} \quad \boxed{2}$$

$$3 \quad \boxed{1}$$



پاسخ: گزینه ۴



قطر مستطیل

$$\tan \hat{B} = \frac{x}{y}, \quad \tan \hat{C} = \frac{y}{x}$$

طبق فرض

$$\longrightarrow \text{قطر مستطیل} \times \frac{1}{2} = \text{جنر مساحت}$$

$$\sqrt{xy} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow xy = \frac{1}{4} (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4xy \quad *$$

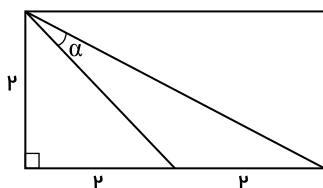
$$\tan(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{\tan \hat{B} - \tan \hat{C}}{1 + \tan \hat{B} \tan \hat{C}} = \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \times \frac{x}{y}} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{xy}}{2} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

$$\xrightarrow{*} x^2 + y^2 + 2xy = 4xy \Rightarrow (x + y)^2 = 4xy \Rightarrow x + y = \sqrt{4xy}$$

$$\xrightarrow{*} x^2 + y^2 - 2xy = 2xy \Rightarrow (x - y)^2 = 2xy \Rightarrow x - y = \sqrt{2xy}$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = \sqrt{2xy} \times \sqrt{4xy} = \sqrt{8xy}$$

$$\tan(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{\sqrt{8xy}}{2xy} = \sqrt{2}$$



مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

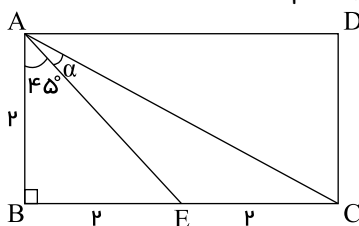
در شکل زیر مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟

۳ (۲)

۱ (۱)

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲ مثلث قائم الزاویه سمت چپ، متساوی الساقین بوده و زاویه حاده آن 45° است. طبق شکل داریم:

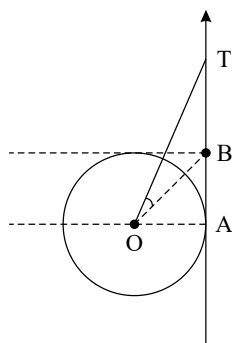
$$\begin{cases} \tan(45^\circ + \alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{2} = 1 \\ \tan 45^\circ = 1 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \tan((45^\circ + \alpha) - 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan(45^\circ + \alpha) - \tan 45^\circ}{1 + \tan(45^\circ + \alpha) \tan 45^\circ} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1 - 1}{1 + 1 \times 1} = 0 \Rightarrow \cot \alpha = \infty$$

توجه طبق شکل $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ است، پس $\cot \alpha > 1$ می باشد و تنها گزینه (۲) درست است!



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

با توجه به دایره مثلثاتی زیر، اگر $BT = 2$ باشد، مقدار $\tan(\hat{TOB})$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

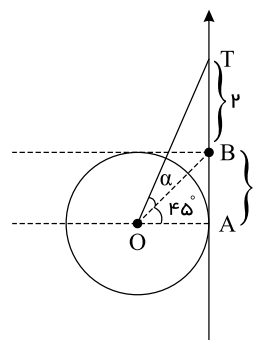
$$\frac{2}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم که $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ است. حال با در نظر گرفتن دایره مثلثاتی زیر داریم:

$$\tan \alpha = \tan(\alpha + 45^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan(\alpha + 45^\circ) - 1}{1 + \tan(\alpha + 45^\circ)} = \frac{3 - 1}{1 + 3} = \frac{1}{2}$$

۱۴۲ اگر انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{13\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

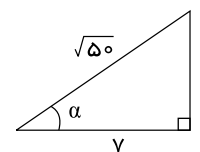
$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ اگر α در ناحیه اول باشد، به کمک مثلث قائم‌الزاویه زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$



$$\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{12\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم

$$\sin\left(\frac{13\pi}{4} + \alpha\right) = \sin \frac{13\pi}{4} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{13\pi}{4} \cdot \sin \alpha = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)$$



$$= -\frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{50}} = -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{50}} = -\frac{4\sqrt{2} \times \sqrt{50}}{50} = -\frac{4 \times 10}{50} = -\frac{4}{5}$$

۱۴۳ اگر انتهای کمان α در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{11\pi}{4} + \alpha)$ ، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

$$\frac{4}{5} \quad \boxed{۴}$$

$$\frac{3}{5} \quad \boxed{۳}$$

$$-\frac{3}{5} \quad \boxed{۲}$$

$$-\frac{4}{5} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\alpha \text{ ناحیه دوم}} \boxed{\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{12\pi - \pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = -\sqrt{\frac{98}{100}} = \frac{-\sqrt{98}}{10}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right) &= \cos \frac{11\pi}{4} \cdot \cos \alpha - \sin \frac{11\pi}{4} \cdot \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{-\sqrt{98}}{10}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{\sqrt{196}}{20} - \frac{\sqrt{4}}{20} \\ &= \frac{7}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱۴۴ حاصل عبارت $\frac{\sin(-285^\circ) + 2 \cos(-105^\circ)}{2 \sin(165^\circ) + 3 \sin(375^\circ)}$ کدام است؟

$$0,4\sqrt{3} \quad \boxed{۴}$$

$$0,2\sqrt{3} \quad \boxed{۳}$$

$$0,4\sqrt{6} \quad \boxed{۲}$$

$$0,2\sqrt{6} \quad \boxed{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} \frac{\sin(-285^\circ) + 2 \cos(-105^\circ)}{2 \sin(165^\circ) + 3 \sin(375^\circ)} &= \frac{-\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 15^\circ\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 15^\circ\right)}{2 \sin(\pi - 15^\circ) + 3 \sin(2\pi + 15^\circ)} \\ &= \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{2 \sin 15^\circ + 3 \sin 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - 2 \sin 15^\circ}{5 \sin 15^\circ} = \frac{1}{5} \cot 15^\circ - \frac{2}{5} \end{aligned}$$

برای محاسبه $\cot 15^\circ$ از فرمول مثلثاتی $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow \cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$$



پس حاصل عبارت مطلوب برابر است با:

$$\frac{1}{5}(2 + \sqrt{3}) - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{3}$$