

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دعای پیش از مطالعه

اَللّٰهُمَّ اَخْرِجْنِيْ مِنْ ظُلُمَاتِ الْوَهْمِ وَاكْرِمْنِيْ بِنُورِ الْفَهْمِ
اَللّٰهُمَّ افْتَحْ عَلَيْنَا اَبْوَابَ رَحْمَتِكَ وَاَنْشُرْ عَلَيْنَا خَزَائِنَ عُلُوْمِكَ
بِرَحْمَتِكَ يَا اَرْحَمَ الرَّاحِمِيْنَ

پروردگارا، خارج کن مرا از تاریکی های فکر و گرامی بدار به نور فهم
پروردگارا، بگشای بر مادرهای رحمت را و بگستران کنج های دانشت را به امید رحمت
تو ای مهربان ترین مهربانان

بیایید به حقوق دیگران احترام بگذاریم

دوست عزیز، این کتاب حاصل دسترنج چندین ساله ی مؤلف، مترجم و ناشر آن است. تکثیر و فروش آن به هر شکلی بدون اجازه از پدیدآورنده کاری غیراخلاقی، غیرقانونی، غیرشرعی و کسب درآمد از دسترنج دیگران است، نتیجه ی این عمل نادرست، موجب رواج بی اعتمادی در جامعه و بروز پی آمدهای ناگوار در زندگی و محیط ناسالم برای خود و فرزندانمان می گردد.



درسنامه ریاضیات مهندسی

ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی پزشکی «بیوالکتریک»

تألیف و گردآوری:

امین ابوطالبی

سرشناسه

: ابوطالبی، امین، ۱۳۶۴ - ، گردآورنده

عنوان و نام پدیدآور

: AGK درسنامه ریاضیات مهندسی: ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی پزشکی «بیوالکتریک»/

تألیف و گردآوری: امین ابوطالبی

مشخصات نشر

: تهران: آناهید گستر خلیلی، ۱۴۰۴.

مشخصات ظاهری

: ۹۴ص: مصور، جدول، نمودار؛ ۲۲×۲۹ س.م.

شابک

: 978-622-4907-78-3

: فیپا

وضعیت فهرست‌نویسی

: ریاضیات مهندسی -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

موضوع

Engineering mathematics -- Study and teaching -- Examinations, questions (Higher)

مهندسی پزشکی -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

Biomedical engineering -- Study and teaching -- Examinations, questions, etc (Higher)

: TA۳۳۲/۵

رده‌بندی کنگره

: ۶۲۰/۰۰۱۵۱۰۷۶

رده‌بندی دیویی

: ۹۹۰۱۳۷۲

شماره کتابشناسی ملی



انتشارات آناهید گستر خلیلی

نام: AGK درسنامه ریاضیات مهندسی

(ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی پزشکی «بیوالکتریک»)

تألیف و گردآوری: امین ابوطالبی

ناشر: آناهید گستر خلیلی

نوبت و سال چاپ: اول. ۱۴۰۴

شمارگان: ۱۰۰۰

چاپ و صحافی: گیلان

مدیر تولید: امیرحسین خلیلی

مدیر فنی و هنری: مریم آرده

تایپ و صفحه‌آرایی: آرزو راضی

بهاء: ۲۴۰۰۰۰ تومان

آموزشگاه/فروشگاه: ۰۲۱۶۶۵۶۸۶۲۱

مرکز پخش: ضلع جنوب غربی میدان انقلاب . جنب بانک پارسیان . مجتمع تجاری پارس . طبقه اول

مدیر فروش: ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ (ارتباط از طریق پیامک)

 agkpublisher@gmail.com

 www.agkins.com

طلیحه سخن مدیر تولید:

سپردن کار به اهلش نشانه‌ی خردمندی است.

برای تولید بسته‌های آموزشی تمام تلاش خود را به کار گرفته‌ایم تا محصولی شایسته را تقدیم شما عزیزان نماییم.

مجموعه‌ای که پیش روی شماست براساس معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور و به قلم مجرب‌ترین اساتید تألیف شده است و مطالعه آن موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه شما خواهد شد. ارائه بالاترین آمار قبولی در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری در دهه اخیر بیان‌گر توانایی این مجموعه در راستای اهداف آموزشی خود می‌باشد. اینک با اتکا به تجربه‌ای ۱۷ ساله می‌توانیم ادعا کنیم که مجموعه حاضر، بی‌شک از جمله کامل‌ترین و به‌روزترین بسته‌های آموزشی موجود در عرصه کنکور می‌باشد.

❧ برخی از ویژگی‌های بسته‌های آموزشی:

- منطبق با معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور
- گردآوری و تألیف توسط مجرب‌ترین اساتید کنکور
- تدریس مطالب از سطح پایه تا پیشرفته به بیان ساده و روان
- انتقال بهتر مفاهیم با استفاده از شکل، جدول و نمودار
- تألیف مبتنی بر نحوه‌ی طراحی سوالات کنکور
- مطالعه یک منبع منسجم به جای مطالعه چندین منبع مختلف
- منبعی خودآموز و بدون نیاز به مدرس

اینک علاوه بر مطالعه بسته‌های آموزشی استفاده از خدمات و محصولات زیر را به عنوان ضمانتی برای قبولی به شما داوطلبان عزیز توصیه می‌کنم؛

❧ آزمون‌های آزمایشی: خوش بود گر محک تجربه آید به میان

داوطلب شجاع کیست؟ داوطلبی است که خود را مورد سنجش (خود را با خود) و ارزیابی (خود را با دیگران) قرار دهد تا پیش از کنکور به نقاط ضعف خود پی ببرد و آن‌ها را تقویت نماید. آزمون‌های آزمایشی دارای یک برنامه‌ریزی منسجم است و به شما اولتیماتوم می‌دهد. یعنی شما باید در یک زمان معین مطالب معینی را مطالعه نمایید.

آزمون‌های آزمایشی مجموعه دارای سوالات استاندارد، پاسخنامه تشریحی و کارنامه تحلیلی می‌باشد. صادقانه شرکت در آزمون‌های آزمایشی را به شما عزیزان توصیه می‌کنم.

❧ مشاوره تخصصی و برنامه‌ریزی: زیر نظر حرفه‌ای‌ها درس بخوانید ...

در صورتی که نمی‌توانید با توجه به زمان آزادتان برنامه‌ی مطالعاتی استاندارد را برای خود تدوین کنید حتماً از افراد متخصص کمک بخواهید. افرادی که تجربیات خود را صادقانه در اختیار شما قرار می‌دهند و برنامه‌ریزی مناسب با شرایط شما را انجام می‌دهند.

📖 کتاب تست:

کوچک‌ترین واحد یادگیری در کنکور، تست است.

شما می‌توانید برای این‌که سطح یادگیری خود را پس از مطالعه بسنجید از کتاب‌های تست مجموعه (تست کنکور) و ماطراحان (تست‌های تألیفی) استفاده کنید. این کتاب‌ها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده‌اند و می‌توانند نحوه‌ی طرح سوالات کنکور و سطح آن‌ها را به‌صورت واضح به شما نشان دهند.

📖 درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم مناسب‌ترین منابع برای دوران مرور و جمع‌بندی:

بیش‌تر داوطلبان حین مطالعه نگران خلاصه‌نویسی و مرور آموخته‌های خود هستند و برای خلاصه‌نویسی زمان زیادی را صرف می‌کنند. اینک به شما مژده می‌دهیم که این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است و دیگر با استفاده از درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم نیاز به خلاصه‌نویسی ندارید.

شما می‌توانید نظرات، انتقادات و پیشنهادهای سازنده خود را در مورد بسته‌های آموزشی به شماره‌تلفن همراه ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ فقط و فقط پیامک نمایید.

مشاور و مدیر تولید

امیرحسین خلیلی

طلیحه سخن مؤلف:

رشته‌ی نسبتاً نوپای مهندسی پزشکی که امروزه با سرعتی بسیار زیاد در حال فراگیر شدن است، نه فقط به دلیل عمر کم، بلکه علاوه بر آن به خاطر ماهیت بین رشته‌ای آن نیز دچار کم لطفی‌های بسیاری گشته و علی‌رغم تلاش‌های گوناگون متخصصان، استادان و دانشجویان آن، هنوز تا کسب جایگاه واقعی خود در دانشگاه، جامعه، صنعت و حوزه سلامت فاصله زیادی دارد.

درس «ریاضیات مهندسی» یکی از دروس تخصصی دانشجویان کلیه رشته‌های مهندسی محسوب می‌شود. این درس پایه و اساس رشته مهندسی پزشکی بوده که به تجزیه و تحلیل مباحث و روابط ریاضی مورد نیاز در سایر دروس مهندسی بیوالکتریک مانند مدارهای الکتریکی، کنترل سیستم‌های خطی، سیگنال‌ها و سیستم‌ها و ... می‌پردازد به طوری که می‌توان گفت یادگیری مفاهیم سایر دروس مستلزم فراگیری درس ریاضیات مهندسی می‌باشد. از سوی دیگر این درس یکی از مواد امتحانی مهم مورد نیاز دانشجویان مهندسی پزشکی در آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری محسوب می‌گردد و به همین خاطر ضرورت وجود منبعی مناسب و کامل برای این درس به خوبی محسوس است. کتاب پیش‌رو که برای پاسخ به همین ضرورت و نیاز ارائه گردیده است، حاصل تجربه‌ی تدریس نویسنده کتاب در دانشگاه‌ها و مراکز آموزش عالی مختلف در رشته مهندسی برق و مهندسی پزشکی و آنالیز سوالات آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری در رشته‌های مختلف مهندسی برق، مهندسی کامپیوتر، مهندسی مکانیک، مهندسی عمران، مهندسی پزشکی و ... می‌باشد.

در تألیف این کتاب سعی شده با استفاده از جدیدترین و بروزترین روش‌ها، مباحث مربوطه توضیح داده شوند و در بیان مسائل آزمونی حداکثر ساده سازی و نکات مهم و کلیدی بیان شوند.

همچنین مطالب این کتاب به صورتی کامل و در عین حال خلاصه و مختصر و مفید جمع‌آوری و سعی شده است تا علاوه بر این که شامل کلیه سرفصل‌های یک درس دانشگاهی باشد، تمامی نکات مورد نیاز داوطلبان آزمون‌های کارشناسی ارشد دکتری را نیز پوشش دهد.

استقبال کم نظیر دانشجویان، استادان و علاقه مندان از کتاب‌های «ریاضیات مهندسی» در طی این چند سال، همواره انگیزه بخش نگارنده این کتاب در تألیف کتابی جامع و کامل با بیانی ساده و مورد نیاز آزمون‌های تحصیلات تکمیلی بوده است.

البته ناگفته نماند که هیچ‌گاه چاپ این کتاب امکان‌پذیر نمی‌شد مگر با پیگیری مداوم و مستمر دست‌اندرکاران انتشارات آن‌هید گستر خلیلی به‌ویژه جناب آقای دکتر احمد خلیلی، جناب آقای امیر حسین خلیلی و سرکار خانم مریم آرده که بی‌شک سزاوار ادای احترام خالصانه مؤلف کتاب ریاضیات مهندسی هستند.

نگارنده کتاب دست تمامی منتقدان و صاحب‌نظران وادی بی‌انتهای مهندسی برق و بیوالکتریک را می‌فشارند و بی‌صبرانه مهبای شنیدن هرگونه نظر و پیشنهادی به منظور افزایش کیفیت این اثر ناقابل می‌باشد.

با تشکر

امین ابوطالبی

aminabutalebi@gmail.com

فصل اول: آنالیز فوریه	۹
فصل دوم: توابع مختلط	۲۵
فصل سوم: نگاشت‌ها	۳۳
فصل چهارم: انتگرال گیری از توابع مختلط	۵۳
فصل پنجم: معادلات با مشتق جزئی	۷۶

آنالیز فوريه

سری فوريه

فرض کنید $f(x)$ تابعی متناوب با دوره ی تناوب $p=2L$ باشد که در فاصله تناوب خود پیوسته و تکه تکه هموار باشد. آن گاه می توان تابع مذکور را به صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی با آرگامون های مختلف که به سری فوريه تابع موسوم است به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right)$$

که در آن ضرایب سری فوريه به شکل زیر حاصل می شوند:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x dx \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x dx$$

✚ اگر تابع $f(x)$ تابعی زوج باشد (نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن باشد) آن گاه:

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x dx$$

و اگر تابع $f(x)$ تابعی فرد باشد (نمودار آن نسبت به مرکز مختصات متقارن باشد) آن گاه:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x dx$$

مثال ۱: برای تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$ ، ثابت سری فوريه را محاسبه کنید.

حل:

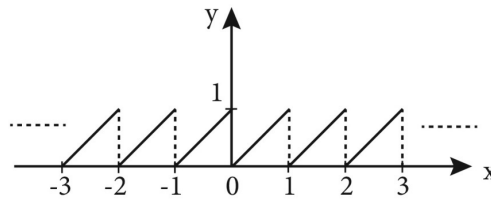
$$p = 2L = 1 - (-1) = 2 \rightarrow L = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) dx \rightarrow a_0 = \frac{1}{1} \left\{ \int_{-1}^0 1 \cdot dx + \int_0^1 x \cdot dx \right\} = x \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}$$

✚ متناوب بودن $f(x)$ شرط لازم برای وجود سری فوريه است، ولی برخی مواقع یک تابع به خودی خود متناوب نمی باشد و در فاصله ای روی آن بحث می شود که تابع مذکور در آن فاصله مد نظر قرار گرفته می شود. پس می توان تابع را در خارج آن فاصله

به صورت متناوب گسترش داد که در نتیجه می توان برای آن تابع متناوب سری فوریه بنویسیم. در توابی که به این صورت متناوب می شوند، عموماً فاصله تعریف تابع را به عنوان دوره تناوب تابع در نظر می گیریم. مثلاً:

$$y = x, \quad 0 < x < 1, \quad L = 1$$



در این موارد اگر فاصله تعریف تابع به صورت $0 < x < 2L$ باشد، خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

همچنین در حالت کلی می توان گفت اگر تابع $f(x)$ در بازه (a,b) تعریف شده باشد و بخواهیم سری فوریه تابع را در این بازه بنویسیم، تابع $f(x)$ را در بازه (a,b) در نظر می گیریم و در بیرون این فاصله همان شکل را با دوره تناوب $p = b - a$ گسترش

می دهیم و برای تابع حاصل، سری فوریه می نویسیم که در این حالت $L = \frac{b-a}{2}$ و خواهیم داشت:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) dx \quad b_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad a_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

مثال ۲: تابع $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ مفروض است. ضرایب جملات کسینوسی در بسط سری فوریه این تابع را به دست آورید. حل:

همان طور که مشاهده می شود تابع $f(x)$ در فاصله داده شده متناوب نمی باشد ولی می توان آن را در خارج از این فاصله به صورت متناوب گسترش داد. در نتیجه تابع دارای سری فوریه خواهد بود و فاصله تعریف تابع به عنوان دوره تناوب آن در نظر گرفته می شود:

$$p = 2L = 2\pi - 0 = 2\pi \rightarrow L = \pi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right\} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = 0 a_0$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x^2}{2} \right\} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} x \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx$$

برای محاسبه این انتگرال به روش جزء به جزء خواهیم داشت:

مشتق	انتگرال
x	$\cos nx$
1	$\frac{1}{n} \sin nx$
0	$-\frac{1}{n^2} \cos nx$

$$\int x \cos nx dx = \left(x \times \frac{1}{n} \sin nx \right) - \left(1 \times -\frac{1}{n^2} \cos nx \right) = \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx$$

$$\rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right\} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x^2}{2} \right\} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \rightarrow \frac{a_0}{2} = \pi$$

توابع مختلط

یادآوری

در صفحه اعداد مختلط هر عدد در مختصات دکارتی به شکل $z = x + iy$ بیان می‌شود که در آن $i = \sqrt{-1}$ ، $\operatorname{Re}(z) = x$ و $\operatorname{Im}(z) = y$ است و روابط اولیه زیر برقرار می‌باشد:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

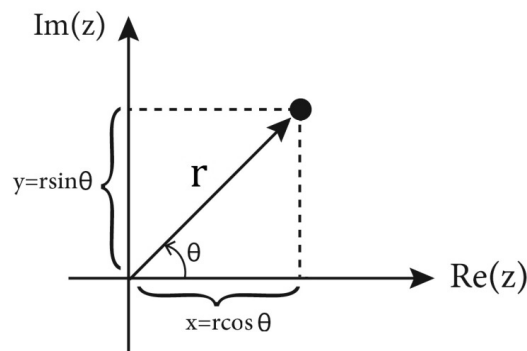
$$x - iy = \overline{z} \text{ مزدوج}$$

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

همچنین فرم قطبی یک عدد مختلط به صورت $z = re^{i\theta}$ است که در آن $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ می‌باشد.

رابطه بین فرم دکارتی و قطبی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



مکان هندسی‌های پر کاربرد در مبحث اعداد مختلط

اگر $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ یک عدد مختلط باشد داریم:

$$|z - z_0| = R \text{ یک دایره به شعاع } R \text{ و به مرکز } z_0 \text{ می‌باشد.}$$

$$|z - z_0| + |z - z_1| = R \text{ بیانگر یک بیضی با کانون‌های } z_0 \text{ و } z_1 \text{ می‌باشد (با شرط } |z_0 - z_1| < R \text{)}$$

$$|z - z_0| - |z - z_1| = R \text{ بیانگر یک هذلولی با کانون‌های } z_0 \text{ و } z_1 \text{ می‌باشد، (با شرط } |z_0 - z_1| > R \text{)}$$

رابطه $|z - z_0| = |z - z_1|$ بیانگر عمود منصف پاره‌خطی است که دو سر آن روی z_0 و z_1 است.

رابطه $|z - z_0| = R|z - z_1|$ بیانگر یک دایره است. (با شرط $R \neq 1$)

مثال ۱: مکان هندسی نقاطی از صفحه که با رابطه $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 1$ تعریف می‌شود را مشخص کنید.

حل:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} \times \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} > 1 \rightarrow x^2 + y^2 - x < 0 \rightarrow x^2 + y^2 - x + \frac{1}{4} < \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$$

بنابراین مکان هندسی مورد نظر داخل دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است.

مثال ۲: هرگاه $z = x + iy$ باشد، آن‌گاه نامعادله $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$ را ساده کنید.

حل:

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2 \rightarrow \left|\frac{x+iy-3}{x+iy+3}\right| < 2 \rightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+3)^2 + y^2}} < 2$$

$$\rightarrow \frac{(x-3)^2 + y^2}{(x+3)^2 + y^2} < 4 \rightarrow 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 > 0 \rightarrow x^2 + 10x + 9 + y^2 > 0$$

$$\rightarrow (x+5)^2 - 25 + 9 + y^2 > 0 \rightarrow (x+5)^2 + y^2 > 16 \rightarrow |z+5| > 4$$

توابع مختلط

حد و پیوستگی در توابع مختلط

تابع مختلط $w = f(z)$ که $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را در نظر بگیرید، می‌گوییم این تابع مختلط در نقطه z_0 دارای حد است، هرگاه هر دو تابع دو متغیره $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) دارای حد تابع باشند، هم‌چنین می‌گوییم تابع مختلط $w = f(z)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ پیوسته است، هرگاه هر دو تابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در (x_0, y_0) پیوسته باشد.

به عبارت دیگر: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y)$

❖ ملاحظه می‌شود که بحث حد توابع مختلط ارتباط نزدیکی با حد توابع دو متغیره دارد و می‌دانیم حاصل یک حد

دو متغیره در صورت وجود، باید منحصر به فرد باشد و لذا اگر از دو روش مختلف که برای محاسبه‌ی یک حد دو

متغیره استفاده می‌شود به دو جواب مختلف منجر شود، حاصل آن حد دو متغیره موجود نیست.

معادلات با مشتق جزئی

تعاریف اولیه

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) معادله‌ای است که ارتباط بین یک تابع چند متغیره و مشتقات آن نسبت به متغیرهای مختلف و خود آن متغیرها را نشان می‌دهد. چنانچه بتوان این معادله را به گونه‌ای بیان کرد که شامل هیچ جمله غیرخطی از تابع و مشتقات تابع نباشد، آن را از نوع خطی گویند.

در یک معادله دیفرانسیل خطی چنانچه جملات شامل تابع و یا یکی از مشتقات آن باشد، آن معادله دیفرانسیل خطی را همگن می‌نامیم.

معادله دیفرانسیل معمولی - غیرخطی $xy''' + 4y' + y^2 = x$

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی - خطی - غیرهمگن $x^2y \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 4y^2 \frac{\partial u}{\partial x} = xy$

نوشتن یک معادله با مشتقات جزئی با تغییر متغیرهای داده شده

برخی مواقع یک معادله با مشتقات جزئی داده شده و می‌خواهیم با تغییر متغیرهای خاص آن را بازنویسی کنیم. در این مواقع لازم است با استفاده از قانون زنجیره‌ای در مشتقات جزئی معادله مورد نظر را ساده کنیم.

مثال ۱: معادله با مشتقات جزئی $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$ با تغییر متغیرها $p = \frac{1}{2}(\ln x + \ln y)$ و $q = \frac{1}{2}(\ln x - \ln y)$ به چه

فرمی در خواهد آمد؟

حل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial p} \left(\frac{1}{2x} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial q} \right) \left(\frac{1}{2x} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial p} \left(\frac{1}{2y} \right) + \frac{\partial z}{\partial q} \left(\frac{-1}{2y} \right)$$

با استفاده از این مقادیر در معادله اصلی به دست می‌آید:

$$x \left(\frac{1}{2x} \left(\frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\partial z}{\partial q} \right) \right) + y \left(\frac{1}{2y} \left(\frac{\partial z}{\partial p} - \frac{\partial z}{\partial q} \right) \right) = nz \rightarrow \frac{\partial z}{\partial q} = nz$$

حذف تابع اختیاری در یک رابطه داده شده و یافتن معادله با مشتقات جزئی حاکم بر آن

می‌دانیم یک دسته منحنی شامل یک ثابت اختیاری را می‌توان به منزله جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول دانست که برای یافتن آن معادله دیفرانسیل کافی است بین آن رابطه و مشتق آن، ثابت داده شده را حذف کنیم. به همین ترتیب یک رابطه شامل یک تابع اختیاری را می‌توان به منزله جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول دانست که برای یافتن آن معادله کافیست بین آن رابطه و مشتقات جزئی آن، تابع داده شده را حذف کنیم. مثال ۲: رابطه $z = y^2 \phi(xy)$ که در آن ϕ یک تابع اختیاری است مفروض است. معادله با مشتقات جزئی حاکم بر z را بیابید. حل:

x و y متغیرهای مستقل و z تابع فرض شده است. با فرض $xy = u$ داریم:

$$z = y^2 \phi(u) \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot y^2 = y^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot y & \text{I} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\phi + y^2 \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\phi + y^2 \frac{\partial \phi}{\partial u} \cdot x & \text{II} \\ z = y^2 \phi & \text{III} \end{cases}$$

$$(I): \frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{1}{y^3} \right)$$

$$(II): \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2z}{y} = xy^2 \frac{\partial \phi}{\partial u} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2z}{y} \right) \frac{1}{xy^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2z}{y} = \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x}$$

حال با مساوی قرار دادن رابطه‌ی I و II به دست می‌آید:

فرض کنید $z = z(x, y)$ و داشته باشیم $F(u(x, y, z), v(x, y, z)) = 0$ که در آن F تابع اختیاری است برای حذف تابع اختیاری F و یافتن معادله با مشتقات جزئی حاکم بر z می‌توان دترمینان زیر را بسط داد:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

$$z = y^2 \phi(xy) \rightarrow \frac{z}{y^2} = \phi(xy) \rightarrow F\left(xy, \frac{z}{y^2}\right) = 0$$

به‌عنوان مثال در همان مسئله قبلی می‌توانستیم بنویسیم:

حال $u = xy$ و $v = \frac{z}{y^2}$ بوده و داریم (x, y) متغیرهای مستقل و z تابع است:

$$\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} y^2 - 2yz \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2z}{y} = \frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x}$$

حل معادلات با مشتقات جزئی در حالات خاص به کمک انتگرال‌گیری

برخی مواقع با انتگرال‌گیری‌های ساده از یک معادله با مشتقات جزئی ممکن است بتوانیم جواب معادله مورد نظر را پیدا کنیم. مثال ۳: جواب عمومی معادله زیر را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy^2 \\ u(x, 0) = x \\ u(0, y) = \sin y \end{cases}$$

حل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy^2 \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{2} y^2 + A(y)$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } y} u(x, y) = \frac{x^2}{2} \frac{y^3}{3} + B(y) + C(x)$$

با جای گذاری مقادیر $y=0$ و $x=0$ در معادله $u(x, y)$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} u(0, 0) &= B(0) + C(0) = 0 \\ u(x, 0) &= B(0) + C(x) = 0 \\ u(0, y) &= B(y) + C(0) = \sin y \end{aligned} \right\} \rightarrow B(0) + C(x) + B(y) + C(0) = x + \sin y$$

$$\rightarrow C(x) + B(y) = x + \sin y \rightarrow u(x, y) = \frac{x^2 y^3}{6} + \sin y + x$$

معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول شبه خطی

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

معادله با مشتقات جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$$

برای یافتن جواب این معادله دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

طبیعی است دستگاه مذکور دارای دو معادله مستقل است، چنانچه دو معادله مستقل این دستگاه را حل کنیم به

$$u(x, y, z) = C_1, \quad v(x, y, z) = C_2$$

جواب‌هایی به فرم زیر می‌رسیم:

$$F(u, v) = 0$$

می‌توان نشان داد جواب کلی معادله مرتبه اول شبه خطی مورد نظر به صورت زیر است:

مثال ۴: جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$x^2 z^3 \frac{dz}{dx} + y^2 \frac{dz}{dy} = z + 1$$

حل: دستگاه لاگرانژ چنین است:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{y^2} &= \frac{dz}{z+1} \rightarrow -\frac{1}{y} = \ln(z+1) + c & (1) \\ \frac{dx}{x^2 z^3} &= \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{z+1} \rightarrow \frac{dx}{x^2 z^3} = \frac{dz}{z+1} \rightarrow \frac{dx}{x^2} = \frac{z^3 dz}{z+1} \rightarrow \frac{dx}{x^2} = \left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1} \right) dz \\ &\rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z - \ln(z+1) + k & (2) \end{aligned} \right.$$

$$F\left(\frac{1}{y} + \ln(z+1), \frac{1}{x} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z - \ln(z+1)\right) = 0$$

پس جواب عمومی چنین است:

دسته‌بندی انواع معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم شبه خطی و رسیدن به فرم استاندارد

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + H\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

معادله با مشتقات جزئی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

که در آن a و b و c می‌توانند توابعی از x و y باشند.با تعریف $\Delta = b^2 - ac$ می‌گوییم:اگر $\Delta > 0$ باشد معادله مورد نظر از نوع هذلولی‌گون است.اگر $\Delta = 0$ باشد معادله مورد نظر از نوع سهمی‌گون است.اگر $\Delta < 0$ باشد معادله مورد نظر از نوع بیضی‌گون است.

حل: جواب رابطه $u(x, t) = w(x, t) + \varphi(x)$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varphi''(x) = \cos x + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

اگر بخواهیم معادله فوق برای w همگن باشد، یعنی نباید در معادله جملات فاقد w داشته باشیم، یعنی باید $\cos x$ و $\varphi''(x)$ از معادله حذف شود و این حاصل نمی‌شود مگر این که $\varphi''(x) = \cos x$ باشد. لذا داریم:

$$\varphi''(x) = \cos x \rightarrow \varphi'(x) = \sin x + C \rightarrow \varphi(x) = -\cos x + cx + k$$

چون می‌خواهیم شرایط مرزی برای w همگن باشد باید:

$$w(0, t) = 0 \quad ; \quad w(\pi, t) = 0$$

لذا:

$$u(0, t) = w(0, t) + \varphi(0) \rightarrow \varphi(0) = 1$$

$$u(\pi, t) = w(\pi, t) + \varphi(\pi) \rightarrow \varphi(\pi) = 2$$

با اعمال شرایط در معادله به‌دست آمده داریم:

$$\varphi(0) = 1 \rightarrow 1 = -1 + 0 + k \rightarrow k = 2$$

$$\varphi(\pi) = 2 \rightarrow 2 = 1 + c\pi + 2 \rightarrow c = -\frac{1}{\pi}$$

لذا به‌دست می‌آید:

$$\varphi(x) = -\cos x - \frac{1}{\pi}x + 2$$

اگر بخواهیم شرایط اولیه حاکم بر w را پیدا کنیم می‌نویسیم:

$$u(x, t) = w(x, t) - \cos x - \frac{1}{\pi}x + 2$$

$$u_t(x, t) = w_t(x, t)$$

حال داریم:

$$u(x, 0) = w(x, 0) - \cos x - \frac{1}{\pi}x + 2$$

$$u_t(x, 0) = w_t(x, 0)$$

مثال ۲۹: جواب معادله لاپلاس همراه با شرایط مرزی زیر را مشخص کنید.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & 1 < r < e \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(1, \theta) = 2 \\ u(e, \theta) = 0 \end{cases}$$

$$u(r) = A \ln r + B$$

حل: با توجه به حل معادله لاپلاس در حالت خاص داریم:

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\begin{cases} u(1) = 2 \rightarrow 2 = A \ln(1) + B \rightarrow B = 2 \\ u(e) = 0 \rightarrow 0 = A \ln e + B \rightarrow A = -2 \end{cases} \rightarrow u(r) = -2 \ln r + 2$$

$$\rightarrow u(x, y) = -2 \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 2$$

مثال ۳۰: توزیع مکانی و زمانی درجه حرارت $u(x, 0)$ در میله‌ای به طول π که در دو طرف آن در مخلوط آب و یخ قرار گرفته و منبع حرارتی باعث ایجاد توزیع دمای اولیه $u(x, 0) = \sin x$ در میله شده است و در معادله $u_{xx} = u_t$ صدق می‌کند، کدام است؟

$$\sin x e^{-\frac{t}{\pi}} \quad (۴)$$

$$\sin x e^{-t} \quad (۳)$$

$$\sinh x e^{-t} \quad (۲)$$

$$\sin x \cos t \quad (۱)$$

حل: برای ارضای شرایط مرزی $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ملاحظه می‌شود تمام گزینه‌ها به‌جز گزینه (ب) قابل قبول

می‌باشد ($\sin 0 = 0$ و $\sin \pi = 0$ ولی $\sinh \pi \neq 0$)

توجه داریم تمام گزینه ها برای حالت حدی $t \rightarrow +\infty$ شرط محدود ماندن جواب را ارضاء می کند، اما به سادگی می توان دید تنها گزینه ای که معادله $u_{xx} = u_t$ را ارضاء می کند گزینه (ج) می باشد زیرا:

$$u(x, t) = \sin x \cdot e^{-t} \rightarrow u_x = \cos x \cdot e^{-t}, u_{xx} = -\sin x \cdot e^{-t}, u_t = -\sin x \cdot e^{-t}$$

مثال ۳۱: در معادله زیر، مقدار u_{ss} کدام است؟

$$\begin{cases} x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \\ u(1, t) = 1 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(1, t) = 2 \end{cases}$$

$$u_{ss} = 2\ln x + 2 \quad (\text{ف})$$

$$u_{ss} = \ln x + 2 \quad (\text{ص})$$

$$u_{ss} = 2\ln x + 1 \quad (\text{ب})$$

$$u_{ss} = \ln x + 1 \quad (\text{ا})$$

حل: در حالت ماندگار $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ است. در نتیجه داریم:

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \rightarrow x \frac{\partial u}{\partial x} = A \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A}{x}$$

$$\rightarrow u_{ss} = A \ln x + b$$

$$\begin{cases} u_x(1, t) = 2 \rightarrow \frac{A}{1} = 2 \rightarrow A = 2 \\ u(1, t) = 1 \rightarrow A \ln 1 + B = 1 \rightarrow B = 1 \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

بنابراین خواهیم داشت:

$$u_{ss}(x) = 2\ln x + 1$$

در نتیجه گزینه «ب» صحیح است.

انتخاب گزینه صحیح برای یک معادله با مشتقات جزئی به همراه شرایط کمکی

فرض کنید برای یک پدیده فیزیکی معادله با مشتقات جزئی به همراه شرایط مرزی و اولیه خاص داده شده باشد.

در این صورت جواب صحیح باید:

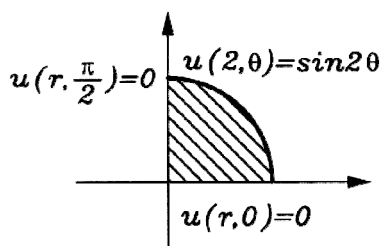
۱. تمام شرایط مرزی و اولیه را ارضاء کند.

۲. شرط محدود و کراندار ماندن را برای تمام مقادیر ممکنه متغیرها ارضاء کند.

۳. معادله با مشتقات جزئی حاکم بر مسئله را ارضاء کند.

از آن جا که جواب یکتا است، لذا فقط یک گزینه می تواند به ارضاء هر سه موضوع فوق بپردازد.

مثال ۳۲: پتانسیل الکتریکی در داخل ربع دایره ای با شرایط مرزی داده شده در معادله



صدق می کند. حاصل عبارت $u(r, \theta)$ کدام گزینه است؟ $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{r} \sin 2\theta \quad (\text{ب}) \\ & \frac{r^3}{8} \sin 2\theta \quad (\text{ف}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2} \sin \theta \quad (\text{ا}) \\ & \frac{r^2}{4} \sin 2\theta \quad (\text{ص}) \end{aligned}$$

حل: با توجه به شکل، مسئله در $r=0$ دارای جواب می باشد. ولی گزینه ۲ در $r=0$ کراندار نمی باشد و در نتیجه

جواب مسئله نمی باشد.

شرط مرزی $u(r, 0) = 0$ در همه گزینه‌ها ارضاء می‌شود، ولی شرط مرزی $u(r, \frac{\pi}{2}) = 0$ و $u(2, \theta) = \sin 2\theta$ در گزینه ۱ ارضاء نمی‌شوند، ولی در گزینه‌های ۳ و ۴ ارضاء می‌گردند. اکنون با قراردادن گزینه ۳ در معادله مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{2r}{4} \sin 2\theta \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2}{4} (-4) \sin 2\theta \right) = 0$$

و گزینه ۴ در معادله مسئله صدق نمی‌کند. در نتیجه گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۳۳: در حل مسئله مقدار اولیه-مرزی زیر، تابع مفروض و تکه‌ای هموار $\varphi(x)$ ، نسبت به کدام پایه متعامد باید بسط داده شود؟

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq L \\ u(L, t) = 0 \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$\cos \frac{\pi x}{2L}, \cos \frac{3\pi x}{2L}, \dots, \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2L} \quad (۲)$$

$$\cos \frac{\pi x}{2L}, \cos \frac{2\pi x}{2L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{2L} \quad (۱)$$

$$\cos \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (۴)$$

$$\sin \frac{\pi x}{2L}, \sin \frac{3\pi x}{2L}, \dots, \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2L} \quad (۳)$$

حل: شرط $u(L, t) = 0$ بیان می‌دارد که پایه متعامد مورد نظر باید در $x = L$ متحد با صفر شود. پس با بررسی گزینه‌ها داریم:

گزینه ۱: شرایط مورد نظر را ارضاء نمی‌کند $\cos \frac{n\pi x}{2L} \Big|_{x=L} = \cos \frac{n\pi}{2}$

گزینه ۲: شرایط مورد نظر را ارضاء می‌کند $\cos \frac{(2k-1)\pi x}{2L} \Big|_{x=L} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2}$

گزینه ۳: شرایط مورد نظر را ارضاء نمی‌کند $\sin \frac{(2k-1)\pi x}{2L} \Big|_{x=L} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2}$

گزینه ۴: شرایط مورد نظر را ارضاء نمی‌کند $\cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{x=L} = \cos n\pi$

پس بدون استفاده از شرایط دیگر گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۳۴: پاسخ معادله لاپلاس $\nabla^2 u(x, y) = 0$ در نیم صفحه بالای محور x با شرط مرزی

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin k}{k} e^{-ky} \cosh kx \, dk \quad (۲)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos k}{k} e^{-ky} \sin kx \, dk \quad (۱)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sinh k}{k} e^{-ky} \cos kx \, dk \quad (۴)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin k}{k} e^{-ky} \cos kx \, dk \quad (۳)$$

حل: با توجه به گزینه‌ها ساختار کلی جواب به صورت زیر است:

$$u(x, y) = \int_0^\infty A(k) e^{-ky} g(x) \, dk$$

با قراردادن این جواب در معادله لاپلاس خواهیم داشت:

$$\nabla^2 u(x, y) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\rightarrow \int_0^\infty A(k) e^{-ky} g''(x) dk + \int_0^\infty A(k) k^2 e^{-ky} g(x) dk = 0$$

$$\rightarrow \int_0^\infty (g''(x) + k^2 g(x)) A(k) e^{-ky} dk = 0$$

$$\rightarrow g''(x) + k^2 g(x) = 0 \rightarrow g(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

در نتیجه داریم:

$$u(x, y) = \int_0^\infty A(k) e^{-ky} (c_1 \sin kx + c_2 \cos kx) dk$$

از شرط $u(x, 0) = f(x)$ و با توجه به زوج بودن تابع $f(x)$ می‌توان نتیجه گرفت که $c_1 = 0$

و خواهیم داشت:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases} = \int_0^\infty c_2 A(k) \cos kx dk$$

و باید:

$$c_2 A(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos kx dk = \frac{2}{\pi} \int_0^1 1 \cdot \cos kx dk = \frac{2}{\pi k} \sin kx \Big|_0^1 = \frac{2 \sin k}{\pi k}$$

پس جواب نهایی برابر است با:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin k}{k} e^{-ky} \cos kx dk$$

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

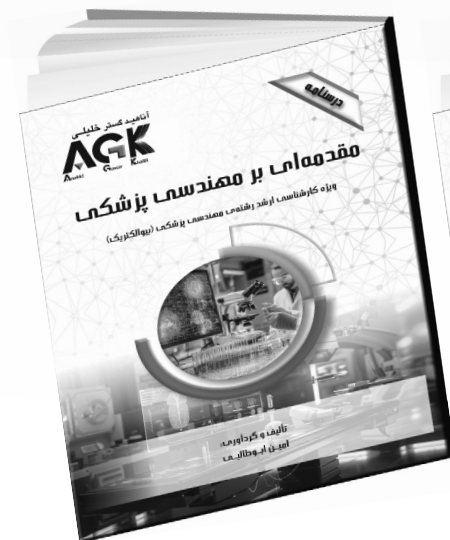
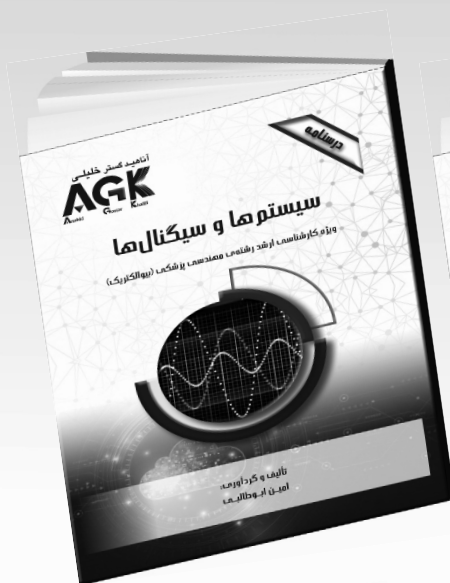
تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

شماره تماس با نمایندگی‌های فعال و رسمی آناهید گستر خلیلی

شماره تماس	نمایندگی	شماره تماس	نمایندگی
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	شیراز (آقای فروردین/ خانم هوشمندی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۵۰	اراک (آقای حسینی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۲	فسا (خانم شعبانی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۸	اردبیل (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۹	قزوین (خانم چگینی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۱	ارومیه (آقای آرمیون)
۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۷	کرج (آقای دکتر علیرضاپور)	۰۹۱۹۶۳۲۱۸۵۲	اسفراین (خانم اسماعیل‌زاده)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۶	کاشان (خانم صادق‌پور)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۰	اصفهان (آقای نصری)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کردستان (آقای ابراهیمی)	۰۹۱۹۰۹۸۰۳۱۸	ایلام (آقای دکتر بوچانی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کرمانشاه (آقای ابراهیمی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۴	اهواز (آقای امین‌فر)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	کهگیلویه (آقای فروردین/ خانم هوشمندی)	۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۳	بیرجند (آقای دکتر بهروان)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۷	گرگان (آقای شاه‌علی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۷	تبریز (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	مراغه (آقای صمدی)	۰۹۰۱۳۷۳۷۸۹۶	جهرم (آقای یاعلی جهرمی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۴	مشهد (خانم دکتر شجاعی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۸	خرم‌آباد (خانم میر)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	میاندوآب (آقای صمدی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۱	زنجان (خانم دکتر هوشیار)
۰۹۱۹۵۷۳۳۲۸۴	هرمزگان (آقای زارعی)	۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۴	ساری (آقای دکتر اکبری)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۵	همدان (آقای سوری)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۱	سمنان (آقای دکتر سلمانی)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۳	یزد (خانم مهندس آزاد)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۹	شهرکرد (خانم تقی‌پور)

بانک کتاب ناهید



«هر کتابی، از هر انتشاراتی را از ما بخواهید»

✓ جامع‌ترین بانک کتاب

✓ تحویل روزانه

✓ ارسال به تمامی نقاط کشور

✓ سفارش کتاب به صورت تلفنی و آنلاین

www.NIBS.ir



کتاب دانشگاهی، فنی و مهندسی، علوم پزشکی، علوم انسانی، عمومی،
ادبی، مذهبی، کمک آموزشی، کودک و نوجوان و کتاب نفیس

فروشگاه: تهران - خیابان انقلاب - روبه روی درب اصلی دانشگاه تهران

پاساژ فروزنده - طبقه همکف - پلاک ۳۳۱

تلفن: ۶۶۴۸۹۳۷۵ - ۰۲۱ - ۶۶۴۸۹۳۴۹ - ۰۲۱