

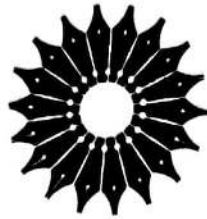


مبانی فیزیک نوین

ریچارد وایدنر
رابرت سلز

ترجمه علی اکبر بابایی
مهدی صفا اصفهانی

کتابخانه



مبانی فیزیک نوین

ریچارد وایدنر

رابرت سلز

ترجمه علی اکبر بابایی

مهدی صفاصفهانی

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار مؤلفان
۳	۱ چند مقدمه
۳	۱.۱ برنامه فیزیک
۵	۲.۱ قوانین بقای فیزیک
۹	۳.۱ برهم کنشهای کلاسیکی
۱۱	۴.۱ میدانها و امواج الکترومغناطیسی
۱۴	۵.۱ اصل همخوانی
۱۶	۶.۱ اپتیک پرتوی و اپتیک موجی
۱۸	۷.۱ توصیفهای ذره‌ای و موجی در فیزیک کلاسیک
۲۷	۸.۱ سرعتهای فاز و گروه
۳۳	۲ حرکت شناسی نسبیتی: فضا و زمان
۳۴	۱.۲ اصل نسبیت
۳۴	۲.۲ تبدیلات گالیله
۳۸	۳.۲ هم‌وردایی مکانیک کلاسیک در تبدیلات گالیله

صفحه	عنوان
۴۲	۲.۲ عدم موفقیت تبدیلات گالیه
۵۰	۵.۲ اصل موضوع دوم و تبدیلات لورنتس
۶۳	۶.۲ بازه‌های طولی و زمانی در فیزیک نسبیت
۷۳	۷.۲ رویدادهای فضا - زمانی و مخروط نوری
۸۱	۸.۲ پارادوکس دو قلو
۸۷	خلاصه
۸۸	مسائل
۹۶	کتابشناسی
۹۹	۳ دینامیک نسبیتی: اندازه حرکت و انرژی
۱۰۰	۱.۳ جرم نسبیتی و اندازه حرکت
۱۱۰	۲.۳ انرژی نسبی
۱۱۵	۳.۳ هم‌ارزی جرم و انرژی، و دستگاههای مقید
۱۱۹	۴.۳ چهار- بردار اندازه حرکت - انرژی
۱۲۶	۵.۳ نسبیت خاص و برهم‌کنش الکترومغناطیسی
۱۳۳	۶.۳ محاسبات ویکها در مکانیک نسبیتی
۱۳۶	خلاصه
۱۳۷	مسائل
۱۴۳	کتابشناسی
۱۴۷	۴ ال‌های کوانتومی: جنبه‌های ذره‌ای تابش الکترومغناطیسی
۱۴۵	۱.۲ کوانتش در فیزیک کلاسیک
۱۴۸	۲.۲ اثر فوتوالکتریک
۱۶۱	۳.۲ تولید پرتو X و تابش ترمزی
۱۶۵	۴.۲ اثر کامپتون
۱۷۶	۵.۲ تولید و نابودی زوج
۱۸۲	۶.۲ برهم‌کنشهای فوتون - الکترون
۱۸۵	۷.۲ درآشامی فونونها
۱۹۰	خلاصه

۱۹۲

مسائل

۲۰۳

ه اثرهای کوانتومی: جنبه‌های موجی ذرات مادی

۲۰۳

۱۰۵ امواج دو بروی

۲۰۶

۲۰۵ قانون براگ

۲۱۰

۳۰۵ پراش پرتو X والکترون

۲۱۷

۴۰۵ اثباتی برای بازتاب براگ

۲۲۰

۵۰۵ اصل مکملی

۲۲۲

۶۰۵ تعبیر امواج دو بروی به کمک نظریه احتمال

۲۳۰

۷۰۵ اصل عدم قطعیت

۲۳۹

۸۰۵ بسته‌های موج و سرعت موج دو بروی

۲۴۲

۹۰۵ توصیف کوانتومی يك ذره محبوس

۲۴۷

۱۰۰۵ معادله شرودینگر

۲۵۸

خلاصه

۲۵۹

مسائل

۲۶۹

کتابشناسی

۲۷۱

و ساختار هیدروژن

۲۷۱

۱۰۶ پراکندگی ذره

۲۸۲

۲۰۶ مدل سیاره‌ای کلاسیک

۲۸۵

۳۰۶ طیف هیدروژنی

۲۹۰

۴۰۶ نظریه ساختار اتمی بوهر

۳۰۰

۵۰۶ اتم هیدروژن واصل همخوانی

۳۰۳

۶۰۶ موقعیتها و شکستهای نظریه بوهر

۳۰۳

۷۰۶ اتم هیدروژن و توابع موج آن با استفاده از معادله شرودینگر

۳۰۹

۸۰۶ برانگیختگی اتمی در اثر برخورد: آزمایش فرانک - هرتز

۳۱۳

خلاصه

۳۱۴

مسائل

۳۲۳

کتابشناسی

۳۲۵	۷ اتمهای چند الکترونی
۳۲۶	۱.۷ ثابتهای حرکت در يك دستگاه كلاسيك
۳۲۹	۲.۷ کوانتش اندازه حرکت زاویه‌ای مداری
۳۳۶	۳.۷ اتمهای هیدروژن گونه
۳۴۰	۴.۷ کوانتش فضایی
۳۴۶	۵.۷ اثر بهنجار زیمان
۳۵۰	۶.۷ اسپین الکترون
۳۵۹	۷.۷ آزمایش اشترن - گرلاخ
۳۶۱	۸.۷ اصل طرد پائولی و جدول تناوبی
۳۷۱	۹.۷ طیفهای مشخصه پرتو X
۳۷۷	خلاصه
۳۷۹	مسائل
۳۸۶	کتابشناسی
۳۸۷	۸ وسایل و ماشینهای شتابدهنده در فیزيك هسته‌ای
۳۸۸	۱.۸ یونش و درآشامی تابش هسته‌ای
۳۹۲	۲.۸ آشکارسازها
۴۰۲	۳.۸ وسایل ردنگاری
۴۰۸	۴.۸ وسایل اندازه‌گیری سرعت، اندازه حرکت و جرم
۴۱۵	۵.۸ شتابدهنده‌های با انرژی بالا
۴۳۲	خلاصه
۴۳۳	مسائل
۴۴۷	کتابشناسی
۴۴۹	۹ ساختار هسته‌ای
۴۵۰	۱.۹ اجزای اصلی هسته
۴۵۴	۲.۹ نیروی بین نوکلئونها
۴۵۶	۳.۹ دوترون
۴۶۰	۴.۹ هسته‌های پایدار

۴۶۴	۵.۹ شعاعهای هسته‌ای
۴۶۷	۶.۹ انرژی بستگی هسته‌های پایدار
۴۷۰	۷.۹ مدل‌های هسته‌ای
۴۷۷	۸.۹ واپاشی هسته‌های ناپایدار
۴۸۱	۹.۹ واپاشی γ
۴۸۶	۱۰.۹ واپاشی α
۴۹۲	۱۱.۹ واپاشی β
۵۰۵	۱۲.۹ پرتوزایی طبیعی
۵۱۳	خلاصه
۵۱۶	مسائل
۵۲۲	کتابشناسی

۵۲۵	۱۰ واکنشهای هسته‌ای
۵۲۵	۱۰.۱۰ واکنشهای هسته‌ای با انرژی پایین
۵۳۰	۲۰.۱۰ انرژی‌شناسی واکنشهای هسته‌ای
۵۳۲	۳۰.۱۰ بقای اندازه حرکت در واکنشهای هسته‌ای
۵۴۰	۴۰.۱۰ سطح مقطع
۵۴۶	۵۰.۱۰ هسته مرکب و ترازهای انرژی هسته‌ای
۵۵۳	۶۰.۱۰ تولید نوترون، آشکارسازی، اندازه‌گیری، و کند کردن آن
۵۵۷	۷۰.۱۰ شکافت هسته‌ای
۵۶۳	۸۰.۱۰ رآکتورهای هسته‌ای
۵۶۷	۹۰.۱۰ همجوشی هسته‌ای
۵۶۹	خلاصه
۵۷۱	مسائل
۵۷۶	کتابشناسی

۵۷۷	۱۱ ذرات بنیادی
۵۷۸	۱۰.۱۱ برهم‌کنش الکترومغناطیسی
۵۸۹	۲۰.۱۱ برهم‌کنش قوی

صفحه	عنوان
۵۹۵	۳.۱۱ يك جهان ۱۳ ذره‌ای
۵۹۸	۴.۱۱ ذرات بنیادی
۶۱۴	۵.۱۱ يك جهان ۳۴ ذره‌ای
۶۲۴	مسائل
۶۲۸	کتابشناسی
۶۲۹	۱۲ فیزیک مولکولی و فیزیک حالت جامد
۶۲۹	۱.۱۲ بستگی مولکولی
۶۳۶	۲.۱۲ دوران و ارتعاش مولکولی
۶۴۳	۳.۱۲ قوانین توزیع آماری
۶۵۱	۴.۱۲ آمار ماکسول - بولتزمن در مورد گاز ایده‌ال
۶۵۴	۵.۱۲ آمار ماکسول - بولتزمن در مورد گرمای ویژه يك گاز دواتمی
۶۵۹	۶.۱۲ لیزر
۶۶۵	۷.۱۲ تابش جسم سیاه
۶۷۲	۸.۱۲ نظریه کوانتومی گرماهای ویژه جامدات
۶۷۸	۹.۱۲ نظریه الکترون آزاد فلزها
۶۸۶	۱۰.۱۲ نظریه نواری جامدها: رساناها، عایقها، و نیمه رساناها
۶۹۸	خلاصه
۷۰۰	مسائل
۷۰۵	کتابشناسی
۷۰۷	پیوستها
۷۰۷	جرمهای اتمی
۷۱۵	جواب مسائل فرد
۷۲۳	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۷۲۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۳۱	فهرست راهنما
۷۴۵	نامنامه

چند مقدمه

فیزیک نوین چیست؟ با فیزیک کلاسیک چه تفاوتی دارد و در چه مواردی با آن مشابه است؟ چه مفاهیم اساسی از فیزیک کلاسیک به فیزیک قرن بیستم، که با ذرات خیلی کوچک و خیلی سریع سروکار دارد، انتقال یافته‌اند؟ کدام یک از مفاهیم کلاسیک بدون تغییر می‌ماند و کدام یک باید اصلاح یا تمویض شود؟ این سؤالات و سؤالات مهم دیگری را در این فصل مقدماتی بررسی می‌کنیم.

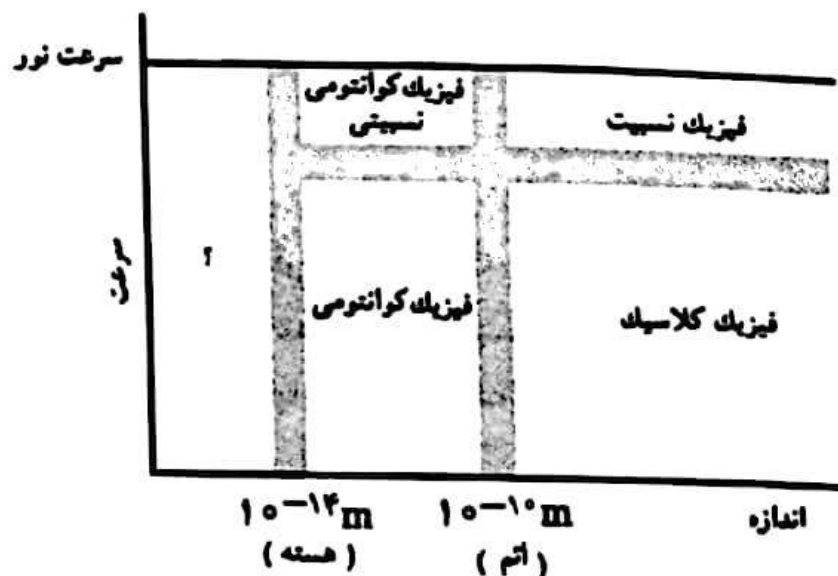
۱.۱ برنامه فیزیک

برنامه فیزیک، طرح مفاهیم و قوانینی است که ما را در درک جهان یاری می‌دهند. قوانین فیزیک ساخته ذهن بشر و تابع تمام محدودیتهای درک بشرند. این قوانین الزاماً ثابت، تغییرناپذیر، یا برای تمام زمانها خوب نیستند، و طبیعت نیز ملزم به پیروی از آنها نیست. یک قانون فیزیکی بیانی است، معمولاً به زبان فشرده و دقیق ریاضی، از رابطه بین کمیتهای فیزیکی، که با تکرار آزمایش به دست می‌آید و از یک نظم دائمی در رفتار دنیای فیزیک حکایت می‌کند. یک قانون فیزیکی «خوب» دارای بیشترین عمومیت، سادگی و دقت ممکن است. ملاک نهایی یک قانون فیزیکی موفق، چگونگی دقت آن در پیشگویی نتایج حاصل از آزمایشهاست. به عنوان مثال، چنان به صحت قانون گرانش عمومی اطمینان

داریم که با قطعیت تقریباً کامل می‌گوییم که هرگاه شتاب گرانش در سطح مریخ اندازه‌گیری شود، نتیجه خیلی نزدیک به 3.76 متر بر مجذور ثانیه خواهد بود. می‌گوییم با قطعیت تقریباً کامل، زیرا هنگامی که از يك قانون به‌گستره اعتبار آزمایش نشده آن برون‌یابی می‌کنیم ممکن است نتایجی را که با آزمایشهای بعدی ناسازگارند پیشگویی کند.

با تکامل فیزیک، بعضی نظریه‌ها و قوانین پیشین نسبت به پدیده‌هایی که این نظریه‌ها و قوانین برای آنها آزمایش نشده بودند، نارسا تشخیص داده شدند. این نظریه‌ها و قوانین، به‌وسیله نظریه‌ها و قوانین عام‌تر و فراگیرنده‌تری، که پدیده‌های نوین را به‌همان خوبی پدیده‌های قدیمی توصیف می‌کردند، از میدان بدر شدند. شکل ۱.۱ نمایشگر نواحی مختلف کاربرد فیزیک کلاسیک، فیزیک نسبیت، فیزیک کوانتومی و فیزیک کوانتومی نسبیتی است.

فیزیک کلاسیک، درباره اجسامی با اندازه‌های معمولی که با سرعت‌های معمولی حرکت می‌کنند گفتگو می‌کند، و مکانیک نیوتونی و الکترومغناطیس (از جمله نظریه نور) را در بر می‌گیرد. برای اجسامی که سرعت آنها نزدیک به سرعت نور است، فیزیک کلاسیک باید جای خود را به فیزیک نسبیت بدهد؛ در مورد اجسامی که اندازه آنها تقریباً 10^{-10} متر است (تقریباً اندازه يك اتم) باید فیزیک کوانتومی جانشین فیزیک کلاسیک بشود. برای ابعاد زیر اتمی و سرعت‌های نزدیک به سرعت نور تنها فیزیک کوانتومی نسبیتی می‌تواند مناسب باشد. حد و مرز این نظریه‌های فیزیکی به روشنی مشخص نیست؛ در حقیقت این



شکل ۱.۱ نواحی کاربرد نظریه‌های مختلف فیزیکی.

نظریه‌ها با هم تلاقی می‌کنند. فیزیک کوانتومی نسبیته فراگیرنده‌ترین و کاملترین ساختار نظری فیزیک معاصر است. در ابعاد حدود 10^{-14} متر (تقریباً به اندازه هسته اتم) پدیده‌های مختلف و گیج‌کننده‌ای ظاهر می‌شوند؛ در حال حاضر این پدیده‌ها تنها تا اندازه‌ای درک شده‌اند.

درک ما از ساختار اتمی و هسته‌ای بر دو مفهوم برجسته فیزیک نوین، یعنی نظریه نسبیت و نظریه کوانتومی، مبتنی است. این نظریه‌ها هر دو در آغاز این قرن، زمانی که برای نخستین بار با پیشرفت فنون آزمایشی امکان مطالعه پدیده‌های با ابعاد کوچک و با سرعت و انرژی زیاد فراهم شد، پایه‌گذاری شدند.

پس از مرور بعضی جنبه‌های مهم فیزیک کلاسیک، نظریه‌های نسبیت و کوانتومی را مطالعه خواهیم کرد و آنها را برای تحلیل ساختار اتمی و هسته‌ای به کار خواهیم برد. وضعیت‌هایی را خواهیم دید که در آنها بعضی مفاهیم آشنای فیزیکی قابل استفاده نیستند؛ وضعیت‌هایی که در آنها فیزیک کلاسیک غلط محض است. آیا این بدان معنی است که تمام اوقات و انرژی‌های صرف شده برای مطالعه فیزیک کلاسیک مقدماتی به هدر رفته است، و بایستی با نسبیت و نظریه کوانتومی آغاز کرد؟ نه، هرگز این طور نیست! نتایج تمام آزمایش‌ها، هر چند دور از تجربه عادی ما، سرانجام باید بر حسب عبارتهای کلاسیکی یعنی بر حسب مفاهیم کلاسیکی اندازه حرکت، انرژی، مکان و زمان بیان شوند. به علاوه، بسیاری از مفاهیم و قوانین فیزیک کلاسیک به فیزیک نوین منتقل شده‌اند.

۲.۱ قوانین بقای (بایستگی) فیزیک

هم در فیزیک کلاسیک و هم در فیزیک نوین هیچ مطلبی اساسی‌تر و ساده‌تر از قوانین بقا (بایستگی) نیست. در هر قانون بقا، مقدار کل یک کمیت فیزیکی معین، در یک دستگاه مفروض، تنها به شرط منزوی بودن آن دستگاه از تمام اثرهای خارجی ثابت یا پایسته است. مثلاً، بردار اندازه حرکت کل یک دستگاه منزوی، ثابت است. تغییرات داخلی در داخل مرزهای یک دستگاه منزوی می‌توانند از طریق برهم‌کنش متقابل ذرات داخل این دستگاه رخ دهند؛ ولی این تغییرات اثری در مقدار کل کمیت پایسته ندارند، و توانایی یک قانون بقا (بایستگی) نیز در همین مطلب نهفته است. نیازی نیست که به جزئیات آنچه در داخل دستگاه اتفاق می‌افتد پردازیم - درحقیقت، می‌توان از برهم‌کنشهای داخلی دستگاه چشمپوشی کرد - ولی اگر دستگاه کاملاً منزوی باشد کمیت‌های پایسته تغییر نمی‌کنند. از این رو می‌دانیم که در فیزیک کلاسیک جرم کل، انرژی کل، اندازه حرکت خطی کل، اندازه حرکت زاویه‌ای کل و بار الکتریکی کل در برخورد دو یا چند ذره مستقل از تأثیر خارجی،

دقیقاً همان جرم کل، انرژی کل، اندازه حرکت خطی کل، اندازه حرکت زاویه‌ای کل و بار الکتریکی کل پس از برخورد خواهند بود.

قوانین بقای فیزیک کلاسیک عبارت‌اند از قوانین بقای جرم، انرژی، اندازه حرکت خطی، اندازه حرکت زاویه‌ای و بار الکتریکی.

قانون بقای جرم: جرم کل یک دستگاه منزوی، یا یک دستگاه نشت‌ناپذیر، ثابت است. با وجود تغییراتی که ممکن است در دیگر کمیت‌های دستگاه (مثلاً، انرژی، حجم و دما) رخ دهد، جرم کل تغییر نمی‌کند. این قانون را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد: جرم نمی‌تواند آفریده شود و یا از بین برود؛ یا، جرم نمی‌تواند تولید و یا نابود شود.

قانون بقای انرژی: اگر هیچ کاری روی دستگاه انجام نشود و یا دستگاه هیچ کاری انجام ندهد، و اگر انرژی گرمایی به صورت گرما نه به دستگاه داده و نه از آن خارج بشود، انرژی کل دستگاه ثابت می‌ماند.

چون تمام انرژی نهایتاً به صورت انرژی جنبشی یا انرژی پتانسیل است، قانون بقای انرژی بیان می‌کند که در یک دستگاه، جمع انرژی‌های جنبشی ذرات و انرژی‌های پتانسیل برهم کنش متقابل آنها ثابت است. انرژی گرمایی صرفاً انرژی مکانیکی نامنظم حرکت کتره‌ای مولکول‌ها و اتم‌ها در چنان مقیاس میکروسکوپیکی است که انرژی‌های جنبشی و پتانسیل تک ذرات از هم متمایز نیستند. (قانون اول ترمودینامیک صرفاً همان قانون بقای انرژی است که به کاملترین شکل خود بیان می‌شود، این قانون شامل گرما و انتقال انرژی گرمایی به واسطه اختلاف دماست.)

قانون بقای اندازه حرکت خطی: هرگاه دستگاهی تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی خالصی نباشد، اندازه حرکت خطی کل آن هم از لحاظ بزرگی و هم از نظر جهت ثابت می‌ماند.

البته قوانین حرکت نیوتون شالوده مکانیک کلاسیک‌اند و بیان آنها به زبان اندازه حرکت خطی مفید است.

۱. اندازه حرکت $p = mv$ یک ذره که تحت تأثیر نیروی خارجی خالصی نباشد ثابت است.

۲. وقتی جسمی تحت تأثیر یک نیروی خارجی خالص قرار بگیرد، آن نیرو برابر است با آهنگ تغییرات اندازه حرکت خطی نسبت به زمان. هنگامی که جرم تغییر نکند، نیرو بسادگی برابر است با حاصلضرب جرم درشتاب.

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \frac{d}{dt}m\mathbf{v} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

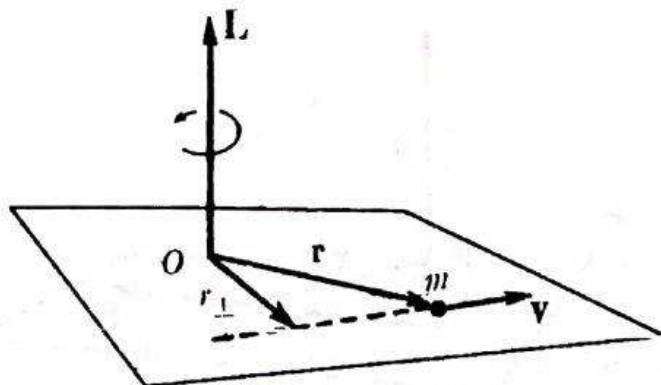
درفیزیک کلاسیک جرم ذره ثابت است و از سرعت آن و یا هروضع دیگری مستقل است. جرم کل دستگاهی از ذرات فقط وقتی تغییر می کند که ذراتی بدان داخل و یا از آن خارج بشوند.

این قانون دارای نتیجه مهمی است: اگر نیروهای وارد بر یک جسم، مکان و سرعت اولیه آن معلوم باشند، امکان پیشگویی جزئیات کامل آینده جسم، حداقل دراصل، وجود دارد؛ یعنی می توان مکان و سرعت آن را در تمام زمانهای آینده دقیقاً تصویر کرد. در دستگاه بین المللی یسکاها (SI) (دستگاه گویاشده یکاها، متر، کیلوگرم، ثانیه)، که در سرتاسر این کتاب از آن استفاده خواهد شد، یک نیوتون نیروی وارد بر جسمی به جرم یک کیلوگرم است که به آن شتابی برابر با یک متر بر مجذور ثانیه بدهد.

۳. هنگامی که دو جسم برهم کنش می کنند، اندازه حرکت منتقل شده به جسم اول در یک بازه زمانی بینهایت کوچک، برابر و درخلاف جهت اندازه حرکت منتقل شده به جسم دوم، درخلاف همان بازه زمانی است؛ بنابراین نیروهای کنش و واکنش، که در اینجا هر دو داخلی اند، مساوی و مختلف جهت اند.

قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای: هرگاه دستگاهی تحت تأثیر گشتادر نیروی خارجی خالصی نباشد، اندازه حرکت زاویه ای کل آن، هم از لحاظ بزرگی و هم از نظر جهت، ثابت خواهد ماند.

شکل ۲.۱ اندازه حرکت زاویه ای $\mathbf{L}$ یک ذره به جرم m و با سرعت $\mathbf{v}$ را نسبت به نقطه O نشان می دهد. بزرگی اندازه حرکت زاویه ای $\mathbf{L}$ برابر حاصلضرب برداری



شکل ۲.۱ اندازه حرکت زاویه ای یا جرم نقطه ای m نسبت به نقطه O .

بردار شعاعی r و اندازه حرکت خطی $p = mv$ است:

$$L = r \times p \quad (2.1)$$

جهت بردار اندازه حرکت زاویه‌ای L ، همان گونه که در شکل نشان داده شده است، بر صفحه‌ای که r و v می‌سازند عمود است. جهت آن به کمک قانون دست راست تعیین می‌شود: اگر به وسیله انگشتان دست راست بردار r را، از طریق زاویه کوچکتر به سمت بردار v بچرخانیم، شصت دست راست جهت L را مشخص خواهد کرد. بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای يك تك ذره به وسیله رابطه

$$L = r_{\perp} m v$$

بیان می‌شود، که در آن $r_{\perp}$ مؤلفه r در امتداد خط عمود بر v است. گشتاور نیروی τ حول يك نقطه انتخابی به صورت زیر تعریف می‌شود

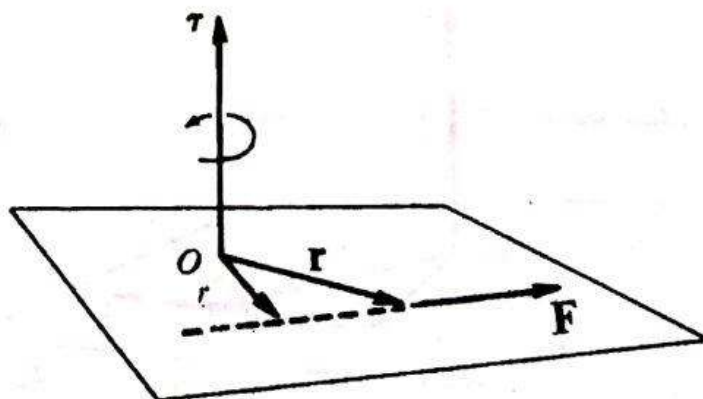
$$\tau = r \times F \quad (3.1)$$

یا، از لحاظ بزرگی، برابر است با

$$\tau = r_{\perp} F$$

که در اینجا $r_{\perp}$ مؤلفه r در امتداد عمود بر F است؛ شکل ۳.۱ را ملاحظه کنید. هنگامی که دستگاهی از ذرات تحت تأثیر يك گشتاور نیروی خارجی خالص نباشد، اندازه حرکت زاویه‌ای کل آن ثابت است. تك ذره‌ای که تحت تأثیر يك نیروی مرکزی است، اندازه حرکت زاویه‌ای آن، نسبت به مرکز نیرو ثابت است.

قانون بقای باد الکتریکی: باد كل يك دستگاه الکتریکی منزوی ثابت است.



شکل ۳.۱ گشتاور نیروی τ مربوط به نیروی F نسبت به نقطه O .

چون هر مشاهده یا اندازه گیری روی يك دستگاه، الزاماً با خود آن دستگاه تداخل می کند، منزوی شدن کامل يك دستگاه ایده‌الی است که فقط با تقریب می تواند تحقق یابد و هرگز به طور کامل تحقق پذیر نیست. بدعنوان مثال، وقتی دمای مایعی که از لحاظ گرمایی عایق شده است با يك دماسنج جیوه‌ای ساده، که در ابتدا در دمای مایع نیست، اندازه گیری شود چه اتفاقی رخ می دهد؟ هنگامی که دماسنج در مایع قرار می گیرد، به وسیله مایع گرم و با سرد می شود، و مایع در همان زمان، سرد یا گرم می شود. آنچه دماسنج در پایان می خواند دمای واقعی مایع، قبل از انجام اندازه گیری نخواهد بود؛ دمای خوانده شده دمایی است که مایع، پس از قرار گرفتن دماسنج، به آن رسیده است. تنها اگر مایع و دماسنج هردو، قبل از تماس گرمایی با یکدیگر، دارای دمای یکسان می بودند، دماسنج نه انرژی گرمایی می گرفت و نه از دست می داد و فقط در آن صورت دماسنج دمای واقعی جسم را نشان می داد. ولی این را از پیش نمی دانیم؛ اگر می دانستیم، اندازه گیری غیر ضروری می بود.* نه فقط در چنین موارد ساده‌ای تداخل با دستگاه از طریق خود عمل اندازه گیری به وقوع می پیوندد، بلکه در تمام اندازه گیریها اتفاق می افتد. به طور خلاصه، يك دستگاه کاملاً منزوی، دستگاهی است که هرگز نتوان آن را مطالعه یا مشاهده کرد؛ به عبارت دیگر، نمی توانیم دستگاهی را مطالعه کنیم بدون آنکه منزوی بودن آن را نقض کرده باشیم. ولی در فیزیک کلاسیک، با انجام ماهرانه آزمایش، همیشه امکان دارد که اغتشاشها را به میزانی کاهش داد که بتوان دستگاه را عملاً منزوی در نظر گرفت.

۳.۱ برهم کنشهای کلاسیکی

در فیزیک کلاسیک فقط دو منشأ اصلی نیرو وجود دارند: جرم گرانشی و بار الکتریکی؛ اینها به ترتیب منشأ نیروی گرانش عمومی و نیروهای الکترومغناطیسی اند. نیروی جاذبه گرانشی F_g بین دو جرم نقطه‌ای m_1 و m_2 که به فاصله r از هم قرار دارند عبارت است از

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (4.1)$$

* البته، در صورتی که ظرفیتهای گرمایی مایع و دماسنج، به طور کاملاً دقیق معلوم می بودند، امکان داشت که تصحیح را برای گرمای وارد و یا خارج شده از دستگاه انجام داد، ولی ظرفیتهای گرمایی در صورتی معلوم می شوند که گرماهای ویژه مواد در آزمایش دیگری اندازه گیری شده باشند. در هر حال، اگر این آزمایش نیز بخواهد گرمای ویژه را بدون خطا به دست دهد، باید در آن از يك دماسنج کاملاً میزان شده و تصحیح شده استفاده بشود؛ و در نتیجه تکرار این آزمایشها برای بینهایت مرتبه.

که در آن G ثابت گرانش عمومی است، و آزمایش نشان می‌دهد که مقدار آن برابر $6.67 \times 10^{-11} \text{ N-m}^2/\text{kg}^2$ است.

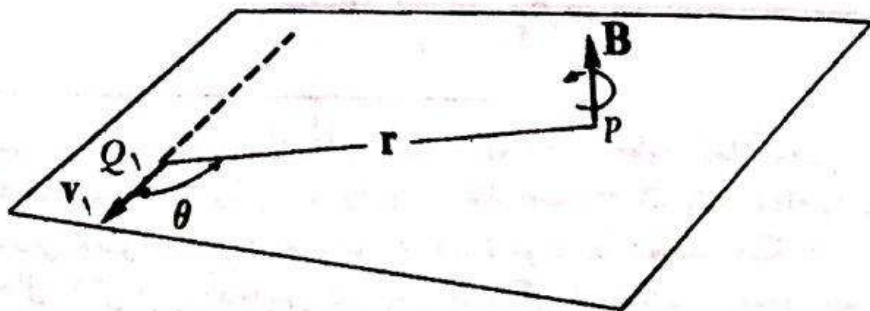
نیروهای بین بارهای الکتریکی را می‌توان به دو نوع اساسی تقسیم کرد: نیروی الکتریکی و نیروی مغناطیسی. دوبار نقطه‌ای ساکن یا متحرك Q_1 و Q_2 را که به اندازه r از یکدیگر فاصله دارند در نظر می‌گیریم. نیروی الکتریکی F_e (همچنین نیروی کولنی) بین این دوبار از قانون کولن محاسبه می‌شود:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{k Q_1 Q_2}{r^2} \quad (5.1)$$

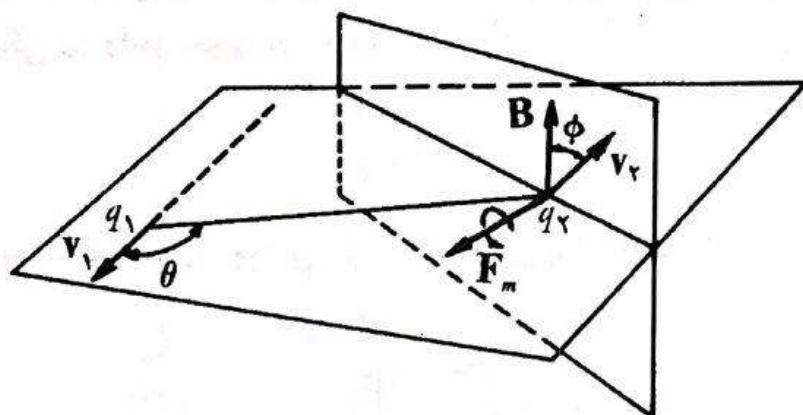
که در آن $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.99 \times 10^9 \text{ N-m}^2/\text{C}^2$ و ϵ_0 گذردهی الکتریکی خلا است. می‌توان تصور کرد که نیروی الکتریکی F_e ، توسط میدان الکتریکی E ایجاد می‌شود. میدان الکتریکی به صورت نیروی الکتریکی به ازای واحد بار مثبت تعریف می‌شود. از این رو، بار Q_1 در جایگاه Q_2 يك میدان الکتریکی به بزرگی $E_1 = kQ_1/r^2$ می‌آفریند و Q_2 که خود را در این میدان الکتریکی احساس می‌کند، تحت تأثیر يك نیروی الکتریکی به بزرگی $F_e = Q_2 E_1 = kQ_1 Q_2 / r^2$ قرار می‌گیرد.

وقتی دوبار نقطه‌ای الکتریکی نسبت به ناظری در حرکت باشند، نیروی مغناطیسی ایجاد می‌شود. می‌توان تصور کرد که برهم کنش مغناطیسی از طریق میدان مغناطیسی B صورت می‌گیرد. از این رو، بار Q_1 که به فاصله r از Q_2 قرار گرفته است و با سرعت v_1 حرکت می‌کند يك میدان مغناطیسی B_1 در نقطه Q_2 تولید می‌کند؛ شکل ۴.۱ را مشاهده کنید. میدان مغناطیسی B_1 از رابطه

$$B_1 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) Q_1 \frac{v_1 \times r}{r^3} \quad (6.1)$$



شکل ۴.۱ میدان مغناطیسی B در نقطه P ، ناشی از بار متحرك Q_1 .



شکل ۵.۱ نیروی مغناطیسی F_m وارد بر بار متحرک Q_2 که توسط بار متحرک Q_1 تولید می‌شود.

به دست می‌آید، که در آن $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ Wb/A-m}$ تراوایی مغناطیسی، و v_1 سرعت بار Q_1 است؛ شکل ۴.۱ را مشاهده کنید. نیروی مغناطیسی وارد بر بار Q_2 عبارت خواهد بود از

$$F_m = Q_2 v_2 \times B_1 \quad (7.1)$$

که در آن v_2 سرعت بار Q_2 است؛ شکل ۵.۱ را ملاحظه کنید. به طور خلاصه، در نقطه‌ای که میدان الکتریکی، E و میدان مغناطیسی، B است نیروی کل وارد (بجز نیروی گرانش) بر هر ذره با بار Q و با سرعت v به صورت زیر است

$$F = Q(\epsilon + v \times B) \quad (8.1)$$

نیروی تابع سرعت نیروی مغناطیسی F_m است؛ و نیروی باقی‌مانده همان نیروی الکتریکی F_e است.

۴.۱ میدانها و امواج الکترومغناطیسی

در اینجا برخی خواص مهم میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و روابط متقابل آنها، به ویژه مشخصات امواج الکترومغناطیسی کلاسیک را، بدون اشاره به جزئیات مربوط به منشأ آنها، برمی‌شماریم.

می‌توان گفت که در میدان الکتریکی موجود در فضا، مثلاً در ناحیه بین صفحات يك خازن باردار، انرژی الکتریکی وجود دارد. چگالی انرژی الکتریکی، یا انرژی میدان الکتریکی در واحد حجم، از رابطه

$$u_e = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}^2}{2} \quad (9.1)$$

به دست می‌آید؛ به طور مشابه، چگالی انرژی مغناطیسی برابر است با

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (10.1)$$

مثلاً می‌توان گفت که انرژی مغناطیسی در ناحیه بین قطبهای يك آهنربا قرار می‌گیرد. بار الکتریکی نه تنها در حال سکون میدان الکتریکی و در حال حرکت میدان مغناطیسی می‌آفریند، بلکه يك میدان الکتریکی متغیر نیز میدان مغناطیسی می‌آفریند (قانون آمپر) و يك میدان مغناطیسی متغیر نیز به نوبه خود میدان الکتریکی می‌آفریند (قانون فاراده). این مطلب منشأ امواج الکترومغناطیسی است؛ يك بار در حال نوسان و بنابراین شتابدار در فضا، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تولید می‌کند، که بسامد آنها همانند بسامد بار الکتریکی است. این میدانها، يك میدان الکترومغناطیسی تشکیل می‌دهند که پس از انتشار، با سرعت نور (c) در فضا حرکت می‌کند:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (11.1)$$

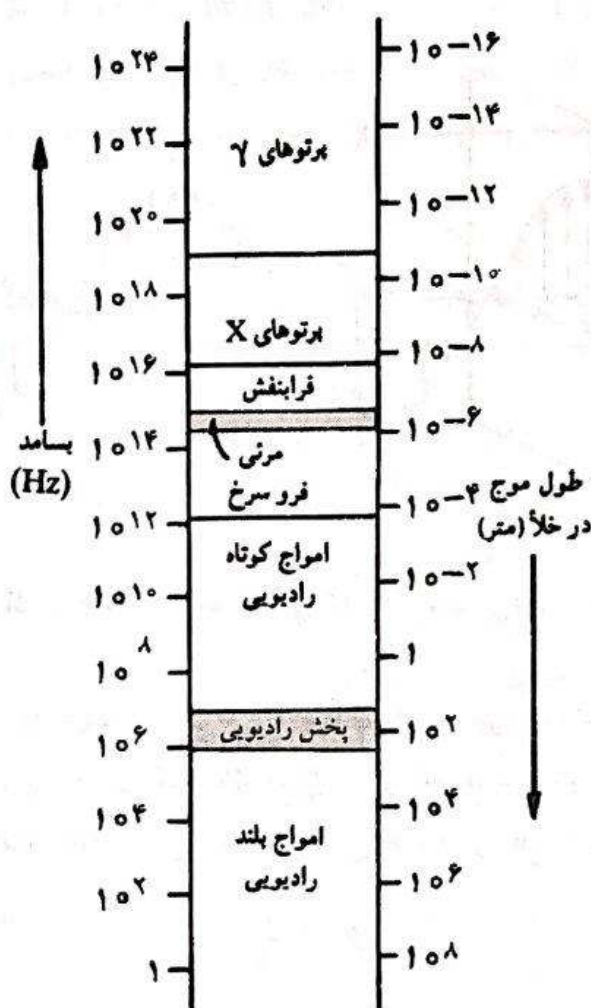
شدت لحظه‌ای I يك موج الکترومغناطیسی، یعنی جریانی انرژی از واحد سطح عمود بر جهت انتشار موج، در واحد زمان، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$I = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 c$$

این شدت با مجذور میدان الکتریکی (یا مجذور میدان مغناطیسی ($B = \mathcal{E}/c$) متناسب است. شکل دیگر این معادله، برای توان الکترومغناطیسی به ازای واحد سطح عمود بر جهت انتشار موج، طوری است که جهت جریان انرژی را نسبت به جهت‌های مربوط به میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ مشخص می‌کند:

$$\mathbf{I} = \epsilon \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (12.1)$$

بردار شدت $\mathbf{I}$ ، که به بردار پوینتینگ نیز موسوم است، در جهت انتشار انرژی است؛

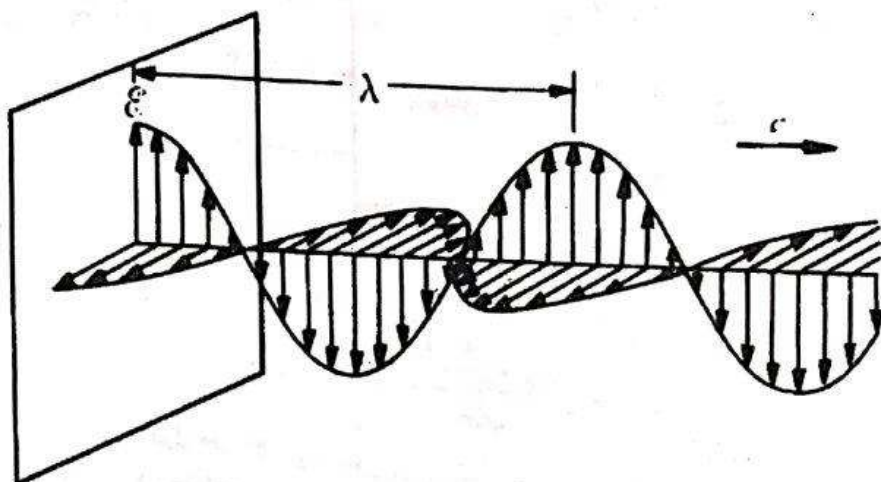


شکل ۶.۱ طیف الکترومغناطیسی

این بردار بر $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ ، که متقابلاً برهم عمودند، عمود است. وجود امواج الکترومغناطیسی با آن ویژگیهایی که در بالا ذکر شد، به طور نظری در سال ۱۸۶۴/۱۲۴۳ توسط جیمز کلارک ماکسول^۱ پیشگویی شد. در سال ۱۸۸۷/۱۲۶۶ برای اولین بار امواج الکترومغناطیسی به وسیله هاینریش هرتز^۲ در آزمایشگاه مشاهده شد. طیف امواج الکترومغناطیسی که از امواج رادیویی با طول موجهای بلند آغاز و به طول موجهای خیلی کوتاه پرتوهای γ ختم می شود، در شکل ۶.۱ نشان داده شده است. شکل ۷.۱ نمایش يك موج تکفام، تخت و به طور خطی قطبیده است. وقتی يك موج الکترومغناطیسی توسط ذرات باردار يك ماده درآشامیده می شود، میدان الکتریکی روی ذرات باردار کار انجام می دهد. چون ذرات باردار در حرکت اند،

1. James Clark Maxwell

2. Heinrich Hertz



شکل ۷.۱ يك موج الكترومغناطیسی تكفام تخت و به طور خطی قطبیده.

میدان مغناطیسی موج، در جهت انتشار موج، بر آنها يك نیروی مغناطیسی وارد می کند. نیروی تابش F_r وارد بر ماده ای كه يك موج الكترومغناطیسی تابیده را به طور كامل درمی آشامد از رابطه زیر به دست می آید (این موج عمود بر سطح ماده فرود می آید)

$$F_r = \frac{P}{c} \quad (۱۳.۱)$$

كه در آن P توان موج جذب شده است. چون موج الكترومغناطیسی، نیروی تابشی یا فشار تابشی بر ماده در آشام (یا بازتاب كننده) موج وارد می كند، می توان طبق رابطه زیر يك اندازه حرکت خطی به آن نسبت داد

$$\text{انرژی الكترومغناطیسی} = \frac{\text{اندازه حرکت الكترومغناطیسی}}{c} \quad (۱۴.۱)$$

۵.۱ اصل همخوانی

در فیزيك، هر نظریه یا قانونی، كم و بیش آزمایشی و تقریبی است. این صحیح است، زیرا به كار بردن يك قانون فیزیکی در وضعیتهایی كه به طور تجربی آزمایش نشده است، ممكن است نشان دهد كه آن قانون ناقص و یا حتی نادرست است. از این رو، هنگامی كه از يك نظریه به وضعیتهای آزمایش نشده برون یابی می كنیم، نمی توان مطمئن بود كه این نظریه برقرار خواهد ماند. ولی اگر يك نظریه جدید و عامتر پیشنهاد شود، برای ارتباط آن به نظریه پیشین و محدودتر، يك راهنمای كاملاً قابل اطمینان وجود دارد. این راهنما اهل

همخوانی است که برای نخستین بار در سال ۱۳۵۲/۱۹۲۳ توسط نیلز بوهر فیزیکدان دانمارکی در نظریه ساختار اتمی به کار رفت. کاربرد این اصل به معنی وسیع کلمه و استفاده از آن در فیزیک نسبیت، و همچنین در فیزیک کوانتومی بسیار مفید خواهد بود.

اصل همخوانی: از قبل می دانیم که هرگاه يك نظریه جدید فیزیکی (۱) با هر سرشت (جزئیاتی) در مورد وضعیتی به کار ببریم که در آن يك نظریه با عمومیت کمتر صادق است، نظریه جدید به يك نظریه متناظر کلاسیکی کاملاً جا افتاده تبدیل خواهد شد.

يك وضعیت ساده و آشنا که اصل همخوانی را توضیح می دهد در نظر می گیریم. هرگاه مسئله حرکت پرتابی در يك گستره نسبتاً كوچك مورد نظر باشد، فرضهای زیر در نظر گرفته می شوند (۱) وزن جسم پرتابی از نظر بزرگی ثابت است؛ این وزن برابر جرم ضرب در شتاب گرانشی است، که شتاب گرانشی از نظر بزرگی ثابت است، (۲) زمین به وسیله يك سطح تخت نمایش داده می شود، و (۳) وزن جسم پرتابی از نظر جهت ثابت و به طور عمود به طرف پایین است. با این فرضها، مسیر حرکت جسم پرتابی به صورت يك سهمی پیشگویی می شود، و به شرط اینکه حرکت پرتابی در فواصل نسبتاً کوتاه انجام شود، سازگاری فوق العاده خوبی با نتایج تجربی به دست می آید؛ ولی اگر بخواهیم حرکت يك قمر زمین را با همین فرضها توصیف کنیم، خطاهای خیلی جدی مرتکب خواهیم شد. برای بحث پیرامون حرکت قمر باید فرض کنیم که (۱) وزن جسم از لحاظ بزرگی ثابت نیست بلکه به طور معکوس با مجذور فاصله از مرکز زمین تغییر می کند، (۲) سطح زمین گرد است، و نه تخت، (۳) جهت وزن ثابت نیست، ولی همواره به طرف مرکز زمین است. این فرضها به پیشگویی يك مسیر بیضی شکل و به توصیف مناسب حرکت قمر منجر می شوند. حال اگر نظریه عامتر دیگری را در مورد حرکت جسمی که مسافت کوتاهی را نسبت به شعاع زمین، روی سطح زمین می پیماید به کار ببریم، چه پیش خواهد آمد؟ وزن از نظر بزرگی و جهت ثابت به نظر می رسد، زمین مسطح به نظر می آید و مسیر بیضی شکل به صورت سهمی در می آید. این دقیقاً همان چیزی است که اصل همخوانی ایجاب می کند.

اصل همخوانی با قطعیت اظهار می دارد که، اگر شرایط نظریه های جدید و قدیم با یکدیگر همخوانی داشته باشند، پیشگوییها نیز همخوانی خواهند داشت؛ یعنی، يك نظریه عام و جدید همان نظریه محدود قدیمی را با يك تقریب ویژه به دست می دهد. در این صورت يك راهنمای بدون خطا، برای آزمایش هر نظریه یا قانون جدید در اختیار داریم؛ نظریه جدید باید به نظریه ای که جانشین آن شده است تبدیل شود. هر نظریه ای که از این لحاظ

با شکست روبه‌رو شود، آشکارا ناقص است و به‌هیچ وجه نمی‌تواند پذیرفته شود. بنابراین می‌دانیم هنگامی که نظریه‌های نسیت و کوانتومی را در مورد اجسام بزرگ مقیاس و با سرعت‌های به مراتب کمتر از سرعت نور به کار ببریم باید همان نظریه‌های فیزیک کلاسیک را به‌دست آوریم. در بخش بعد مثال آشنای دیگری را از اصل همخوانی خواهیم دید.

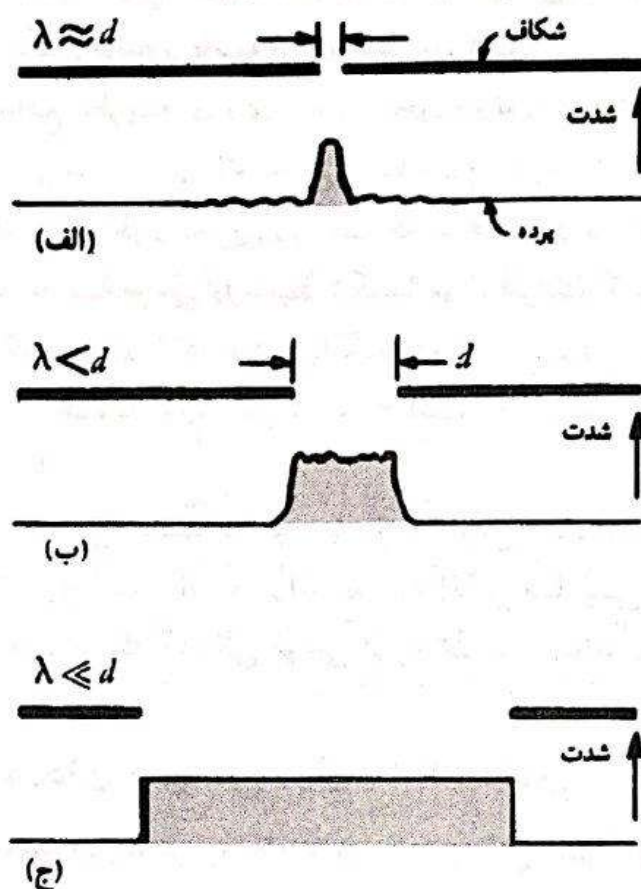
۶.۱ اپتیک پرتوی و اپتیک موجی

دو راه برای توصیف انتشار نور وجود دارد: اپتیک پرتوی یا هندسی، و اپتیک موجی یا فیزیکی. فقط اپتیک موجی قادر است پدیده‌هایی چون تداخل و پراش را توضیح دهد. از طرف دیگر، اپتیک پرتوی می‌تواند پدیده‌هایی چون انتشار مستقیم الخط، بازتاب، شکست نور را به خوبی توصیف کند. البته، اپتیک موجی نیز می‌تواند جوابگوی این پدیده‌ها باشد. بنابراین، اپتیک موجی یک نظریهٔ فراگیرندهٔ نور است، حال آنکه اپتیک پرتوی فقط در بعضی شرایط محدود کاربرد دارد.

اصل همخوانی ایجاب می‌کند که در حد همخوانی، نظریهٔ فراگیرنده به نظریهٔ محدود تبدیل شود. از این‌رو، در شرایطی که پدیده‌های موجی مشخصی چون پراش و تداخل مورد نظر نیستند، عملاً باید اپتیک موجی به اپتیک پرتوی تبدیل شود. می‌دانیم که تنها اگر ابعاد جسم یا دریچه‌ای که نور با آن مواجه می‌شود (d) با طول موج (λ) نور قابل مقایسه باشد، تداخل و پراش به وضوح قابل تشخیص است. هنگامی که $\lambda \ll d$ است، رفتار موجی همان نتایج رفتار پرتوی را به‌دست می‌دهد. به‌طور نمادی می‌توان نوشت

$$\lim_{\lambda/d \rightarrow 0} (\text{اپتیک موجی}) = \text{اپتیک پرتوی}$$

شکل ۸.۱ وضعیت گذار از شرایط اپتیک موجی به شرایط ساده‌تر را نشان می‌دهد. در این شرایط، اپتیک موجی و اپتیک پرتوی نتایج یکسانی به بار می‌آورند. شکل فوق نمایشگر نقش پراش نور تکفامی است که از یک شکاف با لبه‌های موازی می‌گذرد، (الف) برای حالتی که موج λ با پهنای شکاف d قابل مقایسه است، (ب) برای حالتی که طول موج از پهنای شکاف کمتر است، و (ج) برای حالتی که طول موج از پهنای شکاف خیلی کوچکتر است. در نمودار اول آشفتگی موجی در ناحیهٔ وسیعی از سایهٔ هندسی پخش می‌شود و دارای نوارهای مشخصهٔ متناوباً تاریک و روشن پراش است. در نمودار دوم، پراش کمتر مشخص است و نور عمدتاً در ناحیهٔ محدود به سایهٔ هندسی متمرکز شده است. در نمودار سوم، که در آن طول موج از پهنای شکاف خیلی کوچکتر است نقش شدت از آنچه



شکل ۸.۱* توزیع شدت نور تکفام که از یک شکاف، با پهنای زیادشونده عبور می‌کند. پسرده متناوباً در (الف) از شکاف دور، و در (ب) و (ج) به شکاف نزدیک می‌شود.

که بدوسیله اپتیک پرتوی پیشگویی می‌شود غیر قابل تفکیک است.*
 اپتیک پرتوی صرفاً با مسیر نوری سروکار دارد که می‌توان آن را به صورت پرتوهای درجهت انتشار نور تلقی کرد. این تعریف، مدلی را که برای تشریح ویژگی نور پیشنهاد می‌کند همان مدل ذره‌ای است. درچنین مدلی فرض می‌شود که نور شامل ذرات (با تنیزه‌های) کوچک و اساساً بی‌وزن است. این مدل با واقعیت‌های مشاهده شده زیر سازگار است (۱) نور در فضای آزاد، یک مسیر مستقیم را به صورت جریانی از ذرات دنبال می‌کند (۲) در بازتاب، نور مانند ذراتی که با سطح برخورد کشان دارند رفتار

* در حالت بین (الف) و (ب) در شکل ۸.۱ نقشه‌ای پراش پیچیده‌اند، بعضی حالت‌ها حتی نشان دهنده یک نوار تاریک در مرکزند.

می‌کند (۳) در شکست، در يك ماده شفاف مانند شیشه، نور آنچنان عمل می‌کند که گویی ناگهان در وجه مشترك شیشه و هوا جهت حرکت ذرات تغییر می‌کند و (۴) شدت نور يك چشمه نقطه‌ای با عکس مجذور فاصله از آن تغییر می‌کند.

مشهورترین مدافع نظریه ذره‌ای نور، اسحق نیوتون بود. وی نشان داد که، بنا به مفهوم ذره‌ای، سرعت نور در يك محیط شکننده نور، باید از سرعت نور در خلا^۱ بزرگتر باشد. ولی فوکو^۲ به‌طور تجربی دریافت که سرعت نور در آب کمتر از سرعت نور در هواست؛ البته نظریه موجی در محیط شکننده نور، سرعت کمتری را پیشگویی می‌کند. آزمایش فوکو، همراه با کار پیشین یانگ^۳ و فرنل^۲ در مورد پراش و تداخل نور، فیزیکدانان را متقاعد ساخت که نور مشتمل بر امواج است (همان‌طور که هویگنس^۴ برای اولین بار پیشنهاد کرد).

اگرچه فیزیکدانان می‌دانستند که نور مشتمل بر امواج است و بنا بر این می‌توانستند تداخل و پراش را تشریح کنند، اما تا ارائه نظریه الکترومغناطیسی ماکسول، در سال ۱۸۶۴/۱۲۴۳، نمی‌دانستند که آشفتگی موجی از چه تشکیل شده است.

۷.۱ توصیفهای ذره‌ای و موجی در فیزیک کلاسیک

در فیزیک کلاسیک، مانند فیزیک نوین، مفاهیم ذره و موج نقش مهمی ایفا می‌کنند. به‌طور اختصار مشخصات هریک را در زیر خلاصه می‌کنیم.

يك ذره ایده‌ال می‌تواند کاملاً جایگزیده شود. جرم و بار الکتریکی آن را می‌توان با دقت نامتناهی مشخص کرد، و ذره را می‌توان به‌عنوان يك نقطه جرمی در نظر گرفت. اگرچه در طبیعت تمام ذرات را با اندازه‌های معینی می‌یابیم، تحت شرایط مناسبی می‌توان آنها را به‌عنوان نقاط جرمی در نظر گرفت. به‌عنوان مثال در نظریه جنبشی، مولکولها به‌صورت ذرات نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شوند، هرچند که اندازه آنها معین است و دارای ساختار داخلی هستند؛ به‌طور مشابه، هنگامی که رفتار کهکشانها را بررسی می‌کنیم، ستاره‌ها را چون ذرات در نظر می‌گیریم. به‌طور خلاصه، هر گاه ابعاد جسم در مقایسه با ابعاد دستگاهی که جسم قسمتی از آن است خیلی کوچک باشد و ساختار داخلی آن نیز در مسئله تحت بررسی مورد نظر نباشد، عملاً می‌توان آن جسم را به‌عنوان يك ذره در نظر گرفت. مکانیک نیوتونی درباره ذرات ایده‌ال بحث می‌کند؛ با در دست داشتن مکان و سرعت اولیه يك ذره، و با آگاهی از نیروهای وارد بر آن، می‌توان مکان و سرعت ذره را در آینده

به تفصیل پیشگویی کرد.

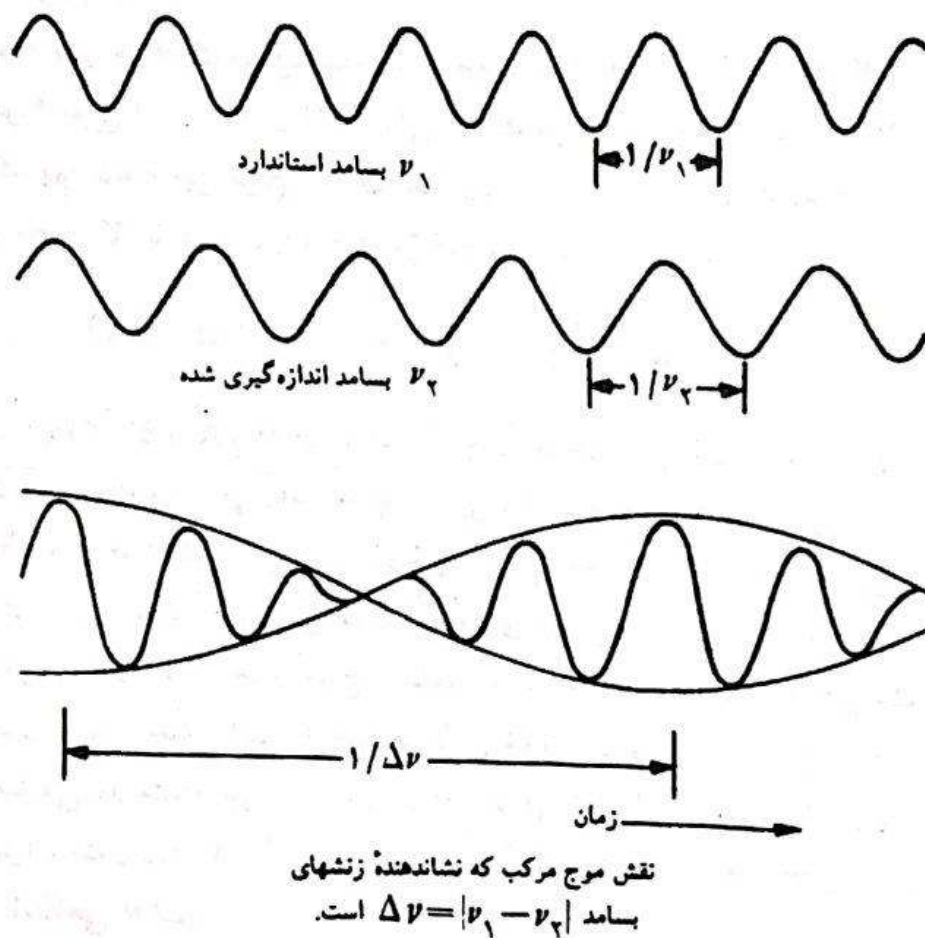
مشخصهٔ *بسرجهٔ يك موج*، *بسامد* یا *طول موج* آن است. *مسوج* کاملاً *سینوسی* ساده‌ترین نوع موج است. میدان الکتریکی $\mathcal{E}$ يك موج الکترومغناطیسی کاملاً تک‌فام را در نظر می‌گیریم؛ دامنهٔ این موج، $\mathcal{E}_0$ بسامد آن، ν و طول موج آن λ است. این موج در جهت مثبت محور X با سرعت $v = \nu\lambda$ حرکت می‌کند. در آن صورت

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right) = -\mathcal{E}_0 \sin (\omega t - kx) \quad (15.1)$$

که در آن $\omega = 2\pi\nu$ و $k = 2\pi/\lambda$ است. چنین موجی تغییرات سینوسی $\mathcal{E}$ را در فضا برای يك زمان ثابت نشان می‌دهد؛ همچنین این معادله تغییرات سینوسی $\mathcal{E}$ را در زمان برای يك نقطه x در فضا نشان می‌دهد. معادلهٔ (۱۵.۱) ایجاب می‌کند که آشفتگی الکتریکی، به‌ازای تمام مقادیر ممکن x ، برای تمام لحظه‌های ممکن t ، گسترش یابد.

يك موج ایده‌آل، که طول موج و بسامد آن را بتوان با دقت نامتناهی مشخص کرد، نمی‌تواند در هیچ ناحیهٔ خاصی از فضا محبوس شود، در عوض این موج باید دارای يك گسترش نامتناهی در امتداد جهتی که در آن انتشار می‌یابد باشد. به سادگی با يك آزمایش فرضی می‌توان نشان داد که اگر بخواهیم بسامد يك موج را با دقت کامل اندازه بگیریم، باید موج نامتناهی باشد.

فرض می‌کنیم که برای اندازه‌گیری تعداد قله‌های موجی که از نقطهٔ ثابتی در واحد زمان می‌گذرند، يك ساعت استاندارد در اختیارمان باشد. برای سهولت، فرض می‌کنیم که ساعت استاندارد نوسانگری است که امواجی را که با بسامد موج ورودی قابل مقایسه‌اند تولید می‌کند. چگونه با اطمینان کامل می‌توان اظهار کرد که بسامد موج ورودی دقیقاً همان بسامد موجی است که به وسیلهٔ ساعت استاندارد تولید می‌شود؟ فرض می‌کنیم دو موج طوری باهم تداخل می‌کنند که زنش تولید کنند. تعداد زنشها در واحد زمان برابر اختلاف بین بسامدهای دو موج است. در صورتی که بسامدهای دو موج دقیقاً یکسان باشند، به هیچ وجه زنش آشکار نخواهد شد. حال، اگر دامنهٔ برابری تداخل دو موج را در يك دورهٔ محدود از زمان مشاهده کنیم، ممکن است هیچ گونه تغییر قابل توجهی در این دامنه مشاهده نکنیم. ولی براساس چنین آزمایشی نمی‌توان به‌طور قطع اظهار کرد که هیچ تغییری موجود نیست؛ چرا که اگر بیشتر صبر کرده بودیم ممکن بود دریابیم که دامنهٔ ترکیبی دو موج افزایش یا کاهش می‌یابد (رک شکل ۹.۱)، که این خود نشان‌دهندهٔ نخستین زنش و یا اختلاف بین بسامدهاست. برای اینکه مطمئن شویم که هیچ زنشی رخ نمی‌دهد، یعنی بسامدهای دو موج دقیقاً یکسان‌اند،



شکل ۹.۱ نقش زش حاصل از برهم نهی امواجی با بسامدهای ν_1 و ν_2 .

باید برای يك دوره نامتناهی از زمان صبر کنیم. برای اینکه بسامد را بدون هیچگونه عدم قطعیتی اندازه گیری کنیم، باید برای زمان نامحدودی صبر کنیم؛ در آن صورت موجی که اندازه گیری می شود، برای يك زمان نامتناهی در حرکت خواهد بود و يك گسترش نامتناهی در فضا خواهد داشت.

حال می خواهیم مقدار عدم قطعیت در بسامد مجهول ν_2 را برای هنگامی که با بسامد ν_1 يك ساعت استاندارد، در يك زمان متناهی Δt ، ایجاد زش می کند تعیین کنیم. اگر اختلاف ν_1 و ν_2 برابر $\Delta\nu$ باشد، در آن صورت تعداد $\Delta\nu$ زش در واحد زمان مشاهده خواهد شد؛ زمان لازم برای مشاهده يك زش کامل $1/\Delta\nu$ ثانیه است. به منظور رعایت احتیاط و اطمینان از مشاهده يك زش، اندازه گیری را در زمان Δt ، زمان لازم برای وقوع يك زش، انجام می دهیم؛ بنابراین داریم $\Delta t \geq 1/\Delta\nu$ و یا

$$\Delta t \Delta\nu \geq 1 \quad (۱۶.۱)$$

اگر بسامد اندازه‌گیری شده با بسامد ساعت استاندارد به اندازه $\Delta\nu$ اختلاف داشته باشد، در آن صورت $\Delta\nu$ اندازه عدم قطعیت در اندازه‌گیری بسامد ν است. از رابطه (۱۶.۱) چنان برمی‌آید که اگر بسامد يك موج در يك زمان خیلی کوتاه اندازه‌گیری شود، عدم قطعیت در این بسامد بزرگ خواهد بود و برعکس. برای اینکه $\Delta\nu = 0$ باشد، باید Δt نامتناهی باشد.

به کمک رابطه (۱۶.۱) به سادگی می‌توان رابطه‌ای که عدم قطعیت مربوط به طول موج را بیان کند به دست آورد. فرض می‌کنیم که موج فقط در يك بازه زمانی متناهی Δt مشاهده شود؛ در آن صورت در خلال این زمان، موج مسافت $\Delta x = \nu \Delta t$ را طی می‌کند، که در آن ν سرعت موج است. بنابراین، موج فقط در مسافت Δx مشاهده شده است

$$\Delta x = \nu \Delta t$$

و از رابطه (۱۶.۱)

$$\Delta x \geq \frac{\nu}{\Delta \nu} \quad (۱۷.۱)$$

ولی چون

$$\nu = \frac{v}{\lambda}$$

است، داریم

$$\Delta \nu = \frac{v \Delta \lambda}{\lambda^2} \quad (۱۸.۱)$$

چون فقط بزرگی مورد نظر است، علامت منها از رابطه بالا حذف شده است. با جایگزین کردن (۱۸.۱) در (۱۷.۱) چنین نتیجه می‌شود

$$\Delta x \Delta \lambda \geq \lambda^2 \quad (۱۹.۱)$$

اگر موجی آنچنان مشاهده شود که گسترش آن در فضا به اندازه Δx عدم قطعیت داشته باشد، طول موج آن عدم قطعیتی برابر با $\Delta \lambda \geq \lambda^2 / \Delta x$ خواهد داشت. همان‌طور که رابطه (۱۹.۱) نشان می‌دهد، تنها اگر $\Delta x = \infty$ باشد، $\Delta \lambda = 0$ خواهد بود.

تا اینجا فقط به امواج سینوسی تکفام پرداخته‌ایم. تپهای موجی، که آشفتگیهای موجی محبوس در ناحیه محدودی از فضا در يك زمان معین هستند نیز می‌توانند انتشار یابند. از نظر ریاضی می‌توان نشان داد که هر تپی معادل برهم‌نهی تعدادی موج سینوسی با بسامدهای متفاوت است. به همین دلیل بود که يك موج ساده سینوسی تکفام را تحلیل

کردیم. اگر تعدادی موج با بسامدهای مختلف را، که از جمع آنها يك تب كاملاً تيز حاصل می شود محاسبه كنيم، درمی يابيم كه تمام بسامدهای از صفر تا بينهایت را باید در نظر بگيريم (رك تحليل زیر). این مطلب با آنچه قبلاً پيدا کرده ایم توافق دارد: اگر تب موجی در ناحیه بينهایت کوچکی از فضا مجبوس شده باشد، نمی توانيم طول موج آن را معين كنيم. در واقع، نمی توانيم از يك «تك بسامد» برای يك تب صحبت كنيم. بسته موجها. يك موج تكفام، كه در امتداد محور X با سرعت $v = \nu \lambda$ در حرکت است به وسیله رابطه زیر بيان می شود

$$A = A_0 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right) \quad (20.1)$$

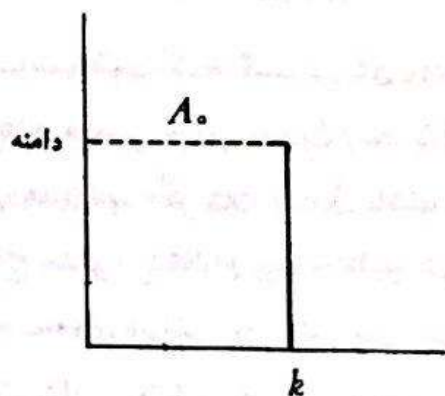
كه در آن λ و ν به ترتيب طول موج و بسامدند. آشفتگی موجی A بدصورت تابعی از مكان x و زمان t داده شده است و دارای مقدار بیشینه A_0 است. كمیت A_0 دامنه موج است. در مورد يك موج الكترومغناطیسی، A نمایشگر شدت میدان الكتريکی یا شدت میدان مغناطیسی است؛ و برای يك موج صوتی در هوا، A مبین فشار است؛ و برای يك موج عرضی در طول يك تار، نمایشگر تغییر مكان عرضی است. با تعریف

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (21.1)$$

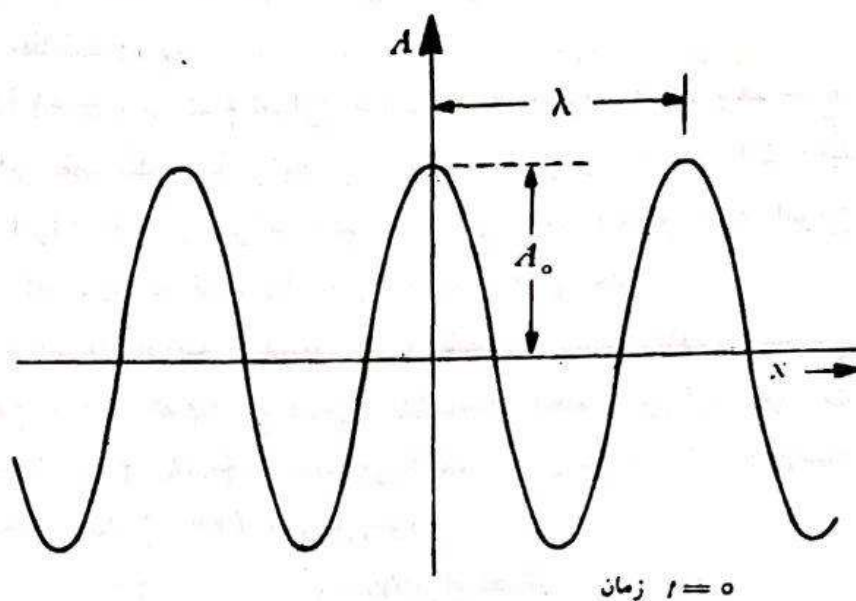
كه در آن k عدد موج است، می توان رابطه (20.1) را بدشكل زیر نوشت

$$A = A_0 \cos k(x - \nu t) \quad (22.1)$$

شكل ۱۰.۱ دامنه يك تك موج تكفام را با عدد موج k ، و یا با طول موج $2\pi/k$ ، نشان می دهد و شكل ۱۱.۱، A را به صورت تابعی از x در زمان بخصوص $t = 0$ نشان می دهد.

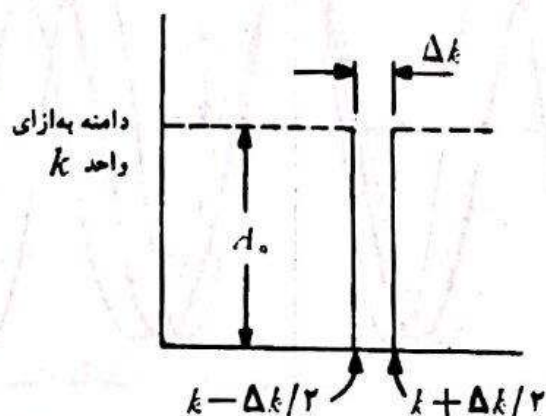


شكل ۱۰.۱ طيف بسامد يك موج تكفام.



شکل ۱۱.۱ تغییرات فضایی یک موج تک‌گام.

حال مجموعه‌ای (یا بسته‌ای) از امواج تک‌گام را، که همگی در جهت $+x$ با سرعت یکسان v (بدون پاشندگی) حرکت می‌کنند در نظر می‌گیریم. برای سهولت فرض می‌کنیم که تمام امواج دارای دامنه یکسان A_0 اند و بسته موج شامل تمام اعداد موجی از $k - \Delta k/2$ تا $k + \Delta k/2$ است. بنابراین، همان‌طور که در شکل ۱۲.۱ نشان داده شده است تمام موجها در یک نوار به پهنای Δk واقع می‌شوند. اگر $\Delta k = 0$ باشد نوار امواج، به صورت یک تک‌موج تک‌گام (شکل ۱۰.۱) درمی‌آید.



شکل ۱۲.۱ طیف بسامد یک بسته از امواج.

شکل ۱۳.۱ که نمایشگر گسترش فضایی يك بسته موج در زمان $t = 0$ است با شکل ۱۱.۱ مطابقت دارد.

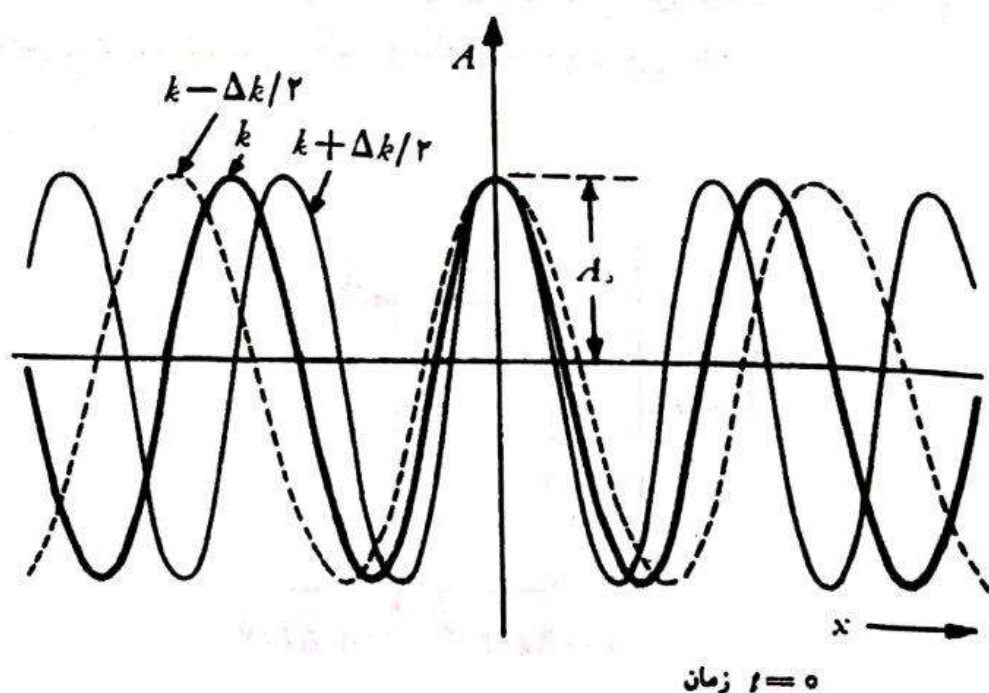
در مبدأ ($x = 0$)، تمام امواج همفازند و بدطور سازنده باهم جمع می‌شوند؛ بنابراین در این نقطه يك دامنه برآیند بزرگ حاصل می‌شود. با دور شدن از مبدأ، در هر يك از دو جهت، امواج به طور فزاینده غیر همفاز می‌شوند. و جمع جبری امواج منفرد دامنه برآیند A را که سریعاً بدصفر نزدیک می‌شود، بدست می‌دهد.

حال با استفاده از اصل برهم نهی، در هر نقطه x و در هر زمان t دامنه برآیند A را که مرکب از تمام امواج تکفام واقع در نوار Δk است، محاسبه می‌کنیم. عبارات $A_k dk$ را از $k - \Delta k/2$ تا $k + \Delta k/2$ جمع می‌کنیم، و برای سهولت $x - vt = x'$ را اختیار می‌کنیم. آنگاه رابطه (۲۲.۱) چنین می‌شود

$$A_k = A_0 \cos kx'$$

که در آن A_0 دامنه بدازای واحد k است. تغییر مکان برآیند از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} A &= \int_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2} A_k dk = A_0 \int_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2} \cos kx' dk = \left(\frac{A_0}{x'} \right) \sin kx' \Big|_{k-\Delta k/2}^{k+\Delta k/2} \\ &= \frac{A_0}{x'} \left[\sin x' \left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) - \sin x' \left(k - \frac{\Delta k}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (23.1)$$



شکل ۱۳.۱ تغییرات فضایی يك بسته از امواج تکفام.

با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر می‌توان این رابطه را ساده کرد

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b \cos a$$

بنابراین داریم

$$A = \left(\frac{2A_0}{x'} \right) \sin \left(\frac{x' \Delta k}{2} \right) \cos x' k \quad (24.1)$$

در شکل ۱۴.۱ سه نمودار اول، منحنیهای نمایش عاملهای جدا از هم رابطه (۲۴.۱) را بر حسب x' نشان می‌دهند و دو نمودار آخر، منحنیهای نمایش موج برآیند A و پوش A^2 بر حسب x' اند. چون x' برابر $x - vt$ است، شکل ۱۴.۱ «تصویر لحظه‌ای» شدت موج (متناسب با مجذور دامنه) است.

پیش از نیمی از انرژی کل بسته موج در داخل ناحیه $2\pi/\Delta k$ است (ناحیه سایه در شکل ۱۴.۱ ه، تقریباً معادل سه چهارم مساحت کل زیر منحنی است). عدم قطعیت Δx در پهنای بسته موج (در هر لحظه‌ای از زمان)، حداقل به بزرگی $2\pi/\Delta k$ است

$$\Delta x \geq \frac{2\pi}{\Delta k} \quad (25.1)$$

عدد موج k را صرفاً به خاطر سهولت در محاسبه انتگرالها وارد کرده‌ایم. برای نوشتن رابطه (۲۵.۱) بر حسب $\lambda = 2\pi/k$ ، این‌طور آغاز می‌کنیم

$$|\Delta k| = \frac{2\pi \Delta \lambda}{\lambda^2}$$

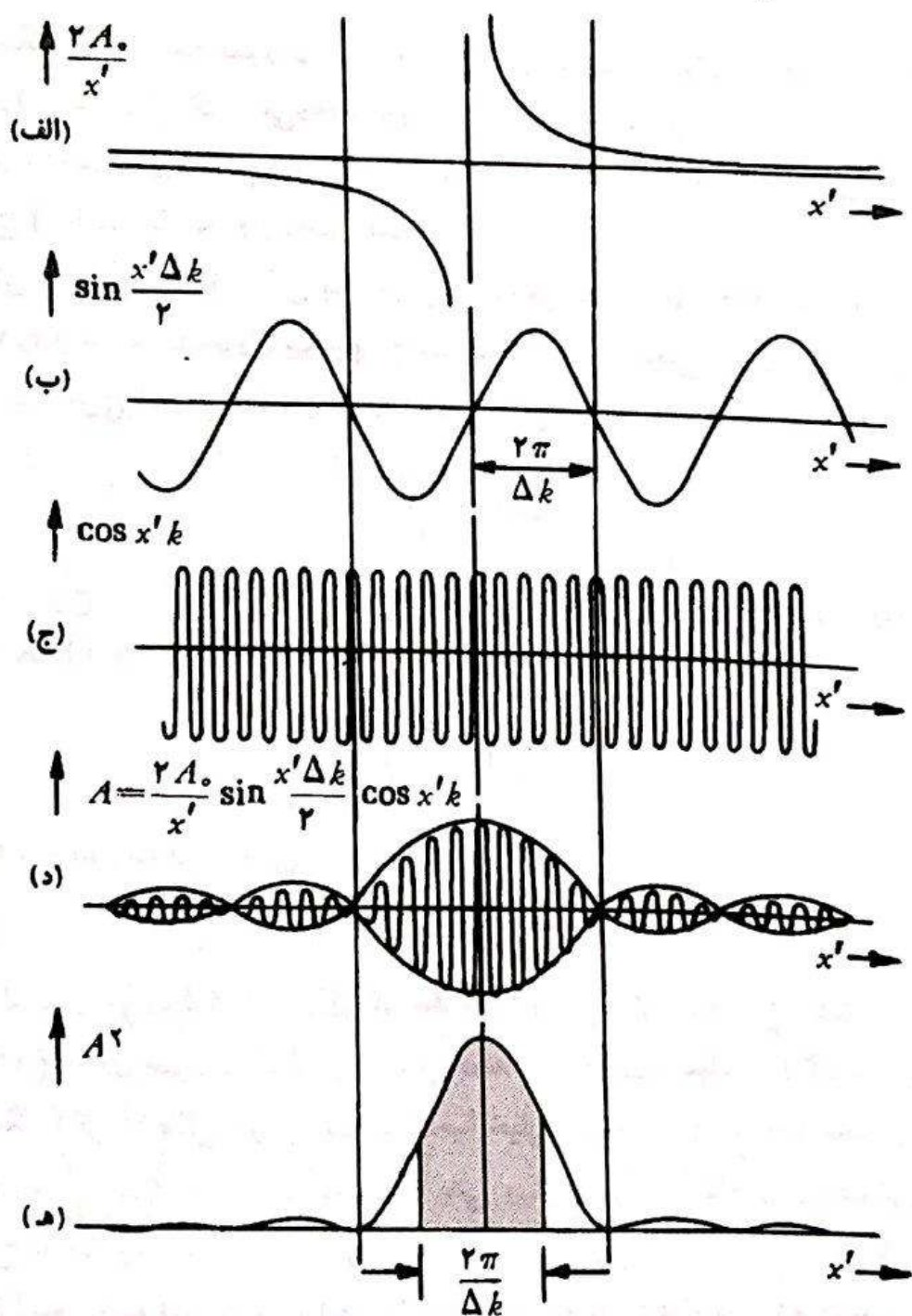
و (۲۵.۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\Delta x \Delta \lambda \geq \lambda^2 \quad (26.1)$$

این معادله نشان می‌دهد که اگر $\Delta \lambda$ کوچک باشد (یعنی اگر بسته موج شامل امواج تقریباً تکفام باشد) در آن صورت گسترش فضایی بسته موج (Δx) بسیار بزرگ خواهد شد. از طرف دیگر اگر آشفتگی موجی در یک ناحیه خیلی کوچک Δx در فضا محبوس شود، در آن صورت باید $\Delta \lambda$ خیلی بزرگ باشد؛ یعنی باید امواج تکفام را در یک گستره وسیع طول موج با هم جمع کرد.

از آنجا که امواج و ذرات نمایشگر تنها دو مد انتقال انرژی‌اند، نقش مهمی در فیزیک ایفا می‌کنند. تنها با فرستادن ذره‌ای از نقطه اول به نقطه دوم و یا با فرستادن موجی از اولین نقطه به دومین نقطه، می‌توان انرژی را از نقطه‌ای در فضا به نقطه‌ای دیگر

انتقال داد. ذرات و امواج تنها وسایل ارتباط بین دو نقطه‌اند. مثلاً، با استفاده از روشهای زیر می‌توان به‌شخصی علامت داد: با پرتاب جسمی به‌طرف او (ذره)، صدا کردن (امواج صوتی)، اشاره کردن (امواج نوری)، تلفن کردن (امواج الکتریکی در رساناها)، تماس رادیویی (امواج الکترومغناطیسی).



شکل ۱۴.۱ تغییرات فضایی عاملهایی که در معادله (۲۴.۱) ظاهر شده‌اند. این عاملها برای یک بسته‌موج و موج بر اینند A و پوش A^2 همگی بر حسب x' ‌اند.

فقط سه برهم‌کنش، یا مد انتقال انرژی، بین ذرات و امواج امکان پذیرند:

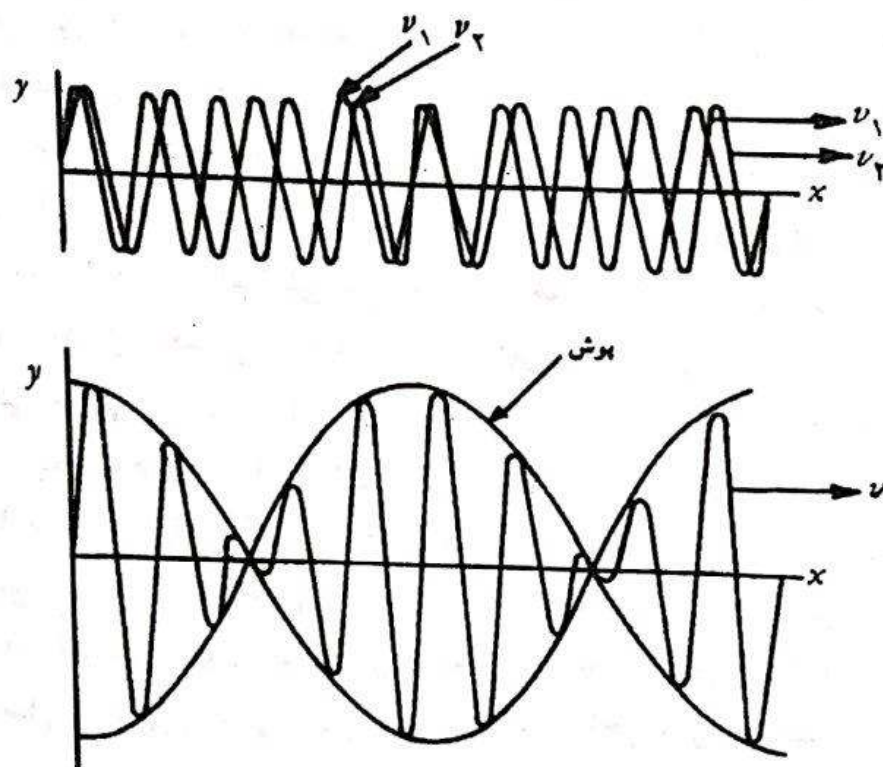
(۱) برهم‌کنش بین دو ذره، (۲) برهم‌کنش بین يك ذره و يك موج، و (۳) برهم‌کنش بین دو موج. هنگامی دو ذره برهم‌کنش می‌کنند که باهم برخورد کرده باشند. يك بار الکتریکی که موج الکترومغناطیسی تولید می‌کند مثالی برای برهم‌کنش بین يك ذره و يك موج است. این موج به نوبه خود می‌تواند با ذره باردار دیگری برهم‌کنش کند و به آن انرژی بدهد.* هیچ برهم‌کنشی بین دو موج وجود ندارد، و اثرهای ترکیبی آنها در هر نقطه از فضا از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کنند. این اصل میباید آن است که می‌توان دو یا چند آشفنگی موجی را برهم نهاد و آشفنگی برآیند را به دست آورد. همه دیده‌اند که اگر دو موج آب عمود برهم در حوض آبی حرکت کنند، جایی و زمانی باهم تداخل می‌کنند که با یکدیگر تلاقی کرده باشند، سپس این دو موج به راه خود ادامه می‌دهند آنچنانکه گویی هر يك کاملاً غافل از وجود دیگری به پیش می‌رود. این رفتار با رفتار دو ذره كوچك غیر قابل نفوذ، که نمی‌توانند يك نقطه را همزمان اشغال کنند، مغایرت دارد. البته اصل برهم‌نهی مبنای بررسی تمام مسائل تداخل و پراش است.

۸.۱ سرعت‌های فاز و گروه

هنگامی که دو موج سینوسی با بسامدهای متفاوت در يك جهت و با سرعت یکسان در محیطی حرکت کنند، انرژی انتقال یافته به وسیله موج برآیند نیز با همان سرعت هر يك از دو موج حرکت می‌کند. ولی اگر امواج با بسامدهای مختلف در همان محیط با سرعت متفاوت حرکت کنند، انرژی با سرعتی (سرعت گروه) که با سرعت فاز، v_{ph} ، هر يك از امواج تفاوت دارد انتقال خواهد یافت.

ابتدا دو موج سینوسی با بسامدهای ν_1 و ν_2 را که با سرعت یکسان در محیطی حرکت می‌کنند بررسی می‌کنیم. برای سهولت، دامنه‌های دو موج را یکسان و برابر A اختیار می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۱۵.۱ نشان داده شده است، در هر لحظه از زمان شکل موج برآیند با برهم‌نهی امواج مؤلفه به دست می‌آید. (توجه کنید که شکل ۱۵.۱ تصویر لحظه‌ای امواج مؤلفه و برآیند آنها به صورت تابعی از تغییر مکان در امتداد انتشار موج است؛ این شکل همانند شکل ۹.۱ به نظر می‌رسد، ولی با آن یکسان نیست. شکل ۹.۱، نوسانات مؤلفه و برآیند را در يك نقطه از فضا بر حسب زمان نشان می‌دهد.) تداخل

* د ر ك



شکل ۱۵.۱ دو موج تکفام با بسامدهای مختلف و برآیند آنها.

پی‌درپی سازنده و ویرانگر امواج، پوشی با تغییرات آهسته تولید می‌کنند. از آنجا که انرژی یک نوسانگر هماهنگ ساده با مجذور دامنه نوسان متناسب است، انرژی حمل شده توسط موج برآیند در ناحیه‌هایی که دامنه پوش بزرگ است متمرکز می‌شود. از این رو، سرعت انتقال انرژی امواج در محیط، همان سرعت پیشروی پوش در فضا است. اما، در صورتی که سرعت‌های دو موج مؤلفه برابر باشند، سرعت پوش (به اصطلاح سرعت گروه) همان سرعت فاز v هریک از موج‌های مؤلفه است. منظور از سرعت فاز همان سرعتی است که با آن یک نقطه واقع بر موج، با فاز ثابت (همانند یک قله موج) در جهت انتشار حرکت می‌کند. بنا به تعریف سرعت فاز، می‌توان نوشت

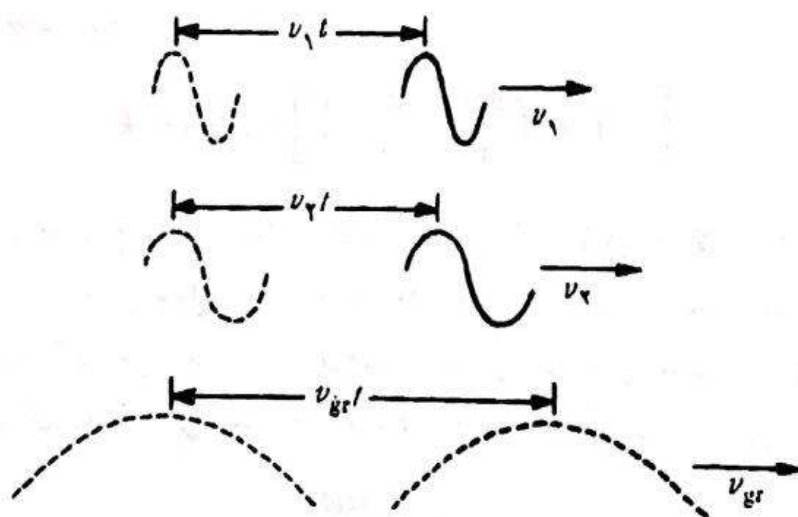
$$v = v\lambda = \frac{\omega}{k}$$

که در آن v بسامد، λ طول موج، $\omega = 2\pi v$ بسامد زاویه‌ای، و $k = 2\pi/\lambda$ عدد موج است. وقتی که امواج مربوط به همه بسامدها دارای سرعت فاز یکسان باشند، رفتار نقطه‌ای واقع بر قله یکی از امواج، همانند رفتار نقطه‌ای واقع بر قله موج دیگر و یا بر قله موج برآیند آنهاست.

اکنون دو موج سینوسی را، که بسامدهای آنها باهم اندکی اختلاف دارند و هر دو در يك محیط و در يك جهت حرکت می‌کنند در نظر می‌گیریم؛ سرعت‌های فاز این دو موج متفاوت است: $\nu_1 = \nu_1 \lambda_1 = \omega_1 / k_1$ و $\nu_2 = \nu_2 \lambda_2 = \omega_2 / k_2$. چنین محیطی نمایشگر يك محیط پاشنده است. محیط شکنده نور چند فام، مثال ساده‌ای از این مطلب است. می‌دانیم که نور بنفش با سرعتی کمتر از سرعت نور قرمز از شیشه عبور می‌کند (ضریب شکست شیشه برای نور بنفش بزرگتر از ضریب شکست شیشه برای نور قرمز است)؛ در نتیجه، نور سفیدی که از يك منشور شیشه‌ای عبور کند به صورت طیفی پاشیده می‌شود.

به آسانی مشاهده می‌شود که سرعت گروه، ν_{gr} ، با سرعت فاز در يك محیط پاشنده تفاوت دارد. از آنجا که یکی از دو مجموعه امواجی که دارای بسامدهای مختلف‌اند سریعتر از دیگری حرکت می‌کند، لذا سواری بر قله يك موج همانند سواری بر قله موج دیگر نیست و همین که یکی از امواج بردیگری پیشی گرفت ناحیه تداخل قوی جابه‌جا می‌شود. پوش موج بر ایند نیز، از این پس، از شکل موج مؤلفه جدا می‌شود. همان‌طور که شکل ۱۶.۱ نشان می‌دهد در زمان t ، قله موج با بسامد ν_1 (یا هر نقطه با فاز ثابت دیگری) به اندازه $\nu_1 t$ پیش می‌رود، در حالی که قله موج دیگر، به اندازه $\nu_2 t$ پیش رفته است. طی همین زمان، پوش به مقدار $\nu_{gr} t$ جابه‌جا می‌شود.

يك تك موج سینوسی را که در جهت مثبت محور X حرکت می‌کند، می‌توان با $A \sin 2\pi(\nu t - x/\lambda) = A \sin(\omega t - kx)$ نشان داد. در این صورت تغییر مکان بر ایند



شکل ۱۶.۱ يك موج با سرعت فاز ν_1 ، و موج تکفام دیگری با بسامد متفاوت و با سرعت فاز ν_2 ، و پوش بر ایند آنها با سرعت گروه ν_{gr} به پیش می‌روند.

y دومی که در بالا توصیف شد، به صورت تابعی از x و t این طور بیان می شود

$$y = A \sin(\omega_1 t - k_1 x) + A \sin(\omega_2 t - k_2 x) \quad (27.1)$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی داریم

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

می توان موج بر ایند را به صورت زیر نیز نوشت

$$y = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \quad (28.1)$$

در صورتی که بسامد زاویه ای و عدد موج مربوط به امواج مؤلفه، با یکدیگر اندکی اختلاف داشته باشند، می توان نوشت

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{و} \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (29.1)$$

که در آن ω و k مقادیر متوسط اند. همچنین می توان اختلافها را به صورت

$$d\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad \text{و} \quad dk = k_1 - k_2 \quad (30.1)$$

نوشت.

با استفاده از روابط (29.1) و (30.1)، می توان رابطه (28.1) را به صورت ساده تر زیر بیان کرد

$$y = \left[2A \cos\left(\frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x\right) \right] \sin(\omega t - kx) \quad (31.1)$$

این معادله موج بر ایند شامل دو عامل است: اولین عامل (در کروشه) نمایشگر پوش است، حال آنکه دومین عامل، موج مؤلفه «متوسط» را نشان می دهد که با سرعت فاز $v_{ph} = \omega/k$ حرکت می کند. سرعت گروه، همان سرعت پوش است؛ و مانند حالت سرعت فاز، می توان آن را با تعیین نسبت ضرایب x و t بدست آورد. بنابراین

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad (32.1)$$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

سرعت گروه، مشتق ω نسبت به k است، و حال آنکه سرعت فاز، نسبت ω به k است؛ با نوشتن ω بدصورت $v_{ph}k$ ، داریم

$$v_{gr} = \frac{d(v_{ph}k)}{dk} = v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk} \quad (۳۳.۱)$$

اگر سرعت فاز برای تمام بسامدها یکسان و $dv_{ph}/dk = 0$ باشد، سرعت‌های فاز و گروه یکسان خواهند بود. ولی، برای یک محیط پاشنده که در آن سرعت فاز تابع بسامد است، وقتی $dv_{ph}/dk > 0$ باشد، سرعت گروه از سرعت فاز بیشتر و وقتی $dv_{ph}/dk < 0$ باشد، سرعت گروه از سرعت فاز کمتر خواهد بود.

حرکت شناسی نسبیتی : فضا و زمان

نظریه نسبیت خاص، در سال ۱۹۰۵/۱۲۸۴ توسط آلبرت اینشتین ارائه شد. این نظریه برای تمامی فیزیک نوین بنیادی است و یکی از بزرگترین دستاوردهای فکر بشری به شمار می رود. با آنکه اغلب این نظریه را اسرار آمیز و پیچیده تلقی می کنند، خواهیم دید که خصوصیات اصلی آن به طور طبیعی از دو اصل موضوع اساسی نسبیت ناشی می شوند. اصل موضوع اول، اصل نسبیت است که برای مکانیک کلاسیک، یا نیوتونی. نیز اساسی است؛ اصل موضوع دوم، ثابت سرعت نور است که با مفهوم نسبیت در تناقض ظاهری است و اگر مفاهیم کلاسیک فضا و زمان را بپذیریم، با اصل [نیز مغایر است. کار برجسته اینشتین این بود که این دو اصل را در یک نظریه خودسازگار جهان فیزیک تلفیق کرد. این نظریه در بسیاری از جنبه های اساسی، با آنچه که در فیزیک کلاسیک مطرح می شود متفاوت است. با توجه به آزمایشهای گوناگونی که صحت نظریه نسبیت خاص را به طور قطع تأیید کرده اند، این نظریه فرضی یا حدسی نیست.

چون نظریه نسبیت در مطالعه فیزیک اتمی و فیزیک هسته ای نقش اساسی ایفا می کند، به تفصیل درباره آن بحث خواهیم کرد. در این فصل حرکت شناسی نسبیتی، یا نسبیت فضا و زمان، و در فصل بعد دینامیک نسبیتی، یا نسبیت اندازه حرکت و انرژی را بررسی خواهیم کرد.

۱.۲ اصل نسبیت

نخست از دید فیزیک کلاسیک، مفهوم و نتایج اصل موضوع I را کاوش می‌کنیم.

اصل موضوع I، اصل نسبیت؛ قوانین فیزیک در تمام دستگاههای لخت یکسان، یا هم‌ورد، هستند. یعنی شکل ریاضی یک قانون فیزیکی یکسان باقی می‌ماند.

یک دستگاه لخت، به عنوان یک چارچوب مرجع مختصات، که در آن قانون لختی (قانون اول نیوتون) صادق است، تعریف می‌شود. اگر جسمی در یک دستگاه لخت قرار داشته باشد و هیچ نیروی خارجی خالصی به آن وارد نشود با سرعت ثابتی حرکت خواهد کرد. برای تعیین اینکه ناظری در یک دستگاه لخت قرار دارد یا نه، آزمایش ساده زیر را انجام می‌دهیم. ناظر جسمی را پرتاب می‌کند. اگر آن جسم مسیر بدون انحرافی را با سرعت ثابت طی کند آن دستگاه لخت خواهد بود. این کار فقط در یک دستگاه لخت واقعی انجام پذیر است؛ یا دقیقتر گفته باشیم، یک چنین دستگاهی فقط در فضای خالی و دور از دیگر جرمها می‌تواند وجود داشته باشد. ولی، هنگامی که نیروی گرانش وارد بر یک جسم، توسط نیروی دیگری خنثی شود، یک دستگاه مرجع، یا یک دستگاه مختصات متصل به زمین نیز می‌تواند، تقریباً به عنوان یک دستگاه لخت عمل کند. از این رو جسمی که در یک صفحه تخت بدون اصطکاک روی زمین می‌لغزد تقریباً در امتداد یک خط مستقیم، با سرعتی تقریباً ثابت حرکت خواهد کرد. از آنجا که قوانین فیزیک برای تمام دستگاههای لخت یکسان‌اند، اصل موضوع اول فیزیک نسبیت اشاره بر آن دارد که کلیه دستگاههای لخت معادل‌اند. به طوری که با آزمایش فیزیکی نمی‌توان هیچ دستگاه لختی را از دستگاه لخت دیگر تمیز داد.

برای بررسی مفهوم کامل اصل موضوع I، باید روابط بین مختصات فضایی و زمانی یک دستگاه لخت را با مختصات فضایی و زمانی یک دستگاه دیگر، که نسبت به دستگاه اول در حرکت است، پیدا کنیم.

۲.۲ تبدیلات گالیله

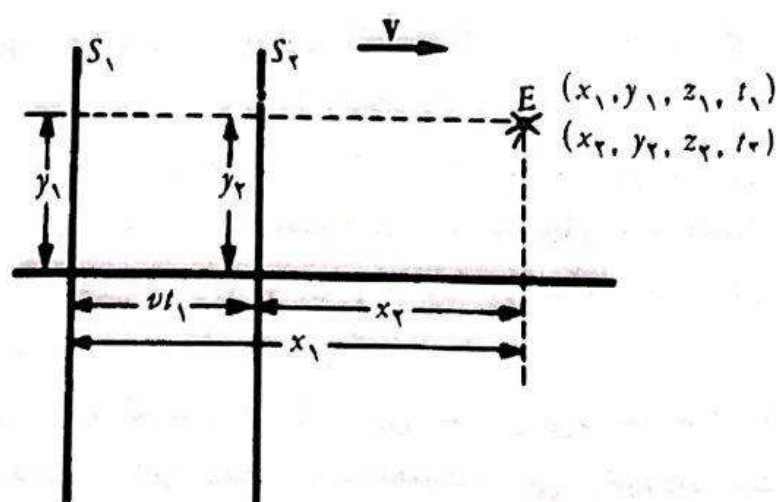
معادلاتی که در فیزیک کلاسیک مختصات فضا و زمان دو دستگاه مختصات را، که با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند، به هم مربوط می‌سازند، تبدیلات گالیله یا نیوتونی نامیده می‌شوند.

دو ناظر ۱ و ۲ را که به ترتیب در دستگاههای S_1 و S_2 قرار دارند در نظر

• در اثر دوران زمین حول محور خود، جسم از مسیر مستقیم الخط منحرف می‌شود.

می گیریم. دستگاه S_2 نسبت به دستگاه S_1 با سرعت ثابت v به طرف راست حرکت می کند؛ و برعکس S_1 نسبت به S_2 با سرعت ثابت $-v$ به طرف چپ حرکت می کند. شکل ۱.۲ را ملاحظه کنید. برای سهولت، محورهای X را منطبق و موازی با v ، سرعت S_2 نسبت به S_1 ، انتخاب می کنیم؛ جهت های مثبت X_1 و X_2 در همان جهت v اند. تنها می توان از حرکت نسبی S_1 و S_2 سخن گفت. هر ناظر برای اندازه گیری مکان و زمان يك ذره یا يك جسم، نسبت به دستگاه خود، يك خط كش و يك ساعت با خود دارد. فرض می شود كه دستگاه S_1 ، دارای تعداد بی پایانی ناظر است؛ به طوری كه در هر نقطه از فضا يك ناظر ایستاده باشد. تمام این ناظرهای ساكن نسبت به يكدیگر دارای خط كنه های يكسان و ساعت های همزمان اند. چون در فیزيك كلاسيك، فرض می كنیم كه يك علامت می تواند با سرعت نامتناهی از نقطه ای به نقطه دیگر فرستاده شود، همزمان كردن این ساعت ها با همدیگر مشكل نیست. یعنی هنگامی كه یکی از ساعت ها در مبدأ مختصات دستگاه S_1 ، زمان t_1 را نشان می دهد، تمام ساعت های دیگر در S_1 همان زمان t_1 را نشان خواهند داد. برای سهولت، تمام ناظرهای در حال سكون واقع در S_1 را می توان به عنوان ناظر S_1 در نظر گرفت. و همین طور تمام ناظرهای در حال سكون واقع در S_2 را ناظر S_2 خواهیم نامید.

هر ناظر با مشخص كردن مکان و زمان يك پدیده فیزیکی، همچون انفجار يك بمب كوچك، هر رویدادی را می تواند توصیف كند. مختصات فضایی و زمانی رویداد E (شكل ۱.۲) از نظر ناظر S_1 ، (x_1, y_1, z_1, t_1) ؛ و از نظر ناظر S_2 ، (x_2, y_2, z_2, t_2)



شكل ۱.۲ مختصات فضا و زمان يك رویداد E ، كه به وسیله دو ناظر، كه یکی نسبت به دیگری با سرعت ثابت v حرکت می كند، اندازه گیری می شوند.

است. مختصات فضایی x_1 ، y_1 و z_1 فاصله‌های این رویداد را از مبدأ مختصات در جهات X ، Y و Z نشان می‌دهند، که به کمک خط کش ناظر S_1 اندازه‌گیری می‌شوند، و مختصه زمانی t_1 ، زمان این رویداد را که به وسیله ساعت ناظر S_1 اندازه‌گیری می‌شود به دست می‌دهد.

فرض می‌کنیم که دو ناظر S_1 و S_2 ، هنگامی که به طور موقت نسبت به یکدیگر در حال سکون بوده‌اند، ساعت‌های خویش را همزمان و خط‌کش‌های خود را مقایسه کرده باشند. آنگاه دستگاه S_2 نسبت به دستگاه S_1 به حرکت درآمده باشد؛ ساعت‌های دو ناظر چنان تنظیم می‌شوند که هنگام عبور مبدأ S_2 از مبدأ S_1 ، صفر را نشان بدهند. وقتی $t_1 = 0$ است آنگاه $t_2 = 0$ است، و در این لحظه $x_1 = x_2$ است. به علاوه فرض می‌شود که محورهای Y و Z دو دستگاه مختصات متناظر موازی‌اند.

به کمک شکل ۱.۲ به سادگی می‌توان تبدیلات گالیله‌ای مختصات را نوشت. این تبدیلات، مختصات فضا و زمان را، که به وسیله ناظر S_2 اندازه‌گیری می‌شوند بر حسب مختصات اندازه‌گیری شده همان رویداد توسط ناظر S_1 بیان می‌دارند.

تبدیلات گالیله‌ای مختصات:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 - vt_1 \\ y_2 &= y_1 \\ z_2 &= z_1 \\ t_2 &= t_1\end{aligned}\quad (1.2)$$

که در آن تساویهای $y_2 = y_1$ و $z_2 = z_1$ از این حقیقت ناشی می‌شوند که حرکت نسبی دستگاه‌های S_1 و S_2 ، عمود بر محورهای مختصات Y و Z است. برای به دست آوردن مختصات دستگاه S_1 ، بر حسب مختصات S_2 ، فقط شاخصهای پایین را تعویض می‌کنیم و v را به $-v$ تبدیل می‌کنیم؛ این کار صحیح است، زیرا علامتهای ۱ و ۲ کاملاً اختیاری‌اند. اگر بگوییم که S_2 نسبت به S_1 با سرعت v حرکت می‌کند، هم ارزان است که بگوییم S_1 نسبت به S_2 با سرعت $-v$ حرکت می‌کند.

این معادلات تبدیل کلاسیکی، کاملاً بدیهی به نظر می‌رسند، اما ارزیابی فرضهای عمیقی که به طور ضمنی در آنها نهفته است از اهمیت خاصی برخوردار است.

این فرضها عبارت از این‌اند که فضا و زمان به مفهوم زیر مطلق‌اند؛ بازه‌های فضایی و زمانی بین هر دو رویداد، برای همه ناظرها یکسان است، از نقطه نظر تبدیلات گالیله، فرض مطلق بودن بازه‌های فضایی بدان معناست که اگر دو ناظر S_1 و S_2 خط‌کش‌های خود

را در يك زمان مقایسه کنند و طول آنها را یکسان ببینند، در آن صورت، صرفنظر از حرکت نسبی دو ناظر، طول آنها را از آن پس همواره یکسان خواهند یافت. طبیعت مطلق بودن بازه زمانی در تبدیلات گالیل حاکی از آن است که اگر در ابتدا ناظرهای S_1 و S_2 دارای ساعت‌های همزمان و میزان شده نسبت به یکدیگر باشند، صرفنظر از حرکت نسبی دو ناظر، از آن پس دو ساعت همواره يك زمان را نشان خواهند داد. مفاهیم متعارف روزمره ما در باره فضا و زمان، از معادلات تبدیل گالیل نتیجه می‌شوند و به‌طور صوری توسط این معادلات بیان می‌شوند.

تبدیلات سرعت و شتاب مستقیماً با مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادلات (۱.۲) حاصل می‌شوند. مؤلفه X سرعت اندازه‌گیری شده توسط ناظر S_1 را، به صورت dx_1/dt_1 تعریف می‌کنیم، و برای سهولت آن را به شکل $\dot{x}_1$ نشان می‌دهیم؛ نقطه در بالای مختصه به معنای مشتق اول آن نسبت به زمان است. به‌طور مشابه مؤلفه‌های Y و Z سرعت، به صورت $\dot{y}_1 = dy_1/dt_1$ ، $\dot{z}_1 = dz_1/dt_1$ هستند. مؤلفه‌های سرعت در دستگاه S_2 به صورت $\dot{x}_2 = dx_2/dt_2$ ، ... و غیره هستند. برای ناظر S_2 ، شتابها به وسیله $\ddot{x}_2 = d^2x_2/dt_2^2$ ، ... و غیره بیان می‌شوند. درك معنای دقیق مفهوم سرعت بسیار مهم است. dx_1/dt_1 را به عنوان حد مسافت طی شده در جهت X (یا حد dx_1) که توسط خط‌کش ناظر S_1 اندازه‌گیری می‌شود، تقسیم بر فاصله زمانی dt_1 ، که به وسیله ساعت همان ناظر S_1 اندازه‌گیری شده است، تعریف می‌کنیم؛ در این تعریف، dx_1 و dt_1 وقتی اندازه گرفته می‌شوند که بازه زمانی به سمت صفر میل کند. چون برای تعیین سرعت، باید اندازه‌گیری طول و زمان نسبت به يك دستگاه مختصات انجام شود، نسبت‌های dx_1/dt_2 و غیره بی‌معناست. در تبدیلات گالیل، ممکن است احتیاج چندانی به این تعریف دقیق از سرعت نباشد زیرا زمان مطلق در نظر گرفته می‌شود؛ یعنی، $dt_1 = dt_2$ و بنابراین $dx_1/dt_2 = dx_1/dt_1$ است؛ ولی بعداً خواهیم دید که تبدیلات مختصاتی که اصول نظریه نسبیت خاص را برآورده می‌کنند از يك چنین سادگی برخوردار نیستند.

با مشتق‌گیری از معادلات (۱.۲) نسبت به t ، به سادگی تبدیلات سرعت به دست می‌آید؛ مشتقات سرعتها، تبدیلات شتاب را به دست می‌دهند.

تبدیلات گالیلای سرعت:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \dot{x}_1 - v \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 \\ \dot{z}_2 &= \dot{z}_1\end{aligned}\quad (2.2)$$

تبدیلات گالیلای شتاب:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_1$$

(۳.۲)

$$\ddot{z}_2 = \ddot{z}_1$$

معادلات (۳.۲) نشان می‌دهند که سرعت يك ذره، که در دستگاه S_2 اندازه‌گیری شده است با سرعت همان ذره، که در دستگاه S_1 اندازه‌گیری می‌شود، منهای سرعت S_2 نسبت به S_1 (یعنی، منهای v) برابر است. از این رو سرعتها را می‌توان طبق قوانین معمولی جمع بردارها باهم ترکیب کرد. از معادلات (۳.۲) مشاهده می‌شود که در دو دستگاه لخت، که یکی نسبت به دیگری با سرعت ثابت حرکت می‌کند، مؤلفه‌های متناظر شتاب باهم برابرند.

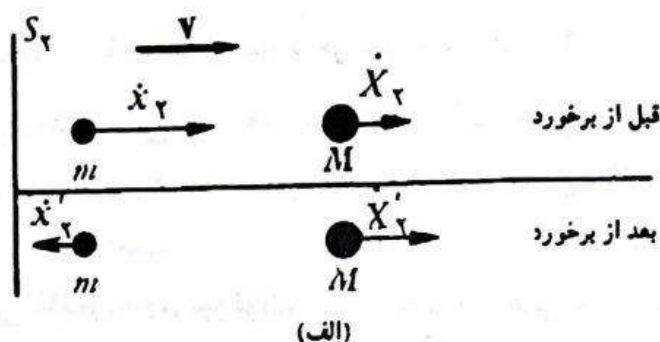
۳.۲ هم‌وردایی مکانیک کلاسیک در تبدیلات گالیله

برای روشن شدن اهمیت اصل موضوع I (اصل نسبیت) دو قانون فیزیکی مشهور مکانیک را تحت يك تبدیل گالیله‌ای بررسی می‌کنیم؛ بقای اندازه حرکت خطی و بقای انرژی. بقای اندازه حرکت خطی. فرض می‌کنیم که ناظری در دستگاه S_2 يك برخورد رو در رو بین دو ذره به جرمهای m و M را مشاهده می‌کند؛ شکل ۲.۲ الف را ملاحظه کنید. شکل ۲.۲ ب همان برخورد را از دید ناظری در دستگاه S_1 نشان می‌دهد. مانند قبل، دستگاه S_2 با سرعت v به طرف راست دستگاه S_1 حرکت می‌کند، و سرعتهای اندازه‌گیری شده به وسیله دو ناظر به کمک تبدیلات گالیله‌ای سرعت (معادلات ۲.۲) بههم مربوط می‌شوند.

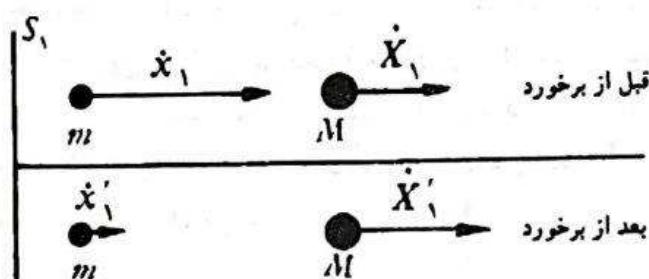
نمادگذاری در شکل ۲.۲ به صورت زیر است؛ حروف کوچک و حروف بزرگ، به ترتیب، مربوط به ذرات با جرمهای m و M اند؛ شاخصهای پایین ۱ و ۲، به ترتیب، مربوط به دو ناظرند؛ و سرعتهای بی‌پریم و باپریم، به ترتیب، نمایشگر سرعتهای اندازه‌گیری شده قبل و بعد از برخوردند.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که «آیا قانون بقای اندازه حرکت، يك قانون فیزیکی خوب است، یعنی، آیا در اصل موضوع I نظریه نسبت صدق می‌کند، و بنابراین تحت تبدیل گالیله‌ای هم‌ورداست؟» برای پاسخ به این سؤال، باید دید که آیا هر يك از دو ناظر S_1 و S_2 هنگام مشاهده برخورد رو در روی دو جرم m و M ، و اندازه‌گیری سرعتهای آنها با خط کش و ساعت خویش، می‌توانند برای بیان قانون بقای اندازه حرکت، يك شکل ریاضی یکسان بیابند.

برای ناظری که در دستگاه لخت S_2 قرار دارد، قانون بقای اندازه حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۲.۲ مشاهده برخورد دو ذره از دید دو ناظر که نسبت به یکدیگر با سرعت ثابت v حرکت می‌کنند.

اندازه حرکت بعد از برخورد = اندازه حرکت قبل از برخورد

بنابراین

$$m\dot{x}_2 + M\dot{X}_2 = m\dot{x}'_2 + M\dot{X}'_2 \quad (۴.۲)$$

با استفاده از تبدیلات گالیله‌ای سرعت، می‌توان این معادله را بر حسب سرعت‌های اندازه‌گیری شده توسط ناظری که در دستگاه لخت S_1 قرار دارد به شکل زیر نوشت

$$m(\dot{x}_1 - v) + M(\dot{X}_1 - v) = m(\dot{x}'_1 - v) + M(\dot{X}'_1 - v)$$

که به این صورت خلاصه می‌شود

$$m\dot{x}_1 + M\dot{X}_1 = m\dot{x}'_1 + M\dot{X}'_1 \quad (۵.۲)$$

معادلات (۳.۲) و (۵.۲) دارای شکل ریاضی یکسان‌اند؛ یعنی، فقط در شاخص‌های پایین ۱ و ۲ باهم فرق دارند. بنابراین، هم از نظر ناظر S_1 در یک دستگاه لخت و هم از نظر

ناظر S_2 در هر دستگاه دیگری که نسبت به S_1 با سرعت ثابت حرکت می کند، اندازه حرکت پایسته است. به طور خلاصه، قانون بقای اندازه حرکت يك قانون «خوب» مکانیک کلاسیک است. ولی باید خاطر نشان ساخت که اندازه حرکت خطی کل $m\dot{x}_1 + M\dot{X}_1$ قبل (یا بعد) از برخورد، که در S_1 مشاهده می شود، همان اندازه حرکت خطی کل $m\dot{x}_2 + M\dot{X}_2$ قبل (یا بعد) از برخورد، که در S_2 مشاهده می شود، نیست. در این مثال، اندازه حرکت کل مشاهده شده در S_1 بزرگتر است.

هموردایی قانون دوم نیوتون. حال نشان می دهیم که قانون دوم نیوتون تحت تبدیل گالیلای همورداست. دو جسم که جرمهای آنها به ترتیب m و M است را در نظر می گیریم؛ این دو جسم تحت تأثیر نیرویی مانند نیروی گرانش با یکدیگر برهم کنش می کنند. اگر نیروی خارجی خالصی بر دستگاه (دو جسم) اعمال نشود، دستگاه منزوی است، و اندازه حرکت خطی کل دستگاه باید ثابت باقی بماند. برای سهولت، فرض می کنیم که هر دو جسم بر محور X واقع اند و در امتداد آن حرکت می کنند. این ثابت بودن اندازه حرکت را ناظر S_1 این طور بیان می کند

$$m\dot{x}_1 + M\dot{X}_1 = \text{مقدار ثابت}$$

مشتق گیری نسبت به زمان از این رابطه چنین نتیجه می دهد

$$\frac{d}{dt_1} m\dot{x}_1 = - \frac{d}{dt_1} M\dot{X}_1 \quad (۶.۲)$$

چون نیروی وارد بريك جسم بر حسب آهنگ تغییر اندازه حرکت آن تعریف می شود، طرف چپ این معادله نیرویی است (f_1) که از سوی M بر m وارد و در دستگاه S_1 اندازه گیری می شود، و طرف راست آن نیرویی است (F_1) که از سوی m بر M وارد و در دستگاه S_1 اندازه گیری می شود، بنابراین

$$f_1 = -F_1$$

که قانون سوم نیوتون است.

اکنون نیروی وارد بر جرم m را به تنهایی در نظر می گیریم، داریم

$$f_1 = \frac{d}{dt_1} m\dot{x}_1 = m\ddot{x}_1 \quad (۷.۲)$$

که در آن فرض می شود جرم m در تمام دستگاههای لخت دارای مقداری یکسان است. به همین طریق از نظر ناظر S_2 نیز می توان نوشت

$$f_2 = \frac{d}{dt_2} m\dot{x}_2 = m\ddot{x}_2 \quad (۸.۲)$$

معادله (۳.۲) نشان می دهد که $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ ، و بنابراین از معادلات (۷.۲) و (۸.۲) نتیجه

می‌شود که $f_1 = f_2$ است. با استفاده از هموردایی قانون دوم نیوتون و این حقیقت که نیروها و شتاب تغییر نمی‌کنند، به سادگی چنین نتیجه می‌شود که اگر S_1 يك دستگاه لغت باشد، در آن صورت S_2 ، که نمایشگر هر دستگاه مختصاتی است که نسبت به S_1 با سرعت ثابت v حرکت می‌کند، نیز يك دستگاه لغت خواهد بود. از دیدگاه قانون دوم نیوتون، تمام دستگاههای لغت که تعدادشان نامتناهی است، هم ارز و غیر قابل تمایزند. واضح است که هر جارجوب مرجعی که نسبت به يك دستگاه لغت با شتاب حرکت کند، خود نمی‌تواند يك دستگاه لغت باشد، زیرا رابطه $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ دیگر برقرار نخواهد بود.

بررسی خود را به يك حالت خاص، که در آن دستگاههای لغت نسبت به یکدیگر با سرعت ثابت حرکت می‌کنند محدود می‌کنیم، و به حالت عامتری که در آن يك دستگاه نسبت به دستگاه دیگر با شتاب حرکت می‌کند نخواهیم پرداخت. بنابراین بحث ما فقط پیرامون نظریه نسبیت خاص خواهد بود، حالت عامتر مربوط به دستگاههای شتابدار در نظریه نسبیت عام بررسی می‌شود.

بقای انرژی. برای بررسی هموردایی قانون بقای انرژی تحت تبدیل گالیله مجدداً برخورد شکل ۲.۲ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که این برخورد کاملاً کشان است (گرچه به نظر می‌رسد که این فرض، برخوردهای غیر کشان را مستثنی می‌کند، اما در مقیاس زیراتمی تمامی برخوردها کشان‌اند).

از نظر ناظر S_2 قانون بقای انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود

انرژی جنبشی بعد از برخورد = انرژی جنبشی قبل از برخورد

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X}_2)^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}'_2)^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X}'_2)^2 \quad (9.2)$$

این معادله را می‌توان بر حسب سرعتهای اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر S_1 ، به کمک تبدیلات گالیله‌ای سرعت، معادله (۲.۲)، به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 - m\dot{x}_1v + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X}_1)^2 - M\dot{X}_1v + \frac{1}{2}Mv^2 \\ = \frac{1}{2}m(\dot{x}'_1)^2 - m\dot{x}'_1v + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X}'_1)^2 - M\dot{X}'_1v + \frac{1}{2}Mv^2 \end{aligned}$$

با استفاده از ناوردایی قانون بقای اندازه حرکت، رابطه (۵.۲)، می‌توان عبارتهایی را که شامل v اند حذف کرد، و چون عبارتهایی که شامل v^2 اند خود به خود از طرفین حذف می‌شوند، خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X}_1)^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}'_1)^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X}'_1)^2 \quad (10.2)$$

معادلات (۹.۲) و (۱۰.۲) دارای شکل ریاضی یکسان‌اند، و تنها در شاخصهای پایین ۱ و ۲ باهم اختلاف دارند؛ بنا بر این قانون بقای انرژی در تمام دستگاههای لخت معتبر است. دیدیم که تمام قوانین مکانیک کلاسیک (بقای اندازه حرکت، قانون حرکت نیوتون و قانون بقای انرژی) در تبدیل گالیله هم‌ودا هستند. از این رو، در مکانیک کلاسیک، تمام دستگاههای لخت هم‌ارزند و با هیچ آزمایشی در مکانیک نمی‌توان یک دستگاه لخت را از دیگر دستگاههای لخت متمایز ساخت. هم‌وردایی قوانین مکانیک که در اینجا به‌طور صوری به اثبات رسید، به‌طور ضمنی در تمام فیزیک مقدماتی برقرار فرض می‌شود. مثلاً، اطمینان داریم که از نظر ناظری واقع بر زمین و نیز از نظر ناظری که با قطاری در حرکت است، قوانین فیزیکی، در مورد توپ پینگ‌پونگی که در همان قطار با آن بازی می‌شود، یکسان‌اند.

می‌توان نتیجه دیگری را از هم‌وردایی قوانین مکانیک کلاسیک، تحت تبدیل گالیله به دست آورد و آن این است که معادلات اساسی تبدیل، فرض مطلق بودن بازه‌های فضا و بازه‌های زمانی را تأیید می‌کنند. تحلیل ما همچنین این فرض را که جرم یک جسم ثابت و از حرکت جسم نسبت به ناظر کاملاً مستقل است، شامل می‌شود؛ به طوری که می‌توان گفت که تبدیلات گالیله و مکانیک کلاسیک مستلزم آن‌اند که سه کمیت اساسی در آزمایشهای فیزیکی، یعنی طول، زمان، و جرم همگی از حرکت نسبی هر ناظری مستقل باشند. همان‌طور که خواهیم دید، فیزیک نسبیت اینشتین کاملاً در این عقیده تجدید نظر می‌کند.

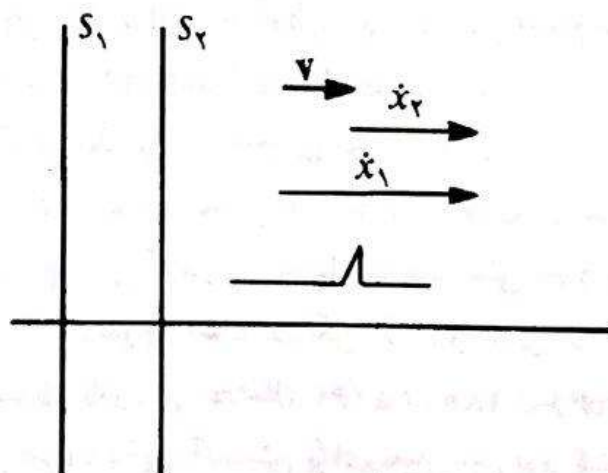
۴.۲ عدم موفقیت تبدیلات گالیله

می‌توان این سؤال را مطرح کرد که آیا قوانین الکترومغناطیس تحت تبدیل گالیله هم‌ودا هستند. چون اصل موضوع I ایجاب می‌کند که تمام قوانین فیزیکی هم‌ودا باشند، در صورتی می‌توان از اعتبار جهانی تبدیلات گالیله‌ای سخن گفت که بتوان هم‌وردایی تمام قوانین فیزیک را تحت این تبدیلات نشان داد.

برای بررسی این سؤال بحث خود را به انتشار امواج الکترومغناطیسی محدود می‌کنیم، زیرا همین بحث به‌تنهایی ما را قادر به تحلیل هم‌وردایی الکترومغناطیسی کلاسیک می‌کند، ولی ابتدا وضعیتی را در مکانیک بررسی می‌کنیم.

فرض می‌کنیم که یک تپ صوتی، نسبت به محیطی که آن را انتقال می‌دهد، به طرف راست حرکت کند. فرض می‌کنیم که این محیط در دستگاه S_1 به حال سکون باشد و سرعت اندازه‌گیری شده تپ صوتی در S_1 برابر با v_1 باشد. منظور از «سرعت»، سرعت تپ صوتی نسبت به محیطی است که در آن انتشار می‌یابد، که در این مثال محیط مورد نظر

هواست. از نظر ناظر S_2 که با سرعت v نسبت به S_1 حرکت می کند، سرعت اندازه گیری شده (ظاهری) به وسیله معادلات (۲.۲) بیان می شود، یعنی $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - v$ است؛ شکل ۳.۲. بنابراین، سرعت تب صوتی که به وسیله ناظری در دستگاه S_2 اندازه گیری می شود با سرعت اندازه گیری شده همان تب صوتی که توسط ناظر S_1 انجام می گیرد متفاوت است. این موضوع را با مثالی توضیح می دهیم. در هوای آرام، تب صوتی حاصل از شلیک يك توپ با سرعت 330 m/s ($\dot{x}_1$) نسبت به زمین (S_1) حرکت می کند. ناظری که در هواپیما یی (S_2) با سرعت 120 m/s (v) از چشمه صوتی دور می شود، سرعت تب نسبت به چارچوب لخت (S_2) است. از طرف دیگر، اگر هواپیما به چشمه نزدیک شود، در آن صورت $v = -120 \text{ m/s}$ و $\dot{x}_2 = (330 + 120) \text{ m/s}$ است، و ناظر S_2 سرعت تب را 450 m/s اندازه گیری خواهد کرد. بنابراین نتیجه می شود که عموماً سرعت يك تب صوتی به سرعت نسبی بین ناظر و محیط بستگی دارد که تب در آن حرکت می کند؛ و تنها در حالتی که ناظر نسبت به محیط (در اینجا هوا) ساکن باشد سرعت اندازه گیری شده در تمام جهات یکسان خواهد بود. این نتیجه به وسیله آزمایشهای مربوط به امواج صوتی تأیید می شود. ولی، سرعت اندازه گیری شده تب صوتی در دستگاه S_1 ، که در آن هوا ساکن است، به سرعت چشمه صوتی بستگی ندارد. البته هرگاه يك چشمه صوتی به جای تب تغییرات سینوسی در فشار هوا ایجاد کند، بسامد و طول موج صوت، مطابق اثر دوپلر، به حرکت نسبی چشمه و محیط بستگی خواهد داشت، ولی سرعت انتشار آشفتهگی از حرکت



شکل ۳.۲ يك تب از دید دو ناظر که نسبت به یکدیگر با سرعت v حرکت می کنند.

نسبی چشمه مستقل خواهد بود.

اکنون حالت کاملاً مانستهٔ مربوط به نور را در نظر می گیریم. يك تپ نوری نسبت به محیطی که در آن انتشار می یابد، با سرعت $c \equiv x_1$ به طرف راست حرکت می کند (شکل ۳.۲). از نظر تاریخی، به محیط انتشار نور، اثر گفته می شود. زیرا فیزیکدانان قرن نوزدهم قویاً معتقد بودند که تمام پدیده های فیزیکی در نهایت دارای منشأ مکانیکی اند. برای آنها غیر قابل تصور بود که يك آشفنگی الکترومغناطیسی بتواند در فضای خالی انتشار یابد. از این رو مفهوم اثر اختراع شد. تنها خاصیت برجستهٔ منسوب به اثر آن بود که آشفنگیهای الکترومغناطیسی را با خود «حمل» می کرد، و اینکه سرعت نور در دستگاه لختی که اثر در آن به حال سکون بود، فقط در چنین دستگاهی، برابر c بود.

بر حسب تبدیلات گالیه ای، ناظر ساکن در S_1 سرعت تپ نور را در جهت X_1 و نیز در هر جهت دیگری که تپ حرکت کند برابر c اندازه گیری می کند؛ و ناظر ساکن در دستگاه S_2 ، سرعت نور را، وقتی S_2 به طرف راست حرکت کند برابر، $c - v = x_2 - x_1 = c - v$ و وقتی S_2 به طرف چپ حرکت کند برابر مقدار متفاوت $c + v$ اندازه گیری می کند. این مطلب حاکی از آن است که سرعت نور اندازه گیری شده به وسیلهٔ هر ناظر، بجز ناظر S_1 ، به سرعت دستگاه مختصات نسبت به محیطی (اثر) که تپ از طریق آن انتشار می یابد بستگی دارد. بنابراین، مسلماً سرعت نور تحت تبدیلات گالیه ناوردافخواهد بود. در حقیقت، چنانچه این تبدیلات را در مورد نور به کار ببریم، آنگاه در طبیعت يك دستگاه لخت منحصر به فرد وجود خواهد داشت که در آن اثر به حال سکون است؛ در این دستگاه، و تنها در این دستگاه، سرعت اندازه گیری شدهٔ نور دقیقاً برابر c است.

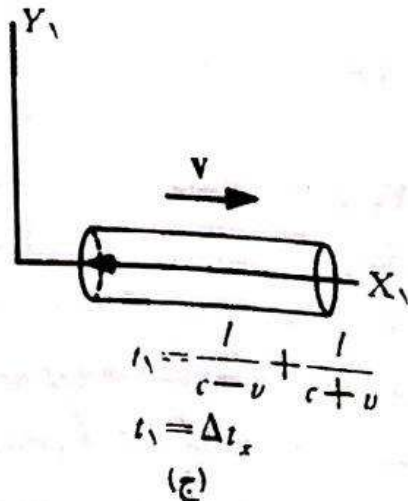
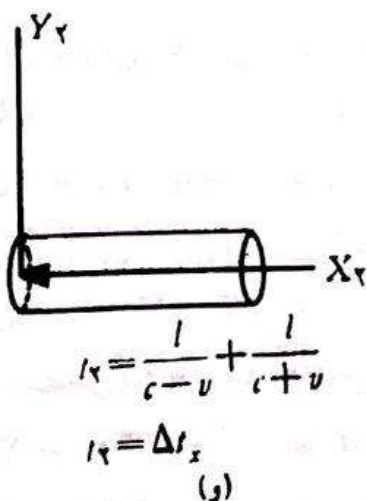
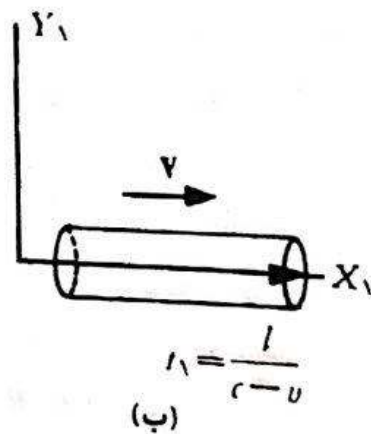
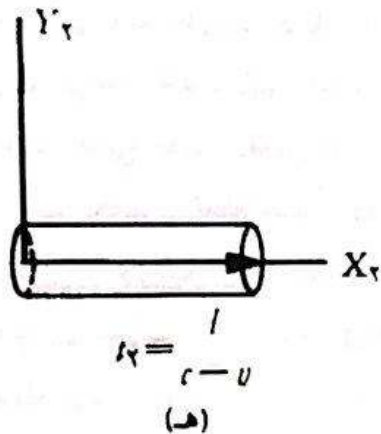
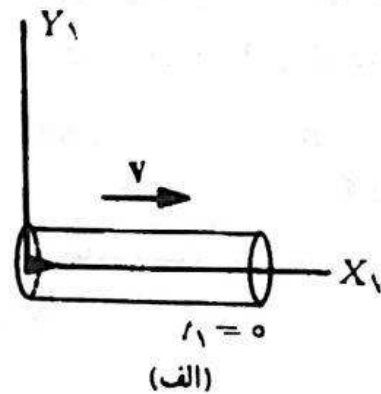
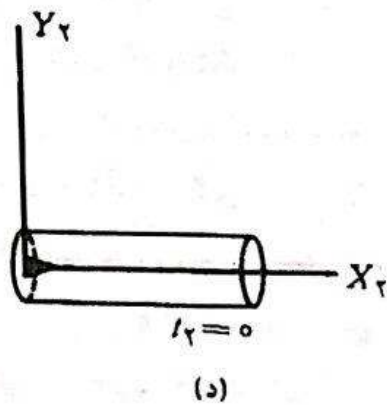
اساس آزمایشی که برای یافتن و تأیید وجود اثر انجام شد ساده است: آزمایش این است که سرعت نور را در دستگاههای لخت گوناگون اندازه گیری کنیم و ببینیم که آیا سرعت اندازه گیری شده در دستگاههای مختلف متفاوت است، و به ویژه ببینیم که آیا دلیلی بر وجود يك دستگاه لخت منحصر به فرد «اثر»، که در آن سرعت نور برابر c باشد وجود دارد. ولی انجام چنین آزمایشی به دلیل سرعت خیلی زیاد نور به مراتب مشکلتر از آزمایش مربوط به امواج صوتی است. در یکی از مشهورترین آزمایشهایی که تاکنون انجام گرفته است، مایکلسون^۱ و مورلی^۲ در سال ۱۸۸۷/۱۲۶۶ برای یافتن این دستگاه لخت منحصر به فرد تلاش کردند. این آزمایش برای تعیین این بود که آیا، ضمن سوق زمین در اثر فرضی حول محور خود و حول خورشید، تغییری در سرعت اندازه گیری شدهٔ نور به وجود می آید یا نه.

حال به تحلیل آزمایش مایکلسون-مورلی، یا شکل معاصر آن با میکروموجها و پرتوهای لیزر، می پردازیم. این آزمایش کوششی در جهت یافتن دستگاه لخت منحصر به فرد بود. فرض می شود که دستگاه لخت منحصر به فرد، S_1 باشد. آزمایش کننده از اینکه آیا در دستگاه S_1 به حال سکون است یا نه هیچ اطلاع قبلی ندارد؛ بنابراین به طور کلی باید فرض کند که در دستگاه دیگری مانند S_2 ، که با سرعت v نسبت به S_1 حرکت می کند قرار دارد. در لحظه ای که آزمایش کننده در دستگاه S_1 به حال سکون است، S_2 همان S_1 است، و سرعت نور برابر c اندازه گیری می شود، ولی شش ماه بعد، هنگامی که زمین در جهت خلاف حرکت خود به دور خورشید می چرخد، یقیناً S_2 نسبت به S_1 در حرکت خواهد بود، و در این حال سرعت اندازه گیری شده نور متفاوت خواهد بود.

به علت بزرگی فوق العاده زیاد c ، در مقایسه با سرعت مداری زمین، و به دلایل عملی، اندازه گیری سرعت نور روی زمین، باید بر اساس اندازه گیری در یک بازه زمانی معین باشد. این بازه زمانی مدت زمانی است که یک پرتو نوری از نقطه معینی به آینه ای بنابد و پس از بازتاب به همان نقطه برگردد. با اندازه گیری زمان یک رفت و برگشت، نمی توان سرعت نور را در یک جهت اندازه گیری کرد؛ بلکه متوسط سرعت نور در امتداد یک خط و در دو جهت مخالف اندازه گیری می شود. زمان لازم برای رفتن از A به B و بازگشت به A همان زمانی است که، برای رفتن از B به A و بازگشت به B لازم است. لذا واضح است که باید بازه های زمانی مربوط به رفت و برگشتها را در امتداد دو خط غیر موازی مقایسه کرد: وقتی که یکی از این دو امتداد موازی با جریان اثر و دیگری عمود بر آن باشد، اختلاف بازه های زمانی در امتداد آنها پیشینه خواهد بود.

استوانه ای به طول l و به حال سکون در دستگاه S_1 را که در امتداد محور X_1 قرار دارد در نظر می گیریم؛ X_2 ، جهت حرکت نسبی دستگاههای S_1 و S_2 است (شکلهای ۴.۲ د تا ۴.۲ و). همانند قبل، S_2 با سرعت v نسبت به دستگاه لخت منحصر به فرد S_1 (اثر) به طرف راست حرکت می کند. مادامی که تپ نوری به طرف راست حرکت می کند، ناظر واقع در S_2 سرعت تپ را برابر $c-v$ اندازه می گیرد، و زمان برای رسیدن تپ به قاعده سمت راست استوانه، برابر $l/(c-v)$ است؛ تپ پس از بازتاب، با سرعت $c+v$ نسبت به S_2 به سمت چپ حرکت می کند و در مدت زمان $l/(c+v)$ ، به قاعده سمت چپ استوانه می رسد. بنابراین بازه زمانی Δt_x برای آنکه تپ نوری یک رفت و برگشت کامل انجام دهد چنین خواهد بود

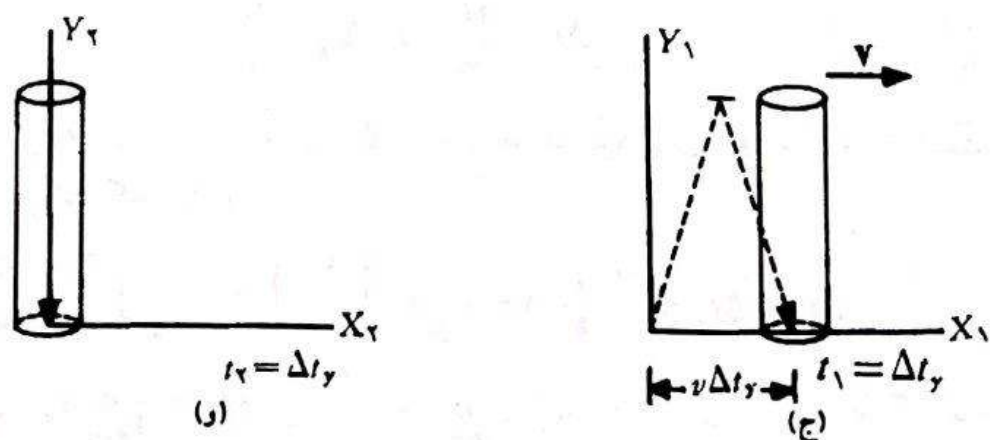
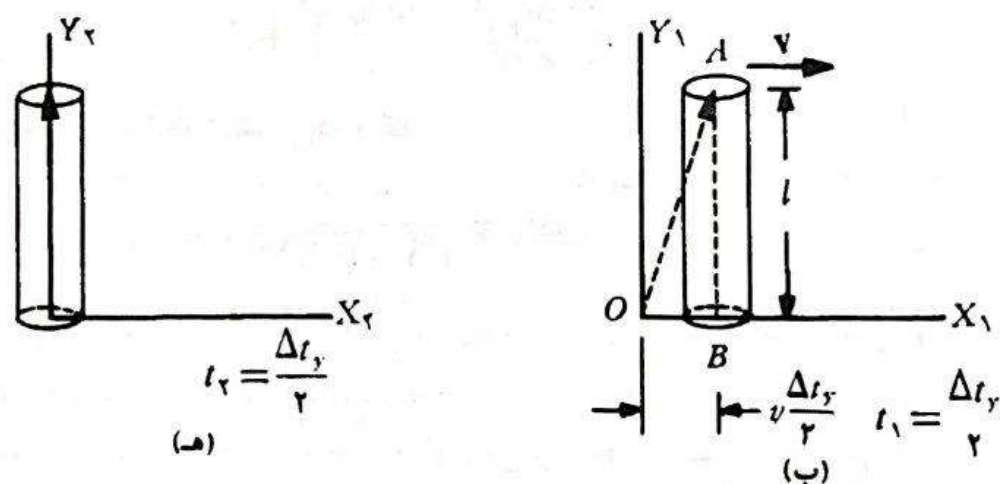
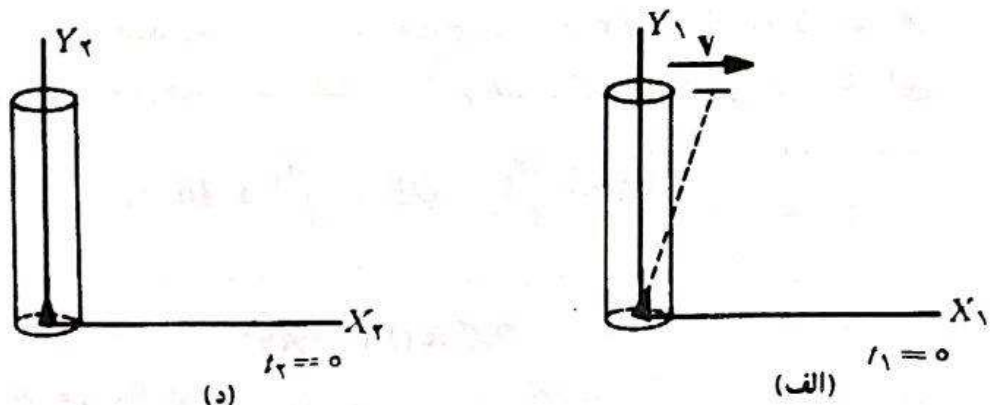
$$\Delta t_x = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l/c}{1-(v/c)^2} \quad (11.2)$$



شکل ۴.۲ زمان پرواز يك تپ نوری که به وسیله دو ناظر که با سرعت نسبی ثابت v حرکت می کنند اندازه گیری می شود. تپ به موازات v حرکت می کند.

توالی رویدادها از نظر ناظر S_1 در شکل های ۴.۲ الف تا ۴.۲ ج نشان داده شده اند. حال وضعیتی را در نظر می گیریم که در آن ناظر S_r همان استوانه را در امتداد محور Y_r قرار می دهد. بازه زمانی لازم برای آنکه تپ يك رفت و برگشت کامل از قاعده

پایینی به قاعده بالایی و بالعکس را انجام بدهد با Δt_y نمایش می‌دهیم. توالی رویدادها آن‌طور که به وسیله ناظر S_1 مشاهده می‌شود در شکل‌های ۵.۲ الف



شکل ۵.۲ زمان پرواز يك تب نوری که به وسیله دو ناظر که با سرعت نسبی ثابت v حرکت می‌کنند اندازه گرفته می‌شود. تب از نظر ناظر S_2 عمود بر v حرکت می‌کند.

تا ۵.۲ ج، و این توالی از نظر S_2 در شکل‌های ۵.۲ د تا ۵.۲ و نمایش داده شده‌اند. مطابق شکل ۵.۲ ب از نظر ناظر S_1 تنها آن تپ نوری که مبدأ مختصات دستگاه S_1 را در جهت خاص ترك می‌کند، و الزاماً با سرعت c حرکت می‌کند، به مرکز قاعده بالایی استوانه، یعنی به نقطه A خواهد رسید. تپ با سرعت c در زمان $\Delta t_y/2$ فاصله O تا A را می‌پیماید، در حالی که در همان زمان استوانه با سرعت v از O به B می‌رود. بنابراین

$$OA = \frac{c \Delta t_y}{2} \quad OB = \frac{v \Delta t_y}{2} \quad \text{و} \quad AB = l$$

ولی

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

با جایگزینی خواهیم داشت

$$\left(\frac{c \Delta t_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{v \Delta t_y}{2}\right)^2 + l^2$$

و سرانجام، از حل این معادله نتیجه می‌شود که

$$\Delta t_y = \frac{2l/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (12.2)$$

مقایسه روابط (۱۱.۲) و (۱۲.۲) نشان می‌دهد که $\Delta t_x \neq \Delta t_y$ است؛ یعنی، زمان لازم برای يك رفت و برگشت تپ نوری در دو جهت عمود بر هم با یکدیگر برابر نیست. البته، اگر استوانه در دستگاه S_1 به حال سکون می‌بود، در آن صورت v برابر با صفر می‌شد و

$$\Delta t_x = \frac{2l}{c} \quad \text{و} \quad \Delta t_y = \frac{2l}{c}$$

بنابراین هنگامی که $v = 0$ است، $\Delta t_x - \Delta t_y = 0$ خواهد بود. وقتی که دستگاه S_2 نسبت به دستگاه S_1 حرکت کند، داریم

$$\Delta t_x - \Delta t_y = \frac{2l}{c} \left\{ \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]^{-1} - \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} \right\}$$

می‌توان فرض کرد که $v/c \ll 1$ است. با استفاده از بسط دوجمله‌ای (با صرف نظر کردن از جملات مرتبه بالاتر) خواهیم داشت

$$\Delta t_x - \Delta t_y = \frac{2l}{c} \left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right] = \frac{2l}{c} \frac{v^2}{2c^2} \quad (13.2)$$

چون مطابق روابط (۱۱.۲) و (۱۲.۲) زمان يك رفت و برگشت کامل تقریباً $\Delta t_x = 2l/c$ است، با استفاده از رابطه (۱۳.۲)، تغییر نسبی بیشینه در بازه زمانی يك رفت و برگشت، برای دو امتداد عمود بر هم برابر

$$\frac{\Delta t_x - \Delta t_y}{\Delta t_x} = \frac{v^2}{2c^2} \quad (14.2)$$

است. سرعت بیشینه v که روی زمین به دست می آید، عبارت است از سرعت مداری سیاره زمین به دور خورشید و برابر $3 \times 10^4 \text{ m/s}$ است. جایگذاری این مقدار در رابطه (۱۴.۲) نشان می دهد که تغییر نسبی در بازه زمانی مربوط به يك رفت و برگشت می تواند برابر 5×10^{-9} (پنج دریلیون) باشد و لی مایکلسون و مورلی مطمئن بودند که قادرند تغییری به اندازه صد برابر کوچکتر از این، یعنی پنج قسمت در يك صد یلیون را مشاهده کنند.

مایکلسون و مورلی، با استفاده از يك وسیله نوری دقیق، به نام تداخل سنج، که چند سال قبل از آن توسط مایکلسون ساخته شده بود، توانستند به طور غیرمستقیم اختلاف بین Δt_x و Δt_y را اندازه بگیرند. این آزمایش به صورت زیر انجام گرفت يك باریکه نوری را به دو باریکه جدا از هم، که به طور عمود بر یکدیگر حرکت می کردند تقسیم کردند. این دو باریکه پس از بازتاب، در همان مسیرهای مربوط به خود بر می گشتند و سرانجام با هم ترکیب می شدند تا يك نقش تداخل تشکیل دهند. با انجام این آزمایش در دفعات زیاد و در فصلهای مختلف سال و در مکانهای مختلف، مایکلسون و مورلی همواره $\Delta t_x - \Delta t_y$ را صفر یافتند؛ یعنی، نتیجه آزمایش همیشه صفر بود.* این فقط می تواند يك معنی داشته باشد: هر دستگاه لغت S_7 چنان رفتار می کند که

* پژوهشگران دیگری آزمایشهای مشابهی انجام داده اند. دو آزمایش مخصوصاً جالب در مورد سوق اثر، توسط اسن (Essen) و جاسجا (Jaseja) و همکارانش انجام شده است. آزمایشی که به وسیله اسن (L. Essen, *Nature*, vol. 175, p. 793, 1955) انجام شد مانسته آزمایش مایکلسون-مورلی است، منتهی در آن از میکروموجهای رادیویی استفاده شده است. در این آزمایش باریکههای رادیویی با طول موج کوتاه جایگزین باریکههای نوری شده است و به جای مشاهده تداخل دو باریکه نور زنشهای بین دو کاواک تشدیدی، در دو امتداد عمود بر هم مشاهده می شوند. آزمایشی که به وسیله جاسجا و همکارانش

(T.S. Jaseja, A. Javin, and C.H. Townes, *Physical Review*, vol. 133, p. A 1221, 1964)

انجام شد بسامدهای فرسرخدولیزر شدیداً تکفام با محورهای عمود بر هم را مقایسه می کند. دقت هر يك از این آزمایشها خیلی پیش از دقت مربوط به آزمایش اولیه مایکلسون-مورلی است.

گویی همان دستگاه منحصر به فرد K_1 است؛ یا سرعت اندازه‌گیری شده نور در همه دستگاههای لخت در همه جهات و برای همه ناظرها یکسان و برابر c است. بنابراین هیچ دلیل تجربی برای وجود يك دستگاه لخت منحصر به فرد، با اثر، موجود نیست. اذاین دو تمامی دستگاههای لخت برای انتشار نودهم‌ارزند. این اظهار نظر بنیادی در مورد ثبات سرعت نور برای همه ناظرها نه تنها به وسیله آزمایش مایکلسون-مورلی بلکه همان گونه که خواهیم دید به وسیله آزمایشهای متعدد دیگری هم به تأیید رسیده است.

۵.۲ اصل موضوع دوم و تبدیلات لورنتس^۱

اکنون اصل موضوع دوم نسبت را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

اصل موضوع دوم: سرعت نور در خلا^۲ مقداری ثابت و مستقل از دستگاه لخت، چشمه و ناظر است.

این اصل موضوع که بر پایه آزمایش بنا شده است آشکارا با تبدیلات گالیله ناسازگار است، زیرا تبدیلات گالیله ایجاب می‌کنند که سرعت اندازه‌گیری شده نور به حرکت ناظر بستگی داشته باشد. اینشتین ناسازگاری بین اصل موضوع II و تبدیلات گالیله را مشاهده کرد. از آنجا که اصل موضوع II يك واقعیت تجربی است، نمی‌توان از آن صرف نظر کرد. با وجود موفقیت ظاهری تبدیلات گالیله در مکانیک کلاسیک و جالب بودن آنها در آزمایشهای معمولی، باید آنها را با تبدیلاتی که دارای محدودیت کمتری اند و در شرایط مناسب به تبدیلات گالیله تحویل می‌شوند جایگزین کرد. میزان تأثیر چنین تغییری با این حقیقت آشکار می‌شود که تبدیلات گالیله شامل همین مفاهیم روزمره ما از فضا و زمان و سرشت به ظاهر مطلق آنهاست.

با مشاهده اینکه تبدیلات گالیله به طور اساسی ناقص‌اند، اینشتین به فکر یافتن معادلات تبدیل مختصاتی که با اصول موضوع I و II هماهنگ باشند افتاد. این اصول، هم‌وردایی قوانین فیزیکی تحت تبدیلات مختصات و ناوردایی سرعت نور را بیان می‌کنند. دواصلی که تا به حال جداگانه مورد بحث قرار گرفتند را می‌توان به صورت يك اصل تنها در نظر گرفت، که در آن ناوردایی سرعت نور به صورت يك قانون اساسی فیزیک در نظر گرفته می‌شود.

معادلات تبدیلی را به دست خواهیم آورد که در بایسته‌های نسبیت را برآورده کنند، همان طور که اینشتین در ۱۹۰۵ این کار را انجام داد. این معادلات به تبدیلات لورنتس

مشهورند، زیرا در سال ۱۲۸۲/۱۹۰۳ لورنتس در نظریه الکترومغناطیس خود آنها را پایه گذاری کرد.

برای سهولت فرض می کنیم که حرکت فقط در صفحه XY و حرکت نسبی دو دستگاه لخت در امتداد محور X انجام شود. چون هر دو محور Y و Z بر جهت حرکت نسبی دو دستگاه عمودند، رفتار این حرکت در امتداد هر یک از این دو محور یکسان خواهد بود. از نظر ناظر دستگاه لخت S_1 مختصات فضا و زمان یک رویداد (x_1, y_1, t_1) و از نظر ناظر دستگاه لخت S_2 مختصات همان رویداد، (x_2, y_2, t_2) است؛ عمومی ترین نوع معادلات تبدیل، که مختصات فضا و زمان این رویداد را در دو دستگاه به هم مربوط می کنند، باید به شکل زیر باشند

$$\begin{aligned}x_2 &= A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3 t_1 + A_4 \\y_2 &= B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3 t_1 + B_4 \\t_2 &= D_1 x_1 + D_2 y_1 + D_3 t_1 + D_4\end{aligned}\quad (15.2)$$

که در آن ۱۲ کمیت $A_1, \dots, A_4, \dots, D_4$ مقادیری ثابت و مستقل از مختصات فضا و زمان اند ولی می توانند به سرعت نسبی حرکت دو دستگاه لخت بستگی داشته باشند. فرض کردیم که معادلات (۱۵.۲) معادلات خطی هستند که فقط شامل متغیرهایی از مرتبه اول اند. چون فقط در این صورت یک تک رویداد واقعی (x_1, y_1, t_1) در S_1 متناظر با یک تک رویداد واقعی (x_2, y_2, t_2) در S_2 خواهد بود و برعکس. توجه کنید که اکنون مختصه زمانی t_2 در S_2 شامل جملاتی از مختصات فضایی x_1 و y_1 از S_1 است، که نمی توان آنها را به حساب نیاورد. کار ما یافتن مقادیر ۱۲ ضریب ثابت $(A_1, \dots, D_4)$ است. با گزینش جهت محورها آن طور که در میان تبدیلات گالیله انتخاب شد (شکل ۱۰.۲)، ساده ترین رابطه بین مختصات فضا-زمانی S_1 و مختصات فضا-زمانی S_2 را به دست خواهیم آورد.

مؤلفه های سرعت یک ذره را که در دو دستگاه لخت اندازه گیری می شوند می توان به سادگی از رابطه (۱۵.۲) به دست آورد. مؤلفه های X و Y سرعت مشاهده شده در دستگاه S_2 را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\dot{x}_2 \equiv \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} \quad \text{و} \quad \dot{y}_2 \equiv \frac{\Delta y_2}{\Delta t_2}$$

و مؤلفه های متناظر مشاهده شده در S_1 به شکل

$$\dot{x}_1 \equiv \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad \text{و} \quad \dot{y}_1 \equiv \frac{\Delta y_1}{\Delta t_1}$$

تعریف می‌شوند. با استفاده از رابطه (۱۵.۲) خواهیم داشت

$$\dot{x}_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta y_1 + A_3 \Delta t_1}{D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta y_1 + D_3 \Delta t_1}$$

با تقسیم صورت و مخرج طرف راست این معادله بر Δt_1 ، می‌توان $\dot{x}_2$ را بر حسب $\dot{x}_1$ و $\dot{y}_1$ بیان کرد

$$\dot{x}_2 = \frac{A_1 \dot{x}_1 + A_2 \dot{y}_1 + A_3}{D_1 \dot{x}_1 + D_2 \dot{y}_1 + D_3} \quad (۱۶.۲)$$

و به‌طور مشابه می‌توان نوشت

$$\dot{y}_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta t_2} = \frac{B_1 \dot{x}_1 + B_2 \dot{y}_1 + B_3}{D_1 \dot{x}_1 + D_2 \dot{y}_1 + D_3} \quad (۱۷.۲)$$

توجه کنید که مخرج‌های این دو معادله یکسان‌اند.

ابتدا در تبدیلات (۱۵.۲) و (۱۷.۲) چند شرط عمومی را به‌کار خواهیم بست؛ این عمل تعداد ضرایب غیر صفر را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش خواهد داد. سپس برای به دست آوردن تبدیلات مناسب مربوط به رویدادهای فضا-زمانی، نتایج تجربی را که دال بر یکسانی سرعت نور در تمام دستگاه‌های لخت‌اند به‌کار خواهیم برد.

تبدیل فضا-زمانی رویدادها. درست مانند تبدیلات گالیله (معادله ۱.۲ و شکل ۱.۲)، محور X را موازی و هم‌جهت با سرعت نسبی v حرکت دستگاه S_2 نسبت به دستگاه S_1 انتخاب می‌کنیم. این بدان معناست که ناظر S_1 می‌بیند که مبدأ مختصات دستگاه S_2 با سرعت v در امتداد X_1 حرکت می‌کند؛ برعکس ناظر S_2 می‌بیند که مبدأ مختصات دستگاه S_1 با سرعت v در امتداد X_2 حرکت می‌کند. ساعت‌های واقع در S_1 و S_2 را چنان تنظیم می‌کنیم که وقتی مبدأ S_2 از مبدأ S_1 می‌گذرد هر دو ساعت صفر را نشان بدهند. از این رو، وقتی $t_1 = 0$ است، در آن صورت $t_2 = 0$ خواهد بود؛ در این لحظه مبدأهای S_1 و S_2 برهم منطبق می‌شوند و مختصات فضا-زمانی مبدأ S_2 از نظر ناظرهای S_1 و S_2 به صورت زیرند

ناظر S_1 ، $(0, 0, 0)$ را مشاهده می‌کند

ناظر S_2 ، $(0, 0, 0)$ را مشاهده می‌کند

با قراردادن این مقادیر در رابطه (۱۵.۲) داریم

$$A_3 = B_3 = D_3 = 0$$

با گزینش مبدأها به گونه‌ای که در لحظه $t_1 = t_2 = 0$ بر یکدیگر منطبق شوند، سه ضریب A_2 ، B_2 و D_2 صفر می‌شوند.

پس حرکت مبدأ دستگاه S_1 را بررسی می‌کنیم. البته از نظر ناظر S_1 این مبدأ همواره در حال سکون است، $\dot{x}_1 = 0$ و $\dot{y}_1 = 0$. از نظر ناظر S_2 این مبدأ در امتداد $-X_2$ با سرعت v حرکت می‌کند. بنابراین $\dot{x}_2 = -v$ و $\dot{y}_2 = 0$ است. با قراردادن این مقادیر در روابط (۱۶.۲) و (۱۷.۲)، خواهیم داشت

$$-v = \frac{A_2}{D_2} \quad \text{یا} \quad A_2 = -v D_2$$

$$0 = \frac{B_2}{D_2} \quad \text{یا} \quad B_2 = 0$$

به همین ترتیب، اکنون چنانچه حرکت مبدأ S_2 را بررسی کنیم، داریم $\dot{x}_2 = 0$ و $\dot{y}_2 = +v$. جایگزینی این مقادیر در روابط (۱۶.۲) و (۱۷.۲) چنین نتیجه می‌دهد

$$0 = A_1 v + A_2 \quad \text{یا} \quad A_2 = -A_1 v$$

$$0 = B_1 v + B_2 \quad \text{یا} \quad B_1 = -\frac{B_2}{v} = \frac{0}{v} = 0$$

در این صورت معادله مربوط به y_2 در رابطه (۱۵.۲) به صورت زیر تحویل می‌شود

$$y_2 = B_2 y_1 \quad (18.2)$$

اکنون نشان می‌دهیم که $B_2 = 1$ است. دوميله اندازه‌گیری مشابه را که طول در حال سکون هر کدام در هریک از دستگاه‌های S_1 و S_2 ، L_0 است در نظر می‌گیریم. یکی از دوميله را در دستگاه S_1 در امتداد محور Y_1 طوری قرار می‌دهیم که يك انتهای آن در نقطه $y_1 = 0$ و انتهای دیگر آن در $y_1 = L_0$ باشد. ميله دوم را بین نقاط $y_2 = 0$ و $y_2 = L_0$ در امتداد محور Y_2 قرار می‌دهیم. ناظر S_2 طول ميله واقع در S_1 را چقدر اندازه می‌گیرد؟ می‌دانیم که چون مختصات Y_2 مربوط به دو انتهای ميله به زمان بستگی ندارد (نشان دادیم که $B_2 = 0$ است)، در هر زمانی می‌توان این مختصات را تعیین کرد و تفاوت این مختصات، طولی را که در S_2 مشاهده می‌شود به دست می‌دهد. با استفاده از رابطه (۱۸.۲)، طول ميله متحرك (L_2) از نظر ناظر S_2 چنین خواهد بود

$$L_2 = B_2 L_0$$

مجدداً، با به کار بردن رابطه (۱۸.۲) از نظر ناظر S_1 طول میله ساکن در دستگاه S_2 برابر

$$L_0 = B_2 L_1$$

است. در این صورت، نسبت طول میله متحرک به طول میله ثابت از نظر ناظر S_2 و از نظر ناظر S_1 باید یکسان باشد؛ در غیر این صورت می توان بین دو دستگاه لغت تمایز قائل شد! بنابراین

$$L_2 = \frac{L_1}{L_0} \quad \text{یا} \quad B_2 = \frac{1}{B_1} \quad \text{با} \quad B_2 = +1$$

در این صورت معادله (۱۸.۲) چنین می شود

$$y_2 = y_1$$

توجه کنید که جواب $B_2 = -1$ را در نظر نگرفته ایم، زیرا این جواب حاکی از آن است که نقطه $L_0 = y_1$ به نقطه $y_2 = -L_0$ انتقال می یابد که حقیقت ندارد. چون مختصه Z مشابیه مختصه Y است، مؤلفه های Z به صورت زیر به هم تبدیل می شوند

$$z_2 = z_1$$

مختصات عمود بر v ، سرعت نسبی دو دستگاه لغت، در هر دو دستگاه یکسان اند. این مطلب جدیدی نیست.

در باره ضرایب A_2 و D_2 در رابطه (۱۵.۲) چه می توان گفت؟ به سادگی می توان نشان داد که این ضرایب صفرند. ابتدا میله ای به طول L_0 در حال سکون در S_1 را به موازات محور Y_1 از صفر تا L_0 در نظر می گیریم. در این صورت از رابطه (۱۶.۲) روابط زیر نتیجه می شوند

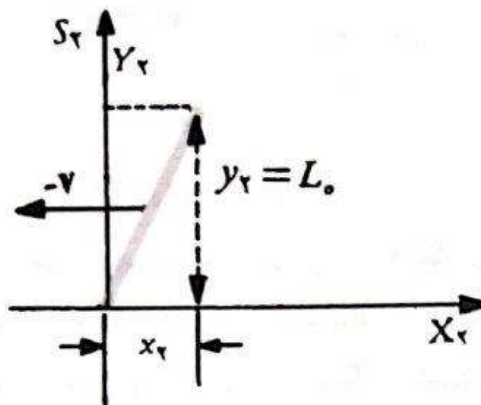
$$\dot{x}_2 = -v = \frac{A_2}{D_2} \quad \text{در مورد انتهای پایینی}$$

$$\dot{x}_2 = -v = \frac{A_2}{D_2} \quad \text{در مورد انتهای بالایی}$$

بنابراین، از نظر ناظر S_2 ، هر دو انتها با سرعت ثابت v به طرف چپ حرکت می کنند. حال، چنانچه $A_2 = 0$ باشد، در آن صورت در زمان $t_1 = t_2 = 0$ ، میله ای که در امتداد محور Y_1 قرار دارد دارای $x_1 = 0$ خواهد بود و طبق روابط (۱۵.۲) و (۱۸.۲)، ناظر S_2 مقادیر زیر را اندازه خواهد گرفت

$$x_2 = A_2 y_1$$

$$y_2 = y_1$$



شکل ۶.۲ مختصات x_2 و y_2 میله که به وسیله ناظر S_2 اندازه گیری شده اند.

شکل ۶.۲ را ملاحظه کنید. ولی از دیدگاه تقارن نمی تواند این طور باشد، زیرا باید حول محور سرعت نسبی v تقارن داشته باشیم. و این فقط در صورتی که ناظر S_2 میله را عمود بر v مشاهده کند، صحت خواهد داشت؛ بنابراین

$$A_2 = 0$$

خواهد بود.

برای اینکه نشان بدهیم که $D_2 = 0$ است، دو رویداد در دستگاه S_1 را که در یک زمان و در یک مختصه X (مثلاً در $x_1 = 0$ و $t_1 = 0$) به وقوع می پیوندند بررسی می کنیم. چون هر دو رویداد در یک زمان اتفاق می افتند، از نظر ناظر S_1 این دو رویداد همزمان اند. اگر یکی از رویدادها در مبدأ مختصات دیگری در $y_1 = L_0$ اتفاق بیفتد، در آن صورت، طبق آخرین معادله روابط (۱۵.۲)، از نظر ناظر S_2 ، رویداد در L_0 به اندازه $\Delta t_2 = D_2 L_0$ دیرتر از رویداد در مبدأ مشاهده می شود. از این رو از نظر ناظر S_2 رویدادها در امتداد محور Y_2 (که در S_1 همزمان اند) بسته به آنکه در بالا یا پایین این محور اتفاق بیفتند، دیرتر یا زودتر از $t_2 = 0$ به وقوع می پیوندند. این موضوع مجدداً تقارن حول محور v را نقض می کند، مگر آنکه

$$D_2 = 0$$

باشد. با جایگزینی تمام ضرایب در روابط (۱۵.۲) و (۱۶.۲)، روابط زیر حاصل می شوند (در این روابط به منظور کامل بودن، مختصات Z را نیز اضافه می کنیم)

تبدیلات مختصات

$$x_2 = A_1(x_1 - vt_1)$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = z_1$$

$$t_2 = D_1 x_1 + A_1 t_1$$

(۱۹.۲)

تبدیلات سرعت

$$\dot{x}_2 = \frac{A_1(\dot{x}_1 - v)}{D_1 \dot{x}_1 + A_1}$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\dot{y}_1}{D_1 \dot{x}_1 + A_1} \quad (20.2)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\dot{z}_1}{D_1 \dot{x}_1 + A_1}$$

با استفاده از همگنی فضا و استدلالهای مربوط به تقارن، به روابط (۱۹.۲) و (۲۰.۲) دست یافتیم (منظور از همگنی این است که يك تك رویداد در يك دستگاه لخت، متناظر با يك تك رویداد در هر دستگاه لخت دیگری است). اکنون فقط دو ضریب مجهول A_1 و D_1 وجود دارند.

قبل از اینکه اصل موضوع II را در این معادلات به کار ببریم، می خواهیم نشان دهیم که اگر مختصه زمانی را مستقل از مختصات فضایی در نظر بگیریم، این معادلات به تبدیلات گالیله تحویل می شوند. زیرا در آخرین معادله روابط (۱۹.۲) باید $D_1 = 0$ و $A_1 = 1$ باشد؛ در آن صورت چهار معادله روابط (۱۹.۲) به رابطه (۱.۲) تحویل می شوند. همان طور که قبلاً دیدیم، این مقادیر ویژه ضرایب A_1 و D_1 با اصل موضوع دوم نسبیت خاص ناسازگارند.

حال با به کار بردن اصل موضوع دوم نسبیت، یعنی در بایست یکسانی سرعت نور برای تمام ناظرها، A_1 و D_1 را به دست می آوریم.

فرض می کنیم که ناظر S_1 در امتداد محور $+X$ يك باریکه نور بتاباند. این ناظر سرعت این باریکه را برابر با c اندازه می گیرد؛ یعنی

$$\dot{x}_1 = c$$

با توجه به ثبات سرعت نور، ناظر S_2 که با سرعت v نسبت به S_1 به طرف راست حرکت می کند نیز سرعت این باریکه نوری را برابر c اندازه می گیرد. اگر در رابطه (۲۰.۲) به جای $\dot{x}_2$ مقدار c را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$c = \frac{A_1(c - v)}{D_1 c + A_1}$$

و یا

$$D_1 c^2 = -A_1 v$$

$$D_1 = -\frac{v}{c^2} A_1 \quad (21.2)$$

این معادله، دوضرب مجهول در روابط (۱۹.۲) را به يك مجهول A_1 یا D_1 کاهش می‌دهد. فرض می‌کنیم A_1 مجهول باشد. برای به‌دست آوردن این ضریب، مجدداً از ثبات سرعت نور استفاده می‌کنیم، اما این بار فرض می‌کنیم که S_1 باریکه نور را در امتداد محور $+Y_1$ بتاباند؛ شکل ۷.۲ را ملاحظه کنید.

البته ناظر S_1 سرعت این باریکه را برابر c اندازه خواهد گرفت (یعنی $\dot{x}_1 = 0$ و $\dot{y}_1 = c$).

با توجه به تبدیلات سرعت در روابط (۲۰.۲) ناظر S_2 که با سرعت v نسبت به S_1 به طرف راست حرکت می‌کند، مؤلفه‌های سرعت $\dot{x}_2$ و $\dot{y}_2$ را به صورت زیر اندازه می‌گیرد

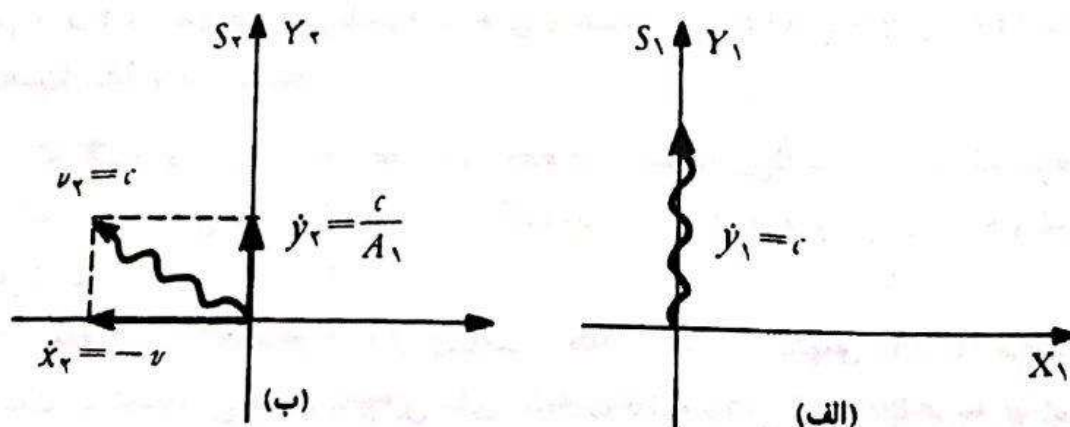
$$\dot{x}_2 = \frac{A_1(0 - v)}{A_1} = -v$$

$$\dot{y}_2 = \frac{c}{A_1} \quad (22.2)$$

با توجه به اصل موضوع دوم نسیت، ناظر S_2 باید مشاهده کند که تپ نوری با سرعت c حرکت می‌کند، یعنی با همان سرعتی که S_1 اندازه می‌گیرد. از این رو، سرعتی که S_2 اندازه می‌گیرد باید برابر با

$$v_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} = c$$

باشد. با قرار دادن رابطه (۲۲.۲) در این معادله خواهیم داشت



شکل ۷.۲ (الف) تپ نوری که به وسیله S_1 مشاهده می‌شود. (ب) تپ نوری که به وسیله S_2 مشاهده می‌شود.

$$\sqrt{v^2 + \frac{c^2}{A_1^2}} = c$$

$$A_1^2 = \frac{1}{1 - (v/c)^2}$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (23.2)$$

تنها مقدار مثبت A_1 را انتخاب می‌کنیم؛ زیرا، با توجه بد رابطه (۲۰.۲)، مقدار منفی A_1 منجر به تغییر علامت مؤلفه‌های Y و Z سرعت اجسام در دستگاه‌های لخت متفاوت می‌شود. با جایگزین کردن مقادیر A_1 و D_1 از روابط (۲۱.۲) و (۲۳.۲) در رابطه (۱۹.۲)، سرانجام تبدیلات لورنتس برای هر رویداد فضا-زمانی به دست می‌آید.

تبدیلات لورنتس مختصات:

$$x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = z_1$$

$$(24.2)$$

$$t_2 = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

برای به دست آوردن معادلات تبدیل معکوس که x_1, y_1, z_1, t_1 را بر حسب x_2, y_2, z_2, t_2 بیان می‌کنند، مانند تبدیلات گالیلئ در معادلات (۱.۲)، صرفاً شاخصهای ۱ و ۲ را تعویض می‌کنیم و به جای v مقدار $-v$ را در روابط (۲۴.۲) قرار می‌دهیم (مسئله ۷ را ببینید).

تبدیلات لورنتس نتیجه منطقی این حقیقت از نظر تجربی ثابت شده است که سرعت نور یک ثابت واقعی طبیعت است و از حرکت چشمه یا ناظر و همچنین از دستگاه لخت مستقل است.

اینک به تبدیلات منحصر به فردی دست یافته‌ایم که در بایسته‌های دو اصل موضوع نسبیت را بر آورده می‌کنند و بنا بر این جای تبدیلات گالیلئ را می‌گیرند. با توجه به اصل همخوانی (بخش ۵.۱) می‌دانیم که در گستره‌ای از سرعتها که تبدیلات گالیلئ اساساً صحیح‌اند، تبدیلات لورنتس باید به تبدیلات گالیلئ تحویل شوند. با مقایسه روابط (۲۴.۲) و (۱.۲) مشاهده می‌کنیم که اگر $v/c \rightarrow 0$ ، این دو مجموعه تبدیل یکسان می‌شوند.

از این رو، وقتی که $v \ll c$ باشد، تبدیلات گالیله يك تقريب عالی از تبدیلات لورنتس (که در همه موارد اعتبار دارد) هستند. تبدیلات گالیله برای توصیف همه پدیده‌های با سرعت پایین بسنده‌اند. از نظر ریاضی $v/c \ll 1$ هم از $c \rightarrow \infty$ است؛ بنابراین تبدیلات گالیله را می‌توان به عنوان تبدیلات صحیح مختصات، در يك جهان فرضی، که در آن سرعت نور نامتناهی است در نظر گرفت. این موضوع را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (\text{تبدیلات لورنتس}) = \text{تبدیلات گالیله}$$

هنگامی که سرعت جسمی نزدیک به سرعت نور است، فقط تبدیلات لورنتس به کار خواهند رفت. طبق تبدیلات مختصه زمانی لورنتس، معادلات (۲۴.۲)، مختصه زمانی t_2 دیگر مطلق نیست، یعنی این مختصه دیگر از مختصه فضایی x_1 مستقل نیست. زمانهای t_1 و t_2 که به وسیله ناظرهای متفاوت S_1 و S_2 اندازه گیری می‌شوند، یکسان نیستند ($t_1 \neq t_2$). از معادلات تبدیل لورنتس به وضوح نتیجه می‌شود که هیچ سرعتی نمی‌تواند از c بیشتر شود. تنها اگر $v < c$ باشد، کمیت $[1 - (v/c)^2]^{1/2}$ ، که در این معادلات ظاهر می‌شود، حقیقی خواهد بود و نه موهومی. اگر v بزرگتر از c بود، این کمیت موهومی می‌شد؛ در آن صورت يك رویداد حقیقی در يك دستگاه، با يك رویداد موهومی در دستگاه دیگر متناظر می‌شد و بنابراین این رویداد موهومی در دستگاه اخیر غیر قابل مشاهده بود. در به دست آوردن روابط تبدیل لورنتس فرض کردیم که از نظر همه ناظرها يك سرعت مشترك وجود دارد و آن سرعت نور است. حال درمی‌یابیم که این تك سرعت c ، در واقع بیشینه سرعت ممکن از نظر هر ناظری است.

از این گذشته در مثالهای بعدی خواهیم دید که خصوصیت برجسته نیست چنین است: دو رویداد که از نظر ناظری در يك چارچوب مرجع همزمان‌اند، از نظر ناظر دیگری در چارچوب دیگری همزمان نیستند. به عبارت دیگر همزمانی رویدادها نسبی است.

تبدیلات لورنتس اطمینان می‌دهند که سرعت نور، و فقط این سرعت، برای تمام دستگاههای مختصات لخت یکسان است. در این صورت قوانین الکترومغناطیس تحت تبدیل لورنتس هم‌ورد هستند، و تمام دستگاههای لخت توصیف یکسانی از این قوانین ارائه می‌دهند.

با قراردادن مقادیر A_1 و D_1 از روابط (۲۱.۲) و (۲۳.۲) در تبدیلات عمومی، معادلات (۲۵.۲)، تبدیلات لورنتس سرعت را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \frac{\dot{x}_1 - v}{1 - (v/c^2)\dot{x}_1} \\ \dot{y}_2 &= \frac{\dot{y}_1 \sqrt{1 - (v/c^2)^2}}{1 - (v/c^2)\dot{x}_1} \\ \dot{z}_2 &= \frac{\dot{z}_1 \sqrt{1 - (v/c^2)^2}}{1 - (v/c^2)\dot{x}_1}\end{aligned} \quad (25.2)$$

يك نتیجه شگفت آور تبدیلات لورنتس سرعت این است که مؤلفه‌های Z و Y سرعت يك ذره که در S_1 اندازه گیری می‌شوند، به مؤلفه X سرعت اندازه گیری شده در S_1 بستگی دارند مانند قبل، برای به دست آوردن مؤلفه‌های سرعت اندازه گیری شده در S_1 ، بر حسب مؤلفه‌های سرعت اندازه گیری شده در S_2 ، به سادگی شاخصهای پایین را در روابط (25.2) تعویض می‌کنیم و $-v$ را به جای v قرار می‌دهیم. با به کار بردن اصل همخوانی در تبدیلات لورنتس، تبدیلات گالیله‌ای سرعت، معادلات (2.2)، به دست می‌آیند،

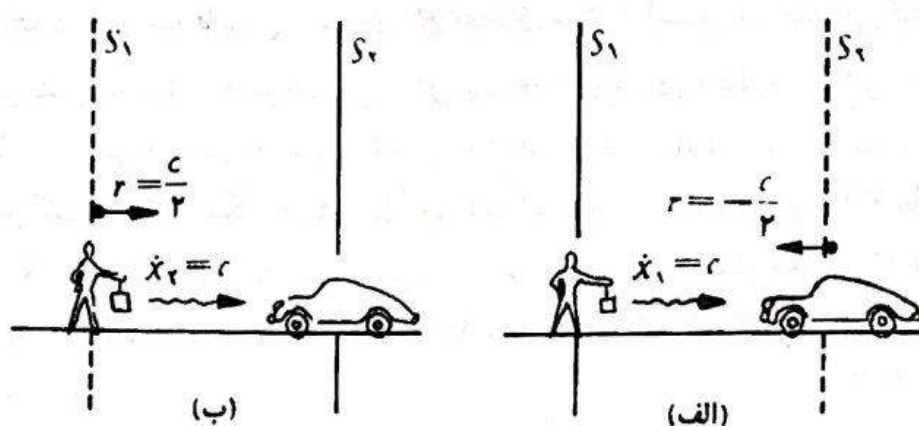
$$\lim_{v \rightarrow \infty} (\text{تبدیلات لورنتس سرعت}) = \text{تبدیلات گالیله‌ای سرعت}$$

مثال ۱۰۲ يك اتومبیل سریع نسبت به شخصی که فانوسی در دست دارد با سرعت $c/2$ حرکت می‌کند. یکی از سرشنیان اتومبیل، سرعت نوری را که از فانوس به او می‌رسد به وسیله خط کش و ساعت خود اندازه گیری می‌کند؛ طبق اصل نسبیت، صرف نظر از اینکه اتومبیل نسبت به فانوس در چه جهتی حرکت می‌کند، مسافر سرعت نور را برابر c اندازه می‌گیرد. آیا این موضوع را می‌توان با استفاده از تبدیلات لورنتس سرعت، معادلات (25.2)، تأیید کرد؟

ناوردایی c را در دو وضعیت ساده امتحان می‌کنیم، (الف) در وضعیتی که اتومبیل به طور مستقیم به فانوس نزدیک می‌شود و (ب) در وضعیتی که اتومبیل عمود بر علامت نوری که دریافت می‌دارد حرکت می‌کند (از نظر فانوس).

(الف) همان طور که در شکل ۸.۲ الف نشان داده شده است، فرض می‌کنیم که اتومبیل، در دستگاه S_2 ، که به طرف فانوس S_1 با سرعت $v = -c/2$ در حرکت است، ساکن باشد. از آنجا که نور نسبت به فانوس با سرعت c حرکت می‌کند، داریم $\dot{x}_1 = c$ و با استفاده از روابط (25.2) و جایگذاری مقادیر مربوط برای $\dot{x}_2$ رابطه

$$\dot{x}_2 = \frac{\dot{x}_1 - v}{1 - (v/c^2)\dot{x}_1} = \frac{c - (-c/2)}{1 - (-c/2c^2)c} = c$$



شکل ۸.۲ سرعت علامت نوری در امتداد $+x_1$. (الف) به وسیله S_1 اندازه گیری شود. (ب) به وسیله S_2 اندازه گیری شود.

به دست می آید. از این رو، سرنشین اتومبیل که در S_2 به حال سکون است نیز سرعت علامت نوری را برابر c اندازه گیری می کند. شکل ۸.۲ ب وضعیت مشاهده شده در S_2 را نشان می دهد.

از این مثال، و همچنین از تبدیلات عمومی سرعت، معادلات (۲.۲۵)، به سادگی نتیجه می شود که سرعت یک ذره، که در S_1 اندازه گیری می شود، دیگر جمع برداری سرعت اندازه گیری شده در S_2 و سرعت نسبی S_2 نسبت به S_1 نیست. در مثال شکل ۸.۲ الف تبدیلات گالیله ای سرعت، معادلات (۲.۲)، نتیجه زیر را می دهند

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - v = c - \left(\frac{-c}{2}\right) = \frac{3}{2}c$$

که از جمع برداری پیروی می کند

$$c + \frac{c}{2} = \frac{3}{2}c$$

ولی این با نتایج تجربی مغایر است. به طور نمادی، برای انتشار نور در این مثال، تحت تبدیلات لورنتس داریم

$$c + \frac{c}{2} = c$$

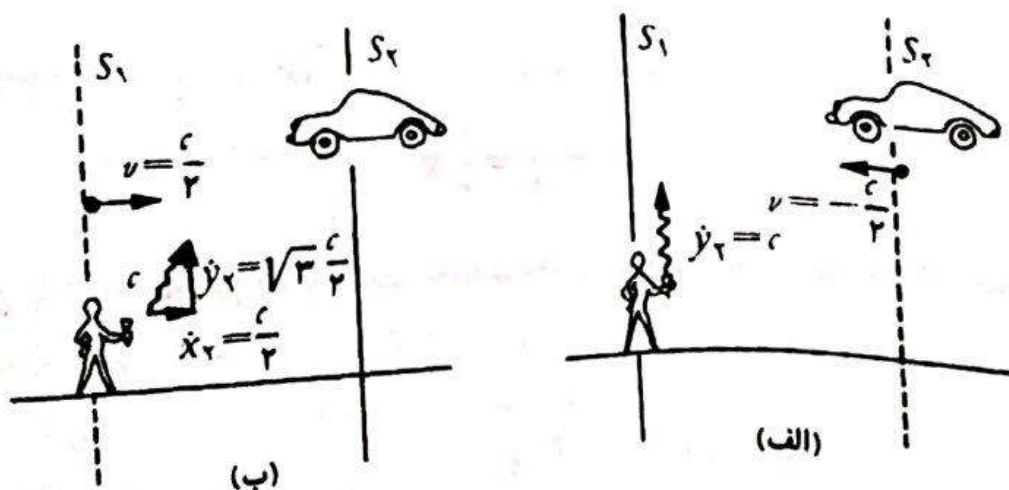
(ب) حال مطابق شکل ۹.۲، مجدداً فرض می کنیم که اتومبیل در S_2 به حال سکون است ولی در نقطه ای واقع بر امتداد محور $+y_2$ قرار دارد. دستگاه S_2 با سرعت

$v = -c/2$ به طرف فانوس (S_1 در حال سکون است) حرکت می کند. سر نشین اتومبیل چه سرعتی را برای يك علامت نوری اندازه می گیرد؟ این علامت نوری از نظر ناظر فانوس به دست، که در دستگاه S_1 قرار دارد، با سرعت c در امتداد $+Y_1$ حرکت می کند. شکل ۹.۲ الف حرکت اتومبیل و علامت نوری را از نظر ناظر S_1 نشان می دهد. از نظر ناظر S_1 علامت نوری با سرعت c در امتداد محور $+Y_1$ حرکت می کند؛ یعنی، $\dot{y}_1 = c$ و $\dot{x}_1 = 0$. با استفاده از تبدیلات لورنتس سرعت، معادلات (۲۵.۲)، داریم

$$\dot{x}_2 = \frac{\dot{x}_1 - v}{1 - (v/c^2)\dot{x}_1} = \frac{c}{2}$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\dot{y}_1 \sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - (v/c^2)\dot{x}_1} = c \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

از این رو، ناظر S_2 مشاهده می کند که علامت نوری تحت زاویه θ_2 نسبت به محور X_2 به طرف او حرکت می کند. این زاویه از رابطه $\tan \theta_2 = \dot{y}_2 / \dot{x}_2 = \sqrt{3}$ تعیین می شود؛ شکل ۹.۲ ب را ملاحظه کنید. از حل این معادله نتیجه می شود که $\theta_2 = 60^\circ$ است. برای محاسبه سرعت علامت نوری، باید بدیاد آوریم که در هر دستگاه لخت، مانند S_2 ، سرعت برابند (v_2) ذره ای که در هر جهتی حرکت می کند باز هم به وسیله جمع برداری مؤلفه ها در S_2 به دست می آید؛ این سرعت از رابطه زیر به دست می آید



شکل ۹.۲ سرعت علامت نوری در امتداد محور $+Y_1$. (الف) توسط S_1 اندازه گیری شود. (ب) توسط S_2 اندازه گیری شود.

$$v_2 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

چون $\dot{x}_2 = c/2$ و $\dot{y}_2 = c\sqrt{3}/2$ است، از نظر ناظر S_2 سرعت نور برابر

$$v_2 = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{3c^2}{4}} = c$$

است. مجدداً، همان‌طور که باید، هر دو ناظر سرعت یکسان c را برای علامت نوری اندازه‌گیری می‌کنند.

درست مانند آنچه در قسمت (الف) مشاهده کردیم، سرعت علامت نوری، که در S_1 اندازه‌گیری می‌شود، صرفاً جمع برداری سرعت اندازه‌گیری شده علامت نوری در S_2 و سرعت حرکت S_2 نسبت به S_1 نیست.

۶.۲ بازه‌های طولی و زمانی در فیزیک نسبیت

انقباض فضا. در فیزیک کلاسیک طول یک جسم برای تمام ناظرها، سرعت ناظرها نسبت به جسم هر چه باشد، یکسان است. اکنون مفهوم طول را در نظریه نسبیت، طبق تبدیلات لورنتس بررسی می‌کنیم، و به‌خاطر می‌آوریم که تنها این تبدیلات توصیف کاملی از فضا و زمان را به دست می‌دهند.

فرض می‌کنیم در زمان معینی که ناظرهای S_1 و S_2 نسبت به یکدیگر ساکن‌اند طول خط‌کشی خود را یکسان و برابر با L_0 می‌یابند. سپس دستگاه S_2 با سرعت v نسبت به دستگاه S_1 به طرف راست حرکت را آغاز می‌کند. ناظر S_1 خط‌کش خود را در امتداد محور X طوری قرار می‌دهد که انتهای چپ آن در x_1 و انتهای راست آن در x'_1 واقع شود؛ در آن صورت از نظر او $L_0 = x'_1 - x_1$ است. به طور مشابه، ناظر S_2 خط‌کش خود را در امتداد محور X طوری قرار می‌دهد که انتهای چپ و راست آن در نقاط x_2 و x'_2 قرار گیرند؛ از نظر S_2 ، $L_0 = x'_2 - x_2$ خواهد بود. هر یک از ناظرها خط‌کش خویش را به طول L_0 مشاهده می‌کند، البته این مطلب از این حقیقت که تمام دستگاه‌های لخت معادل و غیر قابل تمایزند ناشی می‌شود.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که از نظر ناظر S_1 طول یک خط‌کش در حال حرکت، مثلاً خط‌کش S_2 ، چقدر است؟ نخست، باید بدانیم که حتی در فیزیک غیر نسبیتی نیز علامت گذاشتن هر دو انتهای یک جسم متحرک به‌طور همزمان الزامی است. اگر یک انتهای جسم متحرکی را در زمانی معین و انتهای دیگر آن را در زمانی دیرتر علامت بگذاریم، فاصله بین این دو علامت برابر با طول جسم متحرک نخواهد بود؛ در این صورت این

فاصله می تواند هر مقداری را دارا باشد و مقدار آن به بازه زمانی بین علامت گذاریها بستگی خواهد داشت. چون ناظر S_1 باید هر دو انتهای يك جسم متحرك را به طور همزمان علامت گذاری کند، باید دو رویداد بر گزینیم (t_1, x_1) و (t'_1, x'_1) که نمایشگر انتهای چپ و راست خط کش واقع در S_2 باشند که توسط ناظر S_1 در $t'_1 = t_1$ اندازه گیری می شوند. معادلات (۲۴.۲) مختصات فضا-زمانی (t_2, x_2) و (t'_2, x'_2) مربوط به همان دو رویداد را، که توسط S_2 اندازه گیری می شوند، بر حسب مقادیر اندازه گیری شده توسط S_1 به دست می دهند. چون این خط کش همواره در دستگاه S_2 در حال سکون است، مختصات فضایی x_2 و x'_2 مستقل از زمانهای t_2 و t'_2 ، که در آنها ناظر S_2 این مختصات را اندازه گیری می کند، هستند. از این رو لزومی ندارد در دستگاهی که در آن جسم به حال سکون است اندازه گیریها را به طور همزمان انجام دهیم.

با استفاده از رابطه (۲۴.۲) می توان نوشت

$$x'_2 - x_2 = \frac{(x'_1 - x_1) - v(t'_1 - t_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (26.2)$$

که در آن $t'_1 = t_1$ است. طول خط کش واقع در S_2 که توسط S_1 اندازه گیری می شود برابر $x'_2 - x_2 = L_0$ است؛ از نظر ناظر S_1 ، طول همین خط کش که با سرعت v نسبت به S_1 حرکت می کند، برابر $x'_1 - x_1 = L$ است. بنابراین، رابطه (۲۶.۲) به صورت

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (27.2)$$

در می آید. این رابطه پدیده انقباض فضا را نشان می دهد. از نظر ناظر S_1 ، طول خط کش متحرك واقع در S_2 در امتداد حرکت نسبی به اندازه $[1 - (v/c)^2]^{1/2}$ انقباض می یابد. این انقباض دوجانبه است؛ یعنی، ناظر S_2 طول خط کش L_0 را که در دستگاه S_1 به حال سکون قرار دارد برابر $[1 - (v/c)^2]^{1/2} L_0$ اندازه می گیرد. (ولی، باید در نظر داشت که وقتی ناظر S_2 دو انتهای خط کش خویش را به طور همزمان علامت گذاری می کند، این دو رویداد، از نظر ناظر S_1 ، همزمان نیستند.) از آنجا که انقباض نتیجه هیچ آشفتگی فیزیکی (سرد شدن، تراکم و غیره) نیست بلکه، در عوض، بازتاب خواص فضا و زمان است، که در تبدیلات لورنتس فضا و زمان نهفته اند، این پدیده را انقباض فضا می نامند.

چون $y_1 = y_2$ و $z_1 = z_2$ است، هیچ انقباضی در جهت عمود بر امتداد حرکت نسبی وجود ندارد. واضح است که طول يك جسم مطلق نیست بلکه به حرکت نسبی جسم و ناظر بستگی دارد؛ وقتی ناظر در دستگاه اخت در حال سکون باشد، طول جسم بیشینه است. در مورد رویدادهایی که سرعت آنها خیلی کمتر از سرعت نور است، با استفاده از رابطه

(۲۷.۲)، L تقریباً برابر L_0 خواهد بود.

اگرچه طول يك جسم متحرك برای تمام ناظرهای لخت یکسان نیست، ولی يك طولی وجود دارد که ناورد است و آن طول جسمی است که نسبت به ناظر در حال سکون است. از این رو، هنگامی که يك خط‌کش نسبت به يك دستگاه لخت ساکن است، از نظر تمام ناظرهای واقع در این دستگاه طول خط‌کش مفروض درست برابر L_0 است. این طول، که گاهی آن را طول ویژه می‌نامند، خاصیت ناوردایی جسم است.

اتساع زمان. فیزیک نسبیت نشان می‌دهد که زمان نیز مانند طول يك کمیت مطلق نیست، بلکه به حرکت نسبی ناظر بستگی دارد.

دو ناظر S_1 و S_2 در حالی که نسبت به یکدیگر در حال سکون‌اند، ساعت‌های خود را همزمان می‌کنند، به طوری که بازه زمانی بین دو رویداد را هر دو یکسان و برابر T_0 نشان بدهند. حال فرض می‌کنیم که دستگاه S_2 نسبت به دستگاه S_1 با سرعت v به طرف راست حرکت کند. ناظر S_1 ساعت خود را در نقطه مخصوص x_1 در دستگاه مربوط به خود به حال سکون نگه می‌دارد و بازه زمانی T_0 را، که همان بازه بین دو لحظه t_1 و t'_1 است، اندازه می‌گیرد. همین طور، ناظر S_2 ساعت خود را در موقعیت ثابت x_2 نگه می‌دارد و بازه زمانی T_0 را، که همان بازه بین دو لحظه t_2 و t'_2 است، اندازه می‌گیرد. از این رو هر يك از ناظرها به وسیله ساعت خویش بازه زمانی یکسان T_0 را اندازه می‌گیرد. حال می‌خواهیم بدانیم که اگر هر دو بازه زمانی توسط S_2 اندازه‌گیری شوند، بازه‌های زمانی ثبت شده به وسیله دو ساعت، نسبت به یکدیگر چگونه‌اند. در رابطه (۲۴.۲) بازه زمانی بین هر دو رویداد که توسط ناظر S_2 اندازه‌گیری می‌شود، یعنی $t'_2 - t_2$ ، به بازه فضایی $x_1 - x'_1$ و به بازه زمانی همان دو رویداد که توسط S_1 اندازه‌گیری می‌شوند، یعنی $t'_1 - t_1$ مربوط می‌شود و چنین خواهیم داشت

$$t'_2 - t_2 = \frac{(t'_1 - t_1) - (v/c^2)(x'_1 - x_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (28.2)$$

حال، ناظر S_2 می‌خواهد بازه زمانی را به وسیله ساعتی که در دستگاه لخت S_1 به حال سکون است اندازه‌گیری کند. از آنجا که تمام ساعت‌های ساکن در S_2 همزمان شده‌اند، اندازه‌گیری زمان يك رویداد به موقعیت ساعت در S_2 بستگی ندارد. بنابراین در دستگاه S_1 در نقطه $x_1 = x'_1$ ساعتی را به حال سکون برمی‌گزینیم و رویدادهای (t_1, x_1) و (t'_1, x'_1) را بررسی می‌کنیم. در آن صورت، در معادله بالا، بازه زمانی بین دو رویداد یعنی $t'_2 - t_2$ ، که به وسیله ناظر S_2 اندازه‌گیری می‌شود چنین است

$$t'_2 - t_2 = \frac{t'_1 - t_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

حال فرض می‌کنیم که بازه زمانی اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر S_1 با ساعت ساکن در دستگاه خویش برابر $T_0 = t'_1 - t_1$ و بازه زمانی بین همان دو رویداد که S_2 با ساعت در حال حرکت اندازه می‌گیرد برابر $T = t'_2 - t_2$ باشد، بنابراین چنین به دست می‌آید

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (29.2)$$

این رابطه پدیدهٔ اتساع زمان را نشان می‌دهد. به عنوان مثالی از نتایج اتساع زمان فرض می‌کنیم که $v = 0.98c$ باشد؛ در آن صورت $1/\sqrt{1 - (v/c)^2} = 5$ و $T = 5T_0$ خواهد بود. بنابراین، چنانچه بازه زمانی بین دو تیک متوالی در هر یک از دو ساعت مشابه، هنگامی که هر دو نسبت به ناظر به حال سکون اند، برابر T_0 باشد (T_0 را زمان ویژه می‌نامند) و سپس، هرگاه یکی از ساعتها نسبت به دیگری با سرعت $0.98c$ حرکت کند، بازه زمانی بین دو تیک متوالی ساعت در حال حرکت، که به وسیله ساعت ساکن اندازه‌گیری می‌شود، برابر $5T_0$ خواهد بود. یعنی به ازای هر تیک ساعت در حال حرکت، ساعت ساکن ۵ بار تیک می‌زند. می‌توان گفت که ساعت‌های در حال حرکت آهسته‌تر کار می‌کنند و یا «عمر طولانی‌تر» دارند. این اثر نیز دوجانبه است، بدین معنی که هر یک از ناظرها ساعت ناظر متحرک دیگر را کندتر می‌یابد.

در $v \ll c$ ، زمان نسبی در فیزیک نسبت به زمان مطلق در فیزیک کلاسیک تحویل می‌شود. با وجود اینکه انقباض فضا و اتساع زمان فوق‌العاده عجیب به نظر می‌رسند، شواهد تجربی مستقیم و انکارناپذیری اتساع زمان را در واپاشی ذرات سریع مزون نشان می‌دهند. در حالی که بازه‌های فضایی، بازه‌های زمانی و همزمانی رویدادها در فیزیک پیش نسبیتی بدون هیچ دلیلی مطلق انتخاب می‌شوند و سرعت نور نسبی در نظر گرفته می‌شود، در فیزیک نسبیت اینشتین بازه‌های فضایی، بازه‌های زمانی و همزمانی رویدادها نسبی اند، زیرا سرعت نور برای تمام دستگاه‌های لخت مطلق است.

در تجربه‌های روزمره، اجسامی را مشاهده می‌کنیم که با سرعت‌های خیلی کوچکتر از سرعت نور در حرکت اند. بنابراین اثرهای نسبیتی برجسته‌ای که به وسیله تبدیلات لورنتس مجسم می‌شوند، به آسانی قابل درک نیستند. مثال‌های زیر که در آنها سرعت‌های خیلی زیاد مطرح می‌شوند، خواص غیرعادی رویدادهای فضا-زمانی را در فیزیک نسبیت نشان می‌دهند.

مثال ۲۰۲ در واپاشی میونهای با انرژی بالا، و بنابراین سریع، پدیدهٔ اتساع زمان (معادلهٔ ۲۹۰۲) به طرز جالبی تأیید می‌شود. این ذرات از واپاشی ذرات ناپایدار دیگری بدنام مزون π تولید می‌شوند. مزونهای π در برخورد های هسته‌های با انرژی بالا آفریده می‌شوند (در مورد این ذرات در بخشهای ۲۰۱۱ و ۴۰۱۱ بحث خواهیم کرد). خواهیم دید که میون مشابه با الکترون است، بجز آنکه جرم آن تقریباً ۲۰۷ مرتبه از جرم الکترون بزرگتر است؛ همچنین خواهیم دید که میون ناپایدار است و به طور نسبتاً سریع به ذرات دیگر واپاشیده می‌شود. نیم عمر اندازه‌گیری شدهٔ میونهایی که نسبت به یک ناظر در حال سکون اند برابر 1.52×10^{-6} s است؛ یعنی اگر ۱۰۰۰ میون نسبت به ناظری در حال سکون باشند، پس از گذشت 1.52×10^{-6} s، ناظر تنها ۵۰۰ میون را خواهد یافت. از طرف دیگر، چنانچه میونها نسبت به ناظر در حرکت باشند، طول عمرشان اتساع می‌یابد و از نظر این ناظر عمرشان طولانیتر خواهد بود. مطابق رابطهٔ (۲۹۰۲) این ناظر نیم عمر T را به وسیلهٔ رابطهٔ زیر اندازه‌گیری می‌کند

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

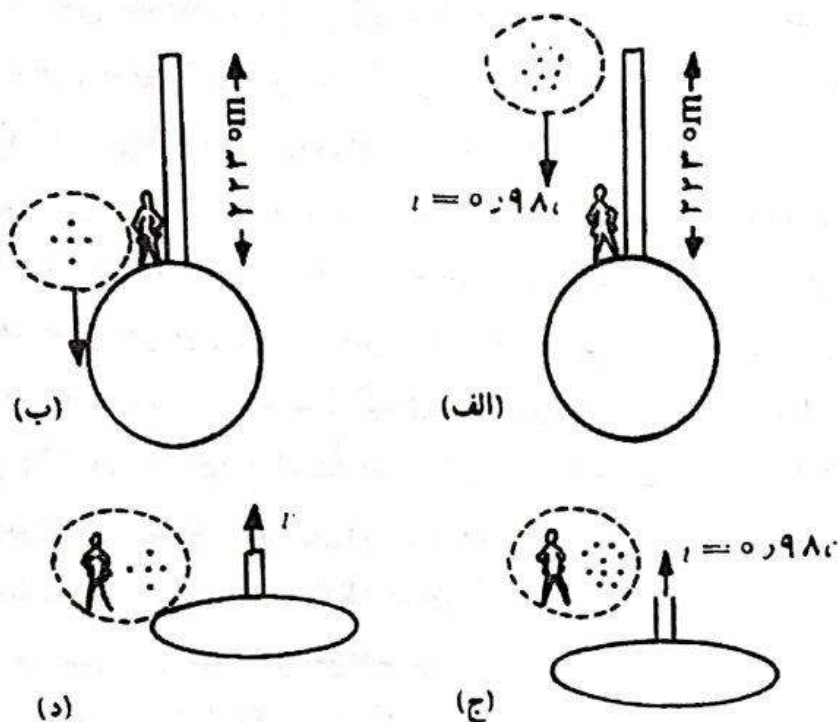
که در آن $T_0 = 1.52 \times 10^{-6}$ s نیم عمر در دستگاه لخت میونها، و v سرعت نسبی بین مزونها و ناظر است.

در برخورد بین ذرات با انرژی بالای پرتوهای کیهانی (اکثراً پروتونها) مربوط به فضای دور، با هسته‌های موجود در جو، میونها تولید می‌شوند و بعضی از آنها با سرعت خیلی نزدیک به c به سطح زمین نزدیک می‌شوند. بنابراین، برای چنین ذراتی اتساع زمان محسوس و به سادگی قابل مشاهده است.

۱۰۰۰ میون را که با سرعت $0.98c$ و از ارتفاع $L_0 = 223 \text{ km}$ به سطح زمین نزدیک می‌شوند در نظر می‌گیریم. این ارتفاع به وسیلهٔ ناظر ثابت روی زمین اندازه‌گیری می‌شود. این فاصله را می‌توان مانند شکل ۱۰۰۲ به وسیلهٔ یک تیر طویل ثابت و عمود بر سطح زمین نشان داد. نیم عمر میونها که به وسیلهٔ ناظر روی زمین اندازه‌گیری می‌شود عبارت است از $T = T_0 / [1 - (v/c)^2]^{1/2} = \Delta T_0 = 760 \times 10^{-6}$ s، و زمان پرواز آنها عبارت است از

$$\begin{aligned} L_0 / (0.98c) &= (223 \times 10^3 \text{ m}) / (0.98 \times 300 \times 10^8 \text{ m/s}) \\ &= 760 \times 10^{-6} \text{ s} \end{aligned}$$

(فقط به دلیل انتخاب مناسب L_0 این دو زمان با هم برابرند). بنابراین، از ۱۰۰۰ میون



شکل ۱۰.۲ از نظر ناظر ثابت بر روی زمین، میونها و زمین با سرعت $0.98c$ به یکدیگر نزدیک می‌شوند؛ (الف) 1000 میون به زمین نزدیک می‌شوند، (ب) 500 میون واپاشیده به زمین می‌رسند. از نظر ناظر همراه بامیونها، (ج) زمین به 1000 میون نزدیک می‌شود، (د) زمین به 500 میون واپاشیده می‌رسد.

اولیه که در ارتفاع 223 km قرار دارند، تنها 500 میون بدون واپاشی، به سطح زمین خواهند رسید.

از نظر ناظری که با میونهای واپاشان در حال حرکت است، رویدادهای واپاشی میونها چگونه به نظر می‌رسد؟ این ناظر درمی‌یابد که نیمی از میونها در زمان $T_0 = 1.52 \times 10^{-6} \text{ s}$ واپاشیده می‌شوند؛ به علاوه می‌بیند که زمین و تیر عمودی با سرعت $0.98c$ به او نزدیک می‌شوند. در اثر پدیده انقباض فضا، فاصله زمین از این ناظر منقبض می‌شود (یعنی تیر ثابت عمود بر زمین منقبض می‌شود). در زمانی که ناظر 1000 میون را می‌شمارد، فاصله زمین از خود را فقط برابر 0.446 km $[1 - (0.98)^2]^{1/2} = 0.446 \text{ km}$ اندازه می‌گیرد. از این رو، از نظر این ناظر، زمان پرواز برابر

$$(446 \text{ m}) / (0.98 \times 300 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1.52 \times 10^{-6} \text{ s}$$

است. ولی این درست همان نیم عمر واپاشی در دستگاه سکون میونهاست؛ بنابراین، ناظر واقع در این دستگاه نیز می‌بیند که وقتی زمین به میونها می‌رسد، از هر 1000 میون اولیه

فقط ۵۰۰ میون باقی می‌مانند. اگرچه بازه‌های زمانی و طولی اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر واقع بر زمین و به وسیله ناظر همراه با میونها متفاوت است، ولی هردو در این موضوع توافق دارند که وقتی زمین و میونها به یکدیگر می‌رسند ۵۰۰ میون باقی می‌ماند.

اگر مفاهیم کلاسیکی ما در مورد فضا و زمان معتبر می‌بودند هیچ اتساع زمانی وجود نمی‌داشت و ناظر روی زمین نیم‌عمر میونهای در حال حرکت را برابر $1.52 \times 10^{-6} \text{ s}$ و زمان پرواز را برابر $(1.52 \times 10^{-6}) / (0.76 \times 10^{-6})$ ، یعنی ۵ برابر نیم‌عمر اندازه می‌گرفت. چون فقط نیمی از میونها در هر نیم‌عمر جان سالم بدر می‌برند، لذا ناظر روی زمین پیشگویی می‌کند که $1/32 = (1/2)^5$ از ۱۰۰۰ میون اولیه بدون واپاشی به سطح زمین می‌رسند. از این رو، بدون در نظر گرفتن اثرهای نسیتی، ناظر باید فقط ۳۱ میون واپاشیده را بباید. این موضوع با آزمایش وفق نمی‌دهد. اثرهای مشاهده شده اتساع زمان، در مورد ذرات خیلی سریع مؤکداً فزیک نسیتی را تأیید می‌کنند.

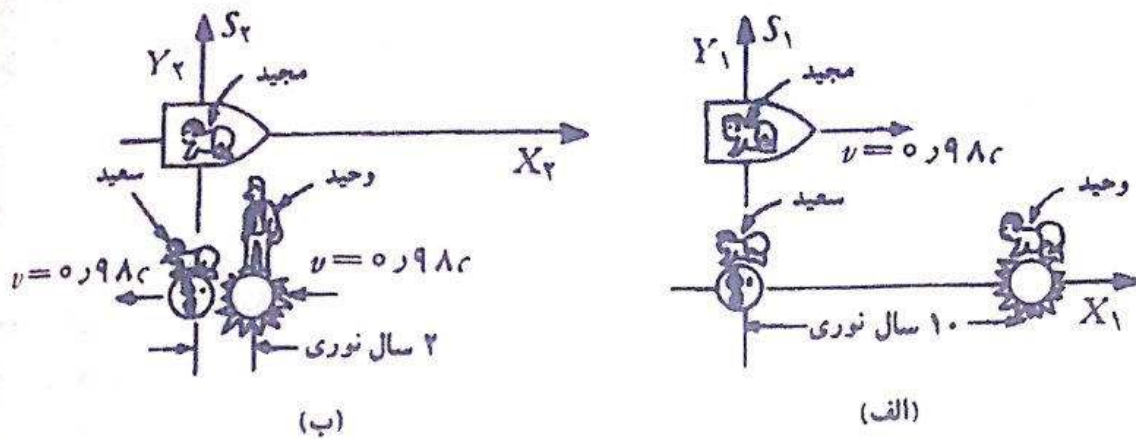
در کتابشناسی این فصل، مرجع يك فیلم در این مورد را مشاهده کنید.

مثال ۳.۲ در این مثال می‌خواهیم چند رویداد بخصوص یعنی تولد و مرگ سه نفر را بررسی کنیم. برای اینکه بتوان از تبدیلات لورنتس، معادلات (۲۴.۲)، استفاده کرد، دو دستگاه لخت S_1 و S_2 را، که محورهای آنها مطابق شکل ۱۱.۲ است، در نظر می‌گیریم؛ S_2 نسبت به S_1 با سرعت $0.98c$ در امتداد $+X_1$ حرکت می‌کند. می‌توان S_1 را به عنوان يك دستگاه لخت که در آن زمین به حال سکون است و S_2 را به منزله يك دستگاه لخت که در آن يك سفینه فضایی به حال سکون است، تصور کرد.

در زمان $t_1 = t_2 = 0$ ناظرهای S_1 تولد همزمان هر سه نفر را ثبت می‌کنند: سعید در مبدأ S_1 ، وحید در $x_1 = +10$ سال نوری (يك سال نوری فاصله‌ای است که يك تاب نوری در مدت يك سال طی می‌کند)، و مجید در مبدأ S_2 متولد می‌شوند.* شکل ۱۱.۲ الف را ببینید. از نظر ناظر واقع در S_1 ، سعید و وحید هردو در طول عمر هفتاد ساله خود به حال سکون باقی می‌مانند؛ از طرف دیگر، مجید در سفینه فضایی، که در دستگاه S_2 ساکن است، متولد و در آن به حال سکون باقی می‌ماند. عمر مجید نسبت به دستگاه S_2 نیز دقیقاً هفتاد سال است.

الف) از نظر ناظرهای S_1 ، مجید چقدر عمر می‌کند؟

* اسامی این سه نفر در متن اصلی به ترتیب John، Jim و Dick است. م.



شکل ۱۱.۲ (الف) رویداد تولد همزمان سعید، وحید، و مجید از نظر دستگاه S_1 و (ب) رویداد تولد همزمان سعید و مجید از نظر دستگاه S_2 . در ب ناظرهای واقع در دستگاه S_2 وحید را ۴۹ ساله و به فاصله ۲ سال نوری از سعید و مجید مشاهده می‌کنند. جدول ۱.۲ را ملاحظه کنید.

(ب) از نظر ناظرهای S_2 ، سعید و وحید چقدر عمر می‌کنند؟

(ج) از نظر ناظرهای S_2 ، سعید و وحید چقدر از یکدیگر فاصله دارند؟

در این مسئله بهتر است اندازه‌گیری زمان را بر حسب سال و فاصله را بر حسب سال نوری انجام بدهیم. در این صورت، سرعت بر حسب سال نوری بر سال سنجیده خواهد شد. از این رو، با توجه به این یکاها، سرعت نور برابر یک سال نوری بر سال است. $c = 1 \text{ yr/yr}^*$ ، و سرعت حرکت S_2 نسبت به S_1 برابر، $v = 0.98c = 0.98 \text{ yr/yr}^*$ است. واضح است که بر حسب این یکاها، سرعت هر جسمی همواره عددی بین صفر و یک خواهد بود.

معادلات (۲۴.۲)، مختصات فضا-زمانی هر رویدادی را که در دستگاه‌های S_1 و S_2 اندازه‌گیری می‌شود، بدیگدیگر مربوط می‌کنند. در مسئله زمین و سفینه فضایی، شش رویداد وجود دارند: تولد و مرگ سعید، تولد و مرگ وحید، و تولد و مرگ مجید. چنانچه مختصات فضا-زمانی رویدادی را که در یکی از دستگاه‌ها اندازه‌گیری می‌شود بدانیم، برای بدست آوردن مختصات همان رویداد در دستگاه دیگر می‌توان از روابط (۲۴.۲) استفاده کرد. مختصات فضا-زمانی شش رویداد، که در دو دستگاه S_1 و S_2 مشاهده شده‌اند، در جدول ۱.۲ آمده‌اند؛ در این جدول کمینه‌های معلوم و کمینه‌هایی که از روابط (۲۴.۲) محاسبه شده‌اند مشخص شده‌اند.

* yr مخفف year (سال) و l-yr مخفف light-year (سال نوری) است.

جدول ۱۰۲

مختصات فضا-زمان		رویداد
$S_2(x_2; t_2), v/c = 0.98$	$S_1(x_1; t_1)$	
تولد سعید (۰ ; ۰) مفروض (۰ ; ۰) محاسبه شده		
مرگ سعید (۳۵۰ yr ; ۰) مفروض (۰ ; ۷۰ yr) محاسبه شده		
تولد وحید (۰ ; ۱۰ l-yr) مفروض (۵۰ l-yr ; -۴۹ yr) محاسبه شده		
مرگ وحید (۷۰ yr ; ۱۰ l-yr) مفروض (-۲۹۳ l-yr ; ۳۰۱ yr) محاسبه شده		
تولد مجید (۰ ; ۰) مفروض (۰ ; ۰) محاسبه شده		
مرگ مجید (۳۵۰ yr ; ۳۴۳ l-yr) محاسبه شده (۷۰ yr ; ۰) مفروض (۰ ; ۰) محاسبه شده		

يك نمونه از محاسبه مختصات فضا-زمانی به قرار زیر است:

تولد وحید را در نظر می‌گیریم. ناظرهای ساکن در S_1 محل تولد وحید را در $x_1 = +10 \text{ l-yr}$ و زمان تولد او را در $t_1 = 0$ ثبت می‌کنند. ناظرهای ساکن در S_2 محل و زمان تولد وحید را با استفاده از روابط (۲۴.۲) به صورت زیر محاسبه می‌کنند

$$x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{10 \text{ l-yr} - 0}{\sqrt{1 - (0.98)^2}} = 5(10 \text{ l-yr}) = 50 \text{ l-yr}$$

$$t_2 = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = 5\left(0 - 0.98 \frac{10 \text{ l-yr}}{1 \text{ l-yr/yr}}\right) = -49 \text{ yr}$$

ناظرهای S_2 ، محل تولد وحید را به فاصله ۵۰ سال نوری از محل تولد مجید و سعید، و از نظر زمانی ۴۹ سال قبل از تولد آن دو ثبت می‌کنند.

حال، رویداد مرگ وحید را بررسی می‌کنیم. از نظر ناظرهای S_1 رویداد مرگ وحید در $x_1 = 10 \text{ l-yr}$ و $t_1 = 70 \text{ yr}$ به وقوع می‌پیوندد. با استفاده از روابط (۲۴.۲)، از نظر ناظرهای S_2 ، این رویداد چنین است

$$x_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = 5\left(10 \text{ l-yr} - \frac{0.98 \text{ l-yr}}{\text{yr}} 70 \text{ yr}\right) = -293 \text{ l-yr}$$

$$t_2 = \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = 5 \left[70 \text{ yr} - \left(\frac{0.998 \text{ l-yr}}{\text{yr}} \right) \frac{10 \text{ l-yr}}{(1 \text{ l-yr/yr})^2} \right] \\ = 301 \text{ yr}$$

سایر مختصات فضا - زمانی به همین طریق محاسبه می‌شوند.
حال با استفاده از جدول ۱۰۲ پاسخ به سؤالات مطرح شده در آغاز این مثال آسان است:

(الف) از نظر ناظرهای S_1 ، مجید چقدر عمر می‌کند؟ با استفاده از جدول ۱۰۲ طول عمر مجید از نظر ناظرهای S_1 چنین است

$$t_1(\text{مرگ}) - t_1(\text{تولد}) = 350 \text{ yr} - 0 \text{ yr} = 350 \text{ yr}$$

این موضوع با اتساع زمان ساعت‌های متحرک، معادله (۲۹.۲)، توافق دارد. در این مثال طول عمر شخص در حال حرکت، ۵ برابر افزایش یافته است.

(ب) از نظر ناظرهای S_2 طول عمر سعید و وحید چقدر است؟

طول عمر سعید از نظر ناظرهای S_2 چنین است

$$t_2(\text{مرگ}) - t_2(\text{تولد}) = 350 \text{ yr} - 0 \text{ yr} = 350 \text{ yr}$$

طول عمر وحید از نظر ناظرهای S_2 برابر است با

$$t_2(\text{مرگ}) - t_2(\text{تولد}) = (301 \text{ yr}) - 0 \text{ yr} = 301 \text{ yr}$$

این نیز با رابطه (۲۹.۲) توافق دارد.

(ج) از نظر ناظرهای S_2 ، در هر لحظه فاصله سعید و وحید چقدر است؟ محل‌های

تولد سعید و وحید باید در یک زمان مشترک t_2 در S_2 تعیین شوند. چون می‌دانیم که وحید نسبت

به S_2 با سرعت 0.998 l-yr/yr حرکت می‌کند، می‌خواهیم برای سهولت محل تولد او را

در لحظه $t_2 = 0$ که در آن سعید در مبدأ قرار دارد، پیدا کنیم. جدول ۱۰۲ نشان می‌دهد

که وحید در محل $x_2 = +50 \text{ l-yr}$ و در زمان $t_2 = -49 \text{ yr}$ متولد شده است. آنگاه

۴۹ سال بعد وحید مسافت $(0.998 \text{ l-yr/yr})(49 \text{ yr}) = 48.1 \text{ l-yr}$ را به طرف چپ

پیموده است. بنابراین، در زمان $t_2 = 0$ وحید در محل

$$50 \text{ l-yr} - 48.1 \text{ l-yr} = +1.9 \text{ l-yr}$$

از مبدأ S_2 خواهد بود. در این زمان، سعید در مبدأ S_2 است (درست لحظه تولدش).

بنابراین، از نظر ناظر S_2 ، در زمان $t_2 = 0$ سعید و وحید به اندازه ۲۰ سال نوری از

یکدیگر فاصله دارند. این مقدار با فاصله بین آنها که در چارچوب مرجع S_1 مشاهده می‌شود

متفاوت است. سعید و وحید در S_1 به حال سکون‌اند و فاصله آنها از یکدیگر ۱۰ سال

نوری است. البته این فواصل با پدیده انقباض فضا، معادله (۲۷.۲)، توافق دارند. توجه

کنید که در زمان $t_1 = t_2 = 0$ ناظرهای S_2 در لحظه تولد سعید و مجید، وحید را ۴۹ ساله می‌یابند، شکل ۱۱.۲ ب را ملاحظه کنید. از طرف دیگر، از نظر ناظرهای S_1 وحید، سعید و مجید همگی همزمان متولد می‌شوند.

۷.۲ رویدادهای فضا-زمانی و مخروط نوری

رویدادهای متوالی فضا - زمانی مثال ۳.۲ را که در دستگاه S_1 و S_2 مشاهده می‌شوند در نظر می‌گیریم.

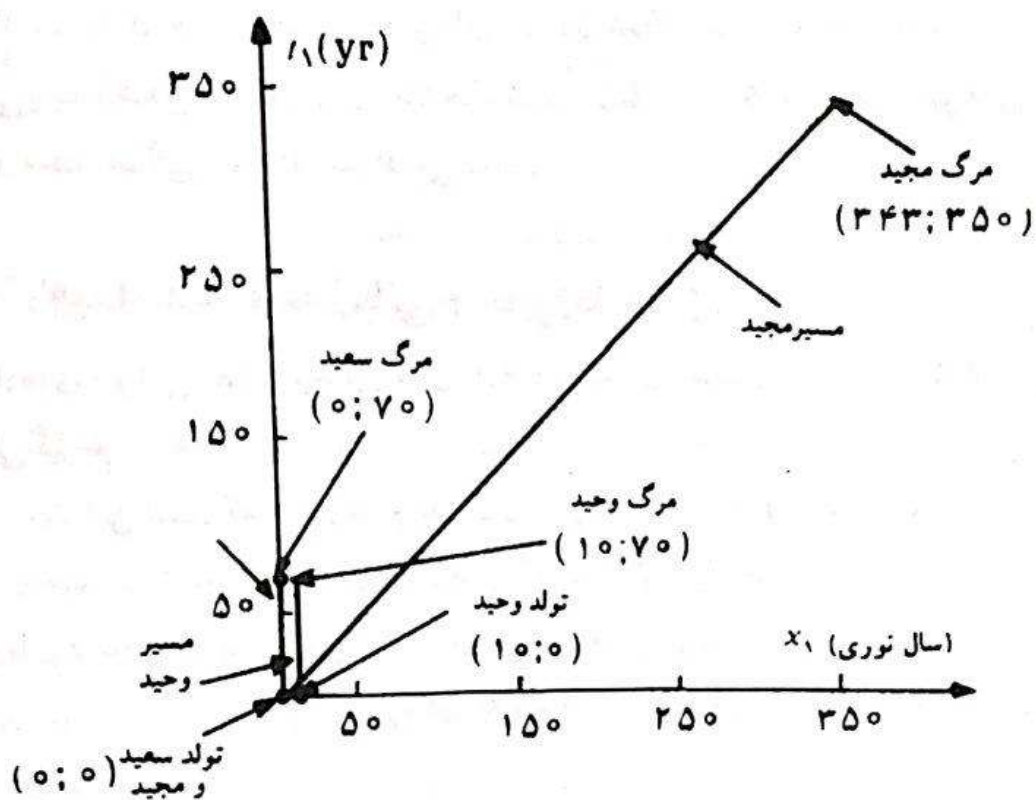
بهترین است که ۶ رویداد فضا - زمانی جدول ۱.۲ را در یک نمودار فضا - زمانی نشان بدهیم. در شکل ۱۲.۲، رویدادهایی که در S_1 و S_2 مشاهده می‌شوند در نمودارهایی که زمان t محور قائم و تغییر مکان x محور افقی آنهاست نشان داده شده‌اند؛ توجه کنید که در نمودارهای معمولی، تغییر مکان به وسیله محور قائم و زمان توسط محور افقی نشان داده می‌شوند.

از شکل ۱۲.۲ الف به وضوح دیده می‌شود که در S_1 تمام رویدادهایی که در امتداد یک خط افقی روی می‌دهند همزمان‌اند. از این‌رو، هر سه رویداد تولد در یک زمان $t_1 = 0$ به وقوع می‌پیوندند و مرگ سعید و وحید در دستگاه S_1 رویدادهای همزمانی‌اند که در زمان $t_1 = 70 \text{ yr}$ واقع می‌شوند. به طور مشابه، رویدادهایی که در امتداد یک خط قائم به وقوع می‌پیوندند دارای یک مکان فضایی‌اند. مثلاً، رویدادهای تولد سعید و مجید و مرگ سعید همگی در نقطه $x_1 = 0 \text{ l-yr}$ اتفاق می‌افتند، و تولد و مرگ وحید در نقطه، $x_1 = 10 \text{ l-yr}$ روی می‌دهند.

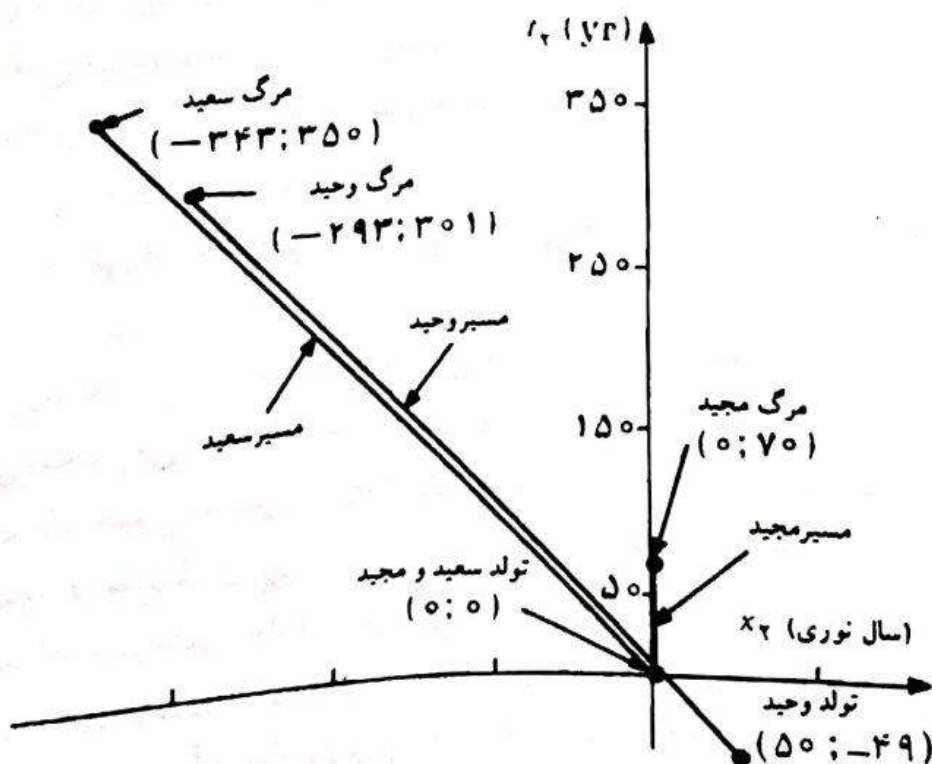
«مسیری» که زمان رویدادهای متوالی مربوط به یک تک جسم را در یک نمودار فضا - زمانی مشخص می‌کند، مکان جسم، یعنی x را به صورت تابعی از t ، به دست می‌دهد. چون سرعت یک جسم به صورت $\Delta x / \Delta t$ تعریف می‌شود، شیب مسیر فضا - زمانی، که نسبت به محور t اندازه‌گیری می‌شود، سرعت جسم را به دست می‌دهد. شکل ۱۲.۲ الف نشان می‌دهد که مسیرهای سعید و وحید هر دو به صورت قائم و دارای شیبهای صفرند؛ بنابراین سرعتهای هردوی آنها صفر است. از طرف دیگر مسیر مجید به صورت خط مستقیمی است که از مبدأ به نقطه $(x_1 = 3431 \text{ l-yr}; t_1 = 350 \text{ yr})$ منتهی می‌شود. شیب، یا سرعت عبارت است از

$$v_1(\text{مجید}) = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{3431 \text{ l-yr}}{350 \text{ yr}} = 9.81 \text{ l-yr/yr}$$

شکل ۱۲.۲ ب یک نمودار فضا - زمانی از همان شش رویدادی است که در جدول



(الف)

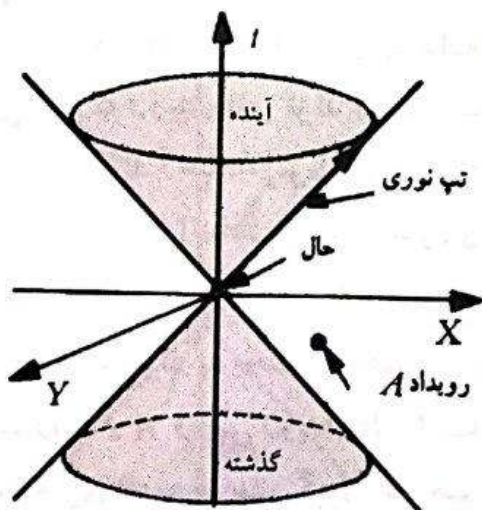


(ب)

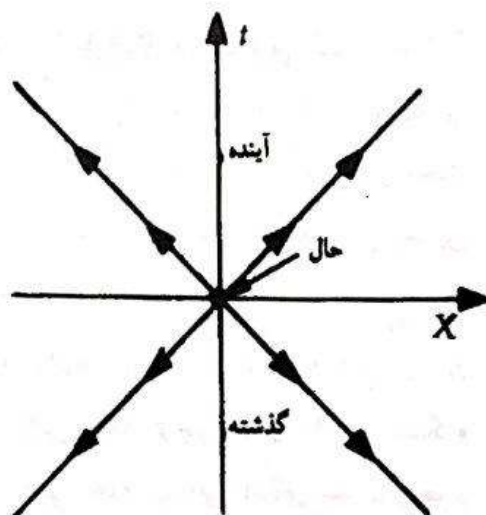
شکل ۱۲.۲ نمودار فضا-زمانی رویدادهای مربوط به جدول ۱۲.۱،
 (الف) آن طور که در دستگاه S_1 مشاهده می شوند. (ب) آن طور که در
 دستگاه S_2 مشاهده می شوند.

۱۰۲ آمده‌اند، منتهی در اینجا این رویدادها در دستگاه S_p مشاهده می‌شوند. از دیدگاه ناظرهای S_p فقط دورویداد همزمان‌اند؛ رویدادهای تولد سید و مجید. منیر فضا-زمانی مجید در دستگاه S_p به صورت قائم است و این نشانگر آن است که مجید در دستگاه S_p ساکن باقی می‌ماند. شیب مسیرهای فضا-زمانی سید و وحید هر دو نسبت به محور t_p ، نظیر سرعت، یکسان و برابر $0.981 - y_F/y_F$ هستند.

تمام نتایج پیشین مربوط به رویدادها را می‌توان مستقیماً از این دو شکل استخراج کرد. آیا حدی برای بزرگی شیب مسیر فضا-زمانی وجود دارد؟ بلی وجود دارد. با توجه به اصل موضوع دوم نسبیت، می‌دانیم که سرعت نور در تمام دستگاههای لخت یکسان و علاوه بر آن بیشینه است. بنابراین شیب مسیر فضا-زمانی در هیچ دستگاه لختی نمی‌تواند از c بیشتر باشد. اگر یکاهای طول و زمان را چنان برگزینیم که بزرگی c برابر ۱ شود، در آن صورت شیب بیشینه مساوی ۱ خواهد شد. بنابراین، مسیر فضا-زمانی یک تپ نوری با محور زمان زاویه 45° خواهد ساخت. شکل ۱۳.۲ مسیرهای فضا-زمانی دو تپ نوری را که یکی در امتداد محور $+X$ و دیگری در امتداد محور $-X$ حرکت می‌کند نشان می‌دهد. در زمان $t=0$ هر دو تپ در مبدأ مختصات یعنی، در $x=0$ هستند. البته شیب هر تپ نوری برابر $1 - y_F/y_F$ است. شیب مسیر فضا-زمانی هیچ ذره‌ای هرگز نمی‌تواند از این مقدار بیشتر باشد. هرگاه محور Y را عمود بر صفحه کاغذ برگزینیم، در آن صورت، مسیرهای نوری، یک مخروط نوری را که محور آن محور زمان است تولید می‌کنند؛ شکل ۱۴.۲ را ملاحظه کنید.



شکل ۱۴.۲ مخروط نوری، که زمان t در امتداد محور آن است. محور Y عمود بر صفحه کاغذ، یعنی عمود بر محورهای X و t است.



شکل ۱۳.۲ مسیرهای فضا-زمانی دو تپ نوری که در امتداد محور X و در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند.

توانایی هر رویدادی، مانند رویداد (o, o) ، محدود به تأثیرپذیری از چیزی در گذشته $(t < 0)$ یا تأثیرگذاری بر رویدادهایی در آینده $(t > 0)$ است. در شکل ۱۴.۲، تنها رویدادهای واقع در مخروط «گذشته» می‌توانند بر حال، در مبدأ فضا-زمانی، تأثیر بگذارند، به طور مشابه، یک رویداد در زمان حال، فقط می‌تواند بر رویدادهایی که درون مخروط «آینده» قرار می‌گیرند تأثیر بگذارد. رویدادهایی که خارج از مخروط نوری شکل ۱۴.۲ واقع می‌شوند، همچون رویداد A ، نمی‌توانند بر رویدادی واقع بر رأس مخروط مؤثر باشند؛ زیرا در غیر این صورت، علامت نوری باید با سرعتی بیش از c از A به رأس مخروط حرکت کند. تمام رویدادهای داخل مخروط نوری می‌توانند به طور علی به یک رویداد در رأس آن مربوط شوند، ولی هیچیک از رویدادهای خارج از مخروط نمی‌توانند به رویداد واقع در رأس مربوط شوند.

برای تصویر رویدادهایی که به طور علی به هم مربوط می‌شوند، مجدداً به شش رویداد جدول ۱۰.۲ برمی‌گردیم. نخست از نظر ناظر S_1 و سپس از نظر ناظر S_2 ، رویدادهای تولد همزمان سعید و مجید را به عنوان رویداد رأس مخروط برمی‌گزینیم. از شکل ۱۲.۲ الف می‌توان دریافت که تمام رویدادها بجز تولد وحید می‌توانند به طور علی به یکدیگر مربوط شوند. هیچ تردیدی در مورد تأثیر تولد سعید بر مرگ او وجود ندارد، و همین مطلب در مورد تولد و مرگ مجید هم صادق است. چون مرگ وحید داخل قسمت آینده رأس مخروط رویداد قرار می‌گیرد می‌تواند از رویدادی واقع در رأس آن نیز تأثیر بپذیرد.

در شکل ۱۲.۲ ب که در آن رویدادها را از دیدگاه ناظر S_2 مشاهده می‌کنیم، مجدداً درمی‌یابیم که رویدادهای تولد مجید و سعید به طور علی می‌توانند به تمام رویدادهای دیگر، بجز تولد وحید، مربوط شوند. با وجودی که وحید ۴۹ سال قبل از سعید و مجید متولد می‌شود، به اندازه ۵۰ سال نوری از آنها دور است، و برای رسیدن سریعترین علامت ممکن، یعنی نور، به محل تولد سعید، ۵۰ سال زمان لازم است.

مسئله مربوط به بحث بالا همان مسئله توالی رویدادهاست. اگر ناظر واقع در S_1 نخست رویداد A و سپس رویداد B را مشاهده کند، آیا این امکان وجود دارد که در دستگاه لخت دیگری B بر A پیشی گیرد؟ خواهیم دید که در بعضی حالات این امکان حقیقتاً وجود دارد، ولی نه در تمام حالات. آیا این بدان معناست که نظریه نسبیت، علیت دو رویداد مربوط به هم را، نسبت به تمام ناظرها، حفظ نمی‌کند. با استفاده از تبدیلات لورنتس می‌توان به این سؤالات پاسخ گفت.

هر دو رویدادی را در دستگاه فضا-زمانی چهار بعدی در نظر می‌گیریم.

رویداد شکل ۱۵.۲ الف را مشاهده می‌کند. همواره می‌توان مختصات فضا-زمانی را طوری برگزید که یکی از رویدادها، مانند A ، در مبدأ مختصات بدو قوع بیوندد. مختصات رویداد B را با (x_1, y_1, z_1, t_1) مشخص می‌کنیم.

مختصات فضا-زمانی دو رویداد A و B که به وسیله ناظر دوم در S_2 اندازه‌گیری می‌شوند به وسیله تبدیلات لورنتس مختصات، معادلات (۲۴.۲) بیان می‌شوند. برای سهولت فرض می‌کنیم که

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \equiv \gamma$$

باشد. آنگاه مختصات مشاهده شده به وسیله ناظر S_2 به شرح زیر است

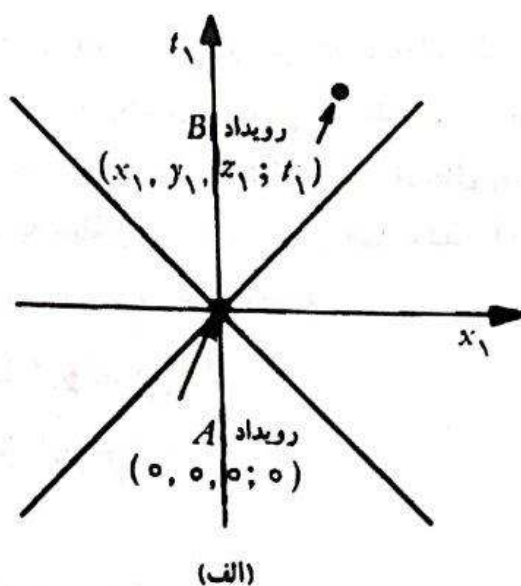
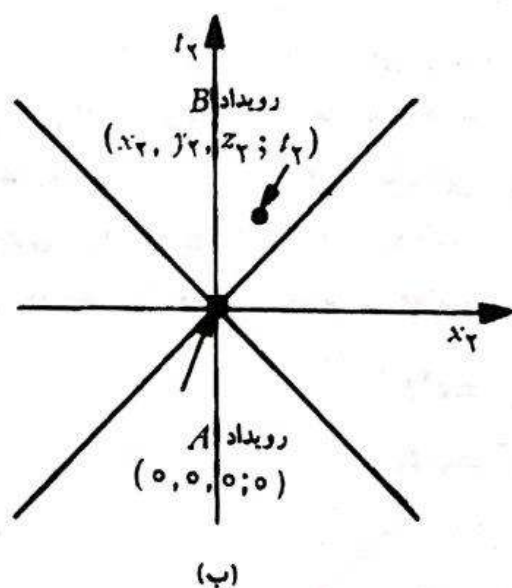
$$x_2 = \gamma(x_1 - vt_1) = 0 \quad \text{رویداد } A:$$

$$y_2 = y_1 = 0$$

$$z_2 = z_1 = 0$$

$$t_2 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1) = 0$$

$$x_2 = \gamma(x_1 - vt_1) \quad \text{رویداد } B:$$



شکل ۱۵.۲ دو رویداد فضا-زمانی که در (الف) دستگاه S_1 و (ب) دستگاه S_2 مشاهده می‌شوند.

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = z_1$$

$$t_2 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)$$

شکل ۱۵.۲ ب، رویدادهای A و B را که در دستگاه S_2 مشاهده شده‌اند نشان می‌دهد. این دستگاه در امتداد محور $+X_1$ با سرعت v حرکت می‌کند. رویداد A برای همه دستگاههای لخت یکسان و دارای مختصات $(0, 0, 0; 0)$ است. بنابراین، بازه‌های فضایی و زمانی بین دو رویداد A و B تنها همان مختصات B خواهد بود. بدیهی است که در این دودستگاه، بازه‌های فضایی بین رویدادها یکسان، یا ناوردا، نیست. این بازه‌ها را با L_1 و L_2 نشان می‌دهیم، و داریم

$$L_1^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$$

$$L_2^2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \neq L_1^2$$

بازه‌های زمانی نیز یکسان نیستند

$$t_2 \neq t_1$$

آیا بازه‌ای مانسته بازه‌های جدایی فضایی و بازه‌های زمانی فیزیک گالیله وجود دارد که تحت تبدیل لورنتس ناوردا باشد؟ در حقیقت چنین بازه‌ای وجود دارد و به آسانی آن را به وسیله تبدیلات لورنتس می‌توان پیدا کرد. به‌خاطر می‌آوریم که تبدیلات لورنتس بر این اصل موضوع که تمام ناظرها سرعت ثابت و یکسان c را برای يك علامت نوری اندازه می‌گیرند تکامل یافت. بنابراین، چنانچه رویداد A نمایشگر آغاز ارسال يك تب نوری و رویداد B نشان‌دهنده ورود همان تب به نقطه (x, y, z) در فضا باشد، آنگاه هر دو ناظر S_1 و S_2 باید برای علامتهای نوری چنین به‌دست آورند

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = c^2 t_1^2$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = c^2 t_2^2$$

و یا

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 t_1^2 = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2 t_2^2 = 0$$

همه ناظرهای لخت مقدار کمیت $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ را برای رویدادهای

علامتهای نوری، یکسان و برابر صفر اندازه می گیرند. چون این کمیت ترکیبی از بازه فضایی و بازه زمانی بین دو رویداد است، این سؤال مطرح می شود که آیا این کمیت بین هر دو رویدادی ناورد است؟ اینک به تحقیق این موضوع می پردازیم. برای دستگاه S_v ، این بازه برابر با $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2 t_2^2$ است. با استفاده از تبدیلات لورنتس، می توان تمام مختصات را بر حسب مختصات مربوط به دستگاه S_1 بیان کرد:

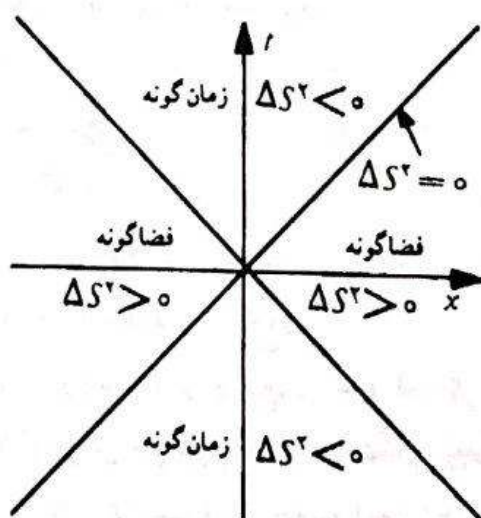
$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2 t_2^2 = \gamma^2 (x_1 - vt_1)^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 \gamma^2 (t_1 - \frac{v}{c^2} x_1)^2$$

باصط جملات طرف راست و خلاصه کردن آنها، و با توجه به $\gamma = 1/[1 - (v/c)^2]^{1/2}$ چنین به دست می آوریم

$$\Delta S^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2 t_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 t_1^2 \quad (30.2)$$

از این رو کمیت ΔS^2 ، که بازه فضا-زمانی نامیده می شود، یک کمیت ناورد است که در همه دستگاههای لخت دارای مقداری یکسان است. همان طور که در اینجا معلوم شد. این کمیت، بازه فضا-زمانی بین هر رویداد مانند (x_1, y_1, z_1, t_1) و رویداد $(0, 0, 0, 0)$ است. سه گستره مقادیر برای این بازه، به صورت زیر، وجود دارد.

$\Delta S^2 = 0$. در این حالت $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ است و رویدادها به وسیله علامتهای نوری به یکدیگر مربوط می شوند. تمام نقاط فضا-زمانی که با $\Delta S^2 = 0$ به مبدأ مربوط می شوند، مخروط نوری را تولید می کنند. شکل ۱۶.۲ را ببینید.



شکل ۱۶.۲ نواحی فضا-زمانی برای بازه فضا-زمانی بزرگتر، مساوی و کوچکتر از صفر.

$\Delta S^2 > 0$. در این حالت $x^2 + y^2 + z^2 > c^2 t^2$ است و ناحیه مربوط به آن را فضاگونه می نامند. همان طور که قبلاً توضیح داده شد، رویدادهای واقع در این ناحیه به طور علی به رویداد $(0, 0, 0; 0)$ مربوط نمی شوند، زیرا در این حالت علامتهای نوری باید با سرعتهایی بیشتر از c حرکت کنند.

$\Delta S^2 < 0$. در این حالت $x^2 + y^2 + z^2 < c^2 t^2$ است. این ناحیه را زمان گونه می نامند. و تمام رویدادهای واقع در این ناحیه می توانند به طور علی به رویداد $(0, 0, 0; 0)$ ارتباط داده شوند.

درباره علیت چه می توان گفت؟ یعنی، هرگاه رویداد B رویداد A را در یک دستگاه دنبال کند، آیا آن را در دستگاه دیگری نیز دنبال خواهد کرد؟ در اینجا نیز در دستگاه S_1 رویداد A را با $(0, 0, 0; 0)$ و B را با (x_1, y_1, z_1, t_1) نشان می دهیم. آنگاه بازه زمانی در دستگاه S_2 چنین بیان می شود

$$t_2 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1) \quad (31.2) \text{ و } (24.2)$$

x_1, t_1 و v می توانند دارای مقادیر مثبت یا منفی باشند ولی، بدون توجه به علامتها، به علت ناوردایی بازه فضا-زمانی باید رابطه زیر برقرار باشد

$$x_2^2 - c^2 t_2^2 = x_1^2 - c^2 t_1^2$$

چنانچه رویداد B در دستگاه S_1 رویداد A را دنبال کند، در آن صورت $t_1 > 0$ خواهد بود. آنگاه با استفاده از رابطه (31.2)، اگر $(v/c^2)x_1 > t_1$ باشد، یعنی اگر $(v/c)x_1 > c^2 t_1^2$ باشد، $t_2 > 0$ خواهد بود.

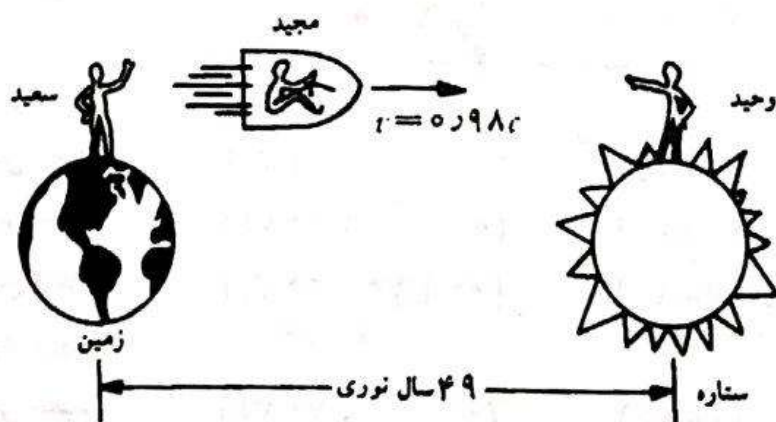
در این صورت، $v/c < 1$ است؛ بنابراین برای هر رویداد زمان گونه $(\Delta S^2 < 0)$ با $t_1 > 0$ خواهیم داشت، $t_2 > 0$ ؛ ناظرهای تمام دستگاههای لخت همواره رویداد B را به دنبال رویداد A مشاهده خواهند کرد. به طور مشابه، در مخروط زمان گونه با $t_1 < 0$ ، همواره $t_2 < 0$ است؛ در آن صورت در تمام دستگاهها، رویداد B بر رویداد A پیشی خواهد گرفت. در مورد رویدادهای واقع در ناحیه زمان گونه، علیت پایسته می ماند. از طرف دیگر، در مورد رویدادهای واقع در ناحیه فضا گونه هیچگونه ترتیب منحصر به فردی وجود ندارد. مثلاً، فرض می کنیم که در دستگاه S_1 ، رویداد B رویداد A را دنبال می کند، در آن صورت $t_1 > 0$ است و با توجه به رابطه (31.2)، اگر $(v/c^2)x_1 < t_1$ باشد، یعنی اگر $(v/c)x_1 < c^2 t_1^2$ باشد، $t_2 < 0$ خواهد بود. البته، این می تواند در ناحیه فضا گونه اتفاق بیفتد؛ از این رو، وجود یا عدم وجود یک نظم معکوس بستگی به

این دارد که رویداد در کجای این ناحیه قرار دارد.

۸.۲ پارادوکس دوقلو

ناظرهای واقع در دستگاههای لخت مختلف، يك رویداد را در نقاط مختلف فضا و در زمانهای متفاوت مشاهده می کنند. توصیف صحیح هر رشته از رویدادها را می توان در هر يك از دستگاههای لخت ارائه کرد؛ دستگاههای مختلف فقط در مورد زمان و مکان رویدادها با هم توافق ندارند. برای مثال، دستگاه لخت S_1 را در نظر می گیریم که در آن زمین و يك ستاره نسبتاً نزدیک (به فاصله ۴۹ سال نوری از زمین) در حال سکون اند. می خواهیم گذران عمر سه نفر را مشاهده کنیم: دوقلوها، سعید و مجید که روی زمین متولد شده اند، و وحید که همزمان با سعید و مجید، ولی در سیاره ای نزدیک به ستاره (به فاصله ۴۹ سال نوری از زمین) به دنیا آمده است. توجه کنید که تمام اندازه گیریها نسبت به ناظرهای ساکن در S_1 انجام می شوند و تمام اظهارات زیر در مورد آنها صادق است.

چون سرعت علامتهای نوری متنهای است، کمترین زمانی که وحید می تواند از تولد دوقلوها با خبر شود ۴۹ سال است؛ زمانی که طول می کشد تا يك علامت نوری فاصله بین زمین و ستاره را طی کند. همین طور دوقلوها در لحظه آگاهی از تولد وحید ۴۹ ساله خواهند بود. حال فرض می کنیم که، وقتی هر سه نفر ۲۰ ساله اند، مجید عزم سفر به ستاره وحید بکند. فرض می کنیم که مجید خیلی سریع به سرعت $v = 0.98c$ نسبت به S_1 برسد و آنگاه با سرعت ثابت به طرف ستاره به حرکت خود ادامه دهد، شکل ۱۷.۲ را ببینید. مجید هنگام ورود به ستاره سریعاً از سرعت خود می کاهد تا به حال سکون در آید. با استفاده از نظریه نسبیت می دانیم که تمام ناظرهای S_1 توافق دارند که مجید با سرعت 0.98 l-yr/yr به سوی ستاره سفر کرده است و مسافت ۴۹ سال نوری را در بازه زمانی $50 \text{ yr} = (49 \text{ l-yr}) / (0.98 \text{ l-yr/yr})$



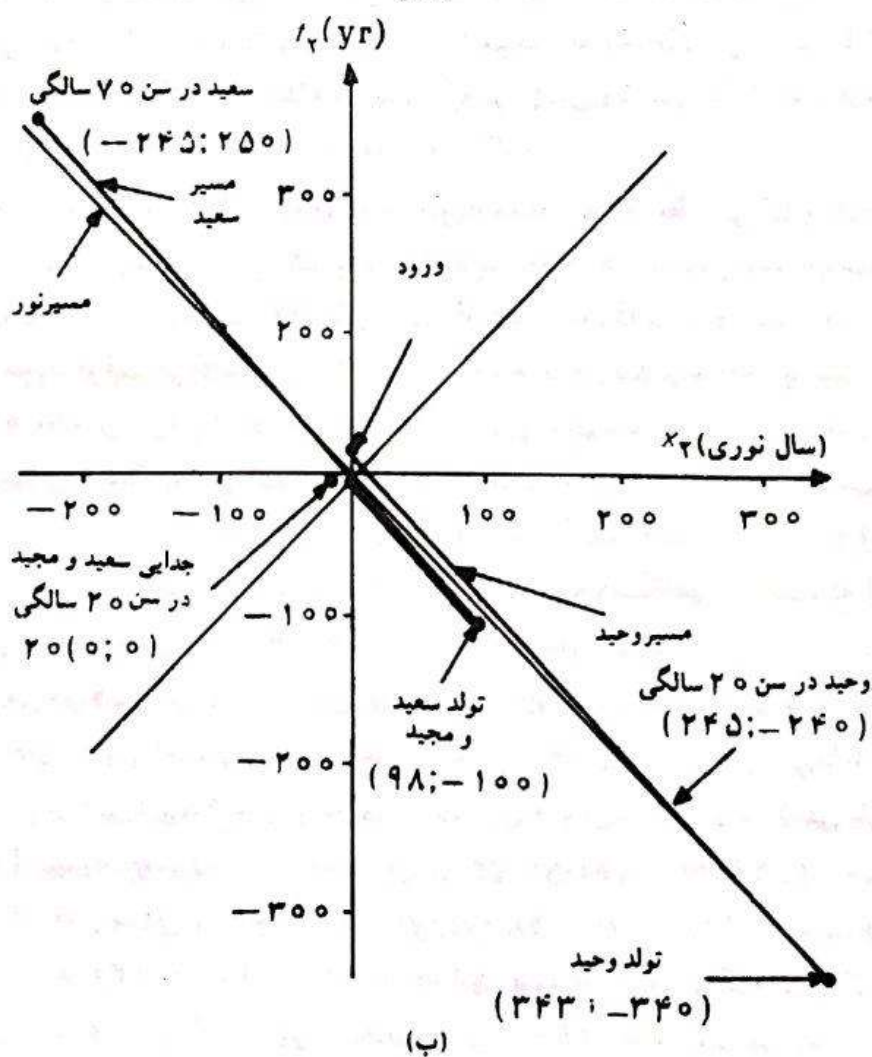
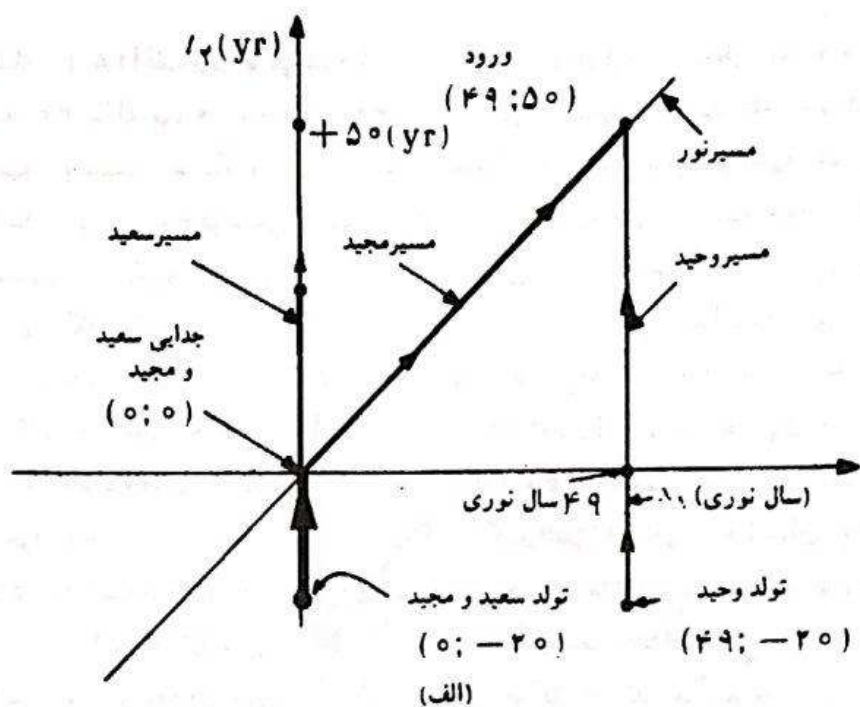
شکل ۱۷.۲ سفر مجید به يك ستاره که به وسیله ناظرهای S_1 مشاهده می شود. جدول ۲.۲ را ببینید.

پیموده است. بنابراین هنگام ورود مجید به ستاره، وحید ۷۰ ساله ($۲۰ + ۵۰$) خواهد بود. البته در این زمان سعید نیز ۷۰ ساله است. از طرف دیگر، وحید و سعید هر دو آهنگ گذر عمر مجید مسافر را فقط یک پنجم آهنگ گذر عمر خود مشاهده خواهند کرد، زیرا مجید با سرعت $c/۰.۹۸$ نسبت به چارچوب مرجع آنها یعنی S_1 در حرکت است. بنابراین از دیدگاه آنها از عمر مجید، در حین مسافرت، فقط به اندازه $۱۰ = ۵/۵$ سال خواهد گذشت. در آن صورت وقتی مجید وحید را ملاقات می کند $۳۰ = ۱۰ + ۲۰$ سال خواهد داشت. بنابراین از دیدگاه وحید، مجید مسافر ۳۰ ساله خواهد بود و وحید که با مجید در یک زمان متولد شده است، هنگام ملاقات با او ۷۰ سال خواهد داشت. این صحیح است، ولی عجیب به نظر می رسد.

این وضعیت باید با نظر مجید سازگار باشد. می خواهیم ببینیم به آیا مجید نیز در هنگام ملاقات با وحید، موافق خواهد بود که وحید ۷۰ ساله و خودش فقط ۳۰ ساله است. تا ۲۰ سالگی هر ۳ نفر توافق دارند که ۲۰ ساله اند. آنگاه مجید به دستگاه لخت S_2 که با سرعت $c/۰.۹۸$ نسبت به S_1 در حرکت است می پرد. در دستگاه S_2 رویدادها چگونه به نظر می رسند؟ اگر در زمان $t_1 = 0 = t_2$ مجید و سعید در یک نقطه از فضا، یعنی در $x_1 = x_2 = 0$ باشند، آنگاه از نظر دستگاه لخت S_2 ، برای یافتن مکان فضایی و زمانی این سه نفر باید تبدیلات لورنتس محتصات را در زمان عزیمت و همچنین در زمان دیرتری که وحید و مجید در ستاره همدیگر را ملاقات می کنند به کار ببریم. معادلات (۲۴.۲). رویدادهای مهم فضا-زمانی، آنچنان که به وسیله ناظرهای S_1 و S_2 مشاهده می شوند در جدول ۲.۲ فهرست شده اند، و شکل ۱۸.۲ این رویدادها را نمایش می دهد، توجه کنید که، برای سهولت، مبدأ نمودارهای فضا-زمانی را رویداد جدا شدن مجید از سعید برگزیده ایم (شکل ۱۸.۲).

جدول ۲.۲

مختصات فضایی و سن		از نظر S_1	رویداد
$v/c = 0.98$ ، S_2 از نظر			
			فاصله سعید و مجید:
		(۰ ; ۲۰ yr)	محل وسن سعید
(۰ ; ۱۰۰ yr)		(۰ ; ۲۰ yr)	محل وسن مجید
(۰ ; ۱۰۰ yr)		(۲۹ l-yr ; ۲۰ yr)	محل وسن وحید
(۹۷۸ l-yr ; ۳۴۰ yr)			ملاقات مجید و وحید:
		(۰ ; ۷۰ yr)	محل وسن سعید
(-۹۷۸ l-yr ; ۱۱۰ yr)		(۲۹ l-yr ; ۳۰ yr)	محل وسن مجید
(۰ ; ۱۱۰ yr)		(۲۹ l-yr ; ۷۰ yr)	محل وسن وحید
(۰ ; ۳۵۰ yr)			
(۰ ; ۳۵۰ yr)			

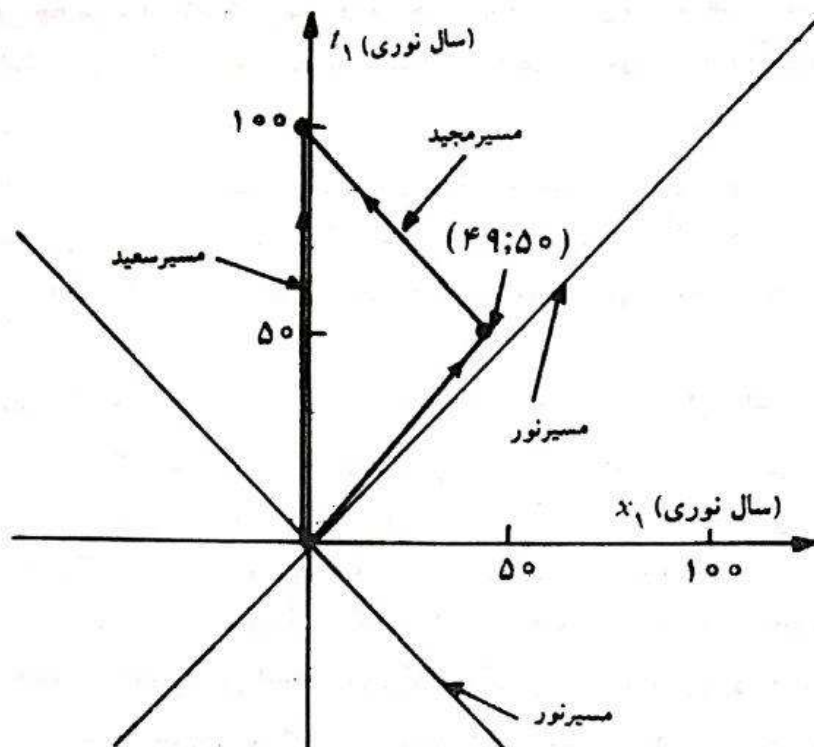


شکل ۱۸.۲ مسیرهای فضا-زمانی سعید، وحید و مجید از نظر: (الف) ناظرهای S_1 و (ب) ناظرهای S_2 . جدول ۲.۲ را ببینید.

در شکل ۱۸.۲ الف دیده می شود که گرچه از دیدگاه ناظر S_1 وحید در لحظه عزیمت مجید ۲۰ ساله بود و به اندازه ۴۹ سال نوری از سعید و مجید فاصله داشت، ولی از دیدگاه مجید، بیستمین سالگرد تولد وحید با لحظه جدا شدن سعید و مجید همزمان نیست، بلکه ۲۴۰ سال زودتر به وقوع می پیوندد، شکل ۱۸.۲ ب را ببینید. به علاوه، از نظر S_1 وحید در بیستمین سالگرد تولدش به اندازه ۲۴۵ سال نوری از مبدأ دستگاه S_1 فاصله دارد. از دیدگاه دستگاه S_1 (شکل ۱۸.۲ ب) وحید ۱۰ سال پس از جدا شدن سعید و زمین از سفینه فضایی مجید، به مبدأ می رسد. از این رو مجید $110 = 100 + 10$ سال خواهد داشت. از نظر دستگاه S_1 ، وحید هنگام ملاقات، چند سال خواهد داشت؛ از نظر S_1 ، وحید از زمان تولد خود تا هنگام ملاقات با مجید، $350 = 100 + 250$ سال عمر کرده است، شکل ۱۸.۲ ب را ببینید. چون وحید نسبت به S_1 در حرکت است، گذر عمر او تنها به اندازه یک پنجم گذر عمر ناظرهای S_1 خواهد بود؛ از این رو سن وحید هنگام ملاقات با مجید $70 = 350/5$ سال خواهد بود، و این همان سنی است که از نظر وحید و سعید مشاهده می شود. ناظرهای واقع در هر دو دستگاه روی گذران نسبی عمر این سه نفر توافق دارند. متأسفانه این مسافرت یک طرفه ساده این امکان را نمی دهد که سعید و مجید را مجدداً به یکدیگر برسانیم، تا اینکه هر یک بتواند مستقیماً سن دیگری را مشاهده کند. بررسی چنین وضعیتی با یک مسافرت رفت و برگشتی، «پارادوکس دوقلوی» معروف را مطرح می کند.

سعید و مجید دوقلو را که روی زمین متولد شده اند در نظر می گیریم. در سن ۲۰ سالگی مجید به یک سفینه فضایی، که با سرعت ثابت $0.98c$ از زمین دور می شود می پرد. هنگام رسیدن به یک ستاره، که ۴۹ سال نوری از زمین فاصله دارد و نسبت به آن در حال سکون است، مجید توقف می کند، یک سلام سریع به وحید می کند و مجدداً با سفینه خود، با سرعت $0.98c$ به زمین برمی گردد. هنگام ورود به زمین، مجید سریعاً به حال سکون درمی آید و همزاد خود سعید را ملاقات می کند. سؤال، هنگام ملاقات، سن هر کدام چقدر است؛ از نظر دستگاه S_1 ، سن مجید، هنگام ملاقات با وحید، ۱۱۰ سال است. چون برای ۱۰۰ سال اول مجید نسبت به دستگاه S_1 در حرکت است، عمرش نسبت به دستگاههای لخت، که او در آنها همواره در حال سکون است، برابر $30 = 100/5 + 10$ سال است.

نخست می خواهیم وضعیت را از نظر چارچوب مرجع سعید نظاره کنیم. سعید در چارچوب لخت S_1 به حال سکون است و در طول سفر مجید، به همین صورت باقی می ماند. مجید از دیدگاه خود، مسافت کل ۹۸ سال نوری را در این مسافرت رفت و برگشتی طی می کند، شکل ۱۹.۲ را ببینید. چون سرعت مجید برابر $0.981 - y_T/y_T = 0.981c$ است، از نظر سعید زمان کل این مسافرت $100y_T = (0.981 - y_T/y_T)/(0.981 - y_T/y_T)$ است. وقتی مجید برمی گردد، سعید $120 = 100 + 20$ ساله خواهد بود. از طرف دیگر، در خلال این سفر، عمر مجید با این سرعت نمی گذرد؛ چون مجید با سرعت $0.98c$ حرکت می کند، در تمام طول مسافرت، به علت اتساع زمان، فقط به اندازه $20 = 100/5$ سال عمر خواهد کرد. بنابراین وقتی سعید و مجید یکدیگر را ملاقات می کنند، مجید فقط $40 = 20 + 20$ سال خواهد داشت.



شکل ۱۹.۲ مسیرهای فضا-زمانی سعید و مجید آنچنان که توسط ناظر S_1 مشاهده می‌شوند. جدول ۲.۲ را ببینید.

هنگامی که دوقلوها یکدیگر را ملاقات می‌کنند، از نظر دستگاه لخت S_1 سن آنها یکسان نخواهد بود، آنکه در حرکت است جوانتر خواهد ماند.

اوضاع از دیدگاه مجید چگونه است؟ می‌توان بحث را از دیدگاه مجید به صورت زیر دنبال کرد؛ رفت و برگشت مجید نسبت به سعید و زمین کاملاً هم ارز است با رفت و برگشت سعید و زمین، و نزدیک و دور شدن ستاره نسبت به مجید. آنگاه، چون سعید و زمین با سرعت $0.8c$ رفت و برگشت می‌کنند، می‌توان استدلال کرد که ساعت‌های روی زمین کند می‌شوند و آن‌ها گذر عمر سعید یک پنجم آن‌ها گذر عمر مجید خواهد بود. سرانجام، می‌توان تصور کرد که وقتی آنها دوباره به یکدیگر می‌رسند، مجید خواهد گفت که سعید از او جوانتر است. ولی این درست بر خلاف آن چیزی است که سعید پیشگویی می‌کند (سعید همواره روی زمین در حال سکون است). در این ملاقات سعید انتظار دارد که مجید جوانتر باشد، و مجید انتظار دارد که سعید از او جوانتر باشد. واضح است که هر دو نمی‌توانند صحیح بگویند، در غیر این صورت با یک پارادوکس روبرو خواهیم بود.

پیدا کردن سفسطه‌ای که در این استدلال به این پارادوکس منجر می‌شود چندان دشوار نیست. این البته درست است که می‌توان برای توصیف رفتار در جهان هر دستگاه لختی را به کار برد، همه دستگاه‌های لخت در توصیف قوانین فیزیکی هم ارزند و هیچکس نمی‌تواند

یکی را از دیگری متمایز کند. در مورد دستگاه مرجع ثابت بر زمین و دستگاه مرجع ثابت بر سفینه فضایی چه می‌توان گفت؟ آیا واقعاً هر يك از این دستگاه‌های لخت را می‌توان به عنوان يك تك دستگاه لخت تلقی کرد. دستگاهی که در آن بتوان اندازه‌گیری‌هایی مانند بازه‌های زمانی و فضایی را انجام داد؟

دستگاهی را که در آن زمین (و سعید) در حال سکون است، می‌توان با اطمینان، در خلال سفر مجید، به عنوان يك تك دستگاه لخت تلقی کرد. این دستگاه لخت را S_1 می‌نامیم. بنا بر این نسبت به پیشگوی سعید یقین داریم که وقتی مجید برمی‌گردد، از او جوانتر خواهد بود.

از طرف دیگر دستگاهی که در آن سفینه (و مجید) در حال سکون است، در تمام طول مسافت، يك تك دستگاه لخت نیست. در خلال اولین قسمت سفر، وقتی مجید و ستاره به یکدیگر نزدیک می‌شوند، مجید و سفینه در يك دستگاه لخت، که آن را S_2 می‌نامیم، در حال سکون‌اند. این دستگاه با سرعت ثابت $0.98c$ از زمین دور و به ستاره نزدیک می‌شود. مجید به محض ورود به ستاره و در لحظه بازگشت، که بلافاصله پس از ورود صورت می‌گیرد، دستگاه‌های لخت را تعویض می‌کند، و با دستگاه دیگری، S_3 ، برمی‌گردد که با سرعت ثابت $0.98c$ دلی به سوی زمین، در حرکت است. توجه کنید که مجید مسافر، بعضی از اندازه‌گیری‌های فضایی و زمانی را در دستگاه لخت S_2 و بعضی را در دستگاه لخت S_3 ، کاملاً متفاوت با S_1 ، انجام می‌دهد. چون نسبیت خاص محدود به ناظرهای لخت است، یعنی به ناظرهایی که همواره در يك تك دستگاه لخت باقی می‌مانند، بنا بر این در مورد دستگاه مجید صادق نیست. چون دستگاه مجید در طول سفر يك تك دستگاه لخت کامل نیست، بلکه در عوض، يك چهارچوب مرجع شتاب‌دار است، برای تحلیل جزئیات رویدادهایی که از آن مشاهده می‌شوند، باید نظریه نسبیت عام را به کار برد. يك تحلیل مفصل از دستگاه مجید نشان می‌دهد که، مجید دقیقاً همان پیشگوی سعید را می‌کند که سعید در دستگاه لخت S_1 می‌کند، یعنی مجید (که همواره در يك دستگاه لخت نیست) در وقت ملاقات با سعید، جوانتر از سعید (که همواره در يك دستگاه لخت باقی می‌ماند) خواهد بود.

به طریق دیگری هم می‌توان نشان داد که سعید و مجید دو قلو، هم ارز هم نیستند. برای این کار فرض می‌کنیم که هر يك از این دو زندگی خویش را در داخل يك سفینه فضایی بگذرانند. سفینه فضایی سعید همواره بر زمین باقی می‌ماند و سعید هیچ رویدادی را در آن تجربه نمی‌کند. از طرف دیگر، مجید که سفینه فضایی او به يك سیاره دور دست می‌رود و باز می‌گردد، تجربه‌هایی کاملاً متفاوت دارد. هنگام پرواز، با شتاب گرفتن سفینه، مجید همراه با اشیاء غیر متصل داخل سفینه به دیواره سفینه پرتاب می‌شود و دستگاه‌های لخت مختلفی را عوض می‌کند؛ مجید تجربه مشابهی را هنگام ورود سفینه به سیاره خواهد داشت، ابتدا از سرعت خود می‌کاهد و سپس در جهت مخالف و در چهارچوب لخت دیگری بر سرعت خود می‌افزاید، سرانجام در بازگشت به موقعیت اولیه‌اش بر روی زمین، دوباره از شتاب سفینه‌اش می‌کاهد و برای سومین بار پرت شدن را تجربه می‌کند.

از این رو، هنگامی که دوقلوها به هم می‌رسند و تاریخچه زندگی خود را شرح می‌دهند درمی‌یابند که نه فقط سن آنها کاملاً متفاوت است بلکه مجید سه بار پرت شده است، درحالی که سعید در آرامش به سر برده است.

البته امکان توصیف مسافرتها و گذر عمر مجید و سعید از لحظه جدایی تا دیدار مجدد، از دیدگاه هر يك دستگاه لختی، وجود دارد. مثلاً، ناظری که همواره در دستگاه لخت S_2 است خواهد دید که زمین و ستاره همیشه با سرعتهای $0.98c$ در حرکت‌اند. از لحظه جدایی دوقلوها، تا هنگامی که ستاره از راه می‌رسد، ناظر، مجید و سفینه را ساکن مشاهده خواهد کرد، سپس خواهد دید که مجید و سفینه‌اش به سرعت شتاب می‌گیرند و با سرعتی بیشتر از $0.98c$ به سوی زمین حرکت می‌کنند. وقتی مجید به سعید و زمین می‌رسد ناظر S_2 درمی‌یابد که سن مجید کمتر از سن سعید است؛ این درست همانند تشخیص ناظر S_1 است. البته ناظر واقع در دستگاه لخت S_2 توصیف مبادلی ارائه خواهد کرد.

خلاصه

مکانیک کلاسیک در تبدیلات گالیله هم‌ورد است و با تجربه‌ای که در آن $v \ll c$ باشد توافق دارد.

توصیف صحیح جهان فیزیکی بر اساس ناوردایی سرعت نور و اصل نسبیت استوار است: تمام قوانین فیزیک، از جمله قانون سرعت نور در خلأ، در تمام دستگاههای لخت، در تبدیلات لورنتس هم‌وردا هستند.

تبدیلات لورنتس مختصات به شرح زیرند

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\y_2 &= y_1 \\z_2 &= z_1 \\t_2 &= \frac{t_1 - (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\end{aligned}\quad (24.2)$$

هیچ علامت و یا ذره‌ای نمی‌تواند با سرعتی بیشتر از سرعت نور در خلأ حرکت کند.

فیزیک نسبیت با مشاهدات تجربی زیر تأیید می‌شود: آزمایش مایکلسون-مورلی و آزمایش‌های مربوط به ناهم‌وردایی سرعت نور (c)؛ مشاهده مستقیم انقباض زمان در واپاشی میون؛ و مشاهده اینکه سرعت ذراتی که توسط شتابنده‌های با انرژی بالا شتاب یافته‌اند،

از c بیشتر نیست. در فصل بعد، با مطالعه تغییر جرم با سرعت و هم‌ارزی جرم و انرژی خواهیم دید که فیزیک نسبیت هر چه بیشتر تأیید می‌شود. گذر از فیزیک نسبیت به فیزیک کلاسیک را به‌طور نمادی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{v/c \rightarrow 0} (\text{فیزیک نسبیت}) = \text{فیزیک کلاسیک}$$

معادلات تبدیل که بازه‌های طول و زمان را به هم مربوط می‌کنند چنین‌اند

شکل نسبیتی

شکل کلاسیک

$$L = L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$L = L_0 \quad \text{طول:}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$T = T_0 \quad \text{زمان:}$$

مسائل

۱. در اثر پدیده انقباض فضا، یک کره از نظر ناظری که با سرعت زیاد به طرف آن حرکت می‌کند، فشرده به نظر می‌رسد. اگر ناظری که به زمین نزدیک شود «ضخامت» کره زمین را در جهت حرکت خود یک پنجم قطر آن اندازه بگیرد، سرعش چقدر است؟
۲. در دستگاه مختصات مرکز جرم، دو جسم به جرمهای m و $3m$ به ترتیب با سرعتهای $+v$ و $-v/3$ به طرف یکدیگر در حرکت‌اند. این دو جسم یک برخورد کاملاً غیر کشان انجام می‌دهند. (الف) انرژی جنبشی کل قبل و بعد از برخورد و افزایش انرژی گرمایی ناشی از این برخورد را محاسبه کنید. (ب) قسمت الف را از دیدگاه ناظری محاسبه کنید که نسبت به مرکز جرم با سرعت $+v$ در حرکت است.
۳. فرض کنید که زمین با سرعت $3.0 \times 10^4 \text{ m/s}$ در اثر حرکت می‌کند. یک تپ نوری به‌طور یک طرفه از چشمه‌ای به یک آشکارساز فرستاده می‌شود، آشکارساز در فاصله معلومی از چشمه قرار دارد. بردار تغییر مکان از چشمه تا آشکارساز (هر دو نسبت به زمین در حال سکون) موازی سرعت زمین نسبت به اثر است. بر حسب تبدیلات گالیلئ، زمانهای گذر یک تپ نوری، که به وسیله ناظر ساکن نسبت به اثر و به وسیله ناظر ساکن نسبت به زمین اندازه‌گیری شده‌اند، وقتی که فاصله بین چشمه و آشکارساز برابر (الف) $3.78 \times 10^2 \text{ m}$ و (ب) $3.78 \times 10^8 \text{ m}$ (فاصله تا ماه) است، چقدرند؟
۴. دستگاه لخت S_1 نسبت به محیطی که در آن تپهای صوتی در حرکت‌اند ساکن است.

مشاهده می شود که تنها با سرعت ثابت 330 m/s حرکت می کنند. دستگاه لخت دیگر، S_2 ، با سرعت ثابت 240 m/s در امتداد محور X_1 حرکت می کند. نسبت به این محور (الف) یک تب صوتی باید در چه جهتی حرکت کند تا ناظر S_2 نیز همان سرعت 330 m/s را اندازه بگیرد، و (ب) آن ناظر در چه جهتی تب را در حال حرکت خواهد دید؟

۵. در یک انتهای لوله استوانه ای شکلی به طول 1.0 m ، یک چشمه نوری و در انتهای دیگر آن یک آینه قرار دارد. لوله در دستگاه لخت S_2 ساکن و بر سرعت دستگاه S_2 نسبت به دستگاه لخت S_1 یعنی بر $v = 10^{-4}c$ عمود است؛ شکل ۵.۲ را ببینید. ناظری در دستگاه S_1 مشاهده می کند که چشمه یک تب نوری را در جهت موازی با محور لوله گسیل می کند. با فرض اینکه اثر نسبت به S_1 ساکن باشد، از نظر ناظر S_2 ، تب در بازگشت خود به انتهای پایین لوله، در چه فاصله ای از چشمه نوری خواهد بود؟ (الف) با استفاده از تبدیلات گالیل، (ب) با استفاده از تبدیلات لورنتس.

۶. فرض کنید که در آزمایش مایکلسون-مورلی (رجوع کنید به بخش ۴.۲) طول استوانه ها 1.0 m و طول موج نور $5000 \text{ \AA}$ است. (الف) اگر سرعت زمین در اثر $3.0 \times 10^4 \text{ m/s}$ باشد، چه کسری از انتقال طول موج بین باریکه ها، هنگام ترکیب آنها وجود خواهد داشت؟ (ب) دستگاه آزمایش نسبت به اثر با چه سرعتی باید حرکت کند تا دو باریکه با اختلاف فاز 180° ترکیب شوند؟

۷. به کمک معادلات (۲۴.۲)، x_1 ، y_1 ، z_1 و t_1 را به طور جبری بر حسب x_2 ، y_2 ، z_2 و t_2 حل کنید. این نتایج ثابت می کنند که با تبدیل v به $-v$ و تعویض شاخصهای پایین تبدیلات لورنتس معکوس به دست می آید.

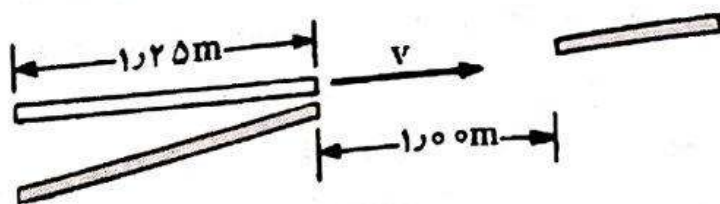
۸. پروتونها از یک شتابدهنده ذره ای با سرعت $0.8c$ خارج می شوند؛ سپس به یک لوله خلا وارد و در آن حرکت می کنند؛ و سرانجام به یک آشکارساز می رسند. طول لوله به وسیله ناظر ساکن در آزمایشگاه برابر 1.0 m اندازه گیری شده است. (الف) از نظر ناظری که همراه با یک پروتون در حرکت است چه مدت طول می کشد تا یک پروتون از یک انتهای لوله به انتهای دیگر آن برسد؟ (ب) ناظری که همراه با یک پروتون در حرکت است طول لوله را چقدر اندازه می گیرد؟

۹. تا چه حد صحیح است که گفته شود زمان برای ناظری که با سرعت نور در حرکت است به حال وقفه درمی آید؟

۱۰. از نظر ناظری واقع بر زمین، دوسفینه فضایی در لحظه‌ای که فاصله بین آنها $10^{10} \times 400$ m است در جهت برخورد دو در دو به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. در این لحظه از نظر این ناظر یکی از سفینه‌ها منطبق بر زمین است. هر دو سفینه نسبت به دستگاه زمین با سرعت یکسان $0.98c$ حرکت می‌کنند. (الف) از نظر ناظر واقع بر زمین پس از چه زمانی دوسفینه با یکدیگر برخورد می‌کنند؟ (ب) از نظر ناظر واقع بر سفینه‌ای که در ابتدا منطبق بر زمین بود، پس از چه زمانی دوسفینه با یکدیگر برخورد می‌کنند؟

۱۱. يك میله سخت با محور X_1 زاویه θ_1 می‌سازد. از نظر ناظری که با سرعت v در جهت مثبت محور X_1 حرکت می‌کند، زاویه میله با این محور، θ_2 ، چقدر است؟

۱۲. می‌خواهیم میله‌ای به طول 1025 m را از پنجره‌ای به عرض 1000 m بگذرانیم. دقیقتر گفته باشیم، این میله با طول سکون 1025 m در حال حرکت. واز يك دهانه عبور می‌کند (شکل مربوط به مسئله ۱۲)، فاصله بین دو لبه دهانه، هنگامی که توسط ناظری که نسبت به پنجره در حال سکون است اندازه‌گیری شود، 1 m است. سرعت میله طوری است که، از نظر ناظر واقع در چارچوب مرجعی که در آن پنجره ساکن است، دو انتهای میله با دو لبه دهانه به‌طور همزمان منطبق می‌شوند. (الف) سرعت میله چقدر است؟ (ب) اکنون رویدادهای از دیدگاه ناظر همراه با میله در نظر می‌گیریم. عرض دهانه پنجره نسبت به این ناظر چقدر است؟ (ج) آیا از نظر ناظر همراه با میله دو انتهای میله به‌طور همزمان با دو لبه پنجره منطبق می‌شوند؟ اگر نه، کدام يك از دو انتهای میله، جلویی یا عقبی، نخست با یکی از لبه‌های پنجره منطبق می‌شود؟ (د) از نظر ناظر همراه با میله، بازه زمانی بین دو تطابق چقدر است؟



شکل مسئله ۱۲. میله در حال عبور از پنجره

۱۳. قطار A نسبت به ایستگاه با سرعت $0.80c$ به طرف شرق در حرکت است؛ قطار B

نسبت به همان ایستگاه با سرعت c 80° به سوی شمال می‌رود. سرعت قطار A نسبت به قطار B را پیدا کنید.

۱۴. در زیر، اتساع زمان را از طریق دیگری به دست می‌آوریم. فرض کنید، مطابق شکل ۵.۲ یک تب نوری یک رفت و برگشت کامل را در امتداد محور یک استوانه انجام می‌دهد. (الف) بازه زمانی T_0 اندازه‌گیری شده توسط ناظری که نسبت به استوانه در حال سکون است چقدر است؟ زمان لازم برای یک رفت و برگشت کامل تب T_0 است، این بازه زمانی را بر حسب طول استوانه (L) و سرعت نور (c) به دست آورید (ب) حال فرض کنید استوانه با سرعت v حرکت می‌کند، به طوری که محور استوانه بر امتداد حرکت ناظری که زمان رفت و برگشت تب نوری را اندازه می‌گیرد عمود است. ناظر درمی‌یابد که سرعت تب نوری باید c باشد، رابطه‌ای پیدا کنید که زمان رفت و برگشت T را بر حسب L ، v و c به دست بدهد. (ج) بین دو رابطه حاصل در قسمت الف و ب L را حذف کنید و T را بر حسب T_0 ، v و c به دست آورید.

۱۵. در آزمایشی که اخیراً در مورد پدیده اتساع زمان انجام گرفته است، یک هواپیمای جت، که از ساحلی به ساحل دیگر رفت و برگشت می‌کند، یک ساعت اتمی را با خود حمل می‌کند. بازه زمانی این ساعت با بازه زمانی ثبت شده در ساعت اتمی دیگری که روی زمین ساکن است مقایسه می‌شود. اگر فاصله بین دو ساحل 4000 km و سرعت هواپیما 1000 km/h باشد، ساعت در حال حرکت نسبت به ساعت ساکن، طی یک رفت، تقریباً چند ثانیه عقب می‌افتد؟ (در واقع، با احتساب حرکت دورانی زمین حول خورشید و حرکت مداری آن حول محور خود، این محاسبه خیلی پیچیده می‌شود.)

۱۶. یک سفینه فضایی باید فاصله $10^{12} \text{ m} \times 6$ را برای رسیدن به جایگاه اولیه خود طی کند. دستگاه‌های تأمین حیات درون سفینه می‌توانند ۲۵ ساعت دیگر هم دوام آورند. برای اینکه مسافری سفینه از این سفر جان سالم به در ببرند کمینه سرعت سفینه نسبت به سیاره جایگاه اولیه چقدر است؟

۱۷. یک سفینه فضایی نسبت به کهکشان در مجاورت خود با سرعت $0.98c$ در حرکت است. ناظرهای واقع در سفینه درمی‌یابند که $10^{-8} \text{ s} \times 6$ طول می‌کشد تا سفینه از نشانه فضایی کوچکی که نسبت به کهکشان ساکن است عبور کند. (الف) از نظر مسافری سفینه، طول کل سفینه چقدر است؟ (ب) از نظر ناظرهایی که نسبت به نشانه فضایی در حال سکون‌اند، طول سفینه چقدر است؟

۱۸. با وجودی که سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی در تمام چارچوبهای مرجع، c است، بسامد و طول موج امواج تکفام از یک چارچوب مرجع تا چارچوب دیگر متفاوت است؛ یعنی، اثر دوپلر نسبیتی وجود دارد. موج تکفامی را که در جهت مثبت محور X_1 حرکت می‌کند می‌توان از رابطه $y_1 = y_0 \sin 2\pi(\nu_1 t_1 - x_1/\lambda_1)$ محاسبه کرد، که در آن ν_1 و λ_1 بسامد و طول موج اندازه‌گیری شده به وسیله ناظر S_1 اند. همین موج که در امتداد محور X_2 در چارچوب مرجع S_2 مشاهده می‌شود باید دارای شکل $y_2 = y_0 \sin 2\pi(\nu_2 t_2 - x_2/\lambda_2)$ باشد. (الف) با استفاده از تبدیلات لورنتس مختصات ν_2 و λ_2 را برحسب ν_1 و λ_1 و سرعت نسبی بین دو چارچوب مرجع (v) پیدا کنید. (ب) نشان دهید وقتی $v \ll c$ است، اثر دوپلر نسبیتی به اثر دوپلر کلاسیک تحویل می‌شود.

۱۹. کهکشانهای دوردست با سرعتهایی به بزرگی $۵۸۱c$ از زمین دور می‌شوند. (الف) اگر به وسیله ناظری که نسبت به ستاره‌ای در حال سکون است، طول عمر ستاره ۱۵ بیلیون سال اندازه‌گیری شود، واگر ستاره با سرعت $۵۸۱c$ نسبت به زمین در حرکت باشد عمر این ستاره از نظر ناظر واقع بر زمین چقدر خواهد بود؟ (ب) ناظری که نسبت به این ستاره ساکن است، نور فرا بنفش با طول موج $2000 \text{ \AA}$ را مشاهده می‌کند. طول موج این نور نسبت به ناظر واقع بر زمین چقدر خواهد بود و در چه قسمتی از طیف الکترومغناطیسی قرار خواهد گرفت؟

۲۰. (الف) با چه سرعتی باید یک ساعت نسبت به ناظری واقع بر زمین حرکت کند تا به اندازه $۵۰c$ ثانیه در یک سال ($3.16 \times 10^7 \text{ s}$) عقب بیفتد؟ (ب) این سرعت را با سرعت 30000 km/h یک قمر، که در مجاورت سطح زمین به دور آن می‌چرخد، مقایسه کنید.

۲۱. یک قطار سریع با سرعت $۸c$ نسبت به زمین در حرکت است. شخصی در این قطار با سرعت $۸c$ نسبت به قطار می‌دود. فرض کنید که جهت‌های این دو سرعت یکسان‌اند. سرعت دهنده نسبت به زمین چقدر است؟

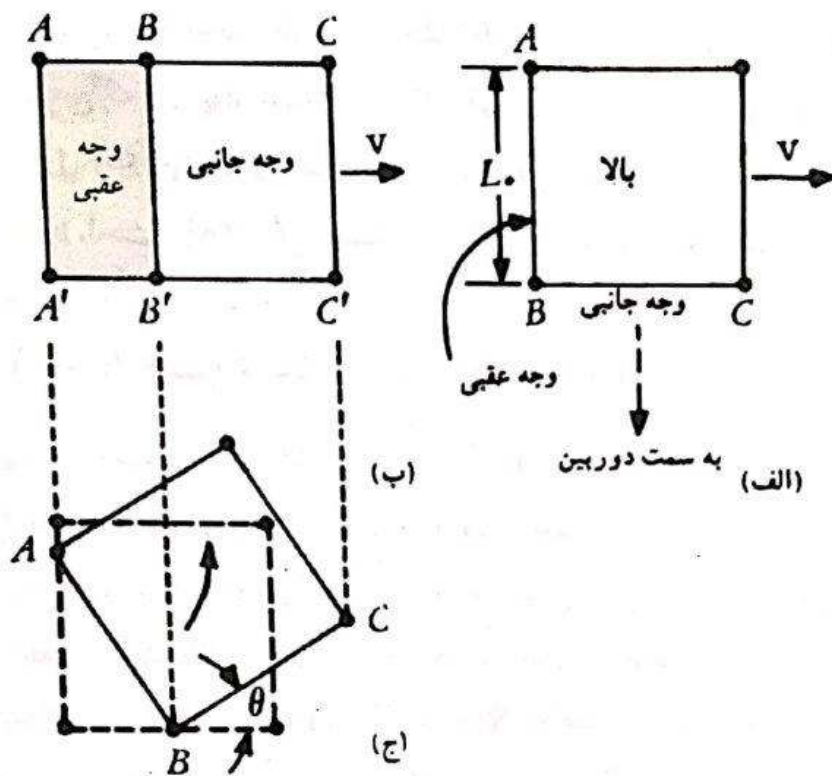
۲۲. قطار سریعی با سرعت $۸c$ از کنار دو تیری که بر روی زمین ثابت شده‌اند عبور می‌کند. این دو تیر در امتداد یکی از خطوط آهن قرار دارند و از نظر ناظری واقع بر زمین، 125 m از یکدیگر فاصله دارند. هنگام عبور قطار، ناظرهای روی زمین دو انتهای جلو و عقب قطار را به طور همزمان منطبق بر این دو تیر مشاهده می‌کنند. (الف) از نظر ناظری که با قطار حرکت می‌کند طول قطار چقدر است؟ (ب) از

نظر ناظر روی زمین، چه مدت طول می کشد تا تمامی قطار از مقابل يك تیر بگذرد؟
(ج) از نظر ناظری که در يك نقطه قطار ایستاده است، بازه زمانی بین عبور قطار از مقابل تیرهای اول و دوم چقدر است؟ (د) از نظر ناظرهای سوار بر قطار فاصله بین دو تیر چقدر است؟ (ه) اگر انطباق دو انتهای قطار با دو تیر از دیدگاه ناظر واقع بر زمین به طور همزمان صورت بگیرد، از نظر ناظر واقع در قطار، کدام انتهای قطار (جلو یا عقب) نخست بر یکی از تیرها منطبق خواهد شد؟

۲۳. (الف) ناظری در دستگاه S_1 مشاهده می کند که در مکان $x_1 = 0$ در زمان $t_1 = 0$ انفجاری رخ می دهد. در نزدیکی آن مکان و کمی بعد از انفجار اول، انفجار دیگری در $x_1 = 120 \text{ km}$ و $t_1 = 120 \times 10^{-6} \text{ s}$ به وقوع می پیوندد. سرعت ناظر دوم S_2 نسبت به S_1 چقدر باید باشد تا وقوع هر دو انفجار را به طور همزمان مشاهده کند؟
(ب) يك رشته انفجار دیگر به وسیله ناظر S_2 به صورت زیر مشاهده می شود: يك انفجار در $x_2 = 0$ و $t_2 = 0$ و انفجار دیگری در $x_2 = 120 \text{ km}$ و $t_2 = 120 \times 10^{-6} \text{ s}$. این رویدادها از نظر ناظر S_1 کجا و کی به وقوع می پیوندند؟

۲۴. میله ساکنی در دستگاه S_1 به موازات محور X_1 قرار گرفته است. طول آن به وسیله ناظر S_1 برابر با L_0 اندازه گیری می شود. (الف) طول میله را در دستگاه S_2 ، که در امتداد محور X_1 با سرعت v در حرکت است، محاسبه کنید. (ب) دو انتهای میله متحرک، که نمایشگر دو رویدادند، باید در S_2 همزمان باشند. اختلاف زمانی بین همین دو رویداد، که در دستگاه S_1 اندازه گیری می شوند، چقدر است؟ (ج) فرض کنید در دستگاه S_1 که در آن میله ساکن است، دو انتهای میله را به عنوان دو رویداد همزمان برگزیده اید. در این صورت اختلاف فضایی و زمانی بین این دو رویداد از نظر ناظر S_2 چقدر بود؟

۲۵. طول هر ضلع يك مکعب نورانی در حال سکون برابر L_0 است. دوربینی از این مکعب عکسبرداری می کند. مکعب با سرعت زیاد v نسبت به دوربین حرکت می کند. دوربین در فاصله دوری از مکعب، که در امتداد عمود بر خط واصل بین آنها حرکت می کند، قرار دارد، شکل مسئله ۲۵ قسمت الف را ببینید. در مدت کوتاهی که در بچه دوربین برای عکسبرداری باز است فقط نوری را که از لبه های A ، B و C مکعب خارج و به دوربین وارد می شود بررسی می کنیم. تپهای نوری که به طور همزمان نقاط A ، B و C را ترك می کنند (در چارچوب مرجع دوربین) به طور همزمان به دوربین نمی رسند؛ نور دارای سرعت معینی است و مسافت طی شده توسط آن از A بیشتر از



شکل مسئله ۲۵. مکعب متحرکی که در امتداد عمود بر جهت حرکت آن عکسبرداری شده است؛ (الف) نما از بالا، (ب) عکس جانبی مکعب، (ج) تعبیری از (ب) که در آن مکعب چرخیده است.

B و C است؛ در نتیجه، طی لحظه کوتاهی که در یچه دوربین باز است، نور گسیل شده از لبه دورتر A همزمان با نوری که کمی دیرتر از لبه‌های B و C گسیل شده است وارد دوربین می‌شود. در شکل مسئله ۲۵ قسمت ب عکس ظاهر شده نشان داده شده است؛ وجه عقبی AB (عقب نسبت به حرکت مکعب) مرئی است، و حال آنکه وجه جانبی BC به خاطر انقباض فضا کوتاه‌تر می‌شود. نشان دهید شخصی که این عکس را بررسی می‌کند می‌تواند چنین استنباط کند که مکعب با سرعت زیاد و در جهت عمود بر دوربین حرکت نمی‌کند بلکه، برعکس، همان‌طور که در شکل مسئله ۲۵ قسمت ج نشان داده شده است، پس از چرخشی به اندازه زاویه θ ، که در آن $\sin \theta = v/c$ است، به حال سکون درمی‌آید. این مطلب را می‌توان چنین تعمیم داد: جسمی که با سرعت زیاد و به‌طور عرضی نسبت به نقطه مشاهده حرکت می‌کند چرخیده به نظر می‌رسد.

۲۶. هنگامی که درسیم جریان الکتریکی وجود ندارد و الکترون‌ها را می‌توان ساکن پنداشت، چگالی خطی الکترون‌ها (تعداد در واحد طول) در یک سیم رسانای معین

برابر با λ_0 است. وقتی جریانی درسیم برقرار می‌شود، الکترون‌ها با سرعت v در طول سیم سوق داده می‌شوند. از نظر ناظر ساکن نسبت به سیم، چگالی خطی λ الکترون‌های سوق یافته درسیم را برحسب λ_0 ، v و c پیدا کنید.

۲۷. نور تکفام از يك تك شكاف عبور می‌کند و همان‌طور که در شکل ۸.۱ الف نشان داده شده است بر روی پرده‌ای دور از شكاف، يك نقش پراش تولید می‌کند. چشمه نور، شكاف و پرده همگی نسبت به ناظر اولی، که مواضع صفرهای شدت را بر روی پرده نشان می‌کند، ساکن‌اند. فرض کنید در امتداد مسیری که نور از چشمه به شكاف می‌رود، ناظر دومی با سرعت خیلی زیاد در حرکت باشد. (الف) آیا این ناظر صفرهای شدت را در همان نشانه‌هایی که ناظر اول مشخص کرده است می‌یابد؟ (ب) آیا فاصله بین شكاف و پرده مشاهده تغییر کرده است؟ حال ناظر سومی در امتداد صفحه‌ای که شامل شكاف است با سرعت خیلی زیاد حرکت می‌کند. (ج) آیا این ناظر صفرهای شدت را در مواضعی که ناظر اول نشان کرده است می‌یابد؟ (د) آیا از نظر ناظر سوم پهنای شكاف تغییر می‌کند؟

۲۸. میون ذره بنیادی ناپایداری با طول عمر متوسط $2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ (از لحظه آفرینش تا هنگام واپاشی) است؛ و این مدت زمانی است که به وسیله ناظری که نسبت به میون ساکن است اندازه‌گیری می‌شود. (الف) چنانچه يك میون معمولی در مدت يك طول عمر، فاصله 600 m را طی کند، از نظر ناظر واقع در آزمایشگاه، سرعت میون چقدر است؟ (ب) از نظر ناظر واقع در آزمایشگاه این میون چقدر عمر کرده است؟ (ج) از نظر ناظری که با میون حرکت می‌کند، میون چه فاصله‌ای را بین تولد و مرگ خود پیموده است؟

۲۹. ناظرهای A و B هردو به حال سکون و به فاصله 10^2 m از یکدیگر بر روی زمین قرار دارند، این فاصله به وسیله خط کشهای ساکن روی زمین اندازه‌گیری شده است. ساعت‌های A و B قبلاً همزمان شده‌اند و با يك آهنگ کار می‌کنند. موشکی با سرعت زیاد در امتداد خط واصل بین A و B می‌گذرد. وقتی موشک از کنار A می‌گذرد، ساعتش صفر (0 s) را نشان می‌دهد، وقتی موشک از کنار ناظر B می‌گذرد، ساعت B ، 10^{-6} s را نشان می‌دهد (الف) سرعت موشک نسبت به زمین در عبور از A به B چقدر است؟ (ب) بازه زمانی بین لحظه‌هایی که A و B از کنار موشک می‌گذرند و به وسیله ساعت واقع در موشک اندازه‌گیری می‌شوند چقدر است؟ (ج) فاصله بین مکان‌های A و B که به وسیله خط کش ناظری که با موشک در حرکت است اندازه‌گیری می‌شود، چقدر است؟

۳۰. برخی از کمیت‌های فیزیکی در داخل يك ناحیه منزوی از فضا پایسته‌اند؛ یعنی، وقتی این کمیتها در يك دستگاه لخت مشاهده شوند، در این ناحیه همواره مقدار آنها یکسان باقی می‌ماند. مثال آشنایی از يك کمیت پایسته، بار الکتریکی است. يك حجم منزوی را، که در آن دو بار ساکن مساوی و مختلف‌العلامت به فاصله d از یکدیگر قرار دارند، در نظر می‌گیریم. حال اگر دوبار به‌طور همزمان ناپدید و یا نابود شوند، بقای بار کل در این دستگاه لخت نقض نمی‌شود. در هر لحظه از زمان، بار کل موجود در این حجم همواره یکسان است؛ یعنی صفر است. نشان دهید، اگر قرار باشد بار کل در تمام دستگاههای لخت پایسته بماند، باید این دو بار در لحظه نابودی باهم باشند ($d=0$). این مثالی از يك اصل عام مربوط به هر کمیت پایسته است؛ چنانچه قرار باشد يك کمیت در تمام دستگاههای لخت پایسته بماند، در آن صورت باید آن کمیت به‌طور موضعی پایسته باشد (پایسته در هر حجم كوچك دلخواه).

۳۱. در پارادوکس دوقلوها (بخش ۸.۲) مجید از همزاد خود سعید دور می‌شود و وحید را ملاقات می‌کند و سپس پیش سعید برمی‌گردد. (الف) از نظر دستگاه لختی که در آن مجید، در فاصله دور شدن از سعید، ساکن است مسیرهای فضا-زمانی سعید، مجید و وحید را رسم کنید. (ب) از نظر ناظری واقع در این دستگاه لخت مجید کی و کجا وحید را ملاقات خواهد کرد و مجید کی و کجا در بازگشت خود سعید را ملاقات خواهد کرد؟

۳۲. سه قلوهای A ، B ، و C به‌طور «همزمان» روی زمین متولد می‌شوند. A در خانه می‌ماند در حالی که B بلافاصله پس از تولدش با سرعت $0.8c$ به يك ستاره مجاور که در فاصله 100 سال نوری از زمین واقع است حرکت می‌کند، و C با سرعت $0.6c$ به ستاره دیگری که در فاصله 100 سال نوری از زمین واقع است حرکت می‌کند. در لحظه رسیدن به مقصدهای مربوط، B و C جهتهای حرکت خود را معکوس می‌کنند و با همان سرعتها به زمین برمی‌گردند، (الف) وقتی B برمی‌گردد، سن A چقدر است؟ (ب) B در هنگام ملاقات خود با A چند سال دارد؟ (ج) وقتی C برمی‌گردد A چند ساله است؟ (د) سن C در هنگام ملاقات با A چقدر است؟

کتابشناسی

1. Friedman, F., F. D. Frisch, and, J. Smith: *Time Dilation. An Experiment with Mu-mesons (Film)*. New York: Modern Learning Aids.

با اندازه گیری واپاشی میونهای پرتوکیهانی، در دو ارتفاع متفاوت، معلوم می شود که میونهایی که با سرعت $0.99c$ حرکت می کنند فقط به میزان یک نهم میونهای در حال سکون واپاشیده می شوند. گزارش این آزمایش را می توان در

2. *American Journal of Physics* **31**: 342 (1963)

مطالعه کرد.

3. Bohm, D.: *Special Theory of Relativity*. Menlo Park, Calif.: W.A. Benjamin, Inc., 1965.

بازده فصل اول شامل بحث مفصلی درباره مفاهیم پیش نیستی فضا و زمان و چگونگی منجر شدن حقایق تجربی به نظریه های نیستی اینشتین است. فصل ۲۶ شامل تعبیر نموداری (نمودار مینکوفسکی^۱) نظریه نسبیت است.

4. Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1963.

در صفحات ۱۵ و ۱۶ این کتاب از یک «ساعت نوری» ساده جهت توضیح اتساع زمان استفاده شده است.

5. NEY, E. P.: *Electromagnetism and Relativity*. New York: Harper and Row, Publishers, 1962.

این کتاب، در فصل اول به مرور مکانیک کلاسیک و نسبیت، به کمک ریاضیاتی در سطح حساب دیفرانسیل و انتگرال می پردازد. فصل دوم به نظریه نسبیت خاص اختصاص دارد. مثالهای حل شده و مسائل این کتاب به توضیح مفاهیم کمک می کنند.

6. Smith, J. H.: *Introduction to Special Relativity*. Menlo Park, Calif.: W. A. Benjamin, Inc., 1965.

در اینجا ریاضیات به کار رفته برای توضیح نظریه نسبیت خاص فقط در سطح جبر است. فصل ۶ به مسئله «پارادوکس دو قلو» و حل آن، با اندکی اختلاف نسبت به این کتاب، می پردازد. متن این کتاب شامل مثالها و مسائل متعددی است.

دینامیک نسبیتی: اندازه حرکت و انرژی

حرکت شناسی نسبیتی، بازه‌های فضایی، زمانی و سرعتها را، آن طور که در تبدیلات لورنتس خلاصه شده اند بررسی می کند. این مبحث بر این حقیقت متکی است که تمامی اندازه گیریهای سرعت نور، یک مقدار ثابت c به دست می دهند. علاوه بر این، نظریه نسبیت خاص، نه تنها به این حقیقت بلکه به هموردایی قوانین فیزیک برای تمام ناظرهای لخت نیز نیازمند است. بنابراین، در این فصل، دینامیک نسبیتی را بررسی می کنیم. دینامیک نسبیتی، مکانیک حرکت ذراتی که با سرعتهای تا سرعت c در حرکت اند، و نیز شکلهای نسبیتی مناسب اندازه حرکت و انرژی را مطالعه می کند. این بررسی مستلزم آن است که قوانین اساسی بقای اندازه حرکت و انرژی تحت تبدیلات لورنتس هم ورده باشند.

نخست به یک رابطه نسبیتی برای اندازه حرکت یک ذره دست خواهیم یافت و خواهیم دید که می توان تصور کرد جرم نسبیتی ذره با سرعت افزایش می یابد. رابطه نسبیتی انرژی جنبشی نشان خواهد داد که تغییر در انرژی جنبشی یک ذره را می توان به تغییر در جرم آن نسبت داد. در واقع، از طریق هم ارزی انرژی و جرم، قانون عمومی بقای انرژی به قانون بقای جرم-انرژی تبدیل خواهد شد. مانستگی بین چهار بردار ناوردای فضا-زمان و چهار بردار ناوردای اندازه حرکت-انرژی را بررسی خواهیم کرد و روابط تبدیلی برای مؤلفه های انرژی و مؤلفه های اندازه حرکت را به دست

خواهیم آورد سرانجام، يك کاربرد مهم نظریه نسبیت خاص را در مورد الکترومغناطیس (غیر از پایایی سرعت انتشار c تابش الکترومغناطیسی) بررسی خواهیم کرد: به کمک يك استدلال کیفی درخواهیم یافت که نیروی مغناطیسی، که معمولاً نوع متمایزی از برهم کنش الکترومغناطیسی بین ذرات باردار متحرك در نظر گرفته می شود، از نیروی مطلقاً الکتریکی یا کولنی، همراه با درباستهای نسبیت به دست می آید.

۱.۳ جرم نسبیتی و اندازه حرکت

مانند رابطه کلاسیکی اندازه حرکت، اندازه حرکت نسبیتی يك ذره را با p نشان می دهیم و به صورت زیر بیان می کنیم

$$p = mv \quad (1.3)$$

که در آن m جرم به اصطلاح نسبیتی است. بنا براین، بنا به تعریف، جرم نسبیتی m يك ذره آن کمیت فیزیکی است که وقتی در سرعت v ضرب شود کمیت برداری p را طوری به دست دهد که اندازه حرکت کل Σp يك دستگاه منزوی، پایسته بماند. می دانیم که قانون کلاسیکی (یا نیوتونی) بقای اندازه حرکت تحت تبدیل گالیله هم ورده است؛ در این تبدیل کلاسیکی يك ذره برابر است با سرعت آن ضرب در يك جرم ناورد. واضح است که رابطه کلاسیک اندازه حرکت نمی تواند تحت تبدیل لورنتس هم ورده باشد. بنا براین، با اعمال درباستهای حرکت شناسی نسبیتی (همان طور که در تبدیلات لورنتس بیان شد) بر قوانین دینامیک ذرات با سرعت زیاد، درمی یابیم که جرم نسبیتی، يك کمیت ناورد نیست بلکه، برعکس، به گونه ای به سرعت ذره بستگی دارد.

در بررسی مجدد قانون بقای اندازه حرکت، برای ذراتی که با سرعت های نسبیتی حرکت می کنند، سعی بر آن است که دو اصل موضوع اساسی نظریه نسبیت خاص برقرار شوند: این دو اصل به قرار زیرند؛ قوانین فیزیکی برای تمام چارچوب های لخت هم ورده هستند و سرعت نور اندازه گیری شده برای تمام ناظرها یکسان است یا، به بیان دیگر، توصیف رویدادها در فضا و زمان طبق تبدیلات لورنتس انجام می شود. البته می دانیم که اختلاف بین شکلهای نسبیتی و کلاسیکی اندازه حرکت هر چه باشد، با توجه به اصل همخوانی، باید اندازه حرکت نسبیتی mv در سرعت های پایین به شکل آشنای $m_0 v$ تحویل شود، که در آن m_0 نمایشگر جرم ذره در سرعت صفر یا حداقل، در سرعت v خیلی کوچکتر از سرعت نور (c) است.

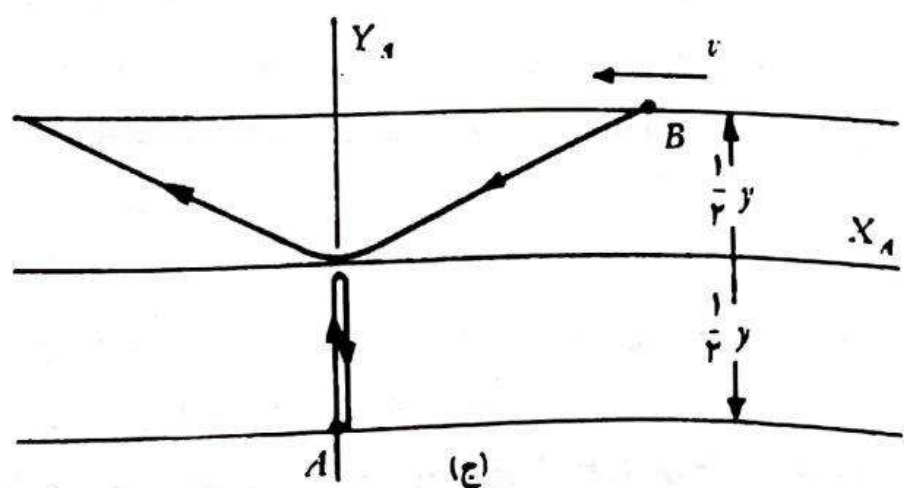
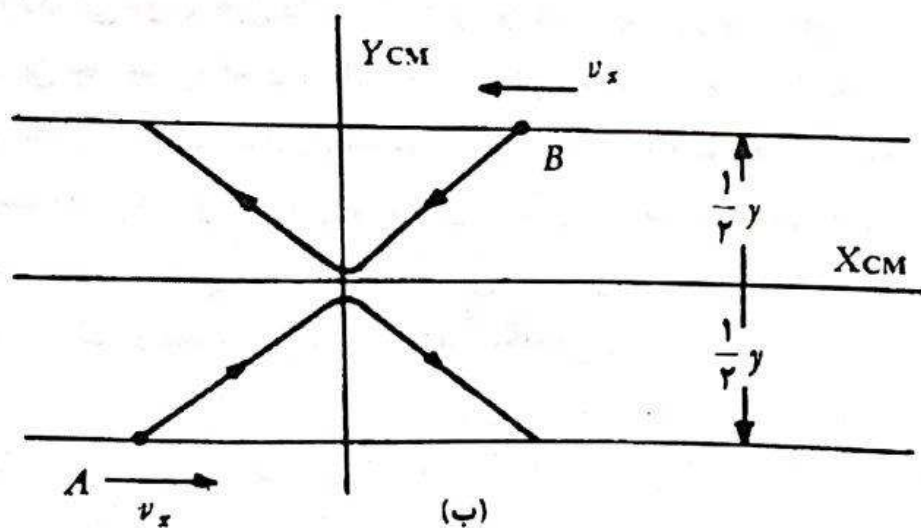
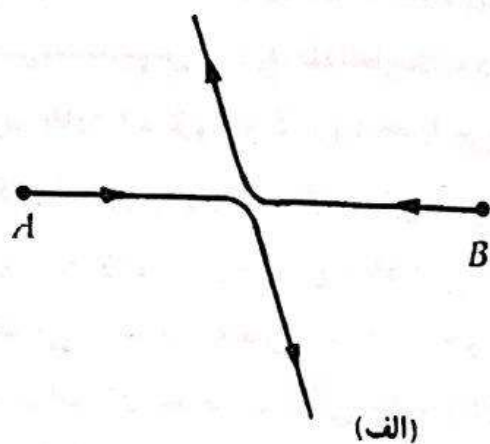
روش ما چنین است؛ ابتدا يك برخورد کشان بین دو جسم یکسان را در نظر

می گیریم. این برخورد کاملاً متقارن است، به طوری که می توان یقین داشت که قانون بقای اندازه حرکت معتبر است. سپس از دیدگاه ناظر لخت دیگری همین برخورد را بررسی می کنیم و هم وردایی قانون بقای اندازه حرکت را جویا می شویم.

فرض می کنیم که دو ذره A و B دارای جرمهای سکون یکسان m_0 باشند. مطابق شکل ۱۰۳ الف این دو ذره با سرعتهای زیاد ولی یکسان (در دو جهت مخالف) آنچنان به طرف هم شلیک می شوند که به طور کشسان برخورد کنند. در هر دو حالت قبل و بعد از برخورد، سرعت ذرات از لحاظ بزرگی یکسان ولی در دو جهت مخالف اند. به علت تقارن برخورد، می توان یقین داشت که برخورد در چارچوب مرجع مرکز جرم انجام می شود. در این چارچوب لخت اندازه حرکت کل دستگاه در تمام زمانها صفر است. همان طور که در شکل ۱۰۳ ب نشان داده شده است، چنانچه محاورهای مختصات را طوری دوران بدهیم که سرعتهای هر دو ذره زوایای یکسانی را نسبت به محورههای X_{CM} و Y_{CM} سازند، این برخورد حتی متقارنتر به نظر می رسد. فرض می کنیم که مؤلفه سرعت هر یک از ذرات، در امتداد محور X_{CM} ، v_x باشد. آنگاه می توان پنداشت که ذره A توسط یک ناظر، که آن را نیز A می نامیم، پرتاب و سپس دریافت شده است و این ناظر با سرعت v_x در فاصله $y/2$ در زیر محور X_{CM} به طرف راست حرکت می کند. همینطور می توان پنداشت که ذره B ، توسط ناظری که آن را B می نامیم و با سرعت v_x در فاصله $y/2$ در بالای محور X_{CM} به طرف چپ حرکت می کند، پرتاب و سپس گرفته شده است.

ناظر سوم، یعنی کسی که نسبت به چارچوب لخت $X_{CM}Y_{CM}$ ثابت است و بنا بر این با ناظرهای A و B متفاوت است، می تواند به سادگی به کمک تقارن اظهار نظر کند که هر دو ذره A و B ، به طور همزمان پرتاب می شوند، در مبدأ با هم برخورد می کنند، و سرانجام توسط ناظرهای مربوط به طور همزمان گرفته می شوند. به بیان دیگر، بازه زمانی T_{CM} بین پرتاب و دریافت ذره A که در چارچوب مرجع مرکز جرم مشاهده می شود همان بازه زمانی بین پرتاب و دریافت ذره B است که در همان چارچوب مشاهده می شود.

به علاوه، ناظر واقع در این چارچوب مرکز جرم می تواند اطمینان داشته باشد که اندازه حرکت در این برخورد پایسته می ماند؛ در واقع، بردار کل اندازه حرکت دستگاه در امتداد هر یک از جهتها باید صفر باشد. این امر حاکی از آن است که تغییر در مؤلفه Y_{CM} اندازه حرکت ذره A قبل و بعد از برخورد، یعنی Δp_{yA} ، باید از لحاظ بزرگی با تغییر در مؤلفه Y_{CM} اندازه حرکت ذره B ، یعنی Δp_{yB} ، برابر باشد. بنابراین، قانون بقای اندازه حرکت ایجاب می کند که



شکل ۱۰۳ ذرات یکسان A و B که با سرعت‌های یکسان با همدیگر برخورد می‌کنند، (الف) از نظر ناظر واقع در چارچوب مرجع مرکز جرم، (ب) همانند الف، ولی در این حالت محورهای X_{CM} و Y_{CM} طوری جهت یافته‌اند که از نظر ناظر واقع در چارچوب مرجع مرکز جرم، برخورد کاملاً کشسان باشد، (ج) از نظر ناظری که همراه با A در امتداد محور X در حرکت است.

$$\Delta p_{yA} = \Delta p_{yB} \quad (2.3)$$

ذره A مسافت $y/2$ را در امتداد Y_{CM} قبل از برخورد و مسافت $y/2$ را بعد از برخورد طی می کند؛ این ذره، در کل، در بازه زمانی T_{CM} مسافت y را طی می کند، به طوری که مؤلفه Y سرعت A برابر با y/T_{CM} است. تغییر اندازه حرکت در امتداد Y_{CM} ، دو برابر بزرگی مؤلفه اندازه حرکت قبل یا بعد از برخورد در امتداد Y_{CM} است. بنابراین

$$\Delta p_{yA} = \frac{2m_A y}{T_{CM}}$$

که در آن m_A جرم نسبیتی ذره A است. همچنین داریم

$$\Delta p_{yB} = \frac{2m_B y}{T_{CM}}$$

که در آن m_B جرم نسبیتی ذره B است. در این صورت، برای ناظر واقع در چارچوب لخت مرکز جرم، معادله (۲.۳) چنین می شود

$$\frac{m_A y}{T_{CM}} = \frac{m_B y}{T_{CM}}$$

می دانیم که هر دو ذره، در اثر تقارن برخورد، دارای جرم نسبیتی یکسان اند: $m_A = m_B$. اگر بقای اندازه حرکت نسبیتی برای تمام چارچوبهای لخت برقرار باشد، در آن صورت باید معادله (۲.۳) نیز برای هر چارچوب لخت دیگری که با سرعت ثابتی نسبت به دستگاه مرکز جرم حرکت می کند صادق باشد. در این صورت برای سهولت، برخورد را در چارچوب لختی که در آن ناظر A به حال سکون است، بررسی می کنیم؛ شکل ۱۰.۳ ج را ملاحظه کنید. اختلافها به قرار زیرند؛ در این حال ناظر A ، قبل و بعد از برخورد، می بیند که ذره اش (A) در امتداد محور Y_A به جلو و عقب می رود و ذره B به طور مایل حرکت می کند. سرعت ناظر B نسبت به ناظر A را با v نشان می دهیم. ناظر A ، که در نقطه ای به فاصله $y/2$ در زیر محور X_A واقع است، می بیند که ناظر B با سرعت v در فاصله $y/2$ در بالای محور X_A به طرف چپ حرکت می کند. چون در جهت عمود بر حرکت نسبی، انقباض فضایی وجود ندارد می بینیم که فاصله عرضی y بین دو ناظر A و B در چارچوب مرجع جدید $X_A Y_A$ ، همان فاصله بین دو ناظر A و B در چارچوب مرجع پیشین $X_{CM} Y_{CM}$ است.

ولی، آنطور که ناظر A اندازه گیری می کند، بازه های زمانی بین پرتاب و گرفتن دو ذره یکسان نیستند؛ ذره A در چارچوب مرجع $X_A Y_A$ از یک محل پرتاب و در همان

محل گرفته می‌شود، ولی ذره B از محلی واقع در طرف راست پرتاب و چندی بعد در محل دیگری واقع در طرف چپ گرفته می‌شود. خصوصیت نسبیتی عام زیر را در مورد بازه‌های زمانی به‌خاطر می‌آوریم: چنانچه دو رویداد در چارچوب مرجع ناظری در یک محل به‌وقوع پیوندند، در آن صورت بازه زمانی بین آنها زمان ویژه T_0 است؛ اگر آن دو رویداد در چارچوب مرجعی که با سرعت v حرکت می‌کند مشاهده شوند، آنگاه بازه زمانی بین آنها طولانیتر (اتساع یافته) خواهد بود و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (29.2) \text{ و } (3.3)$$

بنابراین، چنانچه بازه زمانی بین پرتاب و گرفتن ذره A را که توسط ناظر A مشاهده می‌شود با T_0 نشان دهیم، در این صورت، بازه زمانی بین پرتاب و گرفتن ذره B که توسط همان ناظر A مشاهده می‌شود، برابر با T خواهد بود.

از نظر ناظر A ، توالی رویدادها بدین‌قرار است: نخست ناظر B ذره B را پرتاب می‌کند؛ سپس ناظر A ذره A را پرتاب می‌کند؛ آنگاه دو ذره با هم برخورد می‌کنند؛ بعد از آن ناظر A ذره A را می‌گیرد و سرانجام ناظر B ذره B را خواهد گرفت. در اینجا نمونه‌ای از این قاعده کلی را می‌بینیم که رویدادهایی که در یک چارچوب مرجع همزمان اند (پرتاب و گرفتن ذرات A و B در چارچوب مرجع $X_{CM}Y_{CM}$) در چارچوب مرجع دیگری که نسبت به چارچوب اول حرکت می‌کند همزمان نیستند. پس، در چارچوب مرجع $X_A Y_A$ ، که در شکل ۱.۳ ج نشان داده شده است، تغییرات اندازه حرکت در امتداد Y_A به‌صورت زیر است

$$\Delta p_{YA} = \frac{2m_A y}{T_0}$$

$$\Delta p_{YB} = \frac{2m_B y}{T}$$

برای تضمین هم‌وردایی بقای اندازه حرکت، این روابط را در (۲.۳) جایگزین می‌کنیم، حاصل چنین می‌شود

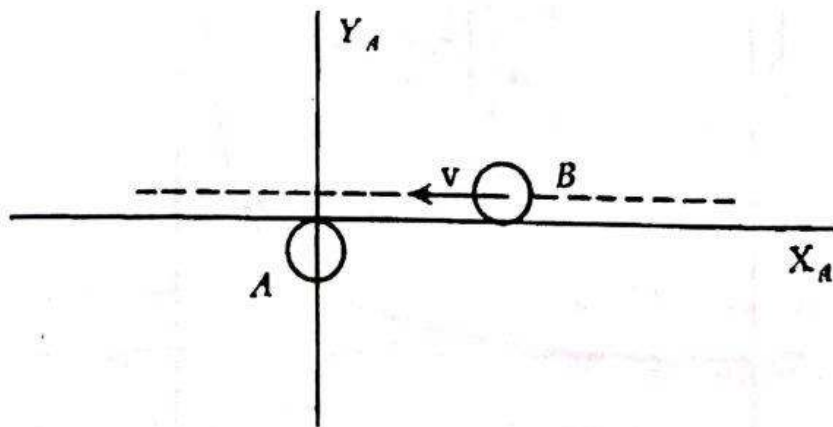
$$\frac{m_A y}{T_0} = \frac{m_B y}{T}$$

و با استفاده از رابطه (۳.۳) خواهیم داشت

$$m_A = m_B \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (۴.۳)$$

در این رابطه m_A و m_B ، به ترتیب، جرم ذرات A و B اند که در چارچوب مرجع $X_A Y_A$ مشاهده شده‌اند، و v سرعت ناظر B نسبت به ناظر A است. اتساع زمان و نسبیت همزمانی از تبدیلات لورنتس حاصل می‌شوند. بنابراین، اگر بقای اندازه حرکت بخواهد تحت تبدیلات لورنتس هم‌وردا باشد، باید رابطه (۴.۳) برقرار باشد. واضح است که این معادله نمی‌تواند برقرار شود مگر اینکه m_B و m_A متفاوت باشند. اگر به یاد آوریم که این دو جرم، وقتی نسبت به یک ناظر ساکن اندازه‌گیری می‌شدند برابر بودند، معلوم می‌شود که، همان‌طور که پیشگویی کردیم، جرم نسبیتی یک ذره باید به نحوی به سرعت آن بستگی داشته باشد.

در برخوردی که در ۱.۳ ج نشان داده شده است، هر دو ذره در حرکت‌اند. در این صورت برای یافتن چگونگی بستگی جرم یک ذره به حرکت آن (نسبت به یک ناظر) برخورد ویژه‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن ذره A در چارچوب مرجع $X_A Y_A$ ساکن است. یعنی فرض می‌کنیم که مؤلفه Y سرعت هر دو ذره به صفر بگرایند. در این صورت ذره A نسبت به چارچوب مرجع $X_A Y_A$ ساکن است، و جرم آن را در این حالت با جرم سکون m_0 نشان می‌دهیم. در این حال، ناظر ساکن در $X_A Y_A$ می‌بیند که ذره B نزدیک می‌شود و پس از یک برخورد خراشان با A در امتداد یک خط مستقیم دور می‌شود (شکل ۲.۳ را ملاحظه کنید). در این صورت، سرعت ذره B درست برابر سرعت v ناظر B است (که در این حالت نسبت به آن ساکن است). وقتی که ذره B ساکن است، جرم آن نیز



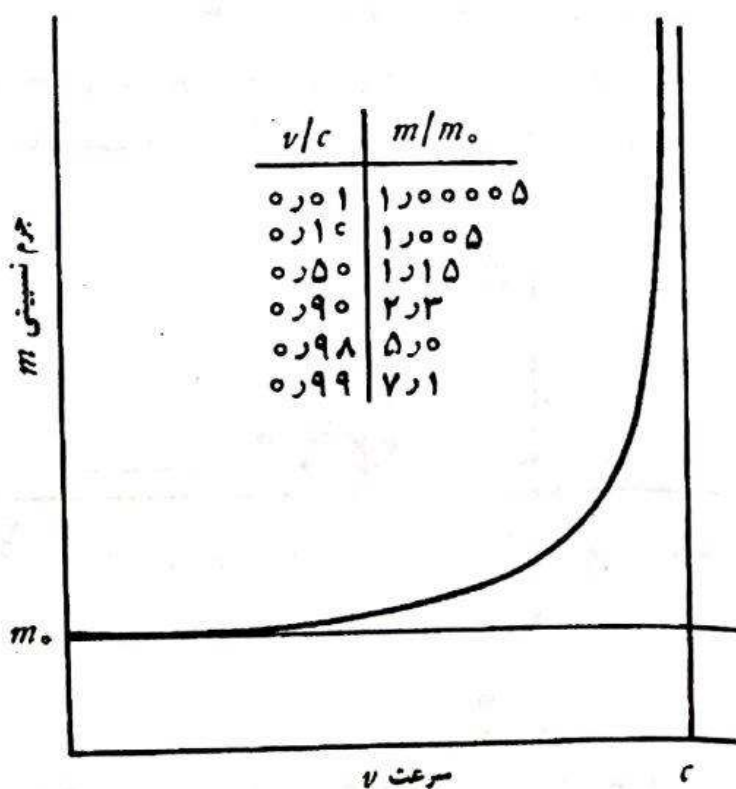
شکل ۲.۳ برخورد ذره متحرك B با ذره ساکن A از نظر ناظر A ؛ این شکل از شکل ۱.۳ چ در حد صفر مؤلفه عرضی سرعت به دست آمده است.

m_0 است؛ ولی هنگامی که این ذره نسبت به ناظر واقع در $X_A Y_A$ با سرعت v در حال حرکت است، جرم آن با m_0 متفاوت خواهد بود و در این حالت جرم آن را با m نشان می‌دهیم. در حالت برخورد خراشان با $m_A = m_0$ و $m_B = m$ ، رابطه (۴.۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$m_0 = m \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (5.3)$$

همین طور، ناظر B ذره خود B را ساکن و بد جرم m_0 و ذره A را با سرعت v در حرکت و بد جرم m مشاهده می‌کند. پس هر ناظری درمی‌یابد که، اگر ذره‌ای نسبت به آن ناظر ساکن باشد، دارای جرم سکون m_0 است و اگر ذره با سرعت v حرکت کند جرم آن برابر $m_0 [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ خواهد بود. شکل ۳.۳ جرم نسبیتی یک ذره را به صورت تابعی از سرعت آن نشان می‌دهد، آن طور که توسط رابطه (۵.۳) بیان می‌شود. واضح است وقتی m بد طور قابل ملاحظه‌ای از m_0 بزرگتر خواهد بود که سرعت ذره با سرعت



شکل ۳.۳ تغییرات جرم نسبیتی با سرعت.

نور قابل مقایسه باشد؛ مثلاً وقتی $v/c = 1/10$ است، m فقط به اندازه ۵ درصد بر m_0 فزونی خواهد داشت.

وقتی گفته می‌شود که جرم يك ذره به سرعت آن بستگی دارد، این مطلب اساساً به این معنی است که اندازه حرکت نسبیتی p يك ذره با سرعت v ، از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (۶.۳)$$

که در آن m_0 يك مقدار ثابت و مستقل از سرعت است. نتیجه آزمایشهای مربوط به ذراتی که با سرعتهای نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کنند به‌طور قطع نشان می‌دهد که رابطه (۶.۳) به درستی اندازه حرکت يك ذره را در همه سرعتهای تا c به دست می‌دهد. البته، در مورد ذرات با سرعت پایین، یعنی با $v/c \ll 1$ ، اندازه حرکت نسبیتی به شکل کلاسیک خود، $p = m_0 v$ ، تحویل می‌شود. در حالی که در فیزیک پیش نسبیتی، بازه‌های فضایی، بازه‌های زمانی و جرم را مطلق و سرعت نور را در يك چارچوب لخت منحصر به فرد، نسبی در نظر گرفتیم، فیزیک نسبیتی اینشتین ایجاب می‌کند که بازه‌های فضایی، بازه‌های زمانی و جرم (که به صورت نسبت اندازه حرکت به سرعت تعریف می‌شود) نسبی باشند و به حرکت نسبی بین جسم و ناظر بستگی داشته باشند؛ زیرا سرعت نور برای تمامی دستگاههای لخت مطلق است.

در دینامیک نسبیتی، نیروی F وارد بر يك جسم را به صورت آهنگ تغییر زمانی اندازه حرکت نسبیتی آن ذره تعریف می‌کنیم. بنابراین قانون دوم نیوتون به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}mv \quad (۷.۳)$$

که ممکن است بدین صورت نیز بیان شود

$$F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \quad (۸.۳)$$

در مکانیک کلاسیک، با ثابت بودن جرم هر جسم، $dm/dt = 0$ است؛ در نتیجه دوشکل قانون دوم نیوتون، یعنی $F = (d/dt)mv$ و $F = m dv/dt = ma$ معادل یکدیگر می‌شوند. ولی در دینامیک نسبیتی، معمولاً این دوشکل معادل نیستند؛ این بدین دلیل است که جرم m با سرعت ذره تغییر می‌کند و بنابراین، اگر سرعت ذره با زمان تغییر کند، جرم نیز با زمان تغییر خواهد کرد. شکل عمومی قانون دوم نیوتون، $F = dp/dt$ همواره

صحیح است.

يك وضعيت خيلى مهم، كه در آن سرعت يك ذره ثابت است در حالى كه بردار سرعت آن تغيير مى كند، حركت يك ذره بر يك قوس دایره‌ای تحت تأثیر يك نیروی جانب مركز است. چون نیرو شعاعی و بر حركت ذره عمود است، سرعت آن ثابت ولی جهت سرعت آن در هر لحظه تغيير مى كند.

ذره‌ای را كه جرم آن m و بار الكتریكى آن Q است و با سرعت v عمود بر میدان مغناطیسی یكنواخت B حركت مى كند در نظر مى گیریم. نیروی مغناطیسی عمود بر سرعت ذره كه باعث مى شود ذره بر يك دایره حركت كند دارای بزرگى

$$F = QvB$$

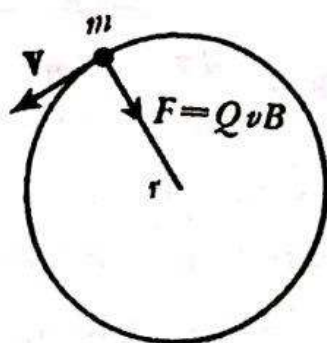
است. چون ذره با سرعت ثابت حركت مى كند، جرم نسبیتی آن ثابت و بنابراین $dm/dt = 0$ است. در این صورت معادله (۸.۳) چنین مى شود $F = m dv/dt = ma$ ، كه در آن a شتاب جانب مركز با بزرگى v^2/r ، و شعاع مسیر دایره‌ای است (شكل ۴.۳ را ببینید). با استفاده از رابطه نیروی مغناطیسی خواهیم داشت

$$QvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$p = mv = QBr \quad (۹.۳)$$

لازم به یادآورى است كه، گرچه این معادله دقیقاً به همان شكل معادله حاصل از روشهای مكانيك كلاسیك است، ولی جرم ظاهر شده در این رابطه، m ، جرم نسبیتی است و نه جرم سكون.

معادله (۹.۳) اساس يك روش ساده برای تعیین اندازه حركت نسبیتی يك ذره



شكل ۴.۳ حركت يك ذره باردار در يك میدان مغناطیسی عرضی.

باردار است. در این روش Q معلوم است، B و r اندازه گیری می‌شوند و p از این معادله محاسبه می‌شود. چون v را می‌توان با استفاده از میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عمود برهم اندازه گیری کرد (بخش ۴۰۸)، جرم نسبیتی m را می‌توان با استفاده از رابطه (۹.۳) محاسبه کرد. این اساساً روشی بود که توسط بوچرد (۱۹۵۹/۱۲۸۸) و دیگران جهت تحقیق تغییرات جرم نسبیتی با سرعت، که توسط نظریه نسبیت پیشگویی شده بود، به کار رفت.

مثال ۱۰۳ ذره‌ای با جرم سکون m_0 در ابتدا با سرعت $0.40c$ در حرکت است. (الف) اگر سرعت ذره دو برابر شود، اندازه حرکت جدید این ذره با اندازه حرکت اولیه آن چگونه مقایسه می‌شود؟ (ب) چنانچه اندازه حرکت ذره تا ده برابر اندازه حرکت اولیه آن افزایش یابد، سرعت نهایی آن چگونه با سرعت اولیه‌اش مقایسه می‌شود؟
(الف) اندازه حرکت اولیه ذره از معادله (۶.۳) تعیین می‌شود

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - (v_i/c)^2}} = \frac{0.40 m_0 c}{\sqrt{1 - (0.40)^2}} = 0.44 m_0 c$$

وقتی سرعت ذره دو برابر می‌شود، ذره با سرعت $v = 2(0.40c) = 0.80c$ در حرکت می‌کند و اندازه حرکت آن چنین می‌شود

$$P = \frac{m_0 (2v)}{\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 1.33 m_0 c$$

نسبت اندازه حرکت نهایی به اندازه حرکت اولیه برابر ۳.۰ است و حال آنکه نسبت سرعت نهایی به سرعت اولیه ۲.۰ است.

(ب) اندازه حرکت اولیه ذره $p_i = 0.44 m_0 c$ است. اکنون اندازه حرکت آن ده برابر این مقدار می‌شود، و مجدداً سرعت ذره از رابطه (۶.۳) محاسبه می‌شود

$$p = 10(0.44 m_0 c) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

با مرتب کردن و مجذور کردن این رابطه، چنین نتیجه می‌شود

$$(4.4)^2 c^2 - (4.4)^2 v^2 = v^2$$

$$v = 0.975c$$

در این حالت نسبت سرعتها $v/v_i = 2.44$ و نسبت اندازه حرکتها $p/p_i = 10$ است.

۲.۳ انرژی نسبیتی

تا اینجا روابطی برای جرم نسبیتی (معادله ۵.۳) و اندازه حرکت نسبیتی (معادله ۶.۳) و شکل صحیح قانون دوم نیوتون (معادله ۷.۳)، به دست آوردیم. حال این سؤال مطرح است که «انرژی جنبشی نسبیتی E_k چیست؟» برای یافتن این انرژی، مانند فیزیک کلاسیک، آن را به صورت کار کل انجام شده در اثر نیروی ثابت F برای آوردن یک ذره ساکن به سرعت نهایی v تعریف می کنیم

$$E_k = \int_0^v F ds = \int_0^v \frac{d}{dt}(mv) ds = \int_0^v \frac{d}{dt}(mv) v dt$$

$$= \int v d(mv) = \int (v^2 dm + mv dv)$$

در انتگرال گیری باید توجه کنیم که m و v هر دو متغیرند و بستگی یکی از این دو به دیگری با رابطه (۵.۳) بیان می شود. اگر v را بر حسب m بیان کنیم و سپس نسبت به متغیر m انتگرال بگیریم، عمل انتگرال گیری ساده تر خواهد شد. روابط مربوط به v و dv را می توان با بازنویسی رابطه (۵.۳) به صورت زیر به دست آورد

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2}$$

با مشتق گیری از این رابطه، داریم

$$-2v \frac{dv}{c^2} = -2m_0^2 \frac{dm}{m^3}$$

از ترکیب این دو معادله، رابطه زیر نتیجه می شود

$$mv dv = (c^2 - v^2) dm$$

در معادله مربوط به محاسبه انرژی جنبشی E_k ، به جای $mv dv$ مقدار بالا را جایگزین می کنیم، در نتیجه

$$E_k = \int_{m_0}^m [v^2 dm + (c^2 - v^2) dm] = c^2 \int_{m_0}^m dm = mc^2 - m_0 c^2$$

$$E_k = (m - m_0) c^2$$

(۱۰.۳)

از این دو، انرژی جنبشی نسبیتی برابر افزایش جرم ناشی از حرکت ذره ضرب در c^2 است. مشاهده می کنیم که انرژی جنبشی نسبیتی مشخصاً با انرژی جنبشی کلاسیکی متفاوت

است. به علاوه، در فیزیک نسبیت گفتن اینکه يك ذره دارای انرژی جنبشی است معادل آن است که بگوییم جرم ذره از جرم سکون آن بیشتر است. البته باید انرژی جنبشی نسبیتی به کمک اصل همخوانی به انرژی جنبشی کلاسیک، یعنی به $(m_0 v^2)/2$ برای $v/c \ll 1$ تحویل شود. برای آن که نشان دهیم که این تحویل صورت می گیرد، رابطه (۱۰.۳) را به کمک قضیه دو جمله ای بسط می دهیم

$$\begin{aligned} E_k &= m_0 c^2 \left\{ \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\} \\ &= m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \dots - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} \frac{m_0 v^4}{c^2} + \dots \end{aligned}$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} E_k = \lim_{c \rightarrow \infty} (m - m_0) c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad \text{یا}$$

مهم این است که بدانیم انرژی جنبشی نسبیتی با $(mv^2)/2$ ، که در آن m جرم نسبیتی است، بیان نمی شود.

دیدیم که افزایش در انرژی جنبشی يك ذره با افزایش در جرم آن مطابقت دارد. این قاعده عموماً در مورد انرژی صحت دارد؛ هر تغییری در انرژی کل يك دستگاه ذرات با تغییری در جرم آن دستگاه متناظر است. می توان معادله (۱۰.۳) را به شکلی عمومی تر نوشت

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 \quad (11.3)$$

که در آن E نمایشگر انرژی کل ذره است و به صورت زیر تعیین می شود

$$E = mc^2 \quad (12.3)$$

و E_0 ، یعنی انرژی سکون ذره، به صورت زیر محاسبه می شود

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (13.3)$$

وقتی که مرکز جرم دستگاهی از ذرات ساکن باشد، انرژی سکون E_0 و جرم سکون m_0 آن برابر انرژی کل و جرم کل دستگاه اند. معادله (۱۲.۳) رابطه مشهور اینشتین است که هم ارزی انرژی و جرم را نشان

می‌دهد. انرژی و جرم هر کدام مظهر متفاوتی از يك جوهر فیزیکی‌اند. يك ذره برای ناظرى که نسبت به آن ساکن است دارای جرم m_0 و انرژی سکون $m_0 c^2$ است. چون جرم و انرژی هم ارز و قابل تعویض‌اند، از این‌پس قوانین مجزایی برای بقای انرژی و جرم نخواهیم داشت؛ در عوض، فیزیک نسبیت این دو را در يك قانون ساده، به نام قانون بقای جرم-انرژی ترکیب می‌کند. این قانون در هر دستگاه لختی صادق است، هم چنانکه درباره بقای اندازه حرکت نسبیتی صادق بود.

عموماً در فیزیک، مفهوم اندازه حرکت از مفهوم سرعت مفیدتر است (مثلاً، قانون بقای اندازه حرکت داریم ولی قانون بقای سرعت نداریم). بنابراین، اغلب بیان انرژی E بر حسب p مناسبتر از بیان آن بر حسب v است. می‌توان v را در روابط مذکور به صورت زیر حذف کرد؛ رابطه (۵.۳) را مجذور می‌کنیم و هر دو طرف آن را در $[1 - (v/c)^2] c^4$ ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

از روابط (۶.۳)، (۱۲.۳) و (۱۳.۳) مقادیر mv ، mc^2 و $m_0 c^2$ را در این معادله جایگزین می‌کنیم و به راحتی به رابطه مطلوب بین E و p می‌رسیم

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \quad (14.3)$$

حال معادلات نسبیتی را برای دو شرط حدی، سرعت‌های خیلی کم و سرعت‌های خیلی زیاد، آزمایش می‌کنیم.

$v \ll c$ ، این ناحیه کلاسیکی است که در آن مکانیک نیوتونی کفایت می‌کند و کمیت‌های نسبیتی به شکل‌های کلاسیکی خود تحویل می‌شوند، یعنی

$$m \approx m_0$$

$$P \approx m_0 v$$

$$E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

در این ناحیه انرژی جنبشی خیلی کمتر از انرژی سکون است؛ یعنی

$$E_k \ll E_0$$

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} m_0 v^2}{m_0 c^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \ll 1$$

زیرا

$v \approx c$. این نمایشگر ناحیه فرین نسبیتی است. بنابراین روابط (۵.۳)، (۱۱.۳) و

(۱۴.۳) چنین خواهد شد

$$m \gg m_0$$

$$E \gg E_0$$

$$p \approx \frac{E}{c}$$

$$E_k \approx E$$

برای حالتی که يك ذره دارای انرژی و اندازه حرکت است ولی جرم سکون آن صفر است (این حالتی است که از دیدگاه کلاسیک بی معنی ولی در نظریه نسبیت پذیرفتنی است) معادلات بالا دقیقاً صحیح خواهند بود، و ذره با جرم سکون صفر باید لزوماً با سرعت نور حرکت کند. یعنی، برای ذره‌ای با جرم سکون صفر خواهیم داشت

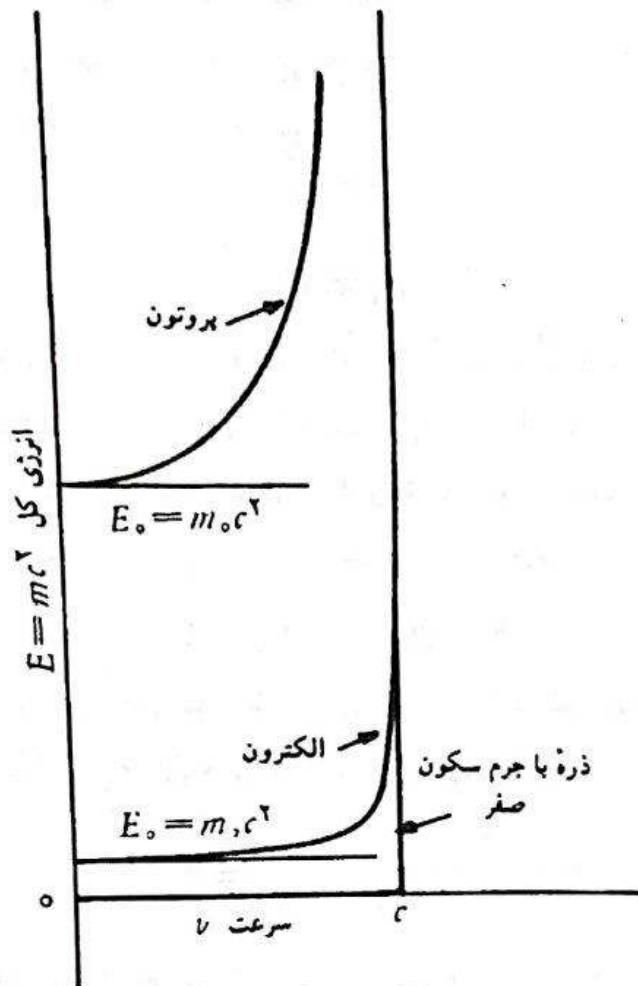
$$m_0 = 0 \quad E = pc \quad E_k = E \quad v = c \quad (15.3)$$

برعکس، اگر ذره‌ای با انرژی غیر صفر با سرعت نور حرکت کند، باید دارای جرم سکون صفر باشد، زیرا از معادلات (۵.۳) و (۱۳.۳) چنین برمی آید

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (16.3)$$

هرگاه $v = c$ باشد، مخرج این کسر صفر است؛ و برای جرم سکون غیر صفر، انرژی ذره بینهایت خواهد شد و این غیر ممکن است. ولی، اگر جرم سکون صفر باشد، طرف راست رابطه (۱۶.۳) به صورت صفر/صفر درخواهد آمد، که مقداری نامعین است. جرم نسبیتی m را می توان از معادله اینشتین $m = E/c^2$ به دست آورد؛ این جرم حتی با وجود اینکه m_0 صفر است دارای يك مقدار متناهی است. تغییرات انرژی (و بنا بر این تغییرات جرم، زیرا $E = mc^2$) بر حسب سرعت برای يك پروتون، يك الکترون و ذره‌ای با جرم سکون صفر در شکل ۵.۳ نشان داده شده است. برای ذره‌ای با جرم سکون صفر تنها در صورتی که با سرعت c حرکت کند، انرژی نسبیتی آن مقداری غیر از صفر خواهد بود؛ ولی در این سرعت، انرژی (وجرم) می تواند هر مقداری از صفر تا بینهایت را دارا باشد. انرژی سکون ذره‌ای با جرم سکون صفر برابر صفر است؛ بنابراین، همان طور که رابطه (۱۵.۳) نشان می دهد، انرژی کل این ذره تماماً انرژی جنبشی خواهد بود.

بررسی بستگی انرژی به اندازه حرکت جالب است. انرژی کل نسبیتی E به صورت تابعی از اندازه حرکت نسبیتی p در شکل ۶.۳ نشان داده شده است؛ این بستگی از معادله زیر پیروی می کند



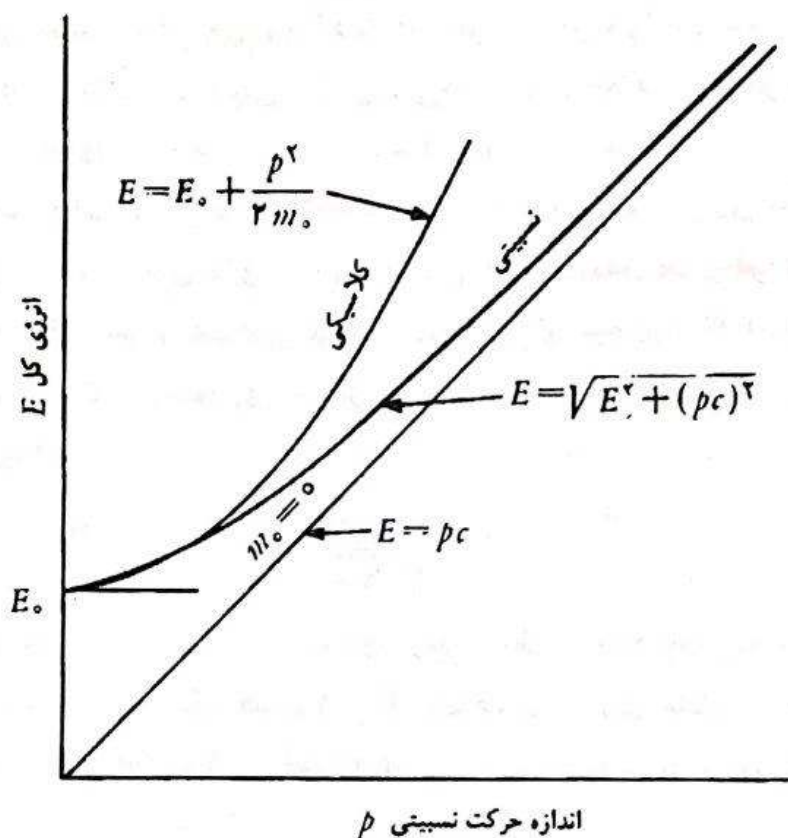
شکل ۵.۳ انرژی نسبیتی کل، بر حسب سرعت، برای سه ذره‌ای که جرم‌های سکون متفاوت دارند. (انرژی‌های سکون این ذرات نسبت به هم در یک مقیاس نیستند.)

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \quad (۱۴.۳)$$

در سرعت‌های پایین، یا $v \ll c$ ، روابط $m \approx m_0$ و $p \approx p_0 \approx m_0 v$ برقرارند. بنابراین در این ناحیه کلاسیک، انرژی کل به صورت زیر بیان می‌شود

$$E \approx \frac{p_0^2}{2m} + E_0 = \frac{1}{2} m_0 v^2 + E_0$$

از طرف دیگر، در سرعت‌های خیلی بالا، همان‌طور که رابطه (۱۵.۳) نشان می‌دهد. رابطه $E \approx pc$ برقرار است. در ناحیه کلاسیک، انرژی جنبشی $E - E_0$ با مجذور اندازه حرکت تغییر می‌کند، حال آنکه در ناحیه فرین نسبیتی، انرژی جنبشی تقریباً برابر E ، با اندازه حرکت به‌طور خطی تغییر می‌کند. از رابطه (۱۴.۳) چنین نتیجه می‌شود که شیب



شکل ۶.۳ انرژی نسبیتی کل بر حسب اندازه حرکت نسبیتی يك ذره.

dE/dp در شکل ۶.۳ برابر سرعت ذره v است.

۳.۳ هم‌ارزی جرم و انرژی، و دستگاههای مقید

برای روشن شدن اهمیت هم‌ارزی جرم و انرژی و بقای جرم - انرژی، دو وضعیت را در نظر می‌گیریم: دستگاههای غیر مقید و دستگاههای مقید. دستگاههای غیر مقید. برخورد بین دوزره را که جرم سکون هر يك m_0 است در نظر می‌گیریم. این دوزره به طرف یکدیگر پرتاب می‌شوند، به طوری که سرعت هر يك از آنها نسبت به ناظر ساکن واقع در چارچوب مرجع مرکز جرم، v است. فرض می‌کنیم که برخورد کاملاً غیر کشان باشد؛ از این رو دوزره به همدیگر می‌چسبند و يك تکه ذره تشکیل می‌دهند، که جرم سکون آن را با M_0 نشان می‌دهیم. حال می‌پرسیم، «رابطه جرم سکون نهایی، M_0 ، با جرم سکون هر يك از ذرات فرودی، m_0 ، چگونه است؟» از نظر فیزیک کلاسیک باید انتظار داشت که M_0 برابر با $2m_0$ باشد. ولی در خواهیم یافت که در فیزیک نسبیت چنین نیست.

باتوجه به بقای اندازه حرکت خطی می‌دانیم که اندازه حرکت کل باید صفر باشد. این مطلب از این حقیقت ناشی می‌شود که اندازه حرکت کل در آغاز صفر است، ذرات قبل از برخورد دارای اندازه حرکتی مساوی ولی درجهتهای خلاف یکدیگرند. بنابراین، پس از برخورد باید ذرات به هم بچسبند و در حال سکون بمانند.

قبل از برخورد انرژی کل دوزره $2mc^2$ است، که در آن mc^2 انرژی سکون به علاوه انرژی جنبشی هر دوزره است. طبق بقای انرژی، انرژی کل دوزره قبل از برخورد باید برابر با انرژی کل M_0c^2 جسم مرکب پس از برخورد باشد. توجه کنید که انرژی کل جسم مرکب صرفاً انرژی سکون است، زیرا مرکز جرم ساکن است. از این رو، بقای جرم-انرژی چنین به دست می‌دهد

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

جرم سکون M_0 جسم مرکب پس از برخورد، از جرم سکون $2m_0$ ذرات فرودی بزرگتر است. این مطلب به این دلیل است که انرژی که به عنوان انرژی جنبشی ورودی دوزره مشاهده می‌کنیم، قسمتی از انرژی سکون ذرات ترکیب شده پس از برخورد را تشکیل می‌دهد.

در این مثال برخورد را در چارچوب مرجعی که در آن مرکز جرم ساکن بود مشاهده کردیم. عموماً، صحیح است که از نظر هر ناظر واقع در هر دستگاه لختی نیز اندازه حرکت نسبیتی کل و جرم - انرژی کل پایسته بمانند (بخش ۴.۳ را ببینید).

مثال ۲.۳ دو قمر هریک به جرم سکون ۴۰۰۰ کیلوگرم با سرعت 30000 km/h نسبت به ناظری واقع بر زمین به سوی همدیگر حرکت می‌کنند. این دو قمر با هم برخورد می‌کنند و به همدیگر می‌چسبند. افزایش جرم سکون کل دستگاه را پیدا کنید.

چون اندازه حرکتی این قمرها برابر و در خلاف جهت یکدیگرند، اندازه حرکت کل صفر است؛ بنابراین پس از برخورد، جسم مرکب ساکن خواهد بود. از آنجا که انرژی کل پایسته است، تمامی انرژی جنبشی قمرهای فرودی به جرم سکون تبدیل می‌شود، و

$$\Delta m = \frac{2E_k}{c^2} = \text{افزایش جرم سکون}$$

که در آن E_k انرژی جنبشی اولیه هریک از قمرهاست. سرعت هریک از این دو قمر، یعنی 30000 km/h ، به مراتب کمتر از سرعت نور است، و می‌توان از بیان کلاسیک انرژی جنبشی، $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$ ، استفاده کرد. بنابراین

$$\Delta m = \frac{2E_k}{c^2} = \frac{2\left(\frac{1}{2}m_0v^2\right)}{c^2} = m_0\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$= (2000\text{kg})\left(\frac{30000}{3 \times 10^8 \times 3600}\right)^2 \approx 0.003\text{g}$$

دستگاه‌های مقید. یکی از مهمترین نتایج حاصل از نظریه نسبیت اینشتین پیوند دو ذره A و B توسط يك نیروی جاذبه و تشکیل يك تكد دستگاه است. تجزیه دستگاه به مؤلفه‌های مجزای آن مستلزم انجام کار است؛ یعنی، باید به دستگاه انرژی بدهیم. فرض می‌کنیم که جرم سکون دستگاه مرکب M_0 و جرم سکون هر يك از ذرات m_{0A} و m_{0B} باشد. دستگاه مقید و تجزیه آن به A و B را در چارچوب مرجع مرکز جرم بررسی می‌کنیم.

تجزیه دستگاه مقید به‌طور نمادی در شکل ۷.۳ نشان داده شده است. در این شکل E_b مقدار انرژی است که باید به دستگاه داده شود تا ذرات آن کاملاً از هم جدا شوند. چون انرژی لازم برای تجزیه دستگاه دقیقاً برابر انرژی بستگی دستگاه است، E_b را انرژی-بستگی می‌نامند (این انرژیها از لحاظ قدر مطلق برابر ولی مختلف‌العلامت‌اند).

اکنون، بقای جرم - انرژی را در این وضعیت به کار می‌گیریم، داریم

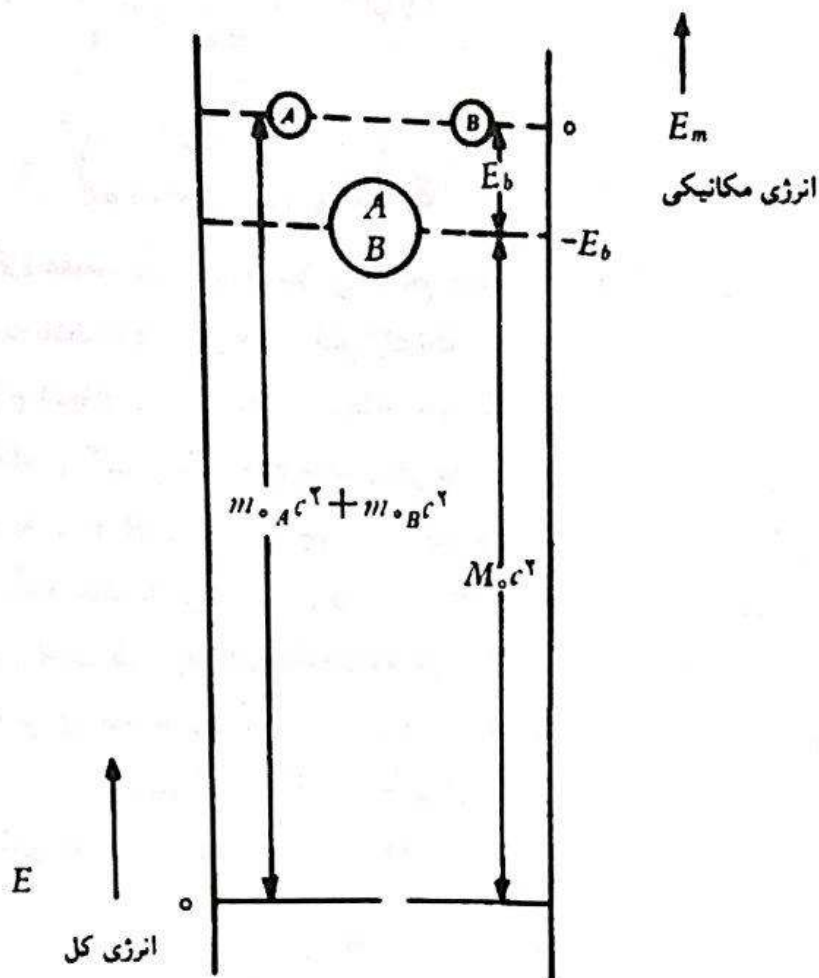
$$M_0 + \frac{E_b}{c^2} = m_{0A} + m_{0B} \quad (17.3)$$

در صورتی که $E_b > 0$ باشد، از این رابطه نتیجه می‌شود که $M_0 < m_{0A} + m_{0B}$ خواهد بود. یعنی، جرم سکون دستگاه مقید باید از جمع جرمهای سکون ذرات جدا از هم کمتر باشد. این با وضعیت دستگاههای غیر مقید که در آنها جرم سکون جسم مرکب بر جرمهای سکون ذرات جدا شده فزونی داشت مغایر است. پس هرگاه جرم سکون کل دستگاه و نیز جرمهای سکون اجزای تشکیل‌دهنده آن در دست باشند، اصولاً امکان محاسبه انرژی-بستگی E_b وجود دارد. تنها در مورد نیروهای هسته‌ای است که انرژی بستگی بین ذرات آنقدر بزرگ است که می‌توان يك اختلاف جرم قابل اندازه‌گیری تولید کرد.

می‌توان صفر انرژی جنبشی کل و انرژی پتانسیل يك دستگاه متشکل از ذرات را در هر جای مناسبی انتخاب کرد. این انرژی را انرژی مکانیکی کل E_m می‌نامند. برای



شکل ۷.۳ نمایش نمادی شکافتگی دودره مقید.



شکل ۸.۳ نمودار تراز انرژی برای دو ذره، درحالتی که به یکدیگر مقیدند و درحالتی که کاملاً از هم جدا و ساکن اند. انرژی نسبیتی کل درطرف چپ و انرژی مکانیکی درطرف راست نشان داده شده اند.

ذراتی که یکدیگر را در فاصلهٔ بینهایت و درحال سکون جذب می کنند، مناسبترین مقدار انرژی مکانیکی کل، صفر است. وقتی ذرات به یکدیگر مقیدند، انرژی E_m دستگاه مقید منفی است، زیرا باید به دستگاه مقید انرژی اضافه کرد تا ذرات کاملاً ازهمدیگر جدا شوند و انرژی دستگاه به صفر برسد. شکل ۸.۳ روابط بین جرمهای سکون، انرژی نسبیتی کل، انرژی بستگی، و انرژی مکانیکی را نشان می دهد.

مثال ۳.۳ انرژی یک الکترون و یک پروتون که باعث تشکیل یک اتم هیدروژن پایدار می شوند، به طور تجربی برابر ۱۳.۶ الکترون ولت است. این انرژی، را انرژی یونشی می نامند، زیرا باید این مقدار انرژی به اتم هیدروژن داده شود تا به دو ذره با بارهای

مختلف العلامت تجزیه شود. انرژی مکانیکی کل یک اتم هیدروژن برابر با ۱۳۶eV — الکترون- ولت است. با استفاده از رابطه (۱۷.۳)، امکان محاسبه اختلاف بین جرم اتم هیدروژن، $M_{\text{H}} = ۱.۶۷ \times 10^{-۲۷} \text{kg}$ ، و جمع جرمهای سکون مجزای الکترون، m_e ، و پروتون، m_p وجود دارد

$$m_e + m_p - M_{\text{H}} = \frac{E_b}{c^2} = \frac{۱۳.۶ \text{eV}}{c^2}$$

تغییر نسبی در جرم چنین است

$$\frac{E_b/c^2}{M_{\text{H}}} = \frac{(۱۳.۶ \text{eV})(۱.۶۰ \times 10^{-۱۹} \text{J/eV})}{(۱.۶۷ \times 10^{-۲۷} \text{kg})(۳.۰۰ \times 10^8 \text{m/s})^2}$$

$$\frac{E_b}{M_{\text{H}} c^2} = ۱.۵۳ \times 10^{-۸}$$

این اختلاف نسبی در جرم (کمی بیش از یک درصد میلیون) به مراتب از خطای نسبی تجربی در اندازه گیری جرمهای اتم هیدروژن، پروتون، و الکترون کوچکتر است. بنابراین، در یک واکنش که در آن انرژی بستگی، چندین الکترون ولت است (و این انرژی در تمام واکنشهای شیمیایی در همین حدود است) غیرممکن است که بتوان مستقیماً تغییر در جرم کل دستگاه را آشکار کرد. ولی تغییر در جرم را می توان در واکنشهای هسته ای که در آنها انرژی بستگی نوعاً چندین میلیون الکترون ولت است آشکار کرد.

۴.۳ چهار- بردار اندازه حرکت- انرژی

نظریه نسبیت خاص و تبدیلات لورنتس مختصات براساس مشاهده بنیادی زیر بنا شدند: سرعت نور ناورداست. تمام ناظرهای لخت، سرعت یک باریکه نوری را یکسان و برابر مقدار ثابت c اندازه می گیرند. در این بخش دو کمیت نرده ای دیگر را که ناوردا هستند بررسی می کنیم: بزرگی چهار- بردار فضا-زمان و بزرگی چهار- بردار اندازه حرکت- انرژی.

چهار- بردار فضا-زمان. نخست بردار تغییر مکانی را در نظر می گیریم که در لحظه $t_1 = 0$ انتهای آن در مبدأ مختصات دستگاه لخت S_1 قرار دارد. چنانچه در همان زمان مختصات ابتدای این بردار x_1 ، y_1 و z_1 باشد، می توان نوشت

$$l^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

که در آن l طول بردار است. کمیت‌های x_1 ، y_1 و z_1 نمایشگر مؤلفه‌های بردار مزبور در سه جهت فضا هستند.

بازه‌های فضایی و زمانی از نظر ناظر دیگری که با سرعت ثابت $c \gg v$ حرکت می‌کند چقدرند؟ مختصات این ناظر X_2 ، Y_2 و Z_2 ، الزاماً بر مختصات ناظر S_1 منطبق نیستند. با استفاده از تبدیلات گالیله، مشابه با معادله (۱۰۲)، طول بردار مذکور چنین است

$$l^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

بازه زمانی بین دو رویدادی که در دو انتهای بردار l در دو دستگاه S_1 و S_2 رخ داده‌اند یکسان و برابر با صفر است. کمیت‌های x_2 ، y_2 و z_2 نمایشگر مؤلفه‌های این بردار در امتداد محورهای مختصات دوم‌اند. با وجودی که، عموماً، مسافت x_2 همان x_1 نیست (همچنین y_1 و y_2 و نیز z_1 و z_2 یکسان نیستند)، طول l در هر دو دستگاه لخت یکسان، یا ناورد است. از این رو، برای هر تغییر مکان در فضای سه بعدی اقلیدسی می‌توان نوشت

$$(18.3) \quad l^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \text{فاصله ناوردایی}$$

همان‌طور که در بالا بیان شد، بازه زمانی بین دو رویداد واقع در دو انتهای بردار l ، در S_1 و S_2 یکسان است؛ همین‌طور، بازه زمانی بین هر دو رویداد در تبدیلات گالیله ناورد است

$$\Delta t = \Delta t_1 = \Delta t_2 = \text{فاصله ناوردایی زمان}$$

در فیزیک گالیله‌ای هر یک از بازه‌های فضایی و بازه‌های زمانی به‌طور جداگانه ناوردا هستند، ولی سرعت نور ناوردا نیست. در فصل ۲ دریافتیم که برای تضمین ناوردایی c باید تبدیلات لورنتس را به‌جای تبدیلات گالیله به‌کار ببریم، و در حرکت شناسی نسبیتی باید بازه‌های فضایی و بازه‌های زمانی جدا از هم را با یک تک بازه فضا-زمان ΔS^2 که هر دو رویدادی را به هم‌دیگر مربوط می‌کند جایگزین کنیم. در این صورت این بازه فضا-زمانی کمیتی ناورد است

$$\begin{aligned} \Delta S^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2 t_2^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 t_1^2 \end{aligned} \quad (19.3) \text{ و } (30.2)$$

مختصات فضا و زمان یک رویداد (x_1 ، y_1 ، z_1 و t_1) در یک چارچوب لخت لزوماً با مختصات فضا و زمان (x_2 ، y_2 ، z_2 و t_2) همان رویداد در یک چارچوب لخت دیگر یکسان نیستند - در واقع، این دو دسته مختصات به وسیله تبدیلات لورنتس مختصات

به هم دیگر مربوط می شوند - ولی در تمام دستگاههای لخت* بازه فضا-زمانی بین این رویداد يك رویداد دیگر (مثلاً رویدادی که در مبدأ در لحظه $t_1 = t_2 = 0$ رخ می دهد) یکسان یا ناورداست.

معادلات (۱۸.۳) و (۱۹.۳) خیلی به هم مانسته اند؛ در واقع، درنسیت می توان چهار مختصات يك رویداد (سه مختصه فضایی و يك مختصه زمانی) را به صورت چهار مؤلفه يك بردار ناوردا در فضا-زمان در نظر گرفت. می توان چهار مؤلفه چهار-بردار فضا-زمان را به صورت x, y, z و ict اختیار کرد که در آن $i = (-1)^{1/2}$ است؛ آنگاه چنانچه هر يك از مؤلفه ها را مجذور و نتایج را با هم جمع کنیم، رابطه (۱۹.۳) حاصل می شود. (البته، نمی توان يك بردار چهار بعدی با سه مؤلفه فضایی حقیقی و يك مؤلفه زمانی موهومی را تجسم کرد؛ ما صرفاً خصوصیات صوری بردارهای سه بعدی معمولی را به فضا-زمان چهار بعدی تعمیم می دهیم.)

چهار-بردار اندازه حرکت-انرژی. حال رابطه اساسی دینامیک نسبیتی را بررسی می کنیم. این رابطه انرژی کل يك ذره E و اندازه حرکت p آن را بر حسب انرژی سکون آن، E_0 ، بیان می کند

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2 \quad (۱۴.۳)$$

گرچه این معادله تنها برای حرکت يك بعدی به دست آمد، ولی برای هر حرکتی صادق است. در اینجا p نمایشگر بزرگی اندازه حرکت کل ذره است، و عموماً دارای مؤلفه های قائم p_x, p_y, p_z است که در آن $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ است. رابطه اندازه حرکت-انرژی را به صورت زیر نیز می توان نوشت

$$-\left(\frac{E_0}{c}\right)^2 = p^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 \quad (۲۰.۳)$$

چون $(m_0 c)^2 = -(E_0/c)^2$ است، طرف چپ این معادله تنها به جرم سکون ذره بستگی دارد. جرم سکون m_0 و نیز انرژی سکون E_0 هر ذره ای همواره یکسان است. به بیان دیگر، بدون توجه به چارچوب لختی که در آن اندازه حرکت و انرژی ذره اندازه گیری می شوند، انرژی سکون ذره، E_0 ناورداست. از این رو رابطه (۲۰.۳) که کمیت ناوردای $-(E_0/c)^2$ را در طرف چپ خود دارد، به همان صورت رابطه (۱۹.۳) است. دقیقاً به همان

* البته انتخاب بازه فضا-زمانی به صورت $ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$ یا به صورت $x^2 + y^2 + z^2 - ct^2$ اختیاری است. هر دو صورت به کار می روند، ما همواره بازه فضا-زمانی را به گونه ای که در معادله (۱۹.۳) تعریف شد به کار خواهیم برد.

صورتی که مختصات فضایی و زمانی یک رویداد به یک بازه فضا-زمانی ناورداء مربوط می‌شوند، مؤلفه‌های اندازه حرکت و انرژی نسبیتی یک ذره نیز به یک کمیت ناورداء ارتباط داده می‌شوند.

درست همان‌طور که در حرکت شناسی نسبیتی سه مختصه فضایی و یک مختصه زمانی یک رویداد را به عنوان مؤلفه‌های یک بازه فضا-زمانی چهار بعدی در نظر می‌گیریم، در دینامیک نسبیتی نیز سه مؤلفه اندازه حرکت و یک مقدار انرژی را در هر چارچوب لختی ترکیب می‌کنیم تا یک چهار-بردار اندازه حرکت-انرژی حاصل شود. مؤلفه‌های این چهار-بردار در چارچوب لخت S_1 عبارت‌اند از $p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}$ و iE_1/c ، که در آن سه مؤلفه اول، به ترتیب، مؤلفه‌های اندازه حرکت در امتداد محورهای X_1, Y_1 و Z_1 اند، و E_1 انرژی کل ذره در این چارچوب لخت است. با مجذور کردن چهار مؤلفه چهار-بردار اندازه حرکت-انرژی و جمع کردن آنها، رابطه (۲۰.۳) به دست می‌آید. در واقع، فرض بنیادی دینامیک نسبیتی این است که در هر چارچوب لخت، چهار-بردار اندازه حرکت-انرژی کمیت ناوردای یکسانی را به دست می‌دهد

$$\begin{aligned} \text{ناوردایی اندازه حرکت-انرژی} &= -\left(\frac{E_0}{c}\right)^2 = p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 - \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 \\ &= p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2 - \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 \end{aligned} \quad (21.3)$$

از مقایسه چهار-بردار اندازه حرکت-انرژی $(p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1})$ و (iE_1/c) با چهار-بردار فضا-زمانی (x_1, y_1, z_1) و (ict_1) مشاهده می‌کنیم که به کمک جایگزینی‌های زیر می‌توان از یکی از این دو بردار، به دیگری دست یافت

$$\begin{aligned} p_{x_1} &\text{ برای } x_1 \\ p_{y_1} &\text{ برای } y_1 \\ p_{z_1} &\text{ برای } z_1 \end{aligned} \quad (22.3)$$

$$\frac{E_1}{c^2} \text{ برای } t_1 \text{ یا } \frac{iE_1}{c} \text{ برای } ict_1$$

تبدیلات لورنتس مختصات، محاسبه مختصات فضا و زمان یک رویداد را در دستگاه S_2 بر حسب مختصات فضا و زمان همان رویداد در S_1 ، یا برعکس امکان پذیر می‌کند. می‌توان روابط تبدیلی متناظری ساخت که مؤلفه‌های اندازه حرکت و انرژی کل یک ذره در چارچوب S_2 را بر حسب مؤلفه‌های اندازه حرکت و انرژی کل همان ذره در چارچوب

لخت دیگری مانند S_1 بیان کند. با به کار بردن روابط (۲۲.۳) در تبدیلات لورنتس مختصات، معادلات (۲۴.۲)، چنین به دست می آوریم

$$p_{x_2} = \frac{p_{x_1} - v(E_1/c^2)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$p_{y_2} = p_{y_1} \quad (24.3)$$

$$p_{z_2} = p_{z_1}$$

$$E_2 = \frac{E_1 - vp_{x_1}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

از اولین معادله دیده می شود که مؤلفه X اندازه حرکت يك ذره که در S_2 اندازه گیری شده است، نه تنها به اندازه حرکت نظیر آن در S_1 و سرعت S_2 نسبت به S_1 ، یعنی v ، بستگی دارد، بلکه به انرژی کل ذره E_1 نیز بستگی دارد. به طور مشابه، آخرین معادله نشان می دهد که انرژی کل ذره در S_2 به انرژی کل ذره در S_1 ، سرعت نسبی v دستگاه های لخت، و به مؤلفه X اندازه حرکت در S_1 بستگی دارد.

تبدیلات معکوس نیز با تعویض شاخصهای پایین ۱ و ۲ و قرار دادن v به جای v حاصل می شوند. توجه کنید که سرعت ظاهر شده در رابطه (۲۳.۳)، یعنی v ، همان سرعت حرکت چارچوب لخت S_1 نسبت به چارچوب لخت S_2 است. سرعت يك ذره که در S_1 و S_2 مشاهده می شود، همان v که در رابطه (۲۳.۳) ظاهر می شود نیست. سرعت ذره از تقسیم اندازه حرکت نسبی ذره بر جرم نسبی آن به دست می آید؛ برای مثال، سرعت ذره در S_1 برابر است با

$$v_1 = \frac{p_1}{m_1} = \frac{p_1}{E_1/c^2} = \frac{p_1 c^2}{E_1} \quad (24.4)$$

برای مشاهده چگونگی عملکرد روابط تبدیل اندازه حرکت-انرژی، مثالهای زیر را در نظر می گیریم.

مثال ۴.۳ ذره ای که جرم سکون آن m_0 و انرژی سکون آن E_0 است، با سرعت $c/6$ در جهت مثبت محور Y_1 دستگاه S_1 حرکت می کند. (الف) چهار مؤلفه اندازه حرکت-انرژی ذره که در S_1 مشاهده می شوند چقدرند؟ (ب) در صورتی که دستگاه لخت S_2 با سرعت $c/98$ در جهت مثبت محور X_1 حرکت کند، چهار مؤلفه مذکور در S_2 چقدر

خواهند بود؟ (ج) انرژیهای جنبشی ذره در S_1 و در S_2 چقدرند؟
 الف) چون ذره در جهت محور Y در S_1 حرکت می کند، پس $p_{x1} = p_{x2} = 0$
 با توجه به تعریف می توان نوشت

$$p_{y1} = m_1 v_{y1} = \frac{m_0 v_{y1}}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}} = \frac{m_0 (0.96c)}{\sqrt{1 - (0.96)^2}} = \frac{0.96 m_0 c}{0.8} = \frac{3}{4} m_0 c$$

انرژی کل ذره را می توان از رابطه (۲۴.۳) محاسبه کرد

$$E_1 = \frac{p_1 c^2}{v_1} = \frac{\left(\frac{3}{4} m_0 c\right) c^2}{0.96c} = \frac{5}{4} m_0 c^2 = \frac{5}{4} E_0$$

ب) معادلات (۲۳.۳) نشان می دهند که

$$p_{y2} = p_{y1} = \frac{3}{4} m_0 c$$

$$p_{x2} = p_{x1} = 0$$

مقدار p_{x2} برابر است با

$$p_{x2} = \frac{p_{x1} - v E_1 / c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{0 - (0.98c) \left(\frac{5}{4} E_0 / c^2\right)}{\sqrt{1 - (0.98)^2}} = -6.1 m_0 c$$

سرانجام، انرژی ذره در S_2 چنین خواهد بود

$$E_2 = \frac{E_1 - v p_{x1}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\frac{5}{4} E_0 - (0.98c)(0)}{\sqrt{1 - (0.98)^2}} = \frac{25}{4} E_0$$

ج) انرژیهای جنبشی ذره در S_1 و S_2 به صورت زیرند

$$E_{k1} = E_1 - E_0 = \frac{5}{4} E_0 - E_0 = \frac{1}{4} E_0$$

$$E_{k2} = E_2 - E_0 = \frac{25}{4} E_0 - E_0 = \frac{21}{4} E_0$$

مثال ۵.۳ دو ذره A و B که جرم سکون هر یک m_0 است و با سرعت یکسان به طرف همدیگر در حرکت اند، باهم برخورد می کنند. این دو ذره به همدیگر می چسبند و ذره

سوم C را که جرم سکون آن M_0 است تشکیل می‌دهند. رابطه بین m_0 و M_0 چگونه است؟ در بخش ۲.۳ این وضعیت را با فرض بقای جرم انرژی بررسی کردیم. در اینجا مسئله را از دیدگاه ناوردایی چهار-بردار اندازه حرکت-انرژی بررسی خواهیم کرد. فرض می‌کنیم که ذرات در جهت مخالف یکدیگر و در امتداد محور X_1 در دستگاه S_1 حرکت می‌کنند. در این صورت، از نظر ناظر S_1 ، بقای اندازه حرکت در این برخورد چنین است

$$p_{x1A} + p_{x1B} = p_{x1C} \quad (25.3)$$

ناظر S_1 را در چارچوب مرجعی در نظر می‌گیریم که در آن مرکز جرم دستگاه ساکن است. در این صورت اندازه حرکت کل دستگاه نه تنها ثابت بلکه هم قبل و هم بعد از برخورد صفر است

$$p_{x1C} = p_{x1A} + p_{x1B} = 0 \quad (26.3)$$

حال، اگر هم‌وردایی بقای اندازه حرکت را بپذیریم، باید ناظر واقع در چارچوب لخت S_2 نیز اندازه حرکت را در این برخورد پایسته یابد. از نظر S_2

$$p_{x2A} + p_{x2B} = p_{x2C} \quad (27.3)$$

است اما اندازه حرکت‌های اندازه‌گیری شده در S_1 و S_2 ، از طریق معادلات تبدیل اندازه حرکت-انرژی به همدیگر مربوط می‌شوند. با قراردادن روابط (۲۳.۳) در (۲۷.۳)، داریم

$$\frac{p_{x1A} - (v/c^2)E_{1A}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{p_{x1B} - (v/c^2)E_{1B}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{p_{x1C} - (v/c^2)E_{1C}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

این معادله را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$(p_{x1A} + p_{x1B}) - p_{x1C} = \left(\frac{v}{c^2}\right)(E_{1A} + E_{1B} - E_{1C})$$

در صورتی که رابطه (۲۶.۳) را در این معادله قرار بدهیم، طرف چپ آن صفر می‌شود و به صورت

$$E_{1A} + E_{1B} = E_{1C} \quad (28.3)$$

درمی‌آید. بنا به این معادله، از نظر ناظر S_1 ، انرژی کل دو ذره A و B قبل از برخورد همان انرژی کل ذره C بعد از برخورد است؛ به عبارت دیگر، انرژی کل پایسته است.

مخصوصاً توجه کنید که بقای انرژی نسبیتی از بقای اندازه حرکت نسبیتی نتیجه شد. برای بیان اینکه انرژی کل دو ذره قبل از برخورد، همان انرژی کل تک ذره بعد از برخورد است، به نظر می‌رسد که معادله (۲۸.۳) به قدر کافی ساده و گویا باشد؛ ولی باید توجه داشت که جرم هر یک از دو ذره A و B برابر با m_0 و جرم ذره C برابر M_0 است. در صورتی که سرعت ذرات A و B را با v_1 نشان دهیم، آنگاه

$$E_{1A} = E_{1B} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}} \quad (29.3)$$

ذره C در دستگاه S_1 ساکن باقی می‌ماند، بنابراین انرژی کل این ذره چنین است

$$E_{1C} = M_0 c^2 \quad (30.3)$$

با قرار دادن روابط (۲۹.۳) و (۳۰.۳) در (۲۸.۳)، داریم

$$\frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v_1/c)^2}} = M_0 c^2 \quad (31.3)$$

جرم سکون M_0 ذره مرکب C که در این برخورد غیر کشان تشکیل می‌شود از مجموع دو جرم سکون و مجزای ذرات A و B ، یعنی از $2m_0$ ، بزرگتر است. این مطلب با نتایج حاصل از بخش ۲.۳ توافق دارد.

۵.۳ نسبیت خاص و برهم کنش الکترومغناطیسی

سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی، c ، یک کمیت ناوردای نسبیتی است. بارالکتریکی نیز یک کمیت ناوردای نسبیتی است؛ بدین معنی که بزرگی بارالکتریکی یک ذره به سرعت ذره بستگی ندارد. ساده‌ترین و قانع‌کننده‌ترین شاهد تجربی در مورد ناوردایی بارالکتریکی این است که یک دستگاه از لحاظ الکتریکی خنثی، که از ذراتی با بارهای برابر و مختلف‌العلامت تشکیل شده باشد، از لحاظ الکتریکی خنثی باقی می‌ماند و این امر از سرعت‌های ذرات آن دستگاه کاملاً مستقل است. از این رو، یک مولکول هیدروژن با دو پروتون و دو الکترون و یک اتم هلیوم نیز با دو پروتون و دو الکترون، هر دو با تقریب یک در 10^{20} ، از لحاظ الکتریکی خنثی هستند، هر چند که سرعت ذرات مؤلفه‌ای در این دو دستگاه کاملاً باهم متفاوت باشند.

معمولاً برهم کنش الکترومغناطیسی یک زوج ذره باردار را به دو قسمت تقسیم می‌کنند: نیروی الکتریکی، که همواره بین دو ذره باردار عمل می‌کند، اعم از اینکه هر یک از این دو نسبت به ناظر ساکن یا متحرک باشند، و نیروی مغناطیسی، که تنها در صورتی

بین دو ذره باردار عمل می کند که هر دوی آنها نسبت به ناظر در حرکت باشند. به سادگی مشاهده می شود که نیروی مغناطیسی بین هر دو ذره باردار Q_1 و Q_2 را می توان حذف کرد و این کار صرفاً با انتخاب يك چارچوب مرجع مناسب انجام می پذیرد. به عنوان مثال، چنانچه ناظری در چارچوب مرجعی که نسبت به بار Q_1 ساکن است قرار داشته باشد، هیچ نیروی مغناطیسی بین دو بار اندازه نخواهد گرفت. نخست به این دلیل که نیروی مغناطیسی وارد بر Q_2 از طرف Q_1 صفر خواهد بود، زیرا Q_1 ساکن است و در محل Q_2 (یا در هیچ نقطه دیگری از فضا) میدان مغناطیسی نمی آفریند. دیگر اینکه، حتی اگر Q_2 نسبت به ناظر در حرکت می بود نیز هیچ نیروی مغناطیسی بر Q_1 وارد نمی کرد، زیرا Q_1 در حرکت نیست. این مثال ساده نشان می دهد که ممکن است بین دو ذره باردار از نظر ناظرهای واقع در برخی دستگاههای لخت، نیروی مغناطیسی وجود داشته باشد ولی نه در همه دستگاهها. اولین اصل موضوع نسبیت، هموردایی شکل يك قانون فیزیکی در تمام چارچوبهای لخت، ایجاب می کند که قوانین الکترومغناطیس نیز شکل یکسانی در تمام چارچوبهای لخت دارا باشند. در این بخش يك بحث کیفی درباره چگونگی ارتباط نیروهای الکتریکی و مغناطیسی را، از نظر دستگاههای لخت مختلف، ارائه خواهیم داد.

برهم کنش مغناطیسی آشکارا به انتخاب چارچوب مرجع بستگی دارد. چون نظریه نسبیت خاص روابط تبدیلی بین چارچوبهای مرجع را بررسی می کند، انتظار داریم که پیدایش یا عدم پیدایش نیروی مغناطیسی بین ذرات باردار، اساساً يك اثر نسبیتی باشد. لاقلاً از لحاظ کیفی، به سادگی مشاهده می شود که

$$\text{مغناطیس} = \text{الکتریسته} + \text{نسبیت}$$

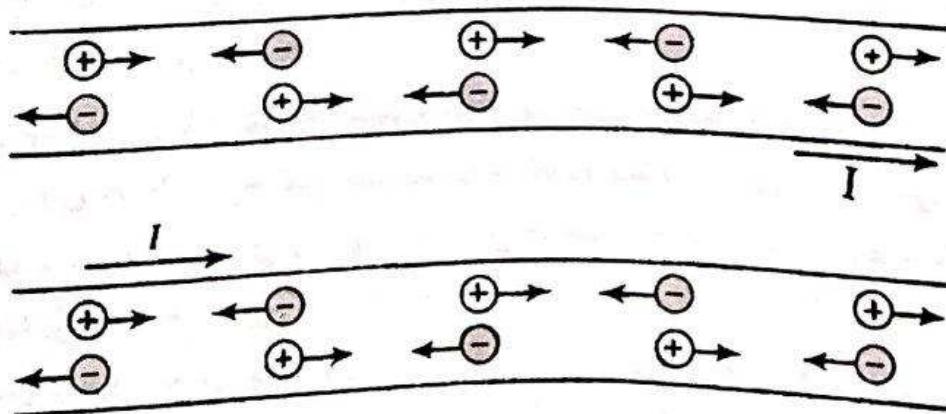
از این لحاظ برهم کنش مغناطیسی، يك نوع نیروی بنیادی متمایز و مجزا نیست؛ بلکه این به اصطلاح نیروی مغناطیسی، از برهم کنش مطلقاً الکتریکی (یا کولنی) و در بایستهای نسبیت خاص به دست می آید.

برای مشاهده ارتباط بین مغناطیس، الکتریسته، و نسبیت مثالی را که معمولاً به عنوان يك نیروی مغناطیسی خالص توصیف می شود، بررسی می کنیم. وقتی جریانهای موجود در دو رسانای موازی و بینهایت طویل همجهت باشند، این دو رسانا از لحاظ مغناطیسی همدیگر را جذب می کنند؛ و وقتی جریانهها در جهت خلاف یکدیگر باشند، رساناها همدیگر را دفع می کنند. در این وضعیت تصور می شود که هیچ نیروی الکتریکی بین این دو رسانا موجود نباشد، زیرا این دو رسانا از لحاظ الکتریکی خنثی هستند. در تحلیل متعارفی که از این وضعیت به عمل می آید چنین بیان می شود که، بارهای متحرک یکی از رساناها در محل رسانای دیگر يك میدان مغناطیسی به وجود می آورد و از این طریق

يك نیروی مغناطیسی بر بارهای متحرك رسانای دوم وارد می کند. این نیرو سرانجام به شبکه بلورین سیم جامدی که بارها از آن عبور می کنند انتقال داده می شود.

مجدداً این وضعیت را از دیدگاه نسیت خاص بررسی می کنیم. برای سهولت فرض می کنیم که جریان هر رسانا از مقادیر برابر بارهای مثبت آزاد، که در جهت جریان و بارهای منفی آزاد، که در خلاف جهت حرکت می کنند نتیجه می شود. البته، می دانیم که در فلزات، جریان فقط از حرکت بارهای منفی آزاد (الکترونها) ناشی می شود، ولی استدلالهای فیزیکی برای وضعیت متقارنتری که در اینجا برگزیده ایم ساده ترند، و نتایج شبیه نتایج حاصل از حالتی است که ذرات متحرك دارای فقط يك علامت بار باشند.

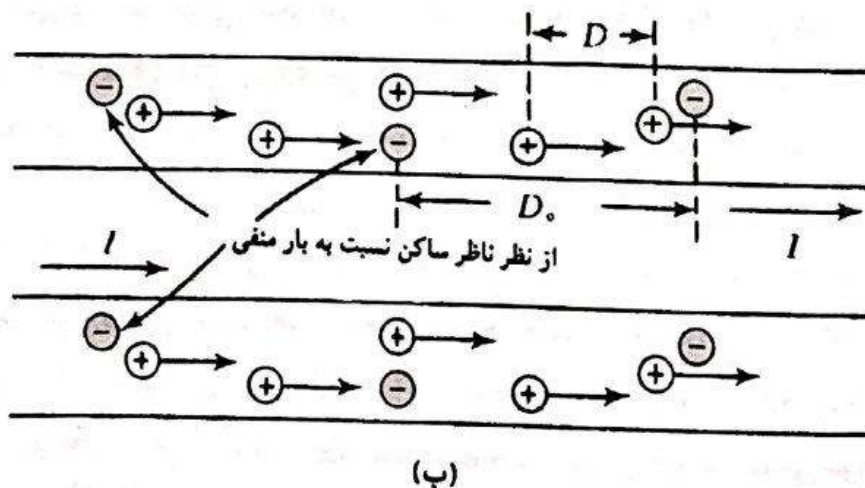
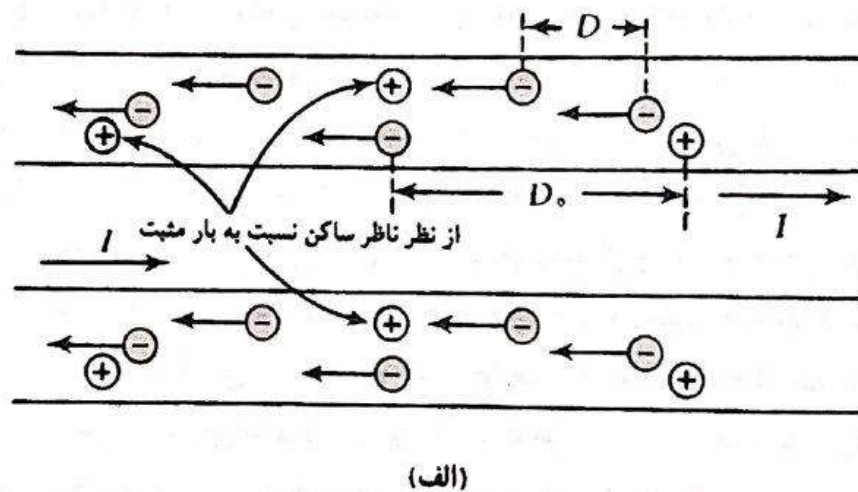
شکل ۹.۳ حرکت بارهای مثبت و منفی از شبکه ای را که از لحاظ الکتریکی خنثی است نشان می دهد. این بارها جریانی را در هر يك از سیمها تولید می کنند و جهت این جریانهها به سوی راست است. از لحاظ کلاسیکی، این جریانهها به يك نیروی جاذبه مغناطیسی بین دو سیم منجر می شوند. آیا می توان با استمداد از نسیت خاص این اثر را تنها برحسب يك نیروی الکتریکی بیان کرد؟ همان گونه که خواهیم دید، پاسخ مثبت است، اما فقط در صورتی که خیلی دقیق باشیم. ابتدا باید متوجه باشیم که چگونگی تبدیل يك نیرو را بین دو چارچوب مرجع لخت بررسی نکرده ایم. بزرگی نیروی وارد بر يك ذره، برای تمام ناظرها، یکسان نیست؛ زیرا، برحسب تعریف، نیرو برابر است با تغییر اندازه حرکت ذره در واحد بازه زمانی؛ و هر دوی این کمیتها نیز به ناظر بستگی دارند. در اینجا روابط تبدیل نیرو را به تفصیل به دست نخواهیم آورد بلکه فقط از این واقعیت منطقی استفاده خواهیم کرد که هر چند بزرگی يك نیرو در تبدیل از يك چارچوب لخت



شکل ۹.۳ حرکت بارهای مثبت و منفی با سرعتهای یکسان در دو رسانای موازی که حامل جریانهای الکتریکی همجهت اند (به سوی راست).

به دیگری تغییر می‌کند، ولی جهت آن تغییر نمی‌کند.
 حال توجه خود را به نیروی الکتریکی خالص وارد بر بارهای مثبت و منفی موجود در یکی از سیمها متمرکز می‌کنیم. برای انجام این کار، هر گونه برهم کنش مغناطیسی را عمداً مستثنی می‌کنیم و با استمداد از دریاستهای نسبت تنها به نیروهای الکتریکی می‌پردازیم.

برای یافتن نیروی وارد بر يك بار مثبت، نخست باید دستگاه را به دستگاه لخت دیگری که در آن بار مثبت ساکن است تبدیل کنیم؛ این عمل در شکل ۱۵۰۳ الف نشان داده شده است. توجه داریم که ناظر واقع در این چارچوب، بارهای مثبت را ساکن



شکل ۱۵۰۳ رسانیها و بارهای مربوط به شکل ۹۰۳. اما در اینجا (الف) از نظر ناظری که نسبت به بارهای مثبت در حال سکون است و (ب) از نظر ناظری که نسبت به بارهای منفی در حال سکون است.

می‌یابد؛ فاصله بین بارهای مثبت مجاور را با D_0 نشان می‌دهیم. ولی، در این حالت بارهای منفی سرِیتر از بارهای منفی شکل ۹.۳ به طرف چپ حرکت می‌کنند؛ زیرا در اثر انقباض فضایی فاصله بین بارهای منفی مجاور، D ، کمتر از D_0 خواهد بود. برایند نیروی الکتریکی وارد بر یک بار مثبت معین، ناشی از دیگر بارهای مثبت و منفی موجود در همان سیم، و نیز ناشی از بارهای مثبت و منفی موجود در سیم دیگر است. بدیهی است که مؤلفه نیروی ناشی از دیگر بارهای مثبت موجود در همان سیم صفر است، زیرا تعداد بارهای مثبتی که به‌طور یکنواخت در طرف چپ و راست توزیع شده‌اند یکسان است. این مطلب در مورد مؤلفه نیروی ناشی از بارهای منفی موجود در همان سیم نیز صادق است.

در این صورت، راجع به برایند نیروی ناشی از ذرات باردار موجود در سیم دیگر چه می‌توان گفت؟ به دلایل انقباض فاصله بین بارهای منفی مجاور، تعداد بارهای منفی در واحد طول بیش از تعداد بارهای مثبت خواهد بود. از این رو، مثلاً از دیدگاه یک بار مثبت موجود در سیم پایینی، بار خالص سیم بالایی منفی است، و این بار مثبت جذب سیم بالایی می‌شود. تبدیل معکوس به دستگاه لختی که در آن سیمها ساکن‌اند (شکل ۹.۳) نیز نیروی جاذبه‌ای بین بار مثبت و سیم بالایی به دست می‌دهد، گرچه از لحاظ بزرگی، این نیرو با نیروی شکل ۱۰.۳ الف متفاوت است. (همین‌طور یک بار مثبت موجود در سیم بالایی، شکل ۱۰.۳ الف، سیم پایینی را با بار منفی خواهد یافت، زیرا فاصله بین بارهای منفی متحرک در آن سیم منقبض می‌شود و بنابراین بار مثبت مذکور جذب سیم پایینی می‌شود.)

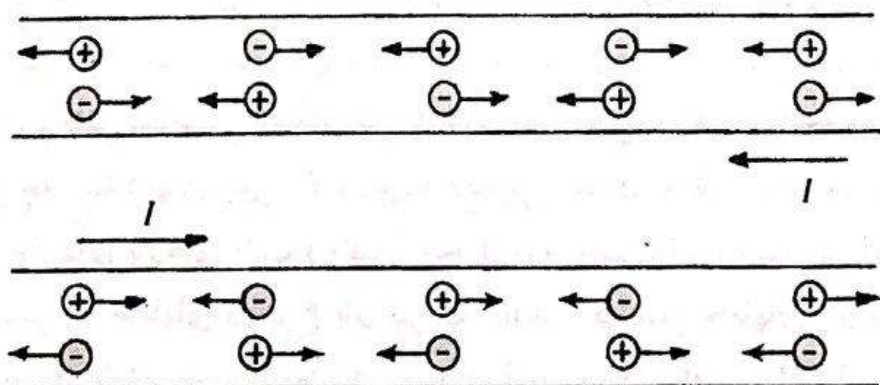
حال نیروهای وارد بر بارهای منفی را بررسی می‌کنیم. چه نیرویی (جاذبه یا دافعه) بر یک بار منفی در سیم پایینی، شکل ۹.۳، از طرف بارهای دیگر وارد می‌شود؟ برای یافتن این نیرو، از شیوه کار قبلی پیروی می‌کنیم. نخست بارها را از دیدگاه یک چارچوب لخت که در آن بار منفی مورد نظر ساکن است می‌نگریم؛ سپس با تبدیل معکوس به دستگاهی برمی‌گردیم که در آن سیمها ساکن‌اند. شکل ۱۰.۳ ب حرکت بارها را از دید چارچوب مرجعی که در آن بارهای منفی ساکن‌اند نشان می‌دهد. باز هم، به دلیل یکسان بودن تعداد بارها در طرفین بار منفی مورد نظر، هیچ نیروی خالصی از طرف بارهای مثبت و منفی، در سیم پایینی به آن وارد نمی‌شود؛ ولی در اثر انقباض فضا در مورد بارهای مثبت متحرک، بار منفی مورد نظر، سیم دیگر را با بار مثبت می‌بیند و بنابراین جذب آن می‌شود. (یک چنین بحثی در مورد بارهای منفی سیم بالایی نیز صادق است.) سرانجام با تبدیل معکوس به چارچوب مرجعی که در آن سیمها ساکن‌اند (شکل ۹.۳) باز هم نیروی جاذبه‌ای بین هر بار منفی و سیم دیگر به دست می‌آید.

بارهای مثبت و منفی موجود در یکی از سیمهای شکل ۹.۳ هر دو جذب سیم دیگر می‌شوند.

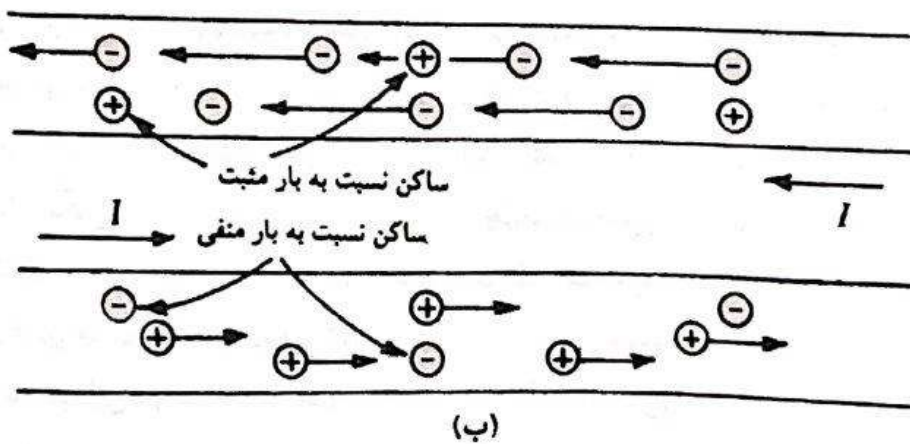
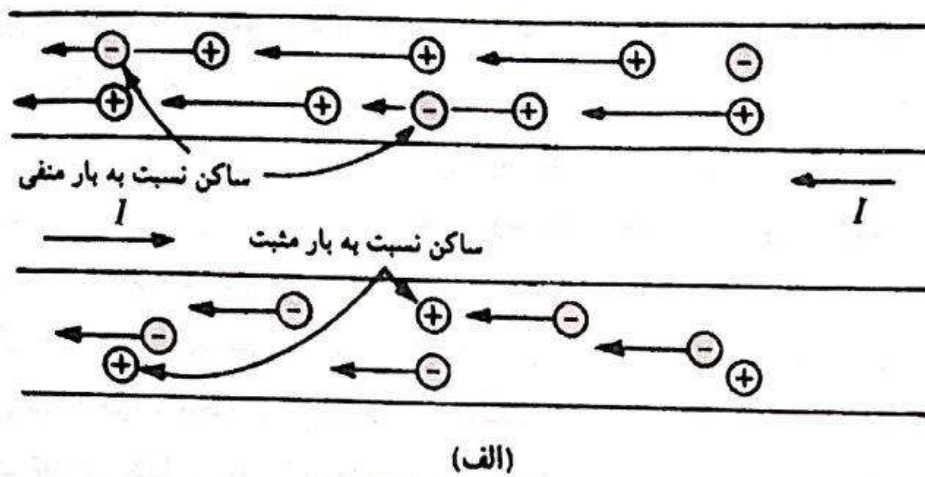
بنابراین این بارها عرض سیم مربوط به خود را طسی خواهند کرد تا به سطحی برسند که نسبت به سیم دیگر نزدیکترین است؛ ولی چون به سیم رسانا مقیدند، نمی توانند این سطح را ترك كنند؛ از این رو، نیروی جاذبه به تمامی سیم انتقال داده می شود. به طریقی کیفی نشان دادیم که دو سیم حامل جریانهای هم سو بدون دخالت (حداقل به طور آشکار) يك نیروی مغناطیسی، یکدیگر را جذب می کنند.

حال وضعی را بررسی می کنیم که در آن از دو رسانای بینهایت طویل و موازی، جریانهایی در دو جهت مخالف می گذرند. مجدداً فرض می کنیم که جریان هر سیم ناشی از حرکت تعداد یکسانی بارهای مثبت و منفی است که با سرعت یکسان اما در جهت های مخالف در سیم حرکت می کنند. شکل ۱۱.۳ حرکت بارها را در چارچوبی نشان می دهد که در آن سیمها ساکن اند. می خواهیم نیروهای وارد بر بارهای مثبت و منفی موجود در یکی از سیمها، مثلاً در سیم پایینی را پیدا کنیم. برای یافتن نیروی وارد بر يك بار مثبت، نخست باید، مطابق شکل ۱۲.۳ الف، آن را در چارچوب مرجعی که در آن این بار ساکن است مشاهده کنیم. همان طور که قبلاً دیدیم، می دانیم که نیروی وارد بر بار مزبور، که از تمامی بارهای مثبت و منفی دیگر در همان سیم ناشی می شود، صفر است. حال نیرویی را که از طرف بارهای موجود در سیم دیگر بر این بار وارد می شود بررسی می کنیم. بارهای منفی سیم بالایی ساکن اند، و بارهای مثبت این سیم به طرف چپ در حرکت اند. در اثر انقباض فضا، تعداد بارهای مثبت در واحد طول سیم بالایی از بارهای منفی همین سیم بیشتر است، و بار مثبت مورد نظر در سیم پایینی، سیم بالایی را با بار مثبت می یابد؛ بنا بر این، دو سیم همدیگر را دفع می کنند.

برای یافتن نیروی وارد بر يك بار منفی در سیم پایینی، دستگاه را به چارچوبی که در آن این بار ساکن است تبدیل می کنیم؛ شکل ۱۲.۳ ب را ببینید. از نظر این چارچوب، سیم



شکل ۱۱.۳ بارهای مثبت و منفی با سرعت های یکسان در دو رسانای موازی حامل جریانهای غیر هم سو، حرکت می کنند.



شکل ۱۲.۳ رساناها و حاملهای بار مربوط به شکل ۱۱.۳ ولی این بار به وسیله (الف) ناظری که نسبت به بارهای مثبت رسانای پایینی ساکن است و (ب) ناظری که نسبت به بارهای منفی رسانای پایینی ساکن است، مشاهده می شوند.

بالایی دارای بار منفی خالص است، و بار منفی مورد بحث توسط این سیم دفع می شود. به طور خلاصه، نیروی برآیند وارد از طرف يك رسانا بر رسانای دیگری که در آن جهت جریان خلاف جهت جریان رسانای اول است، يك نیروی دافعه است. يك بار دیگر، بدون توسل به برهم کنش مغناطیسی آشکار بین بارهای الکتریکی، به همان نتیجه دست یافتیم. اگرچه استدلالهای کیفی بالا در مورد وضعیتی متقارن به کار گرفته شدند، که در آن تعداد حاملهای بارهای مثبت و منفی متحرك در هر سیم برابر بودند، این استدلالها در مورد هر نسبتی از حاملهای دو نوع بار نیز صادق اند. اگر تمام حاملهای بار منفی بودند، همچنانکه در اکثر فلزات معمولی چنین است، مجدداً درمی یافتیم که سیمهای حامل جریانهای همسو یکدیگر را جذب و سیمهای حامل جریانهای غیر همسو یکدیگر را دفع می کردند. وقتی جریانهای دو سیم همسو باشند، بارهای منفی در هر يك از سیمها جذب سیم دیگری می شوند،

و در نتیجه در هر سیم فزونی بار منفی در نزدیکترین سطح به سیم دیگر وجود خواهد داشت. این با وضعی که در شکل ۹.۳ نشان داده شد مغایر است. در این شکل هر دو نوع حامل بارهای مثبت و منفی به تعداد یکسان به وجوه نزدیک سیمها می آیند و بار خالصی در سطح وجود ندارد. با استفاده از این اثر، امکان تعیین علامت حاملهای غالب بار وجود دارد.*

۹.۳ محاسبات و یگاها در مکانیک نسبیتی

در صورتی می توان معادلات کلاسیک را در مورد اندازه حرکت و انرژی جنبشی يك ذره به کاربرد که سرعت آن ذره به مراتب از سرعت نور کمتر باشد؛ در مورد سرعتهای بالا باید از روابط نسبیتی استفاده کرد. داشتن يك قاعده عملی برای تعیین اینکه آیا محاسبات مربوط به يك مسئله را باید به طور نسبیتی یا به طور کلاسیک انجام داد، مفید است. در صورتی که شرایط جدول ۱۰.۳ رعایت شوند، خطا در محاسبه اندازه حرکت و انرژی، بیش از ۱ درصد نخواهد بود. چنانچه انرژی جنبشی يك ذره کسر خیلی کوچکی از انرژی سکون آن باشد، مکانیک کلاسیک مورد استفاده قرار می گیرد؛ از طرف دیگر، اگر انرژی کل یا انرژی

جدول ۱۰.۳

خطا در رابطه زیر		برای وضعیت	
بیش از يك درصد نیست			
$E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$	$E_k/E_0 < 0.01$	یا	ناحیه کلاسیکی
و			
$p \approx m_0 v$	$v/c < 0.1$	یا	
	$E/E_0 > 7$	یا	
$E \approx pc$	$E_k/E_0 > 6$	یا	ناحیه فرین نسبیتی
	$v/c > 0.99$		

* ریک اثر هال در بخش ۹.۲۹ کتاب زیر

Weidner and Sells, *Elementary Classical Physics*, 2nd ed.

جنبشی يك ذره بر انرژی سکون آن به میزان زیادی فزونی داشته باشد، در آن صورت رابطه فرین نسبیتی $E = pc$ را (که دقیقاً فقط در حالت $m_0 = 0$ برقرار است) می توان به کار برد.

یکای مناسب انرژی برای ذرات اتمی و زیر اتمی، الکترون ولت یا مضاربی از آن است

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV} = \text{کیلو الکترون ولت}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = \text{مگا الکترون ولت}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = \text{جیگا الکترون ولت}^*$$

از معادله (۱۴.۳) نتیجه می شود که یکای نظیر اندازه حرکت، الکترون ولت تقسیم بر سرعت نور، eV/c ، است. وقتی اندازه حرکت بر حسب این یکاها بیان شود، یکای pc همان الکترون ولت، eV ، خواهد بود. سرعت يك ذره اتمی به راحتی بر حسب سرعت نور، یعنی به صورت v/c داده می شود. در این یکاها سرعت هر ذره باید جایی بین صفر و ۱ قرار گیرد. این یکاهای ویژه (eV برای انرژی، eV/c برای اندازه حرکت، و v/c برای سرعت) محاسبات را در مسائل نسبیتی و همچنین در مسائل کلاسیک ساده می کنند.

می توان روابط انرژی جنبشی و اندازه حرکت کلاسیک را بر حسب انرژی سکون يك ذره $E_0 = m_0 c^2$ ، سرعت آن v/c و ثابت c به صورت زیر نوشت

$$E_k (\text{کلاسیک}) = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} (m_0 c^2) \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} E_0 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \quad (32.3)$$

$$p (\text{کلاسیک}) = m_0 v = \frac{(m_0 c^2)(v/c)}{c} = \frac{E_0 (v/c)}{c} \quad (33.3)$$

برای مثال، به سادگی می توان دریافت که انرژی جنبشی و اندازه حرکت الکترونی (انرژی سکون الکترون $E_0 = 0.51 \text{ MeV}$ است) که با سرعت c ۰.۵۱ حرکت می کند (در این مورد روابط کلاسیک به کار برده می شوند) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} E_0 \left(\frac{v}{c} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (0.51 \text{ MeV}) (10^{-2})^2 = 0.26 \times 10^{-4} \text{ MeV} = 26 \text{ eV} \end{aligned} \quad (32.3)$$

* یکای انرژی BeV (بیلیون الکترون ولت) نیز به جای 10^9 eV به کار می رود. ولی GeV برتری دارد، زیرا درازت یک بیلیون نمایشگر يك میلیون میلیون (10^{12}) و نه يك هزار میلیون (10^9) است.

$$p = \frac{E_0(v/c)}{c} = \frac{(0.51 \text{ MeV})(10^{-2})}{c} = \frac{0.51 \times 10^{-2} \text{ MeV}}{c} = 51 \text{ keV}/c \quad (33.3)$$

در فیزیک اتمی، اغلب جرم ذرات بر حسب یکای واحد شده جرم اتمی، یا «u» بیان می شود. یک یکای جرم اتمی به صورت یک دوازدهم جرم یک اتم کربن خنثی (ایزوتوپ ۱۲) تعریف می شود. عدد آووگادرو، 6.02252×10^{23} ، برابر تعداد اتمهای موجود در ۱۲ گرم کربن اتمی است. بنابراین

$$1u = \frac{1}{12} \left(\frac{12g}{6.02252 \times 10^{23}} \right) = 1.660 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

رابطه بین یکای جرم اتمی، u، و یکای انرژی MeV مخصوصاً مفید است. این رابطه را با استفاده از رابطه عمومی جرم-انرژی، $E = mc^2$ ، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} E = mc^2 &= (1u)c^2 \\ &= \frac{(1.660 \times 10^{-27} \text{ kg})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{(1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})(10^6 \text{ eV/MeV})} \\ &= 931.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

بنابراین

$$1 = 1u = 931.5 \text{ MeV}/c^2$$

این رابطه را می توان به عنوان عامل تبدیل اساسی بین یکاهای جرم و انرژی تلقی کرد. انرژیهای سکون الکترون و پروتون عبارتند از

$$\text{انرژی سکون الکترون} = 0.51101 \text{ MeV} = 0.51101 u \cdot c^2$$

$$\text{انرژی سکون پروتون} = 938.27 \text{ MeV} = 1.00728 u \cdot c^2$$

به خاطر سپردن مقدار انرژی سکون الکترون، تقریباً یک دوم مگا الکترون ولت، $1/2 \text{ MeV}$ ، و انرژی سکون پروتون، تقریباً یک جیگا الکترون ولت، 1 GeV ، ارزشمند است. به طور قراردادی، وقتی ذره ای به صورت، مثلاً یک ذره 300 MeV ، توصیف می شود، منظور آن است که انرژی جنبشی ذره، و نه انرژی کل آن E ، سه مگا الکترون ولت است.

مثال ۶.۳ سرعت یک الکترون 300 MeV چقدر است؟ انرژی جنبشی آن E_k برابر 300 MeV و انرژی سکون آن E_0 برابر 0.51 MeV است. چون $E_k > E_0/100$ است، محاسبه نسبیتی را باید به کار برد. معادله (۵.۳) نشان می دهد که

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (۳۴.۳)$$

معادله اخیر اغلب در محاسبات نسبیتی مفید است. از حل این معادله برای v/c داریم

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}} = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{(E_k + E_0)^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{0.51}{2.51}\right)^2} = 0.98$$

مثال ۷.۳ اندازه حرکت یک الکترون 2000 GeV چقدر است؟ به دلیل آنکه $E_k/E_0 = 20000/0.51 \approx 40000$ است، جدول ۱.۳ نشان می‌دهد که می‌توان از رابطه $E = pc$ با خطایی کمتر از یک درصد استفاده کرد؛ بنابراین

$$p = \frac{E}{c} = \frac{E_k + E_0}{c} = \frac{(2000 + 0.51) \text{ GeV}}{c} \approx 20 \text{ GeV}/c$$

خلاصه

اندازه حرکت نسبیتی یک ذره چنین است

$$p = mv \quad \text{که در آن} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (۶.۳)$$

در دینامیک نسبیتی انرژی کل و جرم نسبیتی یک ذره با معادله اینشتین به هم دیگر مربوط

می‌شوند

$$E = mc^2 \quad (۱۲.۳)$$

انرژی جنبشی یک ذره از رابطه زیر به دست می‌آید

$$E_k = E - E_0 \quad (۱۰.۳)$$

که در آن $E_0 = m_0 c^2$ انرژی سکون ذره است.

کمیت دینامیکی

$$(pc)^2 - E^2 = -E_0^2 \quad (۱۴.۳)$$

تحت تبدیلات لورنتس ناورد است، یعنی این کمیت در تمام دستگاه‌های لخت دارای مقدار یکسانی است.

جرم سکون يك دستگاه از ذرات مقید، به مقدار E_0/c^2 از جرم کل قسمتهای جدا از هم کمتر است، که در آن E_0 انرژی بستگی کل است. انرژی کل ذره و مؤلفه‌های اندازه حرکت آن، از يك دستگاه لخت به دستگاه لخت دیگر، مانسته تبدیلات لورنتس فضا - زمانی تبدیل می‌شوند

$$p_{x2} = \frac{p_{x1} - v(E_1/c^2)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$$p_{y2} = p_{y1}$$

(۲۳.۳)

$$p_{z2} = p_{z1}$$

$$E_2 = \frac{E_1 - vp_{x1}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

قوانین الکترودینامیک ماکسول هم‌وردای لورنتسی‌اند. بنابه نسبت خاص، در صورتی برهم کنش مغناطیسی بین بارهای متحرک انجام می‌شود که برهم کنش مطلقاً الکتریکی از يك دستگاه لخت به دستگاه لخت دیگر تبدیل شود.

مسائل

۱. از نظر ناظر آزمایشگاه، شدت يك باریکه تك انرژی از پیوندهای باردار، پس از اینکه فاصله ۹ متر را طی می‌کند، به اندازه سازه ۲ کاهش می‌یابد. (الف) سرعت، (ب) اندازه حرکت، و (ج) انرژی جنبشی پیونها را به دست آورید. (فرض کنید که نیم عمر يك پیون باردار 1.5×10^{-8} s و انرژی سکون آن ۱۴۰ MeV است.)
۲. يك جسم جامد یکنواخت با سرعت خیلی زیاد در حرکت است. (الف) آیا چگالی جسم، که به صورت جرم نسبیتی برواحد حجم تعریف می‌شود، به سرعت جسم نسبت به ناظر، بستگی دارد؟ (ب) اگر چنین است، آیا چگالی جسم با سرعت افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (ج) در صورتی که جسم جامد يك استوانه باشد، آیا چگالی آن در هر سرعت مفروضی به جهت محور استوانه نسبت به جهت حرکت جسم، بستگی دارد؟
۳. پیون يك ذره بنیادی ناپایدار با انرژی سکون ۱۴۰ MeV و عمر متوسط 2.55×10^{-8} s است. عمر میانگین عبارت است از متوسط بازه زمانی بین آفرینش يك پیون و واپاشی آن به ذرات دیگر، که در چارچوب مرجعی که در آن ذره ساکن است، اندازه گیری می‌شود. در عکس يك اتاقک حبابی، رد يك پیون که نمایشگر

سرگذشت واپاشی آن در طول عمر میانگین آن است، برابر 1200 cm است. در تولید این مسیر، پیون اساساً با سرعت ثابت حرکت می‌کند. (الف) انرژی جنبشی پیون چقدر است؟ (ب) سرعت پیون چقدر است؟

۴. الکترونی در استوا به دور زمین (شعاع متوسط زمین $m \times 10^6 \times 6370$ متر است) می‌چرخد. میدان مغناطیسی زمین در استوا تقریباً برابر $34 \times 10^{-5} \text{ G}$ است. با چه درصدی جرم نسبیتی الکترون بر جرم سکون آن فزونی می‌یابد؟

۵. برای يك ذره نسبیتی نشان دهید که

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \left[1 + \left(\frac{E_0}{pc} \right)^2 \right]^{-1/2} = \left[1 + \left(\frac{M_0 c}{p} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

۶. (الف) نشان دهید که می‌توان انرژی جنبشی E_k يك ذره را به صورت

$$E_k = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{pc}{E_0} \right)^2} - 1 \right] E_0$$

نوشت، که در آن p و E_0 ، به ترتیب، اندازه حرکت و انرژی سکون ذره‌اند. (ب) نشان دهید وقتی $v/c \ll 1$ باشد، این معادله بدشکل کلاسیک خود تحویل می‌شود.

۷. يك باریکه از پروتونهای با انرژیهای گوناگون به طور عمود وارد يك میدان مغناطیسی یکنواخت 150 Wb/m^2 می‌شود. این باریکه به صورت طیفی که گستره شعاعهای آن از 1000 تا 10000 متر است تجزیه می‌شود. (الف) گستره مقادیر اندازه حرکتهای پروتون (بر حسب یکای GeV/c) چقدر است؟ (ب) گستره مقادیر انرژی جنبشی (بر حسب یکای GeV) چقدر است؟

۸. (الف) شعاع انحنای باریکهای از الکترونهای 20 GeV ، که به طور عمود به يك میدان مغناطیسی یکنواخت 200 Wb/m^2 وارد می‌شود چقدر است؟ (ب) فیزیک غیر نسبیتی در مورد این شعاع انحنای چه پیشگویی می‌کند؟ (ج) شعاع انحنای باریکهای از پروتونهای 20 GeV که به همین میدان وارد می‌شود چقدر است؟

۹. در شتابدهنده انرژی بالای باتاویا^۱ در ایلینویز^۲ می‌توان پروتونها را تا انرژی 500 GeV شتاب داد. (الف) سرعت این پروتونها را پیدا کنید. (ب) در صورتی که شدت نهایی باریکه پروتون برابر 10^{14} پروتون در ثانیه باشد، توان کمینه لازم

(بر حسب وات) برای شتاب دادن به پروتونها چقدر است؟

۱۰. به ذره باردار ساکنی، به وسیله يك اختلاف پتانسیل الکتریکی، شتاب داده می شود. آنگاه ذره به طور عمود وارد يك میدان مغناطیسی یکنواخت با بزرگی ثابت می شود. دیده می شود که وقتی پتانسیل شتاب دهنده چندین برابر شود، شعاع انحنای مسیر ذره در میدان مغناطیسی یکنواخت نیز تقریباً به همان نسبت افزایش می یابد. نشان دهید که سرعت ذره پس از آنکه به وسیله میدان الکتریکی شتاب داده شود تقریباً برابر c است.

۱۱. اختلاف نسبی جرم يك قطعه مس به جرم 100 gr در دمای 0°C و همان قطعه در دمای 100°C چقدر است؟ گرمای ویژه مس برابر با $0.093 \text{ cal/g}^\circ \text{C}$ است.

۱۲. در حال حاضر امکان شتاب دادن الکترون تا انرژی 20 GeV وجود دارد. (الف) جرم نسبی چنین الکترونی چقدر افزایش می یابد؟ (ب) درصد اختلاف بین سرعت نور و سرعت الکترونی با این انرژی چقدر است؟

۱۳. چون بار الکتریکی الکترون و پروتون از لحاظ بزرگی یکسان اند، انرژیهای جنبشی يك الکترون و يك پروتون که هر دو تحت يك اختلاف پتانسیل الکتریکی از حال سکون شتاب داده می شوند، هر چند سرعتهای آنها متفاوت باشد، همواره دقیقاً یکسان اند. تحت چه اختلاف پتانسیل کمینه ای باید الکترون و پروتون از حال سکون شتاب داده شوند تا نسبت اندازه حرکتهای آنها ۱ بر ۱۰ باشد؟

۱۴. (الف) انرژی جنبشی (بر حسب eV) و (ب) اندازه حرکت (بر حسب eV/c) يك ذره که انرژی سکون آن 100 MeV است و با سرعت $v/c = 1/100$ حرکت می کند چقدر است؟

۱۵. رابطه بین انرژی کل E يك ذره، انرژی سکون آن E_0 ، و اندازه حرکت آن p را می توان با مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع p ، E_0 ، و E نمایش داد. يك چنین مثلثی را رسم کنید و انرژی جنبشی ذره را برای حالات: (الف) $v/c \ll 1$ و (ب) $v/c \approx 1$ مشخص کنید.

۱۶. اندازه حرکت يك الکترون $10 \text{ MeV}/c$ است: (الف) انرژی جنبشی و (ب) سرعت آن چقدر است؟ اندازه حرکت يك پروتون $10 \text{ MeV}/c$ است، (ج) انرژی جنبشی این پروتون و (د) سرعت آن چقدر است؟

۱۷. گاهی بهتر است که اندازه حرکت p يك ذره مادی را بر حسب E_0/c مشخص کنیم،

که در آن E_0 انرژی سکون ذره است. با فرض آنکه $p = NE_0/c$ باشد، نشان دهید که (الف) $v = (N/\sqrt{1+N^2})c$ ، (ب) $m = \sqrt{1+N^2} m_0$ و (ج) $E_k = (\sqrt{1+N^2} - 1)E_0$.

۱۸. اندازه حرکت‌های (الف) یک الکترون با 10 GeV (انرژی جنبشی) و (ب) یک اتم کربن با 10 GeV (انرژی سکون اتم کربن تقریباً 12 GeV است) چقدر است؟

۱۹. انرژی جنبشی ذره‌ای ده برابر انرژی سکون آن E_0 است. (الف) اندازه حرکت این ذره و (ب) سرعت آن را برحسب E_0 و c تعیین کنید.

۲۰. یک شتابدهنده با انرژی بالا، یک باریکه الکترونی را با اختلاف پتانسیل کل $2 \times 10^{10} \text{ V}$ شتاب می‌دهد. تعداد متوسط الکترونهايي که در یک ثانیه به هدف می‌رسند برابر 15×10^{12} است. (الف) متوسط جریان الکترون چقدر است؟ (ب) در صورتی که الکترونها در برخورد با هدف به حال سکون در آیند، باریکه الکترونی چه نیروی متوسطی بر هدف وارد می‌کند؟

۲۱. سرعت ذره‌ای 10 در صد از سرعت نور کمتر است. (الف) انرژی جنبشی ذره و (ب) اندازه حرکت آن را برحسب E_0 و c تعیین کنید.

۲۲. (الف) بیشینه سرعت ممکن یک ذره که انرژی جنبشی آن را بتوان با $1/2 m_0 v^2$ بیان کرد و خطا در انرژی جنبشی آن بیش از ۱ درصد نباشد چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی الکترونی که با این سرعت حرکت می‌کند چقدر است؟ (ج) انرژی جنبشی پروتونی که با این سرعت حرکت می‌کند چقدر است؟

۲۳. (الف) سرعت کمینه ذره‌ای را تعیین کنید که انرژی جنبشی آن را بتوان به صورت انرژی کل آن E و، بنابراین، به صورت pc با خطایی که از ۱ درصد بیشتر نیست نوشت. با این شرایط (ب) انرژی جنبشی یک الکترون و (ج) انرژی جنبشی یک پروتون چقدر است؟

۲۴. سرعت اولیه ذره‌ای به جرم سکون m برابر $30c$ است. (الف) در صورتی که سرعت ذره دو برابر شود، انرژی جنبشی آن چند برابر می‌شود؟ (ب) در صورتی که انرژی جنبشی ذره ۱۰۰ برابر شود، سرعت آن چند برابر می‌شود؟

۲۵. شدت کل تابش خورشیدی در سطح زمین $1000 \text{ J/cm}^2 \cdot \text{min}$ است. کاهش جرم خورشید در یک ثانیه و کاهش نسبی جرم خورشید در 10^9 سال (تقریباً یک دهم عمر

جهان) را در نتیجه تابش محاسبه کنید. فاصله خورشید و زمین $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ ، و جرم کنونی خورشید $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ است.

۲۶. يك سفینه فضایی که جرم سکون نهایی آن بدون سوخت $6 \times 10^4 \text{ kg}$ است، تا سرعت $0.95c$ شتاب داده می شود. (الف) مقدار انرژی کمینه ای را که برای شتاب دادن به این سفینه با این سرعت لازم است تعیین کنید. (ب) این انرژی هم ارز چه مقدار جرم است؟ (ج) برای انجام این کار به چه مقدار سوخت هسته ای (تبدیل جرم به انرژی را يك درصد بگیرد) نیاز است؟

۲۷. از نظر ناظری که با سرعت $0.85c$ ، در امتداد سیم مستقیمی که به طور یکنواخت باردار است، حرکت می کند، چگالی خطی بار در امتداد سیم برابر $2 \times 10^{-12} \text{ C/m}$ است. با فرض آنکه بزرگی بار الکتریکی مستقل از سرعت بار است، چگالی خطی بار در امتداد سیم، از نظر ناظری که نسبت به سیم ساکن است چقدر است؟

۲۸. چگالی خطی بار سیم مستقیمی λ است. ناظر ساکنی در فاصله عمودی R از سیم قرار دارد. (الف) ذره ای با بار Q در فاصله R از سیم، ساکن است. از نظر ناظری که نسبت به ذره ساکن است، نیروی برآیند وارد بر ذره باردار چقدر است؟ (ب) حال فرض کنید که ناظر با سرعت v در امتداد سیم حرکت می کند. از نظر این ناظر نیروی الکتریکی برآیند وارد بر ذره چقدر است؟ تغییر چگالی بار خطی ناشی از پدیده انقباض را در نظر بگیرید. (ج) نشان دهید که نیروی الکتریکی برآیند، به انضمام اثرهای انقباض فضا، همان نتیجه ای را می دهند که از محاسبه نیروی الکتریکی و نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار Q ، از نظر ناظر متحرک، به دست می آید. این تصویری از نیروی مغناطیسی است که در حقیقت، صرفاً مظهر ترکیب نیروی الکتریکی و اثرهای نسبیتی است.

۲۹. (الف) نشان دهید که سرعت يك ذره در فیزیک غیر نسبیتی با dE_k/dp بیان می شود. (ب) نشان دهید که سرعت يك ذره نسبیتی با dE/dp مشخص می شود. (ج) $E_k^{1/2}$ را به صورت تابعی از v برای هر دو حالت الف و ب رسم کنید.

۳۰. (الف) نشان دهید که می توان اندازه حرکت يك ذره را به صورت $p = (1/c)(E_k^2 + 2E_0E_k)^{1/2}$ نوشت. (ب) نشان دهید که در حد کلاسیک این رابطه به m_0v ، و در ناحیه فرین نسبیتی به E/c تحویل می شود.

۳۱. (الف) نمودار اندازه حرکت و (ب) نمودار انرژی جنبشی يك ذره نسبیتی و يك

ذره کلاسیک را به صورت توابعی از سرعت ذره و برای تمام مقادیر ممکن سرعت رسم کنید.

۳۲. يك الكترون 1.02 MeV برخورد رو در رو و کشانی را با پروتونی که در آغاز ساکن است، انجام می‌دهد. نشان دهید که پروتون با سرعتی تقریباً برابر با $(2E_e/E_p)c$ پس زده می‌شود و انرژی نسبی منتقل شده از الکترون به پروتون برابر با $2E_e/E_p$ است، که در آن E_e انرژی کل الکترون و E_p انرژی سکون پروتون است. (اِهنمایی: (الف) چون انرژی الکترون به مراتب بیش از انرژی سکون آن است، می‌توان الکترون را يك ذره فرین نسبیتی در نظر گرفت، و (ب) از آنجا که انرژی سکون پروتون به مراتب از انرژی کل الکترون بیشتر است، پروتون را می‌توان به طور کلاسیک بررسی کرد.)

۳۳. برای جدا کردن مولکول منواکسید کربن، CO ، به اتمهای کربن و اکسیژن مقدار 11.0 eV انرژی لازم است. (الف) تغییر نسبی در جرم يك مولکول CO وقتی به اتمهای C و O شکسته شود چقدر است؟ (ب) انرژی بستگی (بر حسب eV) يك مولکول CO چقدر است؟

۳۴. جرمهای جدا از هم 1.0 و 6.0 کیلوگرم را به دو انتهای يك فنر بدون جرم که ثابت نیروی آن 10^5 N/m است، متصل می‌کنیم. سپس فنر را به اندازه 12.0 cm متراکم می‌کنیم و آن را در این وضعیت نگه می‌داریم. (الف) در این صورت اگر جرم دستگاه مشکل از دو جسم اندازه‌گیری شود، اختلاف جرم بین این دستگاه و جرمهای دو جسم جدا از هم چقدر خواهد بود؟ پس از آن دستگاه را رها می‌کنیم؛ فنر منبسط می‌شود و در جرم را شتاب می‌دهد تا از فنر آزاد شوند و در جهت خلاف یکدیگر آن را ترك کنند. (ب) جرم هريك از دو جسم جدا شده چقدر بر جرم سکون آنها فزونی می‌یابد؟

۳۵. ذره Σ^+ ذره بنیادی ناپایداری با انرژی سکون 1190 MeV است. عمر میانگین این ذره در چارچوب مرجعی که در آن ذره ساکن است برابر 10^{-10} s است. 81.0 است. ذره Σ^+ را، که در چارچوب سکون خود به مدت يك عمر میانگین وجود دارد، در نظر بگیرید. کمینه انرژی جنبشی این ذره در يك چارچوب مرجع آزمایشگاهی چقدر باشد تا در این چارچوب قبل از واپاشی مسافت 1.0 mm را پیماید؟

۳۶. ذره‌ای به جرم سکون m_0 با سرعت ثابت $v_1 = 0.8c$ در جهت مثبت محور Y دستگاه مختصات S_1 حرکت می‌کند. (الف) با استفاده از معادلات (۲۳.۳) اندازه حرکت و

انرژی کل ذره را در دستگاه لخت دیگری، مانند S_p که با سرعت $0.5c$ در جهت مثبت محور X حرکت می کند به دست آورید. (ب) در چه دستگاه لختی انرژی کل ذره کمینه است؟

۳۷. در چارچوب مرجع آزمایشگاه یک پروتون فرودی با انرژی 20 GeV در امتداد محور X حرکت می کند. این پروتون با پروتون دیگری که ساکن است برخورد کشان می کند. پس از برخورد این دو پروتون با زاویه یکسانی نسبت به محور X حرکت می کنند. این زاویه چقدر است؟ (توجه کنید که وقتی دو ذره با جرمهای یکسان در سرعتهای پایین برخورد کشان می کنند، زاویه بین جهتهای حرکت دو ذره پس از برخورد همواره 90° است.)

۳۸. اندازه حرکت یک دستگاه متشکل از ذرات منزوی، در یک چارچوب لخت معین، Σp و انرژی نسبی کل آن ΣE است، نشان دهید که سرعت مرکز جرم دستگاه توسط رابطه $c^2 \Sigma p / \Sigma E$ بیان می شود.

کتابشناسی

1. Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics*. Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1963.

برای به دست آوردن معادلات تبدیل لورنتسی، در مورد انرژی و اندازه حرکت، بخش ۱۷.۴ کتاب فوق را ملاحظه کنید.

2. Leighton, R. B.; *Principles of Modern Physics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959.

توصیف مختصری از الکترو دینامیک نسبیتی و پتانسیل چهار-بردار الکترومغناطیسی در بخش ۸.۱ کتاب بالا آمده است.

3. Purcell, E. M. *Electricity and Magnetism*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965,

در فصل ۵ این کتاب، یک بررسی ساده ولی کامل از میدانهای الکتریکی، از نظر دستگاههای لخت مختلف، ارائه شده است. روابط مربوط به نیروی الکتریکی وارد بر یک بار متحرک نیز استخراج شده اند.

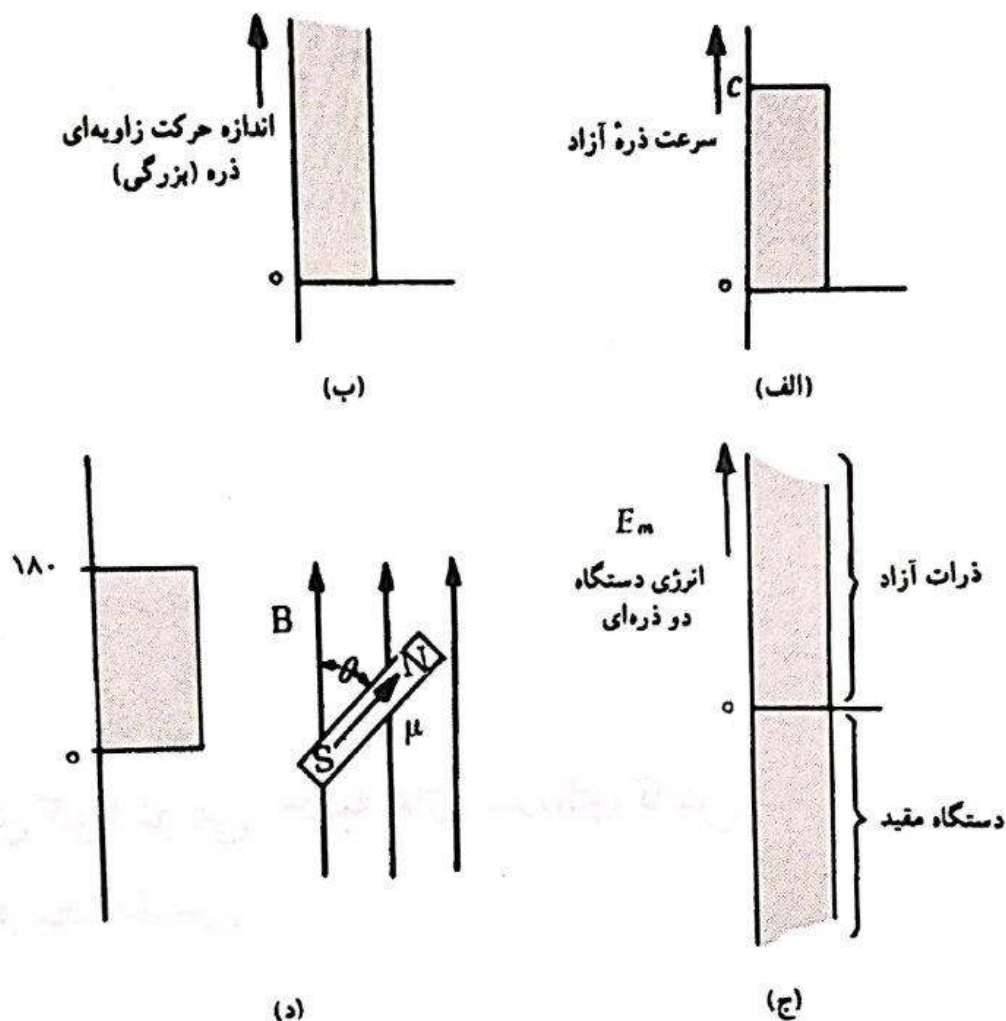
اثرهای کوانتومی: جنبه‌های ذره‌ای تابش الکترومغناطیسی

۱.۴ کوانتش در فیزیک کلاسیک

نظریه نسبیت و نظریه کوانتومی دوشالوده نظری مهم فیزیک قرن بیستم را تشکیل می‌دهند. درست همان گونه که نظریه نسبیت به بینشهای جدیدی از طبیعت فضا و زمان و نتایج عمیقی در مکانیک و الکترومغناطیس منجر می‌شود، نظریه کوانتومی نیز به روشهای فکری کاملاً جدیدی، که پایه فهم ساختار اتمی و هسته‌ای اند، منجر می‌شود. با وجود این، بعضی از جنبه‌های توصیف کوانتومی طبیعت کاملاً جدید نیستند و در حقیقت در فیزیک کلاسیک نیز یافت می‌شوند.

در مطالعه دنیای فیزیکی با دو نوع عام از کمیتهای فیزیکی سروکار داریم: کمیتهایی که دارای پیوستاری از مقادیرند و کمیتهایی که کوانتیده‌اند. کمیتهای کوانتیده محدود به مقادیر گسسته معینی هستند، گاهی آنها را بدعنوان کمیتهایی که دارای «اتمیسینه» یا «دانه» هستند نیز بیان می‌کنند.

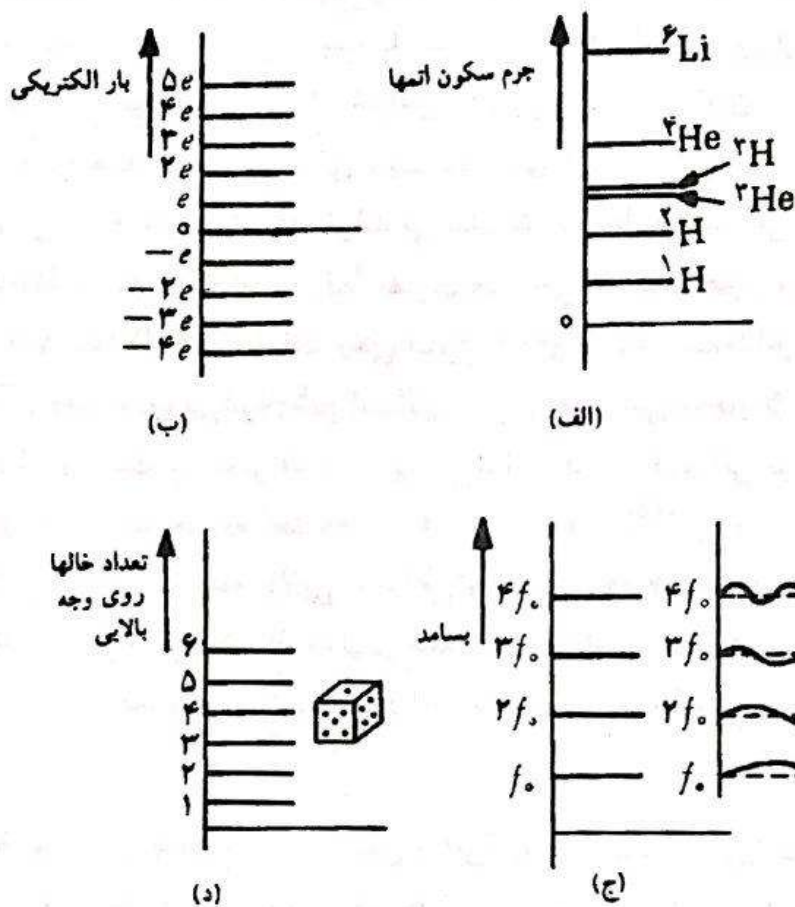
شکل ۱.۴ چندین نمونه از کمیتهای فیزیکی پیوسته کلاسیکی، یا غیر کوانتیده، را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۴ چند مثال از کمیت‌های فیزیکی کلاسیکی که دارای پیوستاری از مقادیر مجازند.

- (الف) سرعت یک ذره آزاد، که می‌تواند از صفر تا سرعت نور تغییر کند.
- (ب) بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره، که از صفر تا بینهایت می‌تواند هر مقداری را اختیار کند.
- (ج) انرژی مکانیکی یک دستگاه دو ذره‌ای، که هرگاه این دو ذره به یکدیگر مقید باشند هر مقدار منفی ($E_m < 0$) و هرگاه آزاد باشند هر مقدار مثبتی ($E_m > 0$) را می‌تواند بپذیرد.
- (د) زاویه بین جهت گشتاور دو قطبی یک آهنربا و یک میدان مغناطیسی خارجی، که می‌تواند از ۰ تا ۱۸۰ درجه تغییر کند.

شکل ۲.۴ مثال‌های متعددی از مقادیر فیزیکی کوانتیده را نشان می‌دهد.



شکل ۲۰۴ چند مثال از کمیت‌های فیزیکی کلاسیکی که دارای مقادیر کوانتیده‌اند.

(الف) جرم‌های سکون مشاهده‌شدهٔ اتم‌ها که در یک گسترهٔ پیوسته قرار نمی‌گیرند. این مطلب ابتدا در مطالعات بنیادی ترکیبات شیمیایی، که به نظریهٔ اتمی دالتن منجر شدند، مشاهده شد. امروزه جرم اتم‌هایی که در طبیعت یافت می‌شوند با دقت زیادی معلوم شده است، اما جالب است بدانیم که این جرم‌ها تقریباً به نسبت اعداد صحیح‌اند، نه دقیقاً. همان‌گونه که خواهیم دید یکی از وظایف اصلی فیزیک هسته‌ای توضیح این انحراف‌ها نسبت به اعداد صحیح به کمک چند اصل اساسی است.

(ب) بار الکتریکی کوانتیده است زیرا بار کل هر جسمی دقیقاً مضرب صحیحی (مثبت یا منفی) از بار بنیادی الکترون e است. کوانتومی شدن بار که به وضوح در مفهوم شیمیایی ظرفیت و در قوانین الکترولیز آشکار شده بود به وسیلهٔ آزمایش قطرهٔ روغن میلیکان به طور مستقیم نشان داده شد. در این آزمایش بار الکترون مستقیماً اندازه‌گیری شد.

(ج) امواج ایستاده و تشدید، که تجلیات کاملاً برجسته کوانتش در فیزیک کلاسیک‌اند. بسامد نوسان يك تار مرتعش تشدید کننده، که دوانتهای آن ثابت است، فقط می‌تواند مضرب صحیحی از پایینترین بسامد یا بسامد اصلی نوسان (f_0) باشد. بسامد اصلی به نوبه خود با استفاده از خواص فیزیکی و طول تار تعیین می‌شود. این موج مکرراً از مرزها یا از دوانتهای ثابت تار روی آن باز می‌تابد، با خود تداخل سازنده می‌کند و امواج ایستاده تولید می‌کند. تشدید فقط در صورتی حاصل می‌شود که فاصله بین دو نقطه انتهایی دقیقاً مضرب صحیحی از نصف طول موج باشد. در بخش ۷.۱ استدلال شد که فقط وقتی موج دارای گسترش نامتناهی در فضا باشد بسامد آن دقیقاً تعیین می‌شود؛ این استدلال حتی برای موجی که بین مرزهای بازتابان به دام افتاده است نیز معتبر است، زیرا می‌توان پنداشت که این موج بینهایت بار بر روی خود تاب خورده است.

(د) يك طاس تخته‌نرد، بروجه بالایی خود می‌تواند فقط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، یا ۶ خال را نشان بدهد. این طاس یکی از مثالهای متعدد روزمره است که کمیتهای کوانتیده را نشان می‌دهند؛ کمیتهای دیگر عبارت‌اند از: روی يك سکه، افراد مردم و تعداد سکه‌ها.

نظریه کوانتومی به مقدار زیادی مبتنی بر این کشف است که بعضی کمیتهای که در فیزیک کلاسیک پیوسته در نظر گرفته می‌شدند، در حقیقت، کوانتیده‌اند. از لحاظ تاریخی، آغاز این نظریه به تعبیر نظری تابش الکترومغناطیسی از يك جسم سیاه (يك در آشام و تابشگر کامل) برمی‌گردد. در اواخر قرن نوزدهم پی برده شد که از نظر تجربی، تغییر شدت تابش الکترومغناطیسی از يك جسم سیاه، بر حسب طول موج با انتظارات نظری الکترومغناطیس کلاسیک توافق ندارد. ماکس پلانک (تدوین‌کننده نظریه کوانتومی) در سال ۱۹۰۰/۱۲۷۹ نشان داد که تجدید نظر در مفاهیم کلاسیکی، به کمک مفهوم کوانتش انرژی، منجر به برقراری توافق بین آزمایش و نظریه می‌شود. چون در تحلیل مفصل تابش جسم سیاه (بخش ۷.۱۲) از استدلالهای نسبتاً پیچیده‌ای استفاده می‌شود، در اینجا مفاهیم کوانتومی را به طریقی ساده‌تر، و از بعضی لحاظ قانع‌کننده‌تر، مطرح خواهیم کرد. این ملاحظات ساده‌تر از مطالعه پدیده اثر فوتوالکتریک به دست می‌آیند.

۲.۳ اثر فوتوالکتریک

اثر فوتوالکتریک توسط هاینریش هرتز در سال ۱۸۸۷/۱۲۶۶ در جریان آزمایشهایی کشف شد که هدف عمده آنها تأیید پیشگوییهای نظری ماکسول (۱۸۶۴/۱۲۴۳) در

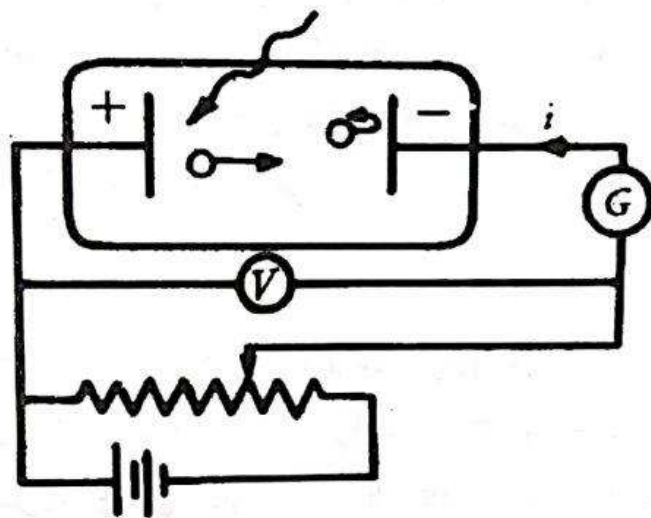
مورد وجود امواج الکترومغناطیسی حاصل از جریانهای الکتریکی نوسانی بود. اثر فوتوالکتریک فقط یکی از چندین فرایندی است که توسط آن الکترونها می توانند از سطح ماده کنده شوند (در اینجا بخصوص سطوح فلزات مورد نظر است، زیرا این اثرها نخست در فلزات مشاهده شدند و هنوز هم در فلزات خیلی آسانتر مشاهده می شوند)؛ این آثار به شرح زیرند.

گسیل گرما یونی. گرم کردن فلزات، که باعث دادن انرژی گرمایی به الکترونها می شود و به طور مؤثر آنها را تحریک و از سطح فلزات خارج می کند. گسیل ثانوی. انتقال انرژی جنبشی از ذراتی که با سطح فلز برخورد می کنند به الکترونها. آن فلز.

گسیل میدانی. استخراج الکترونها از فلز به وسیله یک میدان الکتریکی قوی خارجی. گسیل فوتوالکتریک. که در اینجا مورد بحث است.

وقتی تابش الکترومغناطیسی بر روی سطح تمیز فلزی بتابد و الکترونها از این سطح رها شوند، اثر فوتوالکتریک رخ می دهد. الکترونها از ظرفیت در داخل فلز آزادی حرکت دارند ولی در مجموع به فلز مقیدند. در این قسمت، همین الکترونها نسبتاً آزاد را بررسی می کنیم. اثر فوتوالکتریک را می توان خیلی ساده به صورت زیر بیان کرد: یک باریکه نوری به یک الکترون مقداری انرژی مساوی یا بیشتر از انرژی که آن را به سطح مقید می کند می دهد و باعث فرار آن می شود. توصیف مفصلتر اثر فوتوالکتریک مستلزم آگاهی تجربی از چگونگی ارتباط بین متغیرهای درگیر در این پدیده است. این متغیرها عبارتند از: بسامد نور، ν ؛ شدت باریکه نور، I ؛ جریان فوتوالکتریک، i ؛ انرژی جنبشی $m_0 v^2/2$ ؛ (به زودی خواهیم دید که کاربرد فرمول انرژی جنبشی کلاسیک در این مورد درست است) و جنس سطحی که الکترونها از آن خارج می شوند. این الکترونها خارج شونده را فوتوالکترونها می نامند.

شکل ۳.۴ نمودار طرح واد آزمایش مربوط به مطالعه جنبه های مهم اثر فوتوالکتریک را نشان می دهد. نور تکفام بر یک سطح فلزی، آنود، که در یک لوله خلا قرار دارد می تابد (لوله خلا از آن رو مورد استفاده قرار می گیرد که اساساً برخورد بین فوتوالکترونها و مولکولهای گاز حذف شوند). وقتی فوتوالکترونها گسیل می شوند بعضی از آنها به سوی کاتود حرکت می کنند و با رسیدن به کاتود جریانی را در مدار برقرار می کنند (جریان قراردادی در شکل نشان داده شده است). فوتوالکترونها با انرژیهای گوناگون آنود را ترک می کنند. کاتود که دارای بار منفی است این الکترونها را دفع می کند. وقتی که کار انجام



شکل ۳.۴ آرایش تجربی طرح‌وار برای مطالعه اثر فوتوالکتریک.
V، ولت‌متر؛ G، گالوانومتر.

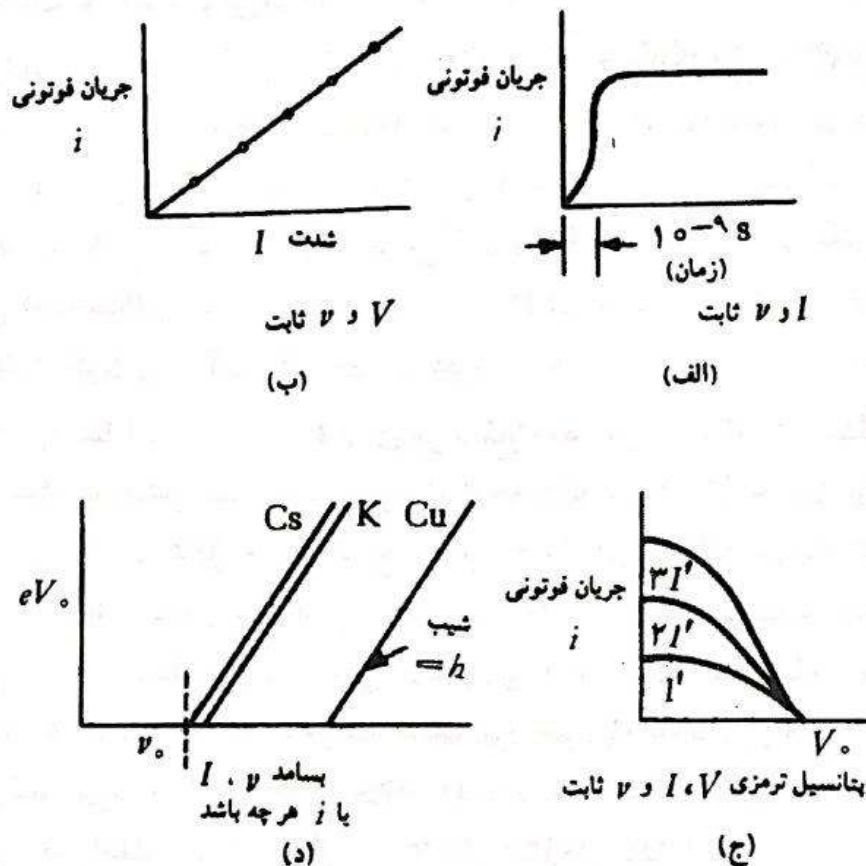
شده توسط يك میدان الکتروستاتیکی ترمزی با اختلاف پتانسیل V بر روی يك فوتوالکترون با انرژی جنبشی اولیه فوتوالکترون برابر شود فوتوالکترون درست در جلوی کاتود به حالت سکون درمی‌آید؛ از این رو $eV = (1/2)m_0 v^2$ است، که در آن v سرعت فوتوالکترون هنگام ترك سطح آنود و V اختلاف پتانسیلی است که باعث توقف فوتوالکترونی به جرم سکون m_0 و بار e می‌شود. البته وقتی پراثر ذرات فوتوالکترونها (با سرعت $v_{\max}$) توسط يك اختلاف پتانسیل به اندازه کافی بزرگ V_0 در جلوی کاتود به حال سکون در آیند تمام فوتوالکترنهاي دیگر نیز متوقف می‌شوند و دیگر هیچ جریان فوتوالکترونی برقرار نخواهد شد؛ یعنی، $i = 0$. در این صورت

$$eV_0 = \frac{1}{2} m_0 v_{\max}^2 \quad (۱.۴)$$

در اختلاف پتانسیلهای ترمزی بالاتر نیز تمام فوتوالکترونها قبل از رسیدن به کاتود برگردانده می‌شوند.

نخست نتایج آزمایش را در زیر فهرست خواهیم کرد. سپس نتایجی را که می‌توان بر اساس نظریه کلاسیکی الکترومغناطیس انتظار داشت ارائه خواهیم کرد؛ آنگاه مشاهده خواهد شد که نتایج تجربی به شدت با انتظارات کلاسیک مغایرت دارند. سرانجام، خواهیم دید که چگونه می‌توان اثر فوتوالکتریک را بر اساس تعبیر کوانتومی درک کرد.

نتایج تجربی اثر فوتوالکتریک. نتایج تجربی اثر فوتوالکتریک در شکل ۳.۴



شکل ۴.۴ نتایج تجربی گسیل فوتوالکتریک.

خلاصه شده‌اند. در مورد هر یک از این نتایج به‌ترتیبی که در شکل ارائه شده است بحث خواهیم کرد.

(الف) وقتی نور بزرگ سطح فلزی می‌تابد و فوتوالکترونها گسیل می‌شوند، جریان فوتوالکترونی تقریباً به طرد آنی آغاز می‌شود؛ این جریان حتی وقتی که باریکه نوری دارای شدتی به کوچکی 10^{-10} W/m^2 ، یعنی شدت یک چشمه نوری ۱۰۰ وات در فاصله ۳۲۰ km باشد نیز برقرار می‌شود. درنگ زمانی، از لحظه‌ای که باریکه نوری بر سطح فلز می‌تابد تا لحظه‌ای که فوتوالکترونها گسیل می‌شوند، بیش از 10^{-9} ثانیه نیست.

(ب) برای هر بسامد ثابت و پتانسیل ترمزی، جریان فوتوالکترونی i مستقیماً با شدت I باریکه نوری متناسب است. چون جریان فوتوالکترونی اندازه‌ای از تعداد فوتوالکترونهای رها شده در واحد زمان از آنود و جمع شده در کاتود است، این رابطه حاکی از آن است که تعداد فوتوالکترونهایی که در واحد زمان خارج می‌شوند با شدت نور متناسب است (در وسایل عملی فوتوالکتریک از تغییر جریان فوتوالکترونی

با شدت نور استفاده می‌شود).

(ج) برای بسامد ثابت ν و شدت نور I ، جریان فوتوالکترونی با افزایش پتانسیل ترمزی V کاهش می‌یابد و سرانجام وقتی V برابر V_0 شود به صفر می‌رسد [معادله (۱۰۴) را ببینید]. با یک پتانسیل ترمزی کوچک، فوتوالکترонهای کم انرژی و با سرعت‌های پایین، به حال سکون در می‌آیند و دیگر در جریان فوتوالکترونی شرکت نمی‌کنند. هنگامی که پتانسیل ترمزی برابر V_0 شود، حتی پراثرترین فوتوالکترونها به حال سکون در می‌آیند، و $i = 0$ می‌شود.

(د) مقدار پتانسیل بازدارنده V_0 برای هر سطح بخصوصی به بسامد نور بستگی دارد ولی از شدت نور مستقل است و بنابراین با توجه به بند (ب)، از جریان فوتوالکترونی نیز مستقل است. شکل ۴.۴ نتایج تجربی را برای سه فلز سزیوم، پتاسیم و مس نشان می‌دهد. برای هر فلزی یک بسامد مشخص ν_0 ، به نام بسامد آستانه، وجود دارد. گسیل فوتوالکترونی در صورتی روی می‌دهد که بسامد نور از بسامد آستانه بیشتر باشد؛ یعنی، هر چند شدت نور هم زیاد باشد ولی هیچ فوتوالکترونی تولید نمی‌شود مگر اینکه $\nu > \nu_0$ باشد. بسامد آستانه برای اکثر فلزها در ناحیه نور فرابنفش قرار می‌گیرد. پتانسیل بازدارنده نوعی چندین ولت است. فوتوالکترونهای گسیل شده دارای انرژیهای چندین الکترون ولتی اند؛ بنابراین، می‌توان فرمول انرژی جنبشی کلاسیک را برای فوتوالکترونها به کار برد. نتایج تجربی شکل ۴.۴ را در مورد هر فلز می‌توان با معادله خط مستقیم زیر نشان داد

$$eV_0 = h\nu - h\nu_0$$

که در آن h نمایشگر شیب خط مستقیم و برای تمام فلزها یکسان است، و ν_0 بسامد آستانه فلز مورد نظر است. با مرتب کردن مجدد جملات و استفاده از رابطه (۱۰۴) نتیجه می‌شود

$$h\nu = \frac{1}{2}m_0v_{\max}^2 + h\nu_0 \quad (2.4)$$

چون $m_0v_{\max}^2 (1/2)$ دارای ابعاد انرژی است، جملات $h\nu$ و $h\nu_0$ نیز باید دارای ابعاد انرژی باشند.

تعبیرهای کلاسیکی اثر فوتوالکتریک. اکنون برپایه خواص کلاسیک امواج الکترومغناطیسی می‌خواهیم ببینیم که برای هر یک از چهار نتیجه تجربی اثر فوتوالکتریک،

که در قسمتهای قبل ارائه شد، چه اثرهایی را می توان انتظار داشت. همچون گذشته، این اثرها را با مراجعه به شکل ۴.۴ و با همان ترتیب مورد بحث قرار می دهیم.

(الف) به دلیل طبیعت ظاهراً پیوسته امواج نوری انتظار داریم که انرژی در آشامیده شده توسط سطح فوتوالکتریک با شدت باریکه نور (توان در واحد سطح)، مساحت روشن شده، و زمان روشنائی متناسب باشد. تمام الکترونیایی که با انرژی یکسان به سطح فلز مقیدند، باید هم ارز در نظر گرفته شوند، و هر الکترون تنها پس از آنکه باریکه نوری آنقدر روی فلز بتابد که انرژی بستگی الکترون فراهم شود، می تواند سطح فلز را ترک کند. علاوه بر این، چون تمام الکترونیایی که با انرژی یکسان به سطح فلز مقیدند هم ارز در نظر گرفته می شوند انتظار می رود که وقتی يك الکترون انرژی کافی برای آزاد شدن به دست آورد تعداد دیگری از الکترونها نیز آزاد شوند. آزمایشهای مختلف نشان می دهند که در يك فلز نوعی حداقل انرژی که با آن يك الکترون به سطح مقید است برابر چند الکترون ولت است. يك محاسبه محتاطانه (مسئله ۵ را ببینید) نشان می دهد که در حالتی که شدت به کوچکی 10^{-10} W/m^2 است و برای آن زمانهای درنگی بیش از 10^{-8} s مشاهده نشده است حداقل تا چندین صد ساعت هیچ گسیل فوتوالکترونی را نمی توان انتظار داشت! واضح است که نظریه کلاسیک قادر به توجیه گسیل آنی فوتوالکتریک نیست.

(ب) نظریه کلاسیک پیشگویی می کند که با افزایش شدت نور انرژی در آشامیده شده توسط الکترونها در سطح نیز زیاد می شود. بنابراین انتظار می رود که تعداد فوتوالکترونیایی گسیل شده، یا جریان فوتوالکترونی، متناسب با شدت نور افزایش یابد. در اینجا نظریه کلاسیک با نتیجه تجربی توافق دارد.

(ج) نتایج این مشاهدات نشان می دهند که يك توزیع برای سرعتها، یا انرژیهای فوتوالکترونیایی گسیل شده وجود دارد؛ این توزیع به خودی خود با نظریه کلاسیک مغایر نیست، زیرا می توان آن را به درجات متنوع بستگی الکترونیایی واقع در سطح، یا به مقادیر گوناگون انرژی گرفته شده به وسیله الکترونها از باریکه نور فرودی نسبت داد. ولی اینکه برای هر بسامد معینی يك پتانسیل بازدارنده مشخص V و مستقل از شدت وجود دارد حاکی از آن است که انرژی بیشینه الکترونیایی رها شده بهیچوجه به مقدار کل انرژی که در واحد زمان به سطح می رسد، بستگی ندارد. نظریه کلاسیک چنین اثری را پیشگویی نمی کند.

(د) وجود يك بسامد آستانه برای يك فلز معین که در بسامدهای پایینتر از آن، هر چند

شدت نور هم زیاد باشد، هیچ گسیل فوتوالکترونی رخ نمی‌دهد از نظر کلاسیک کاملاً غیر قابل توضیح است. از دیدگاه کلاسیک شرط اصلی که تعیین می‌کند آیا گسیل فوتوالکترونی روی خواهد داد یا نه مقدار انرژی (یا شدتی) است که در واحد زمان به سطح می‌رسد، نه بسامد. به علاوه، پیدایش ثابت h ، که انرژی بیشینه فوتوالکترونها را برای هر ماده‌ای توسط رابطه (۲.۴) به بسامد آن ماده مربوط می‌کند، نمی‌تواند بر حسب ثابتهای الکترومغناطیس کلاسیک بیان شود.

به طور خلاصه، الکترومغناطیس کلاسیک نمی‌تواند برای فهم نتایج تجربی شکل ۴.۴ الف تا د یک اساس مناسب ارائه بدهد.

تعبیر کوانتومی اثر فوتوالکترونیک. اثر فوتوالکترونیک را فقط می‌توان به کمک نظریه کوانتومی درک کرد. آلبرت اینشتین برای اولین بار در سال ۱۹۰۵/۱۲۸۴ نظریه کوانتومی را در مورد طبیعت تابش الکترومغناطیسی به کار برد و این کار به توضیح رضایتبخشی از اثر فوتوالکترونیک منجر شد.

بنا به نظریه کوانتومی امواج به ظاهر پیوسته الکترومغناطیسی کوانتیده‌اند و از کوانتومهای گسسته‌ای به نام فوتون تشکیل شده‌اند. هر فوتون دارای انرژی E است که فقط به بسامد (یا به طول موج) بستگی دارد و از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad (۳.۴)$$

در حقیقت، ثابت h همان h در رابطه (۲.۴) است که نتایج آزمایشهای مربوط به اثر فوتوالکترونیک را خلاصه می‌کند. این ثابت بنیادی نظریه کوانتومی را ثابت پلانک می‌نامند، زیرا پلانک در سال ۱۹۰۰/۱۲۷۹ در تعبیر تابش جسم سیاه، برای نخستین بار، مقدار این ثابت را تعیین و اهمیت آن را درک کرد. مقدار ثابت پلانک از طریق آزمایش تعیین شده و برابر است با

$$h = ۶.۶۲۶ \times ۱۰^{-۳۴} \text{ J}\cdot\text{s}$$

بنا به نظریه کوانتومی یک باریکه نوری با بسامد ν ، شامل فوتونهای ذره گونه‌ای است که انرژی هر یک از آنها $h\nu$ است. یک تک فوتون فقط می‌تواند با یک تک الکترون در سطح فلز گسیل کننده فوتوالکترونها برهم کنش کند؛ این فوتون نمی‌تواند انرژی خود را بین چندین الکترون تقسیم کند. چون فوتونها با سرعت نور حرکت می‌کنند، بر اساس نظریه نسبیت، باید دارای جرم سکون صفر و انرژی تماماً جنبشی باشند. هنگامی که ذره‌ای با جرم سکون صفر از حرکت با سرعت c باز ایستد، موجودیت آن از بین می‌رود؛ مادام که

ذره وجود دارد با سرعت نور حرکت می کند. از این رو وقتی فوتونی بایک الکترون مقید در فلزی برخورد می کند و پس از آن دیگر با سرعت منحصر به فرد c حرکت نمی کند تمام انرژی $h\nu$ خود را به الکترونی که با آن برخورد کرده است می دهد. اگر انرژی که الکترون مقید از فوتون به دست می آورد از انرژی بستگی آن به سطح فلز بیشتر باشد زیادی انرژی به صورت انرژی جنبشی فوتوالکتریک در می آید.

اکنون می توانیم نتایج تجربی اثر فوتوالکتریک را بر اساس نظریه کوانتومی تعبیر کنیم، و برای سهولت، با توجه به شکل ۴.۴ به ترتیب معکوس بحث می کنیم.

(د) در این صورت جملات معادله (۲.۴) به انرژیهای فوتون و فوتوالکتریکها مفهوم ساده ای می دهند

$$h\nu = \frac{1}{2}m_0v_{\max}^2 + h\nu_0 \quad (2.4)$$

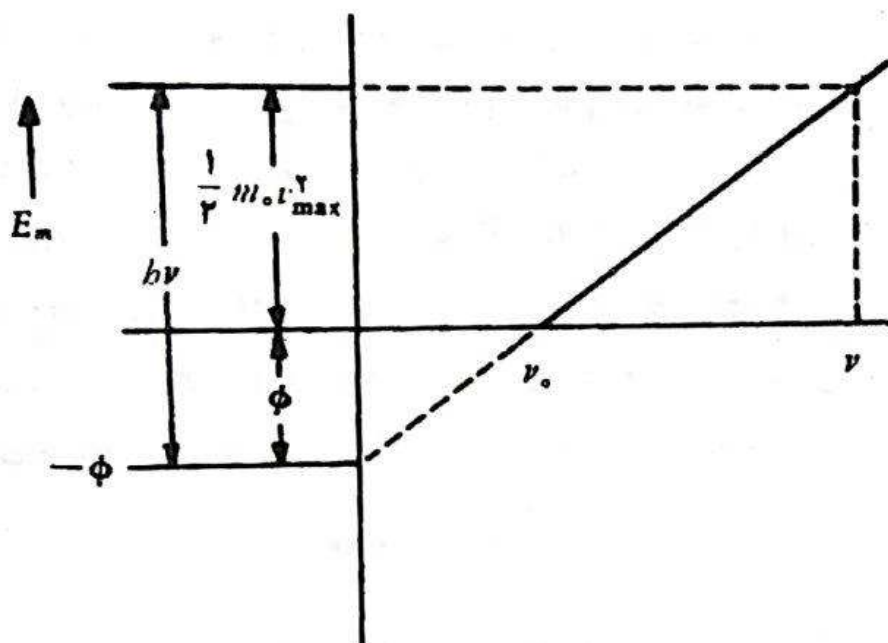
طرف چپ این معادله انرژی حمل شده توسط یک فوتون و انرژی داده شده به یک الکترون مقید را به دست می دهد. الکترونهای با قید ضعیف با انرژی جنبشی بیشینه از سطح فلز رها می شوند. طرف راست معادله (۲.۴) انرژی که الکترون از فوتون کسب می کند، یعنی انرژی جنبشی و انرژی بستگی را به دست می دهد. انرژی بستگی الکترونهای با قید ضعیف را اغلب با ϕ نشان می دهند و آن را تابع کادمی نامند؛ این انرژی نمایشگر کاری است که باید برای ازجا کردن الکترون با قید ضعیف انجام داد. بنابراین

$$\phi = h\nu_0 \quad (4.4)$$

و رابطه (۲.۴) را می توان چنین نوشت

$$h\nu = \frac{1}{2}m_0v_{\max}^2 + \phi \quad (5.4)$$

مقدار ϕ برای یک ماده بخصوص، که از اثر فوتوالکتریک تعیین می شود، با مقدار تابع کاری که از طریق آزمایشهای مستقل و مبتنی بر اصول فیزیکی متفاوت حاصل می شود، سازگار است (بخش ۹.۱۲). یک الکترون که با انرژی ϕ مقید است، تنها در صورتی رها می شود که یک تک فوتون، لااقل، این انرژی را به آن بدهد؛ یعنی، در صورتی الکترون رها می شود که $h\nu > \phi = h\nu_0$ ، یا $\nu > \nu_0$ باشد. آنگاه شکل ۴.۴ مفهوم جدیدی کسب می کند: در این صورت همان طور که در شکل ۵.۴ نشان داده شده است محور قائم را می توان با انرژی فوتون یکی گرفت.



شکل ۵.۴ انرژی جنبشی بیشینه فوتوالکترونها، به صورت تابعی از بسامد فوتونهاى فرودى برای يك ماده بخصوص.

(شکل ۵.۴ را می توان با طرف راست شکل ۸.۳ که در آن برای اثر فوتوالکتریک $E_b = \phi$ است مقایسه کرد.)

(ج) چون بسامد تابش الکترومغناطیسی دقیقاً انرژی فوتون را تعیین می کند ($E = h\nu$)، به ازای هر بسامد معلومی برای فوتوالکترونها يك انرژی جنبشی بیشینه مشخص وجود دارد.

(ب) شدت موج الکترومغناطیسی تکفام، مفهوم جدیدی به خود می گیرد. از دیدگاه نظریه کوانتومی، این شدت برابر حاصلضرب انرژی هر فوتون در تعداد فوتونهای است که در واحد زمان از واحد سطح عبور می کنند. بنابراین، افزایش در شدت باریکه نور، به معنی افزایش متناسبی در تعداد فوتونهای است که به سطح فلز برخورد می کنند. در این صورت انتظار می رود که تعداد فوتوالکترونها یا جریان فوتوالکترونی i با I متناسب باشد.

(الف) گسیل فوتوالکترونی بدون درنگ محسوسى اتفاق می افتد، زیرا حتی در کمترین شدت، رهایی يك الكترون به انباردن انرژی آن بستگی ندارد، بلکه به سادگی به واقعیت برخورد آن با يك فوتون که هنگام توقف تمام انرژی خود را به آن

می‌دهد، بستگی دارد.

جدول ۱۰۴ نتایج آزمایش، تعبیر کلاسیکی، و تعبیر کوانتومی برای هر یک از چهار اثر نشان داده شده در شکل ۴.۴ را خلاصه می‌کند.

جدول ۱۰۴

اثر (شکل ۴.۴)	آزمایش	الکترومغناطیس کلاسیک	نظریه کوانتومی
الف	گیل اساساً آنی فوتوالکترونها (10^{-9} s)	گیل فقط پس از چند صد ساعت (10^6 s) برای شدنهای پایین	یک تک فوتون انرژی خود را اساساً به طور آنی به یک تک الکترون می‌دهد
ب	$I \propto i$	انرژی در واحد زمان به ازای واحد سطح متناسب است با i	$i \propto$ تعداد فوتونها $I \propto$
ج	$\frac{1}{2} m_0 v_{\max}^2$ مشخص فقط وابسته به ν	غیر قابل توضیح	یک فوتون تمام انرژی خود را به یک تک الکترون می‌دهد.
د	آستانه‌ای برای گیل فوتوالکترونی، مستقل از I و i :	غیر قابل توضیح	$h\nu =$ انرژی فوتون؛ $\phi = h\nu_0 =$ تابع کار
$h\nu = \frac{1}{2} m_0 v_{\max}^2 + h\nu_0$			

بحث ما پیرامون اثر فوتوالکتریک تاکنون به اثرهای ناشی از تابیدن نور مرئی یا فرابنفش به سطح یک فلز محدود بود. نخستین آزمایشهایی که از نظر تاریخی به تعبیر کوانتومی

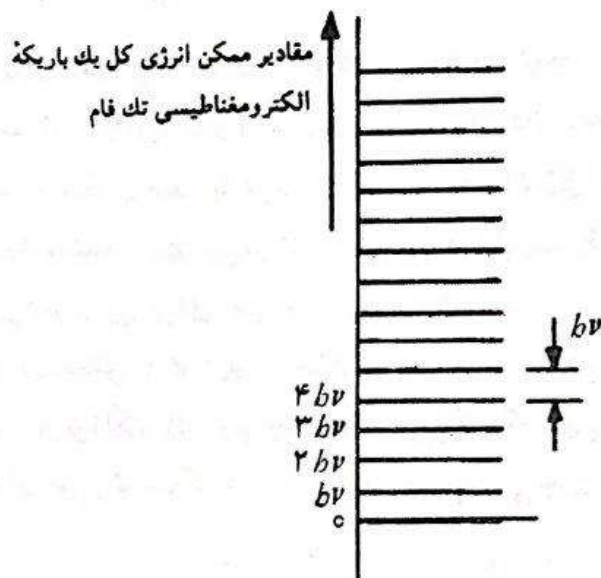
اینستین منجر شدند بر روی سطوح فلزات انجام شدند، اما این اثر برای موادی غیر از فلزات و با فوتونهایی با بسامدها و انرژیهای مختلف نیز رخ می‌دهد. هر گاه فوتونی به يك الكترون مقید برخورد کند و انرژی آن بیش از انرژی بستگی الكترون باشد، اثر فوتوالكتريك می‌تواند رخ دهد؛ مانند فوتونی که باعث آزادی يك الكترون مقید از يك اتم می‌شود. این پدیده یکی از برهم‌کنشهای مهم بین تابش الكترومغناطیسی با طول موج کوتاه و اتمهاست. وقتی يك فوتون با بسامد بالا (انرژی بالا)، مانند يك پرتو x یا يك پرتو γ ، به اتمی برخورد می‌کند، به شرط این که $h\nu > E_0$ باشد، می‌تواند يك الكترون را که با انرژی E_0 مقید است رها سازد؛ در آن صورت گسیل فوتوالكترونی، به یونش اتمی منجر می‌شود. عموماً، انرژی جنبشی فوتوالكترون رها شده را باید به شکل نسبی $E - E_0$ نوشت، و بنابراین شکل عمومی رابطه (۲.۴)، معادله انرژی اثر فوتوالكتريك، به صورت زیر است

$$h\nu = (E - E_0) + E_0 \quad (۶.۴)$$

از این رو اثر فوتوالكتريك يك روش غیرمستقیم را برای اندازه‌گیری انرژی فوتون فراهم می‌کند. فرض می‌کنیم که انرژی جنبشی فوتوالكترون برابر $E - E_0$ اندازه‌گیری شود و انرژی بستگی E_0 از طریق دیگری معلوم شود؛ آنگاه می‌توان $h\nu$ را از رابطه (۶.۴) محاسبه کرد. برعکس، اگر $h\nu$ و $E - E_0$ اندازه‌گیری شوند، در آن صورت E_0 را می‌توان تعیین کرد.

در اینجا بایستی خاطر نشان شود که اثر فوتوالكتريك فقط یکی از چندین طریقی است که در آنها می‌توان فوتونها را از يك باریکه تابش الكترومغناطیسی جدا کرد. اثر فوتو-الكتريك می‌تواند به طور همزمان، و در رقابت با، فرایندهای اثر کامپتون و تولید زوج به وقوع پیوندد. این فرایندها به تفصیل در بخشهای ۴.۲ و ۵.۴ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

پیش جدید و بنیادی که اثر فوتوالكتريك از طبیعت تابش الكترومغناطیسی فراهم می‌کند همان کوانتومی شدن امواج الكترومغناطیسی، یا وجود فوتونهاست. چون تابش الكترومغناطیسی را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از فوتونهای ذره‌گونه، که انرژی هر کدام $h\nu$ است، در نظر گرفت بدرستی می‌توان از کوانتومی شدن امواج الكترومغناطیسی سخن گفت. هر گاه بسامد این تابش را با ν نشان دهیم فوتون می‌تواند فقط دارای يك انرژی $h\nu$ باشد. انرژی کل يك باریکه تابش الكترومغناطیسی تکفام، همواره دقیقاً مضرب صحیحی از انرژی $h\nu$ يك تك فوتون است؛ این موضوع در شکل ۶.۴ نمایش داده شده است. چون انرژی هر فوتون خیلی کوچک است و چون در يك باریکه نوری با شدت متوسط



شکل ۶.۴ انرژیهای مجاز یک باریکه تابش الکترومغناطیسی تکفام.

تعداد فوتونها خیلی زیاد است دانه‌ای بودن تابش الکترومغناطیسی در مشاهدات معمولی آشکار نیست. این وضع تا اندازه‌ای شبیه به وضع موجود در نظریهٔ مولکولی است: مولکولها آنقدر کوچک‌اند و تعدادشان آنقدر زیاد است که ساختار مولکولی ماده فقط در مشاهدات خاصی آشکار می‌شود.

طیف الکترومغناطیسی را، که اغلب برحسب یکای بسامد بیان می‌شود، می‌توان از دیدگاه نظریهٔ کوانتومی با یکای انرژی به‌ازای هر فوتون سنجید؛ شکل ۷.۴ را ببینید. معمولاً امواج الکترومغناطیسی به‌وسیلهٔ طول‌موجشان مشخص می‌شوند. از این‌رو داشتن رابطه‌ای که انرژی فوتون برحسب الکترون‌ولت را برحسب طول‌موج آن به‌آنگستروم بیان دارد مفید است. مثلاً، تابش x با طول‌موج ۱۲۵ آنگستروم (با علامت اختصاری $\text{\AA}$) شامل فوتونهایی است که انرژی آنها برابر است با

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})}{(125 \text{ \AA})(10^{-10} \text{ m/\AA})(1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}$$

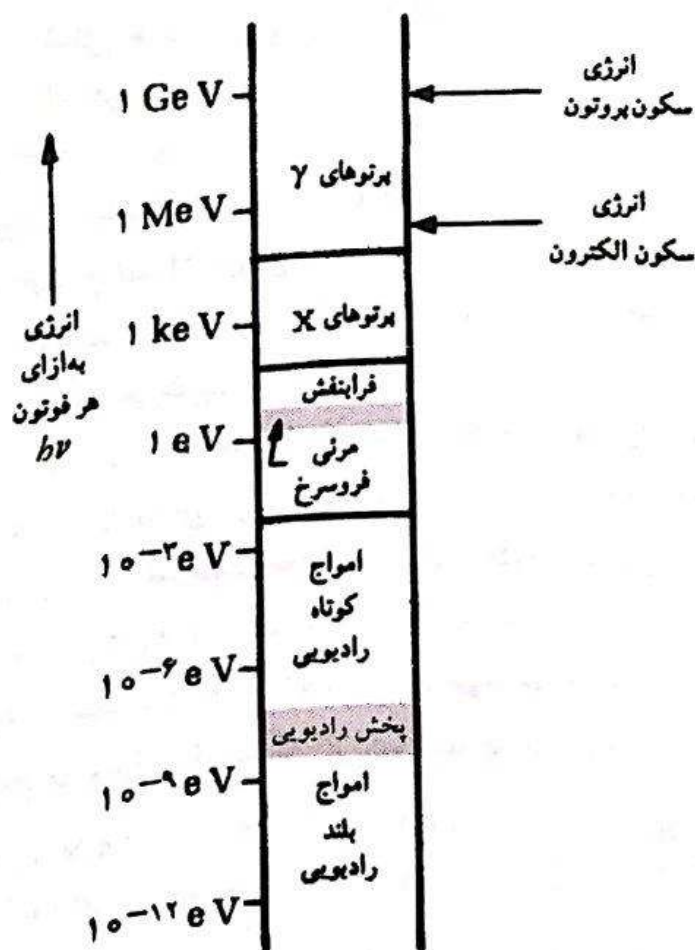
$$= 1.240 \times 10^4 \text{ eV} = 12.40 \text{ keV}$$

به‌طور کلی، انرژی E فوتون (با یکای الکترون‌ولت) برحسب طول‌موج λ (با یکای آنگستروم) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$E = \frac{1.24 \times 10^4 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\lambda} = \frac{0.0124 \text{ MeV} \cdot \text{\AA}}{\lambda} \quad (7.4)$$

انرژی فوتونهای امواج رادیویی کوچکترین مقدار ($\approx 10^{-12} \text{ eV}$) و فوتونهای پرتو γ بزرگترین مقدار ($\approx 1 \text{ GeV}$) است. طیف بسامد الکترومغناطیسی، دقیقاً بر طیف انرژی یک ذره با جرم سکون صفر یا فوتون منطبق است. انرژی فوتون، همان‌طور که در شکل ۷.۴ نشان داده شده است، می‌تواند از صفر تا بینهایت گسترش یابد. انرژیهای سکون الکترون و پروتون نیز برای مقایسه نشان داده شده‌اند.

همان‌طور که در بخش ۷.۱ دیدیم، مفاهیم موج و ذره ظاهراً باهم مغایر، و حتی متضادند. اینکه در اثر فوتوالکتریک نور چنان رفتار می‌کند که گویی از ذرات یا فوتونها تشکیل شده است بدان معنی نیست که شواهد تجربی مسلم و بی‌چون و چرای خواص موجی



شکل ۷.۴ طیف تابش الکترومغناطیسی با مقیاس انرژی فوتون.

نور را بتوان نادیده گرفت؛ هر دو توصیف موجی-ذره‌ای را باید پذیرفت. چگونگی حل این معما را به بعد از بخش ۵.۵، که در آن خواص کوانتومی نور به طور کاملتر مطالعه می‌شود، موکول می‌کنیم.

۳.۴ تولید پرتو x و تابش ترمزی

در اثر فوتوالکتریک، يك فوتون تمام انرژی الکترومغناطیسی خود را به يك الکترون مقید منتقل می‌کند؛ انرژی فوتون به صورت انرژی بستگی و انرژی جنبشی فوتوالکتریک ظاهر می‌شود. عکس اثر فوتوالکتریک بدین صورت است که الکترونی انرژی جنبشی خود را از دست بدهد و در این جریان يك یا چند فوتون بیاورند. این فرایند در تولید پرتو x به وضوحترین نحو مشاهده می‌شود.

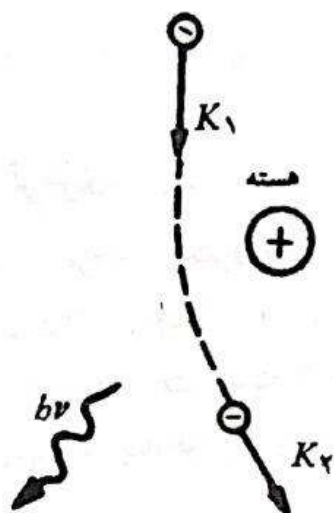
نخست آن فرایند بنیادی را که هنگام نزدیک شدن يك الکترون سریع به يك اتم و انحراف آن توسط هسته با بار مثبت رخ می‌دهد بررسی می‌کنیم. الکترون تحت تأثیر نیروی ناشی از برخورد نزدیک با اتم سنگین از مسیر مستقیم خود منحرف می‌شود، یعنی شتاب می‌گیرد. نظریه کلاسیک الکترومغناطیسی پیشگویی می‌کند که هر بار الکتریکی شتابداری انرژی الکترومغناطیسی تابش می‌کند. نظریه کوانتومی ایجاب می‌کند که هر انرژی الکترومغناطیسی تابش شده‌ای شامل کوانتومهای گسسته یا فوتونها باشد. در این صورت انتظار می‌رود که الکترون منحرف شده و بنابراین شتابدار يك یا چند فوتون تابش کند و محل برخورد را با انرژی جنبشی کمتر از آنچه داشت ترك کند.

تابشی را که در چنین برخوردی تولید می‌شود اغلب تابش ترمزی می‌نامند. برخورد تابش ترمزی به طور طرح‌وار در شکل ۸.۴ نشان داده شده است، که در آن الکترونی با انرژی جنبشی E_{k1} به اتم منحرف کننده نزدیک و پس از تولید تك فوتونی با انرژی $h\nu$ ، با انرژی E_{k2} از آن دور می‌شود. قانون بقای انرژی ایجاب می‌کند که

$$E_{k1} - E_{k2} = h\nu \quad (۸.۴)$$

چون جرم اتم حداقل ۲۰۰۰ مرتبه از جرم الکترون بزرگتر است از انرژی خیلی کوچک اتم پس زن صرف نظر کرده‌ایم. در حالی که نظریه الکترومغناطیسی کلاسیک برای مدتی که الکترون شتاب می‌گیرد تابش پیوسته‌ای را پیشگویی می‌کند، نظریه کوانتومی مستلزم تابش تك فوتونهای گسسته است. آنچه در فرایند تابش ترمزی رخ می‌دهد آشکارا در تولید فوتونهای پرتو x نیز دیده می‌شود.

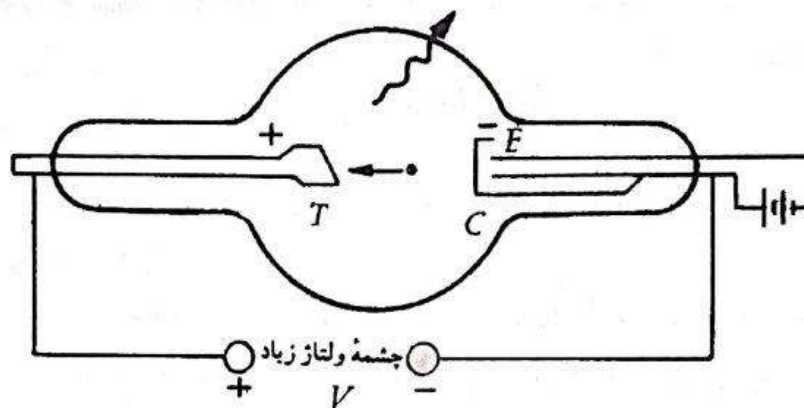
پرتوهای x برای نخستین بار در سال ۱۸۹۵/۱۲۷۴ توسط ویلهم رونتگن کشف و



شکل ۸.۴ برخورد تابش ترمزی بین یک الکترون و یک هستهٔ بار مثبت، همراه با گسیل یک تک فوتون.

بررسی شدند؛ چون در آغاز طبیعت واقعی این تابش ناشناخته بود و نتنگن نام x را برای این پرتوها انتخاب کرد. اکنون معلوم شده است که پرتوهای x شامل امواج الکترومغناطیسی یا فوتونها، با طول موج حدود $10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}$ هستند. به‌طور تجربی تأیید شده است که پرتوهای x پدیده‌های موجی تسداخل، پراش و قطبی شدن را نمایش می‌دهند. از آنجا که این پرتوها به آسانی از موادی که برای نور مرئی گذرند عبور می‌کنند و چون طول موج نوعی پرتو x از طول موجهای نور مرئی خیلی کوتاهتر است این آزمایشها مستلزم ابتکار قابل ملاحظه‌ای هستند. بحث دربارهٔ درآشامی و شدت پرتو x را به بخش ۷.۴ و بحث در مورد طول موجهای پرتو x را به بخش ۲.۵ موکول می‌کنیم؛ در اینجا توجه عمدهٔ ما به مشخصه‌های انرژی تولید پرتو x معطوف خواهد شد.

قسمتهای اساسی یک لامپ سادهٔ پرتو x در شکل ۹.۴ نشان داده شده‌اند. جریان الکتریکی با عبور از رشتهٔ F باعث گرم شدن کاتود C می‌شود و به الکترونها موجود در آن انرژی جنبشی کافی می‌دهد تا بتوانند بر بستگی خود به سطح کاتود غلبه کنند و در گسیل گرمایونی رها شوند. سپس الکترونها در خلا به وسیلهٔ اختلاف پتانسیل الکتروستاتیکی بزرگ V (نوعاً چندین هزار ولت) شتاب می‌گیرند و به هدف T که آنود است برخورد می‌کنند. هر الکترون هنگام رفتن از کاتود به آنود و قبل از برخورد به هدف انرژی جنبشی E_k به دست می‌آورد:



شکل ۹.۴ قسمتهای اساسی يك لامپ پرتو x.

$$E_k = eV$$

که در آن e بار الکترون است. از انرژی جنبشی الکترون هنگام ترك کاتود چشمپوشی می‌کنیم، زیرا این انرژی نوعاً خیلی از eV کمتر است. وقتی الکترون با هدف برخورد می‌کند انرژی اضافی به دست می‌آورد؛ این انرژی الکترون را به سطح هدف پیوند می‌دهد. از آنجا که همواره انرژی بستگی فقط چند الکترون ولت است، و E_k لااقل چندین هزار الکترون ولت است بدستی می‌توان از انرژی بستگی نیز صرف نظر کرد.

الکترونها هنگام برخورد به هدف سرعت خود را از دست می‌دهند و در برخوردها تقریباً به حال سکون درمی‌آیند. هر الکترون انرژی جنبشی خود $E_k = eV$ را به دلیل اصابت با هدف از دست می‌دهد. قسمت عمده این انرژی به صورت انرژی گرمایی در هدف ظاهر می‌شود، ولی علاوه بر این، تولید تابش الکترومغناطیسی از طریق فرایند تابش ترمزی نیز وجود دارد. هر الکترونی که با هدف برخورد کند امکان دارد که با اتمهای هدف تعدادی برخورد تابش ترمزی انجام دهد و بدین وسیله تعدادی فوتون تولید کند. اما پرتوهای کم انرژی فوتونها توسط الکترونی تولید می‌شوند که وقتی در برخورد به حال سکون درمی‌آید تمامی انرژی خود را به انرژی الکترومغناطیسی يك تك فوتون تبدیل کند. بنا بر این $E_{k1} = eV$ و $E_{k2} = 0$ ، و رابطه (۸.۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$eV = E_k = h\nu_{\max}$$

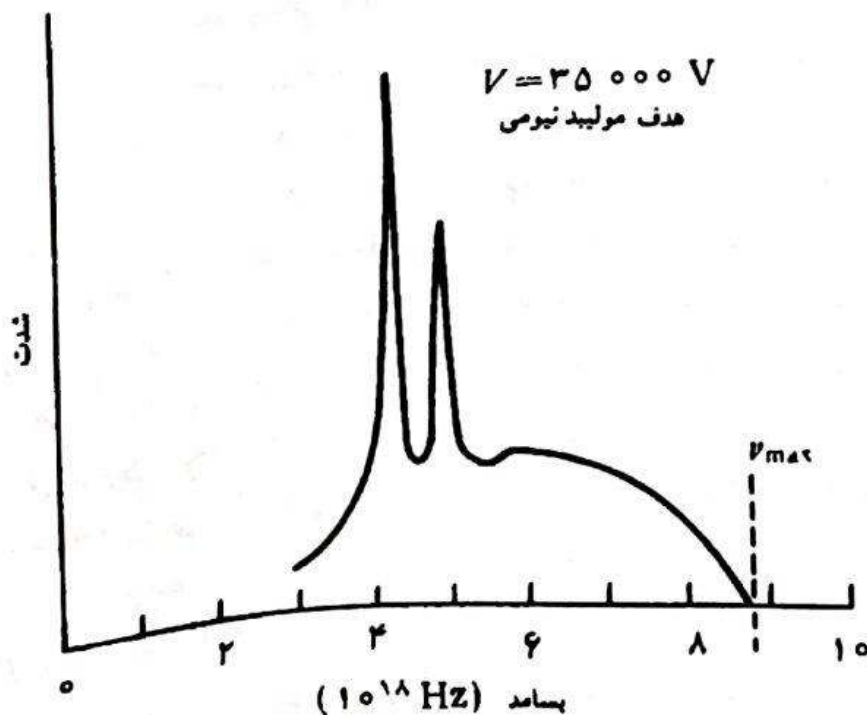
که در آن $\nu_{\max}$ بسامد بیشینه فوتونهای پرتو x تولید شده است. بیشتر الکترونها در برخورد با هدف، با گرم کردن آن یا با تولید دو و یا چند فوتون انرژی خود را از دست می‌دهند؛

در آن صورت مجموع بسامدهای این فوتونها از $\nu_{\max}$ کمتر خواهد بود. آنگاه انتظار می‌رود که توزیع انرژیهای فوتون با يك بسامد بیشینه مشخص $\nu_{\max}$ ، یا با يك طول موج کمینه $\lambda_{\min} = c/\nu_{\max}$ بدین صورت بیان شود

$$E_k = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = eV \quad (9.4)$$

توجه کنید که این معادله با معادله مربوط به اثر فوتوالکتریک (۵.۴)، وقتی که از انرژی بستگی چشمپوشی شود، هم‌ارز است.

شکل ۱۰.۴ تغییر شدت پرتوهای X گسیل شده را بر حسب بسامد تحت شرایط کلی نشان می‌دهد. در طیف پیوسته پرتو X در حدود $\nu_{\max}$ يك قطع ناگهانی پدیدار می‌شود، این حد فقط توسط پتانسیل شنا بدهنده V لامپ پرتو X تعیین می‌شود. با استفاده از رابطه (۹.۴) و اندازه‌گیریهای همزمان $\lambda_{\min}$ و V ، می‌توان hc/e را با دقت قابل ملاحظه‌ای تعیین کرد. مقداری که برای ثابت h پلانک حاصل می‌شود با مقادیری که از آزمایشهای اثر فوتوالکتریک و دیگر آزمایشها نتیجه می‌شود توافق کامل دارد.



شکل ۱۰.۴ شدت پرتوهای X به صورت تابعی از بسامد.

افزایشهای تیز یا قله‌هایی که طول موج آنها مشخصه ماده هدف است بر روی طیف پیوسته شدت نهاده شده‌اند. توضیح این خطوط مشخصه پرتو X را باید در توصیف کوانتومی ساختار اتمی اتمهای ماده یافت. وقتی ولتاژ شتاب‌دهنده V تغییر کند، ولی ماده هدف تغییر نکند، حد طیف پیوسته پرتو X تغییر می‌کند ولی بسامدهای مشخصه آن تغییر نمی‌کنند؛ برعکس، وقتی ماده هدف تغییر کند ولی ولتاژ شتاب‌دهنده تغییر نکند طیف مشخصه پرتو X تغییر می‌کند ولی حد طیف پیوسته آن تغییر نمی‌کند.

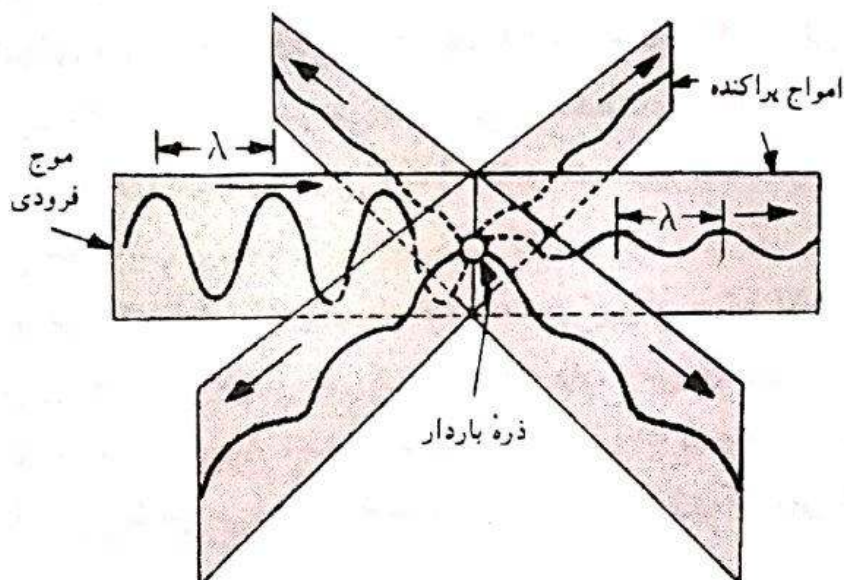
معلوم شده است که فقط اگر پتانسیل شتاب‌دهنده، V ، از مرتبه $100000V$ یا بیشتر باشد تولید پرتو X به‌طور قابل توجهی رخ خواهد داد. حتی در 10 kV ، [با استفاده از رابطه (۹.۴)، $\lambda_{\min} = 1.24\text{ \AA}$ است] مقداری کمتر از يك درصد از انرژی کل به‌شکل تابش الکترومغناطیسی ظاهر می‌شود، باقیمانده به‌صورت انرژی گرمایی در هدف پدیدار می‌شود.

۴.۴ اثر کامپتون

در اثر فوتوالکتریک فوتون (تقریباً) تمام انرژی خود را به الکترون مقید می‌دهد؛ همچنین ممکن است که فوتون فقط قسمتی از انرژی خود را به‌ذره باردار بدهد. این نوع برهم‌کنش بین امواج الکترومغناطیسی و جسم مادی همان پراکندگی امواج توسط ذرات باردار جسم است. نظریه کوانتومی پراکندگی امواج الکترومغناطیسی، به اثر کامپتون مشهور است. نخست نظریه کلاسیک پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط ذرات باردار را به‌اختصار مرور می‌کنیم.

وقتی موج الکترومغناطیسی تک‌فام به‌ذره بارداری که اندازه آن از طول موج تابش خیلی کمتر است برخورد کند اصولاً میدان الکتریکی متغیر سینوسی موج بر روی این ذره باردار اثر می‌گذارد. این ذره تحت تأثیر این نیروی الکتریکی متغیر، با همان بسامد تابش فرودی، حرکت نوسانی هماهنگ ساده انجام می‌دهد (شکل ۱۱.۴ را ببینید) و چون به‌طور پیوسته شتاب می‌گیرد در تمام جهات با همان بسامد تابش الکترومغناطیسی تابش می‌کند*، و شدت در صفحه عمود بر جهت حرکت بار نوسان‌کننده بیشترین و در امتداد خط نوسان صفر است. در این صورت، نظریه کلاسیک پیشگویی می‌کند که تابش پراکنده دارای همان بسامد تابش فرودی خواهد بود. ذره باردار نقش يك عامل انتقال را ایفا می‌کند، زیرا انرژی را از

* درك بخش ۷.۳۵ کتاب زیر



شکل ۱۱.۴ پراکندگی کلاسیک تابش الکترومغناطیسی توسط ذره باردار.

پرتو فرودی می‌گیرد و مجدداً آن را با همان بسامد (یا طول موج) منتهی در تمام جهات پراکنده می‌کند. ذره پراکننده نه انرژی کسب می‌کند و نه انرژی از دست می‌دهد، زیرا با همان آهنگی که درمی‌آشامد مجدداً تابش می‌کند. نظریه کلاسیک پراکندگی برای تابش با طول موجهای مرئی و همه طول موجهای بلندتر با تجربه توافق دارد. یک مثال ساده از بسامد تغییر نیافته تابش پراکنده همدوس عبارت از این است که بسامد نور باز تابیده از یک آینه (مجموعه‌ای از پراکنده‌ها) دستخوش هیچ تغییر ظاهری نمی‌شود.

میدان مغناطیسی یک موج الکترومغناطیسی فرودی نیز بر یک ذره باردار اثر می‌کند. بر باری که در میدان مغناطیسی عرضی یک موج الکترومغناطیسی حرکت می‌کند یک نیروی مغناطیسی، در امتداد جهت انتشار موج، وارد می‌شود.* وقتی در آشامی کامل باشد نیروی وارد بر بار، نیروی تابش F_r خواهد بود که با رابطه $F_r = P/c$ بیان می‌شود، و در آن P توان موج فرودی است. علاوه بر این، چون یک موج الکترومغناطیسی می‌تواند نیرویی بر مرکز پراکندگی اعمال کند، اندازه حرکت p را به این موج نسبت می‌دهیم

$$p = \frac{E}{c}$$

* رک بخش ۵.۳۵ کتاب ذین

که در آن E نمایشگر انرژی الکترومغناطیسی موج فرودی است.

اکنون پراکندگی را از دیدگاه نظریه کوانتومی بررسی می‌کنیم. آرتور کامپتون در سال ۱۹۲۲/۱۳۰۱ با استفاده از تغییر موقع اینشتین از اثر فوتوالکتریک، مفهوم ذره گونه فوتون (طبیعت کوانتومی تابش الکترومغناطیسی) را برای توضیح پراکندگی پرتوهای x به کار برد. در نظریه کوانتومی، تابش الکترومغناطیسی شامل فوتونهایی است که انرژی هر یک با $E = h\nu$ بیان می‌شود. چون یک فوتون را می‌توان به عنوان یک ذره با جرم سکون صفر، که با سرعت c در حرکت است، در نظر گرفت معادله (۱۵.۳) نشان می‌دهد که بزرگی اندازه حرکت خطی متناظر با p برابر E/c است، که با نتیجه نظریه کلاسیک توافقی دارد. از این رو

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (15.4)$$

هر فوتون در باریکه‌ای از تابش الکترومغناطیسی تکفام به طول موج λ ، دارای اندازه حرکتی برابر h/λ است. معادله (۱۵.۴) نشان می‌دهد که وقتی طول موج، بسامد یا انرژی فوتون معلوم باشند، اندازه حرکت فوتون به دقت مشخص می‌شود. جهت p در امتداد جهت انتشار موج است.

خصوصیت مشخصی که به وسیله نظریه کوانتومی مطرح می‌شود آن است که اندازه حرکت الکترومغناطیسی نمی‌تواند، برای امواج تکفام، هر مقدار دلخواهی داشته باشد؛ بلکه به صورت مضارب صحیحی از اندازه حرکت h/λ است که به وسیله یک تک فوتون حمل می‌شود.

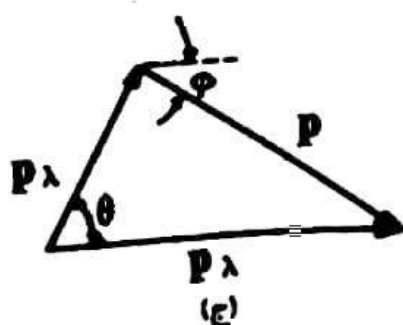
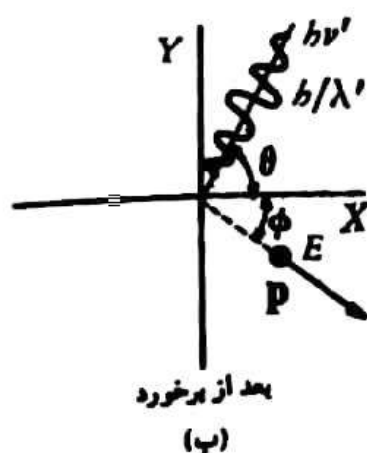
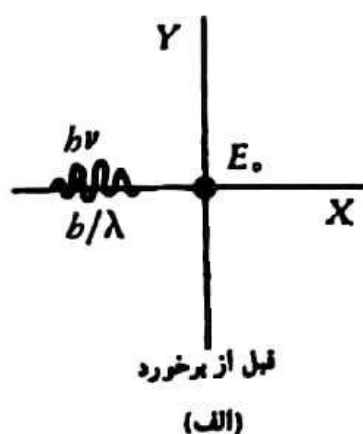
می‌توان رابطه (۱۵.۴) را، با توجه به اینکه اندازه حرکت یک فوتون باید برابر حاصلضرب جرم نسیتی در سرعت فوتون باشد، از راه دیگری نیز به دست آورد

$$p = mc = \frac{E}{c^2} c = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

که در آن E/c^2 به جای m نشسته است. درست همان گونه که انرژی یک فوتون با بسامد آن افزایش می‌یابد، اندازه حرکت آن نیز با بسامد افزایش می‌یابد. بنابراین، اندازه حرکت فوتون با بسامد و انرژی بالا، مانند پرتو γ ، از اندازه حرکت فوتون با بسامد و انرژی پایین، همانند فوتون رادیویی، خیلی بیشتر است.

وقتی یک باریکه الکترومغناطیسی تکفام را به عنوان مجموعه‌ای متشکل از فوتونهای

ذره گونه، که هریک دارای انرژی و اندازه حرکت دقیقاً معلوم اند، در نظر بگیریم عملاً پراکندگی تابش الکترومغناطیسی به صورت مسئله‌ای که شامل برخورد فوتون با یک ذره باردار است درمی‌آید. آنگاه این مسئله صرفاً با به کار بردن قوانین بقای انرژی و اندازه حرکت حل می‌شود. شکل ۱۲.۴ الف و ب فوتون و ذره را قبل و بعد از برخورد نشان می‌دهد. البته در کاربرد قوانین بقا، به جزئیات برهم‌کنش بین فوتون و ذره در خلال برخورد توجه نمی‌شود؛ بلکه فقط به انرژی کل و اندازه حرکت قبل و بعد از برخورد پرداخته می‌شود.



شکل ۱۲.۴ برخورد یک فوتون و ذره‌ای که در آغاز ساکن است.

برخلاف پراکندگی کلاسیک امواج الکترومغناطیسی، که در آن فرض می‌شود ذره پس از برخورد اساساً هیچ انرژی کسب نمی‌کند، نظریه کوانتومی ایجاب می‌کند که ذره مقداری انرژی کسب کند؛ و چون در این صورت امکان دارد که انرژی جنبشی آن زیاد باشد باید با آن به‌طور نسبی رفتار کرد.

ذره‌ای را که آزاد و در ابتدا ساکن است با جرم سکون m_0 و انرژی سکون $E_0 = m_0 c^2$ ، در نظر می‌گیریم. آنگاه بقای انرژی را در مورد برخورد شکل ۱۲.۴ به‌کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم

$$h\nu + E_0 = h\nu' + E \quad (۱۱.۲)$$

در اینجا E انرژی ذره پس‌زن بعد از برخورد، و $h\nu$ و $h\nu'$ به‌ترتیب انرژیهای فوتونهای فرودی و پراکنده‌اند. از آنجا که انرژی نهایی (انرژی سکون به‌اضافه انرژی جنبشی) ذره پس‌زن، $E = mc^2$ ، باید بر انرژی اولیه، E_0 ، فزونی یابد در این صورت از رابطه (۱۱.۲) نتیجه می‌شود که $h\nu' < h\nu$ است. در نتیجه، فوتون پراکنده دارای انرژی کمتر، بسامد پایین‌تر، و طول موج بلندتر از فوتون فرودی خواهد بود. این با روش کلاسیک که هیچ تغییر بسامدی را برای پراکندگی امواج الکترومغناطیسی پیشگویی نمی‌کند مغایر است. چون فوتونهای فرودی و پراکنده دارای بسامدهای متفاوت‌اند، فوتون پراکنده را نباید صرفاً همان فوتون فرودی که در جهت دیگری حرکت می‌کند پنداشت؛ بلکه فوتون فرودی نابود و فوتون پراکنده آفریده می‌شود.

بقای اندازه حرکت خطی به‌وسیله مثلث برداری شکل ۱۲.۴ ج به‌طور ضمنی بیان می‌شود که در آن $p = mv$ اندازه حرکت نسبی ذره پس‌زن و بزرگی اندازه حرکتهای فوتونهای فرودی و پراکنده شده، به‌ترتیب عبارت‌اند از، $p_{\lambda'} = h\nu'/c \equiv h/\lambda'$ و $p_{\lambda} = h\nu/c \equiv h/\lambda$. زاویه پراکندگی θ ، زاویه بین جهتهای $p_{\lambda'}$ و p_{λ} ، یعنی زاویه بین جهتهای فوتونهای فرودی و پراکنده شده است.

می‌خواهیم تغییر طول موج $\lambda' - \lambda = \Delta\lambda$ را بر حسب θ پیدا کنیم. با به‌کار بردن قانون کینوسها در مثلث شکل ۱۲.۴ ج داریم

$$p_{\lambda'}^2 + p_{\lambda}^2 - 2p_{\lambda}p_{\lambda'} \cos\theta = p^2 \quad (۱۲.۲)$$

دو طرف این معادله را در c^2 ضرب می‌کنیم و با یادآوری اینکه در مورد فوتون $pc = h\nu$ است، داریم

$$h^2\nu'^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu\nu' \cos\theta = p^2 c^2 \quad (۱۳.۲)$$

با استفاده از معادله (۱۱.۲) می‌توان به‌رابطه مشابهی دست یافت. $h\nu$ و $h\nu'$ را در

يك طرف معادله (۱۱.۴) و E و E_0 را در طرف دیگر آن قرار می‌دهیم؛ سپس طرفین معادله را مجذور می‌کنیم، خواهیم داشت

$$h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' = E^2 + E_0^2 - 2EE_0 = 2E_0^2 + p^2c^2 - 2EE_0 \quad (۱۴.۴)$$

که در آن با استفاده از معادله (۱۴.۳)، $E_0^2 + p^2c^2$ را به جای E^2 قرار داده‌ایم. با کم کردن رابطه (۱۳.۴) از رابطه (۱۴.۴) داریم

$$-2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) = 2E_0^2 - 2EE_0$$

$$h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) = E_0(E - E_0) = m_0c^2(h\nu - h\nu')$$

$$\frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = c\frac{\nu - \nu'}{\nu\nu'} = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu} = \lambda' - \lambda$$

در این صورت افزایش در طول موج، $\Delta\lambda$ ، برابر است با

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) \quad (۱۵.۴)$$

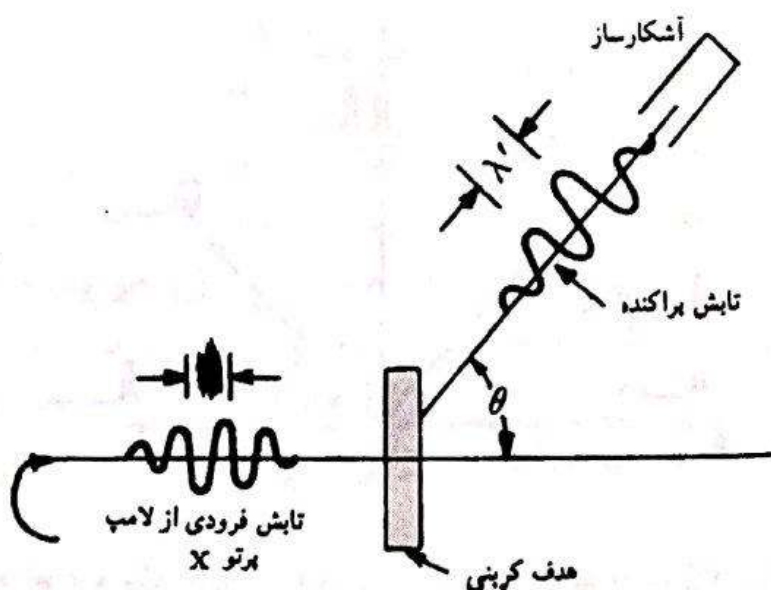
این معادله اساسی اثر کامپتون است. این معادله افزایش $\Delta\lambda$ در طول موج فوتون پراکنده را نسبت به طول موج فوتون فرودی به دست می‌دهد. مشاهده می‌کنیم که $\Delta\lambda$ فقط به جرم سکون m_0 ذره پس‌زن، ثابت پلانک h ، سرعت c نور، و زاویه پراکندگی θ بستگی دارد. شاید تعجب‌آور است که $\Delta\lambda$ را از طول موج فوتون فرودی مستقل می‌یابیم. مقدار h/m_0c ، که در طرف راست رابطه (۱۵.۴) ظاهر می‌شود و دارای بعد طول است به طول موج کامپتون مشهور است. با وجود اینکه زاویه پراکندگی θ بدون هیچ ابهامی افزایش طول موج $\Delta\lambda$ را تعیین می‌کند، از قبل نمی‌توان زاویه‌ای را که تحت آن هر فوتونی خارج خواهد شد پیشگویی کرد.

اگر ذره پس‌زن يك الكترون آزاد در ماده پراکنده باشد، در این صورت $m_0 = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ و $h/m_0c = 0.02426 \text{ \AA}$ است. وقتی يك فوتون مثلاً با زاویه $\theta = 90^\circ$ نسبت به جهت فوتون فرودی خارج شود، با استفاده از رابطه (۱۵.۴) تغییر طول موج برابر $0.024 \text{ \AA}$ است. وقتی فوتون تحت زاویه $\theta = 180^\circ$ خارج شود یا به عبارت دیگر به سوی عقب حرکت کند و الکترون پس‌زن به سوی جلو حرکت کند برخورد دقیقاً رو در رو خواهد بود؛ آنگاه تغییر طول موج بیشینه و برابر $0.049 \text{ \AA}$ است. در چنین برخوردی انرژی جنبشی الکترون نیز بیشینه است. برای پراکندگی 90° (توسط الکترون آزاد) تابش فرودی در ناحیه مرئی، مثلاً در

$4000 \text{ \AA}$ ، افزایش نسبی در طول موج، $\Delta\lambda/\lambda$ ، فقط برابر 0.006 درصد است. این جابه‌جایی طول موج در ناحیه نور مرئی کاملاً پوشیده می‌ماند و این به‌خاطر این است که الکترون‌ها در یک ماده پراکنده معمولی در حال سکون نیستند بلکه در حرکت گرمایی‌اند. یک جابه‌جایی قابل مشاهده (مثلاً $\Delta\lambda/\lambda = 2/100$) را می‌توان با استفاده از یک تابش فرودی به طول موج $\lambda = 1 \text{ \AA}$ به دست آورد؛ از این رو $\Delta\lambda = 0.024 \text{ \AA}$ است. بنابراین، برای فوتونهای پرتو x و فوتونهای با طول موج کوتاه‌تر یک جابه‌جایی وجود دارد که به آسانی مشاهده می‌شود. برای فوتونهای با طول موج بلندتر، تغییر نسبی طول موج خیلی کوچک است و تابش پراکنده تقریباً دارای همان طول موج و بسامد تابش فرودی است. از نظر کلاسیک، طول موج تابشهای فرودی و پراکنده اساساً مساوی‌اند؛ بنابراین، در ناحیه $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$ پراکندگی کامپتون با پراکندگی کلاسیک توافق دارد. در اینجا با استفاده از رابطه (۱۵.۴) مثالی از اصل همخوانی را که در اثرهای کوانتومی به کار می‌رود مشاهده می‌کنیم

$$\lim_{\substack{m_0 \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \lim_{\substack{m_0 \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} \frac{h}{m_0 c \lambda} = 0$$

اینکه پراکندگی پرتوهای x با مدل فوتونی توافق دارد نه با مدل کلاسیکی (که هیچ تغییری را برای طول موج پیشگویی نمی‌کند) برای نخستین بار در سال ۱۹۲۲/۱۳۰۱ توسط کامپتون نشان داده شد. شکل ۱۳.۴ آرایش تجربی پرتوهای x فرودی بر روی هدف کربن را به‌طور طرح‌وار نشان می‌دهد؛ کربن ماده‌ای است که دارای تعداد زیادی الکترون آزاد (یعنی، عملاً آزاد) است. آشکارساز برای هر زاویه ثابت θ ، می‌تواند

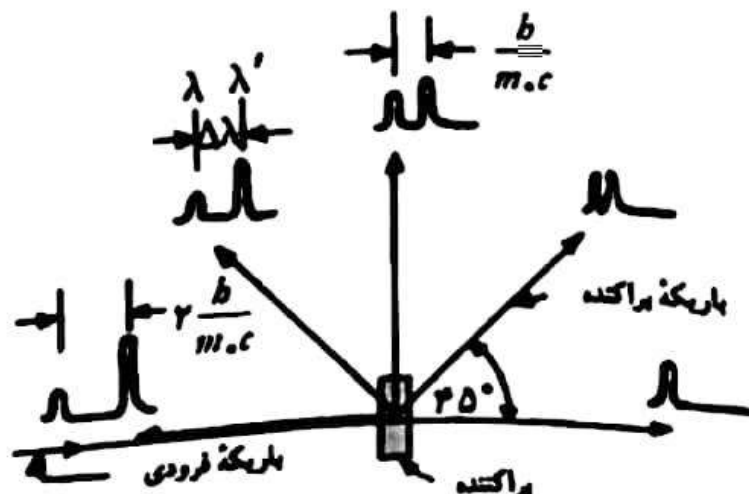


شکل ۱۳.۴ طرح‌واره آرایش تجربی اثر کامپتون.

(بخشهای ۲۰۵ و ۳۰۸ را ببینید) شدت تابش پراکنده را بر حسب طول موج اندازه‌گیری کند (وقتی $\lambda = \lambda'$ و $\Delta\lambda = 0$ است، شکل ۱۳.۴ را با شکل ۱۱.۴ مقایسه کنید). شکل ۱۴.۴، شدت تابش پراکنده را بر حسب طول موج پراکنده شده برای سه زاویه ثابت θ نشان می‌دهد.

برای هر زاویه پراکندگی بخصوص θ ، دو طول موج غالب در تابش پراکنده وجود دارند: یکی با همان طول موج λ پرتو فرودی، یعنی موج تغییر نیافته، و دیگری با طول موج بلندتر λ' ، یعنی موج تغییر یافته، که با معادله کامپتون (۱۵.۴) بیان می‌شود. طول موج تغییر نیافته ناشی از پراکندگی هم‌دوس تابش فرودی توسط الکترونهای داخلی آنهاست؛ این الکترونها آنچنان قویاً به آنها مقیدند که فوتون نمی‌تواند بایکی از آنها برخورد کند بدون آنکه در همان زمان تمام اتم را به حرکت درآورد. در این صورت جرم m_0 هر يك از این الکترونها، که قویاً مقیدند به طوری مؤثر همان جرم M_0 است. بنابراین در برخورد کامپتون بین يك فوتون و الکترونی که قویاً مقید است تغییر طول موج $\Delta\lambda$ عبارت است از $0 \approx (1 - \cos \theta)(h/M_0 c)$ ، زیرا M_0 همواره هزاران مرتبه از m_0 بزرگتر است. اثر کامپتون روش ساده‌ای را برای تعیین انرژی يك فوتون فراهم می‌کند. از رابطه (۱۱.۴) داریم

$$E_s = E - E_0 = h\nu - h\nu'$$



شکل ۱۴.۴ شدت تابش پراکنده بر حسب طول موج تابش پراکنده برای سه زاویه متفاوت θ .

چون $\nu = c/\lambda$ و $\nu' = c/\lambda' = c/(\lambda + \Delta\lambda)$ است، این رابطه را به صورت زیر می نویسیم

$$E_k = h\nu \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} \quad (۱۶.۴)$$

که در آن $\Delta\lambda$ به زاویه پراکندگی θ بستگی دارد و به وسیله رابطه (۱۵.۴) بیان می شود. انرژی جنبشی الکترون پس زن در صورتی بیشینه است که یک برخورد رو در رو رخ دهد و الکترون پس زن به سوی جلو و فوتون پراکنده به سوی عقب حرکت کند. در چنین برخوردی $\theta = ۱۸۰^\circ$ و $\Delta\lambda = 2h/m_0c$ ؛ و رابطه (۱۶.۴) به صورت زیر درمی آید

$$E_{k,max} = h\nu \frac{2h\nu/m_0c^2}{1 + 2h\nu/m_0c^2} \quad (۱۷.۴)$$

بنابراین، اگر انرژی پر انرژی ترین الکترونهای پس زن را اندازه بگیریم با استفاده از رابطه (۱۷.۴) می توانیم انرژی فوتون فرودی را نیز محاسبه کنیم، و برعکس.

بررسی برخورد کامپتون بین یک فوتون و یک الکترون مبتنی بر این فرض بود که الکترون پراکنده آزاد و ساکن است. البته، هر الکترون موجود در ماده در حرکت است و تا حدی به اتم مادر خویش مقید است؛ ولی الکترونهای بیرونی اتمها را می توان مانند الکترونهایی که عملاً آزادند در نظر گرفت؛ زیرا انرژی بستگی آنها (نوعاً چند الکترون ولت) خیلی کمتر از انرژی یک فوتون پرتو x نوعی است، که برای $\lambda = 1\text{\AA}$ برابر 12400eV است. وقتی تابش الکترومغناطیسی با بسامد پایین و طول موج بلند، مانند امواج رادیویی با $\nu = 10\text{MHz}$ ، به یک الکترون بیرونی برخورد کند انرژی فوتون فرودی، $41 \times 10^{-9}\text{eV}$ ، از انرژی بستگی الکترون بیرونی خیلی کمتر است. بنابراین، m_0 در معادله کامپتون عملاً جرم اتم است، و تغییر در طول موج خیلی کم است ($\Delta\lambda \ll \lambda$)، به طوری که هر دو تابش اساساً دارای بسامدهای یکسان اند.

اثر کامپتون جنبه های ذره گونه تابش الکترومغناطیسی را به وضوح نشان می دهد: نه فقط یک انرژی دقیق $h\nu$ را می توان به یک فوتون نسبت داد، بلکه یک اندازه حرکت دقیق h/λ را نیز می توان به آن منسوب کرد. در این صورت در امتداد هر جهتی، اندازه حرکت کل یک باریکه الکترومغناطیسی تکفام، نمی تواند هر مقداری را بپذیرد؛ بلکه تنهایی تواند مضرب کاملاً صحیحی از اندازه حرکت خطی یک فوتون در همان جهت را دارا باشد. بدین معنی که اندازه حرکت تابش الکترومغناطیسی، همانند انرژی کوانتیده است.

مثال ۱۰۴ اثر فوتوالکتریک فرایندی است که در آن یک فوتون نابود و ذره ای با تمام انرژی که در ابتدا توسط فوتون حمل می شد شروع به حرکت می کند. این اثر فقط در

صورتی می‌تواند رخ دهد که ذره در ابتدا مقید باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که فرایند زیر، اثر فوتوالکتریک فرضی با يك ذره آزاد، ممنوع است. فوتونی به ذره آزادی که در ابتدا ساکن است برخورد می‌کند، این فوتون نابود می‌شود (و فوتون دیگری آفریده نمی‌شود) و تمام انرژی و اندازه حرکت خود را به ذره آزاد منتقل می‌کند. چنین برخوردی نمی‌تواند رخ دهد، زیرا بقای همزمان انرژی و اندازه حرکت را نقض می‌کند.

اگر انرژی فوتون $h\nu$ و انرژیهای اولیه و نهایی ذره آزاد به ترتیب E و E_0 فرض شوند، با استفاده از بقای انرژی، داریم

$$h\nu = E - E_0$$

ولی بقای اندازه حرکت ایجاب می‌کند که

$$\frac{h\nu}{c} = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{c^2}}$$

که در طرف راست این معادله اندازه حرکت نسیتی ذره ظاهر می‌شود. با حذف $h\nu$ از دو معادله بالا می‌بینیم که تنها مقدار ممکن E_0 صفر است. چون هر ذره مادی دارای جرم سکون غیرصفر است، اثر فوتوالکتریک با يك ذره آزاد نمی‌تواند رخ بدهد. در یک اثر فوتوالکتریک واقعی، یعنی با الکترونهاى مقید، جرم الکترون خیلی کمتر از جرم جسمی است که به آن مقید است. در آن صورت تقریباً تمام انرژی فوتون به الکترون منتقل می‌شود و فقط کسر کوچکی از آن به جسمی که الکترون به آن مقید است منتقل می‌شود.

مثال ۲.۴ با استفاده از نظریه الکترومغناطیس کلاسیک می‌توان نشان داد که فشار تابش P_r يك باریکه الکترومغناطیسی کاملاً درآشامیده شده با شدت I را که عمود بر سطح درآشام فروود می‌آید توسط رابطه $P_r = I/c$ داده می‌شود.* با فرض اینکه تابش شامل فوتونهاست و هر يك از فوتونها دارای اندازه حرکت $h\nu/c$ است این رابطه را به دست آورید.

فرض می‌کنیم که شار باریکه فوتونی برابر N فوتون در واحد سطح عمود بر جهت باریکه در واحد زمان باشد. در این صورت، اگر انرژی حمل شده به وسیله هر فوتون در باریکه برابر $h\nu$ باشد انرژی کل به ازای واحد سطح عرضی در واحد زمان (یا شدت I) به وسیله رابطه زیر بیان می‌شود

* در معادله (۳۱.۳۵) کتاب زیر

$$I = N(h\nu)$$

اگر این باریکه به سطحی که آن را کاملاً درمی آشامد برخورد کند هر فوتون اندازه حرکتی برابر $h\nu/c$ به آن سطح انتقال می دهد. آنگاه اندازه حرکت کل انتقال یافته در واحد سطح در واحد زمان برابر $N(h\nu/c)$ است؛ ولی اندازه حرکت کل انتقال داده شده در واحد زمان درست برابر نیروی تابش وارد بر سطح در آشام است، و این نیرو در واحد سطح برابر فشار تابش P_r است:

$$P_r = N \frac{h\nu}{c}$$

با حذف $Nh\nu$ از دو معادله بالا، داریم

$$P_r = \frac{I}{c} \quad \text{برای درآشامی کامل}$$

توجه کنید که فشار تابش مستقل از بسامد است. اگر باریکه به سطحی کاملاً بازتابان در امتداد عمود بر آن برخورد کند، اندازه حرکت دو بار به سطح منتقل می شود؛ یک بار وقتی فوتون فرودی در برخورد با سطح نابود می شود و بار دیگر وقتی فوتون دیگری با همان بسامد آفریده می شود و به سوی خارج از سطح حرکت می کند. در نتیجه، فشار تابش برای بازتاب کامل چنین است

$$P_r = \frac{2I}{c} \quad \text{برای بازتاب کامل}$$

با توجه به بقای اندازه حرکت، چشمه ای که فوتون گسیل می کند در جهت مخالف پس زده می شود. از این رو، یک شکل خیلی ابتدایی از «موشک فوتونی» یک چشمه تک جهتی از تابش الکترومغناطیسی است، مثل یک چراغ قوه روشن. این موشک در جهت جلو اندازه حرکت کسب می کند، زیرا فوتونها به عقب گسیل می شوند. توجه کنید که فوتون به ازای یک مقدار انرژی کل، اندازه حرکتی بیش از ذره ای با انرژی سکون غیر صفر حمل می کند؛ یعنی، از رابطه $p = (E^2 - E_0^2)^{1/2} / c$ دیده می شود که برای یک انرژی معلوم E اندازه حرکت p برای $E_0 = 0$ بیشینه است.

مشاهده می شود که یک فوتون به عنوان ذره ای با جرم سکون صفر همواره با یک تک سرعت c در حرکت است؛ هیچ چارچوب مرجعی که در آن فوتون دارای سرعتی غیر از c باشد وجود ندارد. از طرف دیگر، انرژی $h\nu$ و اندازه حرکت $h\nu/c$ آن به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد؛ هر دوی این کمیتها با بسامد فوتون متناسب اند و بسامد به نوبه

خود با در نظر گرفتن اثر دوپلر (نسیتی) به چارچوب مرجع بستگی دارد. از این رو، اگر ناظری در همان جهتی که يك فوتون حرکت می‌کند حرکت کند همه مقادیر بسامد، انرژی، و اندازه حرکت فوتون را نسبت به مقادیر اندازه‌گیری شده آنها در چارچوب مرجع ساکن نسبت به چشمه فوتونها کاهش یافته می‌یابد.

۵.۴ تولید و نابودی زوج

اثر فوتوالکتریک، فرایند تابش ترمزی، و اثر کامپتون همگی مثالهایی از تبدیل انرژی الکترومغناطیسی فوتونها، به انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ذرات مادی، و بالعکس اند. این پرسش طبیعی است که آیا امکان تبدیل انرژی يك فوتون به جرم سکون وجود دارد - یعنی آیا می‌توان از انرژی خالص ماده خالص آفرید یا از طرف دیگر، انرژی سکون را به انرژی الکترومغناطیسی تبدیل کرد. پاسخ مثبت است، به شرط اینکه چنین تبدیلهایی قوانین بقای انرژی، اندازه حرکت و بار الکتریکی را نقض نکنند.

تولید زوج. نخست انرژی کمینه مورد نیاز برای آفرینش يك تك ذره مادی را در نظر می‌گیریم. چون بین تمام ذرات شناخته شده، الکترون دارای کوچکترین جرم سکون غیر صفر است، برای آفرینش آن به کمترین انرژی نیاز است. فوتون دارای بار الکتریکی صفر است. از این رو، قانون بقای بار، مانع آفرینش يك تك الکترون از يك فوتون می‌شود. ولی آفرینش يك زوج الکترون، شامل دو ذره با بارهای الکتریکی مخالف، امکانپذیر است و مشاهده هم شده است. ذره با بار مثبت را پوزیترون می‌نامند و به آن پادذره الکترون گفته می‌شود. الکترون و پوزیترون بجز از نظر علامت بارها، e^- و e^+ (و اثرهای مربوط به این تفاوت) از هر نظر دیگری به هم شبیه‌اند. انرژی کمینه $h\nu_{\min}$ لازم برای آفرینش يك زوج الکترون پوزیترون، با در نظر گرفتن بقای انرژی، به صورت زیر است

$$h\nu_{\min} = 2m_0c^2$$

از آنجا که انرژی سکون m_0c^2 يك الکترون یا پوزیترون، 511 MeV ده است، انرژی آستانه $2m_0c^2$ برای تولید زوج برابر 1.02 MeV است. طول موج فوتون مربوط به این انرژی آستانه $1.24 \times 10^{-10}\text{ m}$ ده است؛ بنابراین زوجهای الکترون را فقط به وسیله فوتونهای پرتو γ و یا فوتونهای پرتو x ، که طول موج خیلی کوتاه دارند می‌توان تولید کرد. فرایندی را که در آن ماده از تابش الکترومغناطیسی آفریده می‌شود تولید زوج می‌نامند، زیرا اگر باید قوانین بقا برقرار باشند يك ذره و پاد ذره آن باید همیشه با هم آفریده شوند. پدیده تولید زوج مؤکدترین نمایش قابلیت تبدیل متقابل جرم و انرژی است.

اگر انرژی یک فوتون بیش از انرژی آستانه $2m_0c^2$ باشد فزونی انرژی به صورت انرژی جنبشی زوج آفریده شده ظاهر می شود. با به کار بردن بقای انرژی در تولید زوج داریم

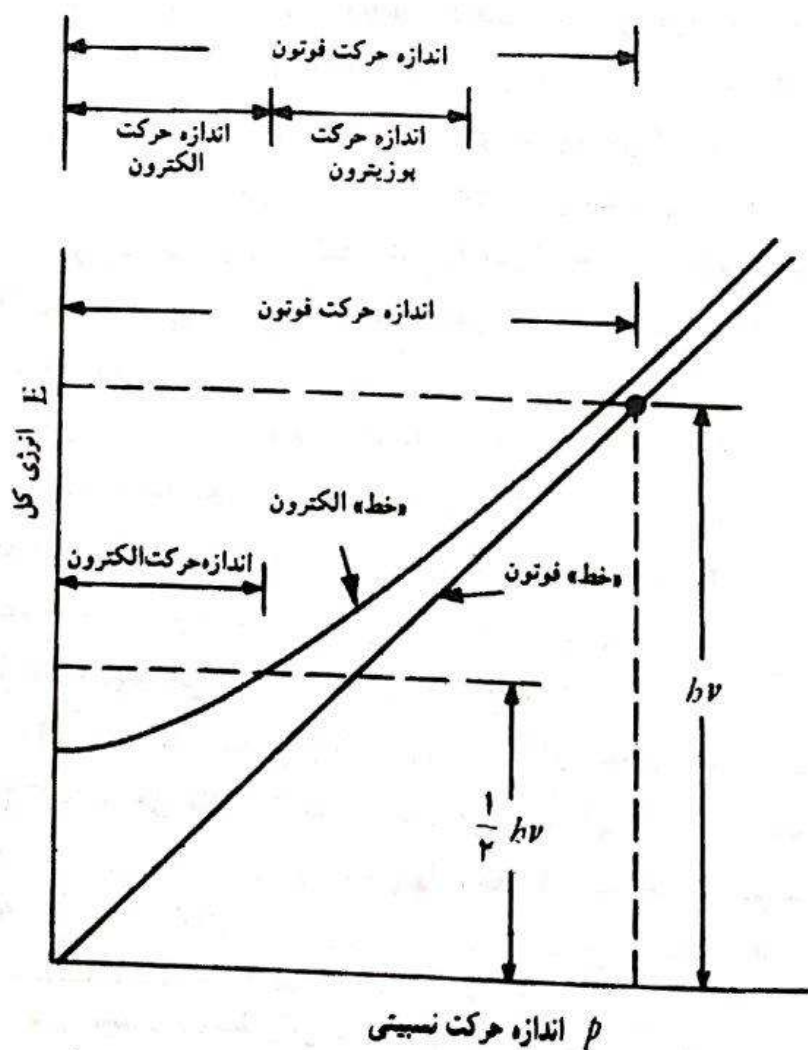
$$h\nu = m^+c^2 + m^-c^2 = (m_0c^2 + E_k^+) + (m_0c^2 + E_k^-)$$

$$h\nu = 2m_0c^2 + (E_k^+ + E_k^-) \quad (18.4)$$

که در آن ν بسامد فوتون فرودی، و E_k^+ و E_k^- انرژیهای جنبشی ذرات آفریده شده اند. انرژی کمینه $h\nu_{\min}$ که درست برای تولید زوج کافی است، از مساوی صفر قرار دادن انرژیهای جنبشی ذرات آفریده شده حاصل می شود

$$E_k^+ + E_k^- = 0$$

تولید زوج نمی تواند در فضای تهی رخ دهد. به آسانی می توان ثابت کرد که در تولید ذره و پاد ذره انرژی و اندازه حرکت به طور همزمان نمی توانند پایسته بمانند، مگر اینکه فوتون در نزدیکی ذره سنگینی، همچون یک هسته اتمی، باشد. با در نظر گرفتن شکل ۱۵.۴،



شکل ۱۵.۴ نمایش نموداری از عدم امکان تولید زوج در فضای تهی.

که نموداری از انرژی نسبی E بر حسب اندازه حرکت نسبی p است (شکل ۶.۳) می‌توان دریافت که حضور يك ذره سنگین ضروری است. ابتدا فرض می‌کنیم که در تولید يك زوج هیچ ذره سنگینی درگیر نیست و، برای سهولت، فرض می‌کنیم که انرژی هر ذره آفریده شده دقیقاً برابر نصف انرژی فوتون باشد. شکل ۱۵.۴ نشان می‌دهد که مجموع اندازه حرکتی دو ذره باید از اندازه حرکت فوتون کمتر باشد. از این رو، اندازه حرکت کل بعد از برخورد کمتر از اندازه حرکت فوتون خواهد بود، مگر اینکه ذره‌ای حضور داشته باشد که مقداری از اندازه حرکت فوتون را با خود حمل کند. ولی می‌توان اطمینان داشت که مقدار انرژی که توسط ذره سنگین پس‌زن حمل شود آنقدر کوچک خواهد بود که می‌توان آن را از رابطه (۱۸.۴) حذف کرد، زیرا جرم يك ذره سنگین در مقایسه با جرم الکترون یا پوزیترون خیلی بزرگ است.

با استدلال دیگری می‌توان دریافت که فوتون هنگام حرکت در فضای تهی، خود به خود نمی‌تواند به يك زوج الکترون-پوزیترون فروپاشیده شود. برای مثال، فرض می‌کنیم که يك زوج آفریده می‌شود و ما (ناظرها) نسبت به مرکز جرم دستگاه زوج ساکن هستیم. در این صورت اندازه حرکت کل الکترون و پوزیترون صفر است، ولی فوتونی که زوج را تولید می‌کند در این چارچوب مرجع دارای اندازه حرکت غیر صفر خواهد بود، زیرا فوتون در هر چارچوب مرجعی همواره با سرعت c حرکت می‌کند. بنابراین باید قبل از برخورد اندازه حرکت فوتون را داشته باشیم نه اندازه حرکت خالص پس‌از برخورد را. به طور خلاصه، يك فوتون نمی‌تواند خود به خود در فضای تهی به يك زوج الکترون-پوزیترون واپاشیده شود.

شکل ۱۶.۴ يك ترسیم طرح‌وار از تولید زوج است و شکل ۱۷.۴ عکسی از اتاقک ابری را نشان می‌دهد که نمایشگر آفرینش زوجهای الکترون-پوزیترون است. شکل ۱۷.۴ نشان می‌دهد که فوتونهای با انرژی بالای پرتو γ ، که وارد سطح (قسمت بالای، عکس) می‌شوند، به هسته‌های سرب نزدیک و نابود می‌شوند و زوجهای الکترون-پوزیترون آفریده می‌شوند. به دلیل اثرهای یونشی که ذرات باردار هنگام حرکت خود در گاز تولید می‌کنند، مسیر آنها قابل رؤیت است؛ مسیر مربوط به ذرات با بار مخالف (تقریباً با انرژیهای جنبشی یکسان*) انحناهای مخالف هم را نشان می‌دهند، این ذرات توسط يك میدان مغناطیسی یکنواخت در قوسهای دایره‌ای با جهتهای مخالف منحرف می‌شوند.

اگر انرژیهای جنبشی الکترون و پوزیترون اندازه‌گیری شوند، با استفاده از رابطه

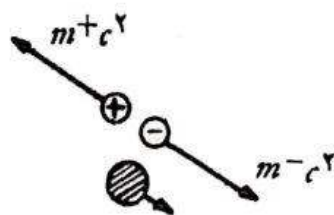
* دقیقتر گفته باشیم، به طور متوسط، انرژی جنبشی پوزیترون از الکترون بیشتر است، زیرا پوزیترون به وسیله هسته‌های با بار مثبت دفع و الکترون توسط این هسته‌ها جذب می‌شود.

@Uc_book



قبل از تولید زوج

(الف)



بعد از تولید زوج

(ب)

شکل ۱۶.۴ نمودار طرح وار تولید زوج.

(۱۸.۴) می‌توان انرژی فوتونی را که يك زوج الکترون-پوزیترون تولید می‌کند محاسبه کرد. در صورتی که میدان مغناطیسی B و شعاع انحنای r مسیرها اندازه گرفته شوند، این انرژی‌ها را می‌توان به کمک عکسی مانند شکل ۱۷.۴ تعیین کرد. اندازه حرکت نسبی p هر ذره از رابطه زیر محاسبه می‌شود

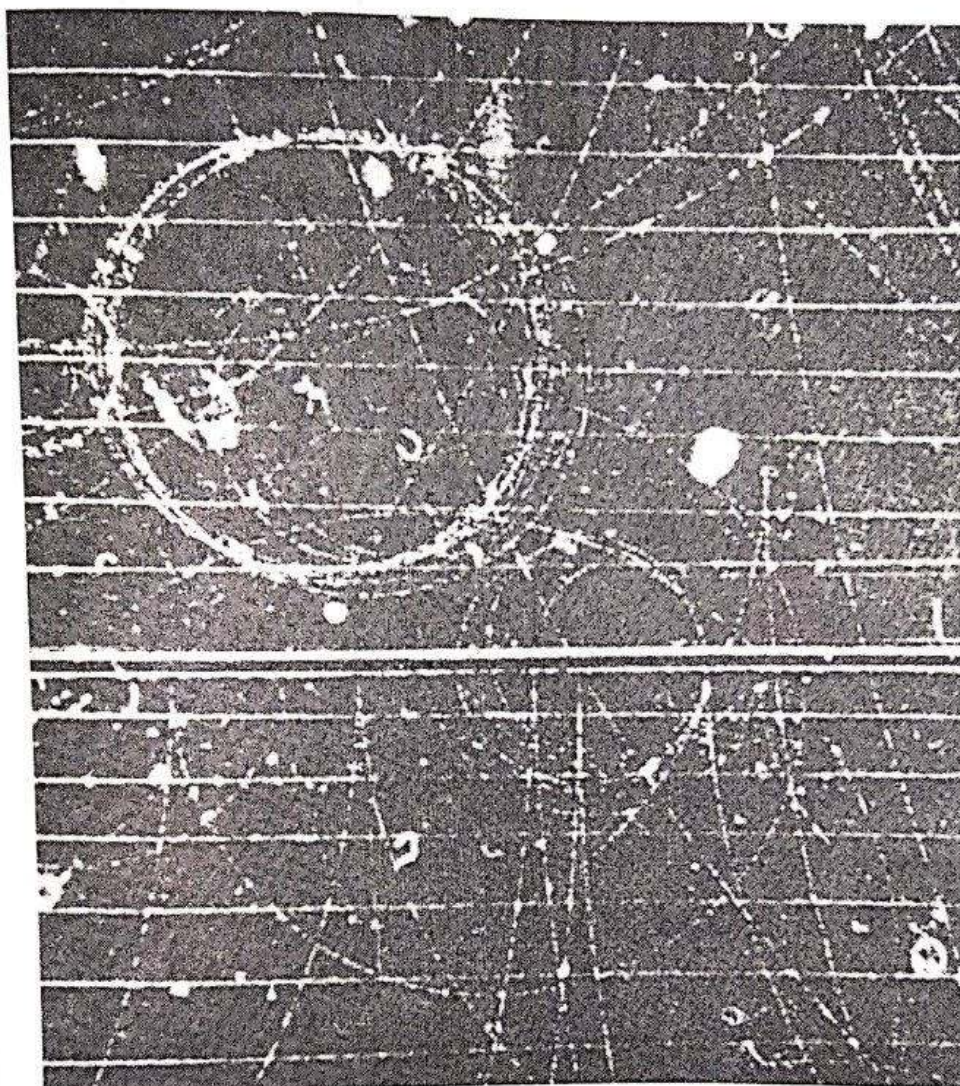
$$p = mv = QBr \quad (۹.۳)$$

و آنگاه انرژی کل E یا انرژی جنبشی $E - E_0$ ذره را با استفاده از معادله (۱۴.۳)، یعنی $E^2 = E_0^2 + (pc)^2$ می‌توان محاسبه کرد.

وجود پوزیترون‌ها در سال ۱۹۲۸/۱۳۰۷ توسط دیراک^۱ به‌طور نظری پیشگویی شد. چهار سال بعد، اندرسون^۲ در جریان مطالعاتش روی تابش کیهانی پوزیترون را مشاهده و مشخص کرد. کمی بعد از آن به‌وسیله شتاب‌دهنده‌های ذره که با چند MeV انرژی کاری کردند زوجهای الکترون-پوزیترون در آزمایشگاه تولید شدند؛ امروزه مشاهده زوجهای الکترون-پوزیترون در پرمکنش فوتونهای با انرژی بالا و ماده يك پدیده عادی به‌شمار می‌روند در سال

1. P. A. M. Dirac

2. C.D. Anderson



شکل ۱۷.۴ عکس اتاقک ابری که آفرینش زوجهای الکترون-پوزیترون را نشان می‌دهد. فوتونهایی که انرژی آنها تقریباً 200 MeV است و هیچ ردی از خود باقی نمی‌گذارند، از بالای شکل پدیدار می‌شوند. بعضی فوتونها نابود می‌شوند و در برگ نازک سربی افقی زوجهای الکترون-پوزیترون آفریده می‌شوند؛ در بالای این برگ سربی و به طرف راست، یک زوج، که به وسیله برخورد یک فوتون و یک مولکول گاز تولید شده است وجود دارد. میدان مغناطیسی خارجی، با چگالی شار 1 Wb/m^2 ، مسیر الکترونها و پوزیترونها را به انحناهای مخالف یکدیگر خم می‌کند.

۱۹۵۵/۱۳۳۴ برای نخستین بار زوجهای پروتون-پادپروتون و نوترون-پادنوترون در آزمایشگاه آفریده شدند. انرژیهای آستانه آنها چندین GeV است (جرمهای پروتون و نوترون تقریباً برابر با 1 GeV هستند و بنا بر این به ماشینهای شتابدهنده با انرژی خیلی بالا نیاز است). **نابودی زوج.** نابودی زوجهای ذره-پاد ذره همراه با آن آفرینش فوتونها عمل عکس تولید زوج است. نابودی ماده و آفرینش انرژی الکترومغناطیسی را برای حالتی

در نظر می‌گیریم که الکترون و پوزیترون نزدیک به هم و اساساً ساکن باشند. در آغاز اندازه حرکت خطی کل این دو ذره صفر است؛ بنابراین، وقتی این دو ذره به هم می‌پیوندند و نابود می‌شوند یک تک فوتون نمی‌تواند آفریده شود، زیرا این عمل باعث نقض بقای اندازه حرکت می‌شود. ولی، اگر دو فوتون آفریده شوند که با اندازه حرکت‌های مساوی و درجه‌های مخالف حرکت کنند، اندازه حرکت می‌تواند پایسته بماند. چنین زوج فوتون‌هایی دارای بسامدها و انرژی‌های یکسان‌اند؛ شکل ۱۸.۴ را ببینید. (در واقع، ۳ یا چند فوتون می‌توانند آفریده شوند ولی با احتمالی به مراتب کمتر از آفرینش دو فوتون. همین‌طور، وقتی چندین زوج الکترون-پوزیترون در نزدیکی یک هسته سنگین نابود می‌شوند تعداد کمی از این نابودیها یک تک فوتون تولید خواهند کرد.)

بقای انرژی ایجاب می‌کند که

$$m_0^+ c^2 + m_0^- c^2 = h\nu_1 + h\nu_2$$

که در آن الکترون و پوزیترون در آغاز ساکن فرض شده‌اند. ولی $m_0^+ = m_0^-$ ، و با استفاده از بقای اندازه حرکت، $\nu_1 = \nu_2 = \nu_{\min}$ است؛ بنابراین

$$2h\nu_{\min} = 2m_0 c^2$$

$$h\nu_{\min} = m_0 c^2 \quad (19.4)$$

$$m_0^+ c^2$$

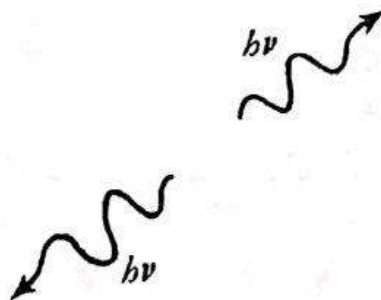
⊕

$$m_0^- c^2$$

⊖

قبل از نابودی

(الف)



بعد از نابودی

(ب)

شکل ۱۸.۴ نابودی زوج و آفرینش دو فوتون.

چون انرژی کمینه مورد نیاز برای آفرینش يك الكترون $(h\nu = m_0c^2)$ برابر $MeV 51$ ده است، این مقدار همچنین انرژی فوتونی است که آفریده می‌شود.

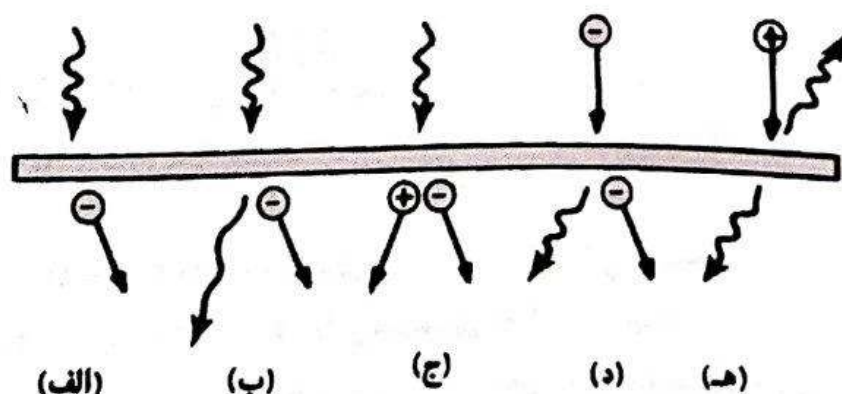
سرنوشت نهایی پوزیترون‌ها، نابودی است. وقتی يك پوزیترون با انرژی بالا ظاهر می‌شود (مثلاً در تولید زوج) هنگام عبور از ماده، در اثر برخوردها، انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد و سرانجام با سرعت پایین حرکت می‌کند. آنگاه این پوزیترون با يك الكترون ترکیب می‌شود و تشکیل يك دستگاه مقید به نام اتم پوزیترونیم می‌دهد که خیلی سریع $(10^{-10}s)$ به دوفوتون با انرژی مساوی وا می‌پاشد. از این رو، مرگ يك پوزیترون با ظهور دو کوانتوم نابودی یا دوفوتون، که انرژی هریك $MeV (1/2)$ است، خبر داده می‌شود. فناپذیری پوزیترون‌ها به خاطر ناپایداری ذاتی نیست بلکه به خاطر احتمال زیاد برخورد آنها و نابودیهای بعدی آنها با الكترون‌هاست.

در آن قسمت از جهان که ما زندگی می‌کنیم فزونی الكترون‌ها، پروتون‌ها و نوترون‌ها برقرار است؛ وقتی پاد ذره‌های این ذرات آفریده می‌شوند به سرعت با آنها در فرایندهای نابودی ترکیب می‌شوند. می‌توان فرض کرد که بخشی از جهان وجود دارد که در آن پوزیترون‌ها، پادپروتون‌ها و پادنوترون‌ها غلبه دارند، هرچند این امر در حال حاضر فقط يك حدس است.

تولید و نابودی زوج مثالهای کاملاً برجسته‌ای از هم‌ارزی جرم-انرژی‌اند. این مثالها نظریه نسبیت را به طور غیر قابل انکاری تأیید می‌کنند.

۶.۴ برهم‌کنشهای فوتون-الكترون

شکل ۱۹.۴ برهم‌کنشها یا برخوردهای مهم الكترون-فوتون را که در این فصل بررسی



شکل ۱۹.۴ برهم‌کنشهای فوتون-الكترون (الف) اثر فوتوالکتریک، (ب) اثر کامپتون، (ج) تولید زوج، (د) تابش ترمزی، و (ه) نابودی زوج.

کردیم به طور خلاصه نشان می‌دهد. در هر مثال يك فوتون، الکترون، یا پوزیترون به قطعه‌ای (بره‌ای) از ماده نزدیک می‌شود، برخوردی رخ می‌دهد، و يك یا چند ذره گسیل می‌شوند. به اختصار خصوصیات برجسته هریک از این برهم کنشها را به ترتیبی که در شکل نمایش داده شده است خلاصه می‌کنیم.

اثر فوتوالکتریک. يك فوتون با يك الکترون مقید برخورد می‌کند و ناپدید می‌شود؛ الکترون از جای خود بیرون رانده می‌شود.

اثر کامپتون. يك فوتون با يك الکترون آزاد برخورد می‌کند، و باعث آفرینش يك فوتون دیگر با انرژی پایینتر و پس‌زدن الکترون می‌شود.

تولید زوج. يك فوتون در مجاورت يك ذره سنگین نابود می‌شود، و يك زوج الکترون-پوزیترون آفریده می‌شود.

تابش قمری. يك الکترون در مجاورت يك ذره سنگین منحرف می‌شود، و يك فوتون آفریده می‌شود.

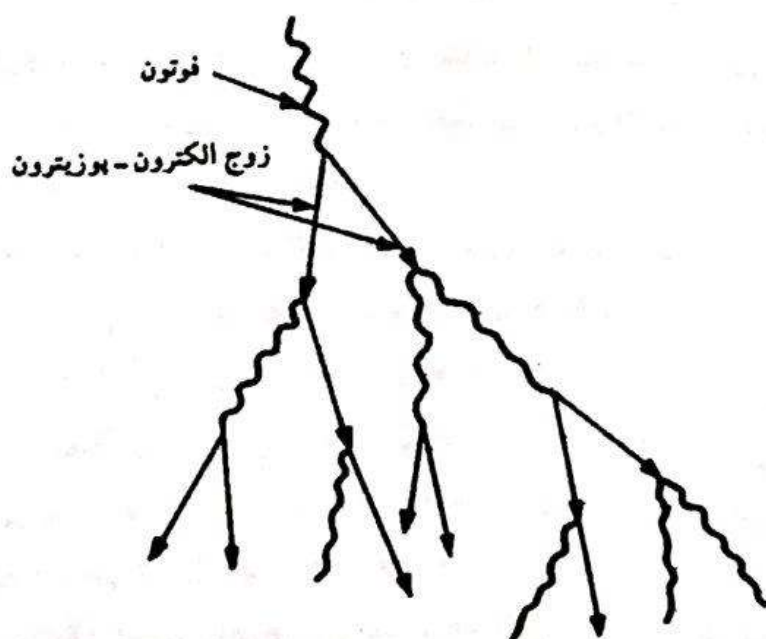
نابودی زوج. يك پوزیترون با يك الکترون ترکیب می‌شود، و يك زوج فوتون تولید می‌شود.

همان‌طور که در بخش ۱۰۱۱ خواهیم دید، می‌توان نشان داد که تمام این برهم-کنشهای فوتون-الکترون مثالهایی از فقط يك برهم کنش اساسی بین ذره میدان الکترومغناطیسی (فوتون) و ذره‌ای که بتواند میدان الکترومغناطیسی (يك الکترون یا هر ذره با بار الکتریکی دیگری) بیافریند هستند. می‌توان نشان داد که حتی نیروی الکتریکی معمولی (یا کولنی) بین ذرات با بار الکتریکی و، در حقیقت، تمام اثرهای الکترومغناطیسی دیگر، اساساً مبادله فوتونهای (مجازی) بین ذرات باردارند.

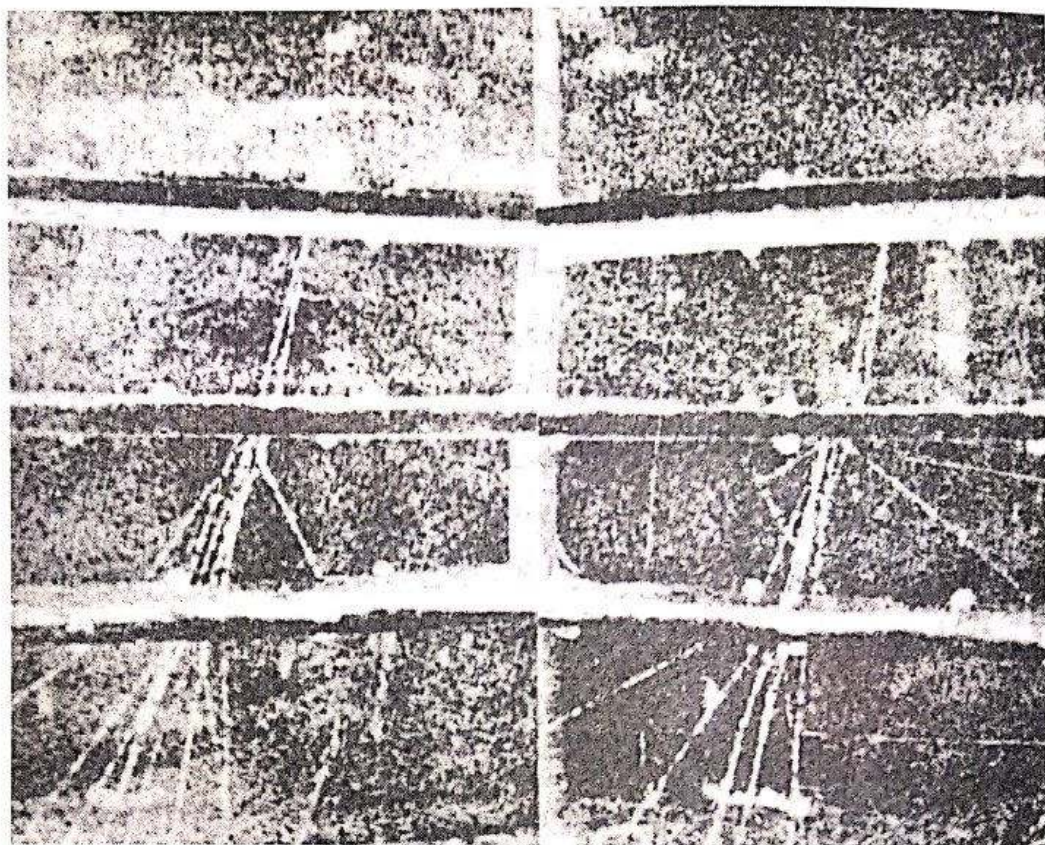
توجه کنید که با کاربرد قوانین بقای انرژی، اندازه حرکت، و بار الکتریکی و با فرض وجود فوتونهای با انرژی $h\nu$ و اندازه حرکت h/λ ، خصوصیات اصلی برخوردهای فوتون-الکترون، به سادگی به دست آمدند. در هیچ حالتی به جزئیات برهم کنش نپرداختیم. از این گذشته، احتمال وقوع هیچ يك از این فرایندها را محاسبه نکردیم. برای مثال، در اثر کامپتون، می‌توان طول موج فوتونی را که در جهت بخصوصی منحرف شده است پیشگویی کرد، اما نمی‌توان جهت هر فوتون بخصوصی را پیشگویی کرد. با وجود این می‌توان با دقت زیاد احتمالات وقوع يك برهم کنش فوتون-الکترون را توسط روشهای الکترودینامیک کوانتومی محاسبه کرد.

ذرات بارداری با انرژی خیلی بالا (با حداقل 1.02 MeV) از تابش کیهانی به جرمین

وارد می‌شوند. این ذرات می‌توانند توالی کاملی از برهم‌کنشهای الکترون-فوتون را به شرح زیر تولید کنند. برخورد بین يك ذره پرتوکیهانی و يك هسته می‌تواند از طریق قابض قهرزی، يك پرتو γ با انرژی بالا تولید کند. این پرتو γ ممکن است با عبور از مجاورت يك هسته نابود شود و بنابراین يك زوج الکترون-پوزیترون تولید کند. این ذرات باردار آفریده شده، که دارای انرژیهای جنبشی زیادی اند، در سر راهشان به سطح زمین ممکن است در روپارویی با هسته‌ها با آنها برخورد کنند و منحرف شوند؛ این ذرات پس از برخورد با واسطه شتاب خود فوتونهایی با انرژی بالا توسط فرایند قابض قهرزی تابش می‌کنند. ممکن است پوزیترون با الکترون ترکیب شود، هردو نابود و دو فوتون آفریده شوند. فوتونهای ثانوی می‌توانند دارای انرژیهای بیش از 1.02 MeV باشند و بنابراین ممکن است زوج الکترونهای بیشتری تولید کنند. از این رو، با وقوع مکرر تولید زوج، نابودی زوج، قابض قهرزی، و تا اندازه کمتری برخوردهای کامپتون و فوتوالکتریک، يك بادش آبخادی از الکترونها، پوزیترونها، و فوتونها تولید می‌شود، انرژی فوتون اولیه کاهش می‌یابد و بین ذرات بسیاری پاشیده می‌شود. این بارش عملاً هنگامی باز می‌ایستد که تولید زوج از نظر انرژی غیرممکن باشد. نموداری از برهم‌کنشهای فوتون-الکترون در شکل ۲۰.۴ نمایش داده شده است؛ عکسهای اتاقک ابری، مثل عکسهای شکل ۲۱.۴، خصوصیات اصلی بارشهای آبخادی را تأیید کرده‌اند.



شکل ۲۰.۴ نمایش طرح‌وار يك بارش آبخادی.



شکل ۲۱.۴ عکسهای اتاقک ابری فوتونی که يك بارش آبشاری را راه انداخته است. به منظور تحلیل سه بعدی ردها این عکسها به طور همزمان با دو دوربین گرفته شده اند. يك فوتون با انرژی 700 MeV (که هیچ ردی تولید نمی کند) از بالا وارد می شود و يك زوج پوزیترون-الکترون در بالاترین صفحه نازك سربی افقی آفریده می شود. در صفحه های پایینتر، فوتونها به وسیله برخورد های تابش ترمزی آفریده می شوند و این فوتونها زوجهای بیشتری می آفرینند، که منجر به بارشی از الکترونها، پوزیترونها، و فوتونها می شود.

۲.۴ درآشامی فوتونها

سه فرایند مهمی که قادرند فوتونها را از يك باریکه تابش الکترومغناطیسی جدا کنند عبارتند از اثر فوتوالکتریک، اثر کامپتون، و تولید زوج. این فرایندها به صورت برهم کنشهای فوتون-الکترون در شکل ۱۹.۴ الف تا ج نمایش داده شده اند. در هر يك از این فرایندها از باریکه ای که به سوی جلو در حرکت است يك فوتون جدا می شود و يك الکترون پدیدار می شود. به علاوه، هر فرایند فقط هنگامی رخ می دهد که اتمهایی موجود باشند تا فوتونهای نزدیک شوند و بتوانند با آنها برخورد و برهم کنش کنند. این اتمها الکترونها را برای اثر فوتوالکتریک و الکترونها را تقریباً آزاد را برای اثر کامپتون

وهسته‌های اتمی را برای تولید زوج فراهم می‌کنند. در این صورت، شدت باریکه فوتونی فقط تا حدی که فوتونها با اتمها رو به‌رو می‌شوند و با آنها برهم‌کنش می‌کنند کاهش می‌یابد (فرایند دیگری وجود دارد که فعلاً از بیان آن صرف‌نظر می‌کنیم؛ در این فرایند يك فوتون توسط يك ماده، بسته به اینکه انرژی آن چقدر باشد، به‌طور انتخابی در آشامیده می‌شود و در نتیجه انرژی داخلی کل اتم در آشام افزایش می‌یابد).

در هر يك از این سه برهم‌کنش، الکترونی که دارای انرژی جنبشی است به‌عنوان یکی از ذرات خارج‌شونده پدیدار می‌شود. از این حقیقت می‌توان در دستگاههای آشکارساز فوتون استفاده کرد. الکترونهای سریع یونشی تولید می‌کنند که می‌تواند از لحاظ الکتریکی قابل اندازه‌گیری باشد؛ از این رو شدت فوتونهای با بسامد بالا، مانند پرتوهای x و پرتوهای γ را که چشم به آنها حساس نیست می‌توان با اثرهای یونشی اندازه‌گیری کرد. در فصل ۸ اندازه‌گیریهای یونش را مورد بحث قرار خواهیم داد؛ در اینجا به در آشامی تابش الکترومغناطیسی در ماده می‌پردازیم.

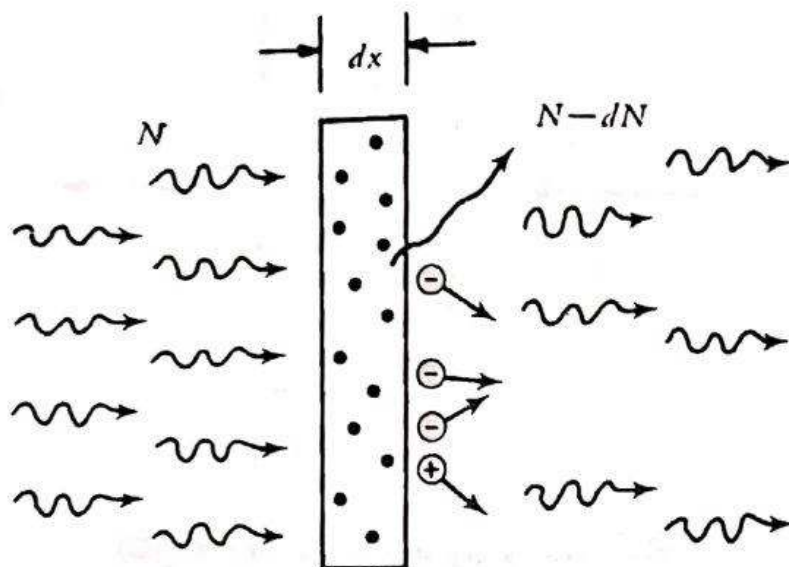
شدت I تابش الکترومغناطیسی به‌صورت انرژی که در واحد زمان از واحد سطح، عمود بر جهت انتشار عبور می‌کند، تعریف می‌شود. این شدت، بر حسب فوتونهای يك باریکه تکفام، عبارت است از انرژی $h\nu$ يك تك فوتون ضرب در تعداد فوتونهایی که در واحد زمان از واحد سطحی عمود بر جهت باریکه می‌گذرند

$$\text{شدت يك باریکه فوتونی} = \frac{\text{تعداد فوتونها}}{\text{زمان} \times \text{سطح}} \times \text{انرژی فوتون}$$

شار فوتونی باریکه‌ای از تابش الکترومغناطیسی تکفام به‌صورت تعداد فوتونهای عبوری از واحد سطح در واحد زمان تعریف می‌شود. شار فوتونی را با N نمایش می‌دهیم؛ در این صورت

$$I = (h\nu)N \quad (20.4)$$

وقتی يك باریکه فوتونی به ماده‌ای برخورد می‌کند شار فوتونی N کاهش می‌یابد؛ زیرا فوتونها یا از باریکه جدا می‌شوند یا از راستای جلویی منحرف می‌شوند. در شکل ۲۲.۴ در آشامی فوتونها توسط يك ماده به‌طور طرح‌وار نشان داده شده‌است. واضح است که هرچه تعداد اتمهایی که باریکه با آنها رو به‌رو می‌شود زیادتر باشد و بنا بر این هرچه در آشام ضخیمتر باشد احتمال اینکه يك فوتون از باریکه بیرون کشیده شود زیادتر خواهد بود. در این شکل، فوتونهای با شار N ، بروی در آشام نازکی به ضخامت dx فرود می‌آیند؛ و فوتونهایی با شار $N - dN$ از در آشام در راستای جلو خارج می‌شوند. در این صورت،



شکل ۲۲.۴ نمایش طرح وار درآشامی فوتونها توسط يك جسم مادی.

تعداد فوتونهایی که در واحد زمان به وسیله واحد سطح درآشام بیرون کشیده می شوند برابر dN است. وقتی تعداد فوتونهای فرودی افزایش می یابد، تعداد فوتونهایی که در روبارویی با اتمهای موجود در درآشام بیرون کشیده می شوند، به همان نسبت افزایش می یابد؛ یعنی، dN با N متناسب است. به علاوه، چون تعداد اتمهایی که با باریکه رو به رو می شوند مستقیماً با ضخامت درآشام متناسب است، dN با dx نیز متناسب خواهد بود. بنا براین

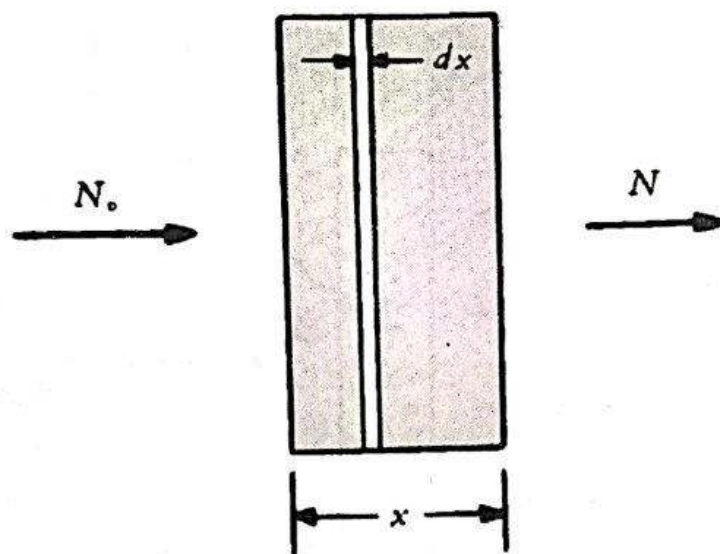
$$dN = -\mu N dx$$

که در آن ثابت تناسب μ ، ضریب درآشامی نامیده می شود. علامت منها به این خاطر است که با افزایش x ، N کاهش پیدا می کند. با مرتب کردن مجدد جملات و انتگرال گیری بر حسب x از ضخامت صفر تا ضخامت معین x (شکل ۲۳.۴) و انتگرال گیری بر حسب N از N_0 (شار فرودی روی درآشام) تا N (شار خارج شونده از درآشامی به ضخامت x) خواهیم داشت

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\mu \int_0^x dx$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\mu x$$

$$N = N_0 e^{-\mu x} \quad (۲۱.۲)$$



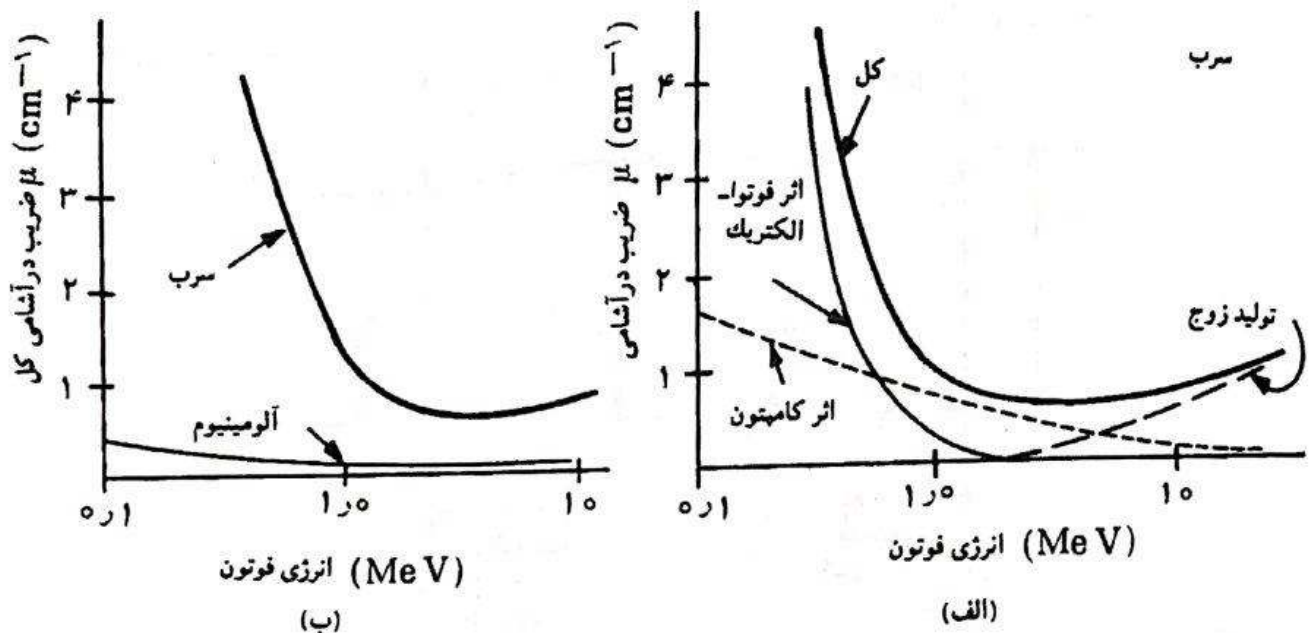
شکل ۲۳.۴ تغییر شار فوتونی در یک درآشام.

با استفاده از رابطه (۲۵.۴)، می‌توان روابط (۲۱.۴) را چنین نوشت

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (22.4)$$

که در آن $I_0 = (h\nu)N_0$ شدت فرودی روی درآشام و $I = (h\nu)N$ شدت درفاصله x از سطح جلویی است. این معادله نشان می‌دهد که شدت تابش الکترومغناطیسی با عبور از یک درآشام به‌طور نمایی افت می‌کند. درآشامی، با افزایش ضخامت x درآشام یا با زیاد شدن ضریب درآشامی μ افزایش می‌یابد؛ همچنین از رابطه (۲۲.۴) درمی‌یابیم که وقتی $\mu x = 1$ ، یا $x = 1/\mu$ باشد، $I = I_0/e$ خواهد بود. بنابراین، کمیت $1/\mu$ نمایشگر ضخامتی از درآشام است که به‌ازای آن شدت I برابر $1/e$ ، یا ۳۷ درصد شدت فرودی I_0 ، می‌شود.

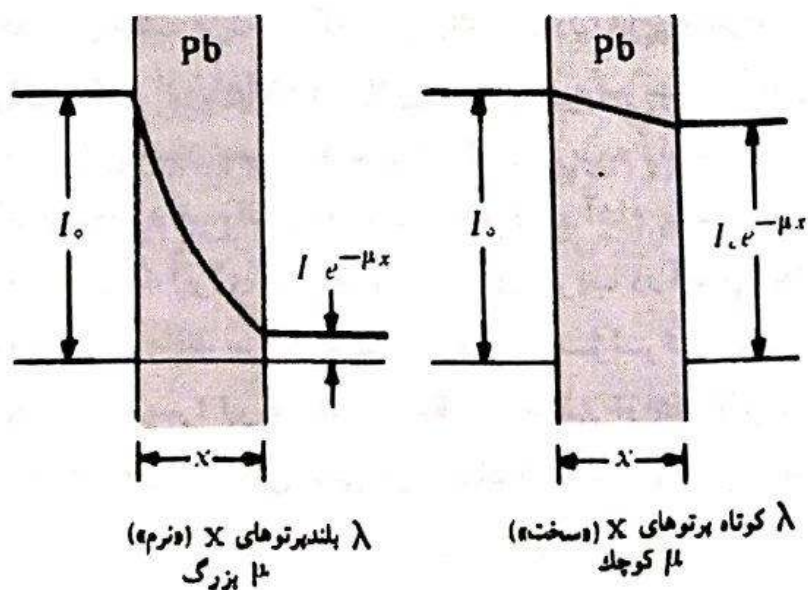
برای یک انرژی بخصوص فوتون و برای یک ماده درآشام بخصوص، ضریب درآشامی μ ثابتی است که بعد از آن عکس طول است. ولی مقدار آن از ماده‌ای به‌ماده دیگر تغییر می‌کند، و همچنین برای یک ماده درآشام مفروض، ضریب درآشامی به انرژی (یا بسامد) تابشی بستگی دارد. شکل ۲۴.۴ ضریبهای درآشامی آلومینیوم و سرب را به‌صورت تابعی از انرژی فوتون (در مقیاس لگاریتمی) نشان می‌دهد. برای فوتونهای با انرژی پایین، که جدا شدن آنها اصولاً از طریق فرایند اثر فوتوالکتریک رخ می‌دهد، ضریب درآشامی μ بزرگ است. در انرژیهای متوسط، که برخورد های کامپتون در درآشامی فوتونها مؤثرترین هستند، ضریب درآشامی کوچکتر است. ضریب درآشامی در نزدیکی چند MeV به کمینه می‌رسد و سپس مجدداً با افزایش انرژی فوتون زیاد می‌شود. کمی



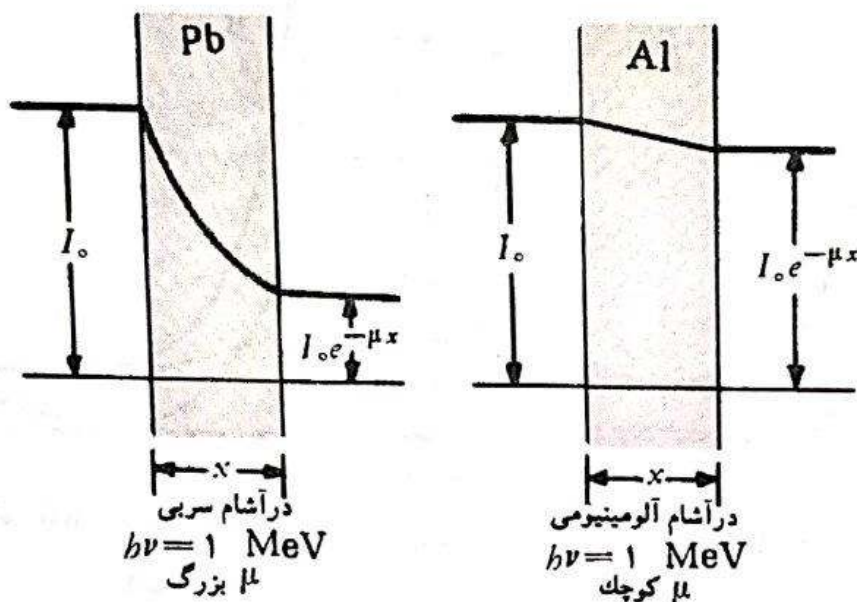
شکل ۲۴.۴ ضریبهای درآشامی به صورت تابعی از انرژی فوتون (الف) برای سرب با چندین سهم در ضریب درآشامی کل و (ب) برای سرب و آلومینیوم.

قبل از مقدار کمینه، در 1.02 MeV (که طول موج فوتون برابر 1240 eV است)، آستانه تولید زوج رخ می‌دهد و در انرژیهای بسیار بالا، که μ تا حدودی افزایش یافته است، تولید زوج غالب می‌شود.

شکلهای ۲۵.۴ و ۲۶.۴ چگونگی تغییر درآشامی تابش الکترومغناطیسی با انرژی



شکل ۲۵.۴ درآشامی نمایی پرتوهای x نرم و سخت توسط یک درآشام سربی.



شکل ۲۶.۴ در آشامی نمایی فوتونهای 1 MeV به وسیلهٔ سرب و به وسیلهٔ آلومینیوم.

فوتونها و با نوع ماده در آشام را نشان می‌دهند. این شکلهای شدت باریکهٔ فرودی، شدت باریکه در عمقهای گوناگون نفوذ در در آشام، و شدت باریکهٔ خارج شونده را نشان می‌دهند. شکل ۲۵.۴ در آشامی پرتوهای x با طول موج بلند (که به طور محسوس در ضخامتهای متوسط سرب در آشامیده می‌شوند، و بنابراین نرم نامیده می‌شوند) و در آشامی پرتوهای x با طول موج کوتاه یا سخت (که فقط به مقدار جزئی در همان ضخامت ضعیف می‌شوند) را نشان می‌دهد. این مطلب می‌رساند که برای يك ماده در آشام بخصوص و برای فوتونهای نسبتاً کم انرژی (کمتر از ۴ MeV) با افزایش انرژی، ضریب در آشامی کاهش می‌یابد. شکل ۲۶.۴ در آشامی همان پرتوهای x را در سرب و آلومینیوم که دارای ضخامت یکسان اند نشان می‌دهد، واضح است که سرب به عنوان در آشام پرتو x خیلی مؤثرتر است؛ و بنابراین سرب برای يك انرژی معین فوتون، دارای ضریب در آشامی به مراتب بزرگتری است. در آشامی موادی مانند سرب نسبت به مواد سبک مؤثرتر است، حقیقتی که مبنای عکاسی پرتو x است، زیرا تیرگی شیرابهٔ عکاسی مقیاسی از شدت پرتو x است، و دلیل وجود تصویرها، خواص در آشامی نسبی مواد سبک و سنگین گوناگون است.

خلاصه

دو نوع کمیت فیزیکی را می‌توان از هم تمیز داد: کمیت‌هایی با گسترهٔ پیوسته‌ای از

مقادیر و کمیت‌هایی با مجموعه‌ای از مقادیر گسسته یا کوانتیده. نظریه کوانتومی، که در سال ۱۹۰۵/۱۲۷۹ به وسیله ماکس پلانک فرموله شد، نشان داده است که کمیت‌های زیادی که ظاهراً دارای مقادیر پیوسته‌اند در واقع فقط دارای مقادیر گسسته‌اند.

تابش الکترومغناطیسی تکفام را وقتی که با ماده برهم‌کنش می‌کند، باید متشکل از فوتونها در نظر گرفت، که هر فوتون دارای انرژی و اندازه حرکت گسسته است

$$E = h\nu \quad \text{و} \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad (۳.۴) \text{ و } (۱۰.۴)$$

رابطه مناسب بین انرژی و طول موج فوتون عبارت است از

$$E = \frac{۰.۵۱۱۲۴ \text{ MeV} \cdot \text{\AA}}{\lambda} \quad (۷.۴)$$

برهم‌کنش‌های اساسی فوتون-ذره به شرح زیرند.

اثر فوتوالکتریک: انتقال کامل انرژی الکترومغناطیسی به الکترون مقید

$$h\nu = E_b + (E - E_0) \quad (۶.۴)$$

که در آن E_b انرژی بستگی یا تابع کار الکترون است.

تابش ترمزی: انتقال جزئی یا کامل انرژی جنبشی يك ذره به انرژی الکترومغناطیسی. وقتی الکترون در يك تك برخورد به حال سکون درآید فوتون‌هایی با بسامد بیشینه (طول موج کمینه) تولید می‌شوند

$$eV = E_k = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \quad (۹.۴)$$

اثر کامپتون: انتقال جزئی انرژی الکترومغناطیسی به انرژی جنبشی يك ذره. وقتی فوتونی به طول موج λ با ذره (تقریباً) آزادی که اساساً ساکن است برهم‌کنش می‌کند، يك فوتون تحت زاویه θ خارج می‌شود (پراکندگی) و ذره با انرژی جنبشی E_k پس‌زده می‌شود

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta) \quad (۱۵.۴)$$

$$E_k = h\nu \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} \quad (۱۶.۴)$$

که در آن m_0 جرم سکون ذره پس‌زده است.

تولید و نابودی زوج: تبدیل کامل انرژی الکترومغناطیسی به انرژی سکون و انرژی جنبشی ذرات آفریده شده، و برعکس

$$h\nu = 2m_0c^2 + (E_k^+ + E_k^-) \quad \text{تولید زوج}$$

$$(m^+ + m^-)c^2 = 2h\nu \quad \text{نابودی زوج}$$

شدت يك باریكه فوتونی تكفام برابر حاصلضرب انرژی فوتون در شار فوتونی N است

$$I = (h\nu)N \quad (20.4)$$

در موادی به ضخامت x ، در آشامی تابش الکترومغناطیسی تکفام (به وسیله فرایندهای اثر فوتوالکتریک، اثر کامپتون، و تولید زوج) از رابطه

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (22.4)$$

پیروی می کند، که در آن μ ضریب در آشامی است و مقدار آن به طبیعت در آشام و به انرژی فوتون بستگی دارد.

مسائل

۱. طول موج آستانه برای گسیل فوتونی الکترونها از سطح کلسیم، برابر $3840 \text{ \AA}$ است. (الف) انرژی بستگی، یا تابع کار ϕ (بر حسب الکترون ولت) يك الکترون در سطح کلسیم را محاسبه کنید. (ب) وقتی نوری به طول موج $2000 \text{ \AA}$ بر این سطح برخورد کند، انرژی جنبشی بیشینه فوتوالکترونی که از این سطح گسیل می شود (بر حسب الکترون ولت) چقدر است؟

۲. (الف) وقتی از نور فرابنفش، به طول موج $1550 \text{ \AA}$ ، برای گسیل فوتوالکترونها از سطح فلز روی ($\phi = 4.72 \text{ eV}$) استفاده شود سرعت بیشینه فوتوالکترونها چقدر خواهد بود؟ (ب) آیا این جواب، فرض $E_{k, \max} = (1/2)mv_{\max}^2$ را تأیید می کند؟

۳. وقتی نور تکفام به طول موج $4046 \text{ \AA}$ ، بر سطح فلز معینی می تابد، پر انرژیترین فوتوالکترونها توسط پتانسیل ترمز کننده 1.60 V متوقف می شوند؛ وقتی طول موج $5769 \text{ \AA}$ باشد، پتانسیل متوقف کننده 4.5 V خواهد بود. با فرض اینکه h و e مجهول اند، (الف) تابع کار (بر حسب eV) این گسیل دهنده فوتوالکترونها چقدر است؟ (ب) مقدار h/e حاصل از این داده ها چقدر است؟

۴. يك فوتون به طول موج $775 \text{ \AA}$ به طور عمودی بر يك هدف نیکلی برخورد می کند و از سطح آن يك فوتوالکترن آزاد می کند، این فوتوالکترن در خلاف جهت

فوتون فرودی حرکت می‌کند. تابع کار نیکل 5.0eV است. فرض کنید که اساساً تمام انرژی فوتون به الکترون داده می‌شود. (الف) سرعت بیشینه الکترون آزاد شده را حساب کنید. (ب) با استفاده از قانون بقای اندازه حرکت، اندازه حرکت منتقل شده به هدف را پیدا کنید. (ج) جرم این هدف 100g است؛ مطلوب است محاسبه کسری از انرژی فوتون که به هدف داده می‌شود. این محاسبه آن فرض اولیه را که می‌گوید در اثر فوتوالکتریک عملاً تمام انرژی فوتون منتقل می‌شود، تأیید می‌کند.

۵. نوری به شدت 10^{-10}W/m^2 به طور عمود بر سطح نقره، که به ازای هر اتم يك الکترون آزاد دارد، فرود می‌آید. اتمها تقريباً به اندازه $2.6\text{\AA}$ از یکدیگر فاصله دارند. تابش فرودی را به طور کلاسیکی (به صورت امواج) بررسی کنید و فرض کنید که انرژی به طور یکنواخت بر روی این سطح توزیع شده است و تمام نور به وسیله الکترونهاى سطح درآشامیده می‌شود. (الف) در يك ثانيه هر الکترون آزاد چقدر انرژی به دست می‌آورد؟ (ب) انرژی بستگی يك الکترون در سطح، 4.8eV است؛ پس از تاباندن باریکه نور چه مدت باید صبر کرد تا هر الکترون برای غلبه بر انرژی بستگی خود به اندازه کافی انرژی کسب کند و به صورت يك فوتوالکترون آزاد شود؟ این محاسبات را با نتایج تجربی مقایسه کنید.

۶. فوتونی به يك به اصطلاح «تابشگر» سربی (که فوتوالکترون تابش می‌کند) وارد می‌شود و با يك الکترون داخلی که با انرژی بستگی 89.1keV به اتم سرب مقید است برهم کنش می‌کند. آنگاه فوتوالکترون آزاد شده به میدان مغناطیسی یکنواختی وارد می‌شود، و B برابر 10^{-2}Wb/m است (که در آن $\mathcal{H}$ شعاع انحنای الکترون در میدان مغناطیسی B است). (الف) اندازه حرکت این فوتوالکترون (بر حسب MeV/c) چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی این فوتوالکترون چقدر است؟ (ج) انرژی فوتون فرودی چقدر است؟

۷. اثر فوتوالکتریک با يك الکترون آزاد نمی‌تواند رخ دهد. با دانستن این مطلب، نشان دهید که فرایند زیر نمی‌تواند روی دهد: ذره بارداری که در ابتدا در حرکت است خود به خود حرکتش را آهسته می‌کند و متناظر با کاهش انرژی جنبشی خود، يك فوتون گسیل می‌کند. به عبارت دیگر، نشان دهید که يك فوتون نمی‌تواند از يك ذره ای که هیچ ساختار داخلی ندارد و از تأثیر هر جسم مجاور دیگری آزاد است، گسیل شود. (دانهایی: اثر فوتوالکتریک فرضی با يك الکترون آزاد را که نسبت به زمان به عقب می‌رود تصور کنید.)

۸. يك فوتون 3.1×10^{-18} J با اتم هیدروژن ساکنی برخورد می‌کند، و در نتیجه الکترون مقید را آزاد می‌کند (انرژی بستگی برابر 13.6 eV است). فرض کنید که الکترون در همان جهت فوتون فرودی حرکت کند. (الف) انرژی جنبشی الکترون چقدر است. (ب) اندازه حرکت الکترون چقدر است؟ (ج) اندازه حرکت یونهای پس‌زن چقدر است؟ (د) انرژی جنبشی یونهای پس‌زده شده چقدر است؟

۹. (الف) ثابت پلانک h دارای یکای انرژی ضرب‌در زمان است؛ نشان دهید که h دارای یکای اندازه حرکت زاویه‌ای است. (ب) یک موج الکترومغناطیسی با قطبش دایره‌ای و انرژی E دارای اندازه حرکت $L = E/\omega$ است، که در آن ω بسامد زاویه‌ای موج است.* نشان دهید که از دیدگاه نظریه کوانتومی چنین باریکه‌ای شامل فوتونهایی است که اندازه حرکت زاویه‌ای هر يك $h/2\pi$ است. فرمولبندی دیگر $E = h\nu$ با شرط کوانتومی اساسی عبارت است از: هر فوتونی، صرف‌نظر از اینکه بسامد آن چقدر است، دارای همان اندازه حرکت زاویه‌ای با بزرگی $h/2\pi$ است.

۱۰. چشم انسان در تطابق کامل قادر به تشخیص يك فوتونهای نور مرئی است. چشمه نقطه‌ای همسانگردی، که به‌طور یکسان در تمام جهات نور $5000 \text{ \AA}$ را با آهنگ 1 W تابش می‌کند، در چه فاصله‌ای از چشمی که قطر مردمک آن 4 mm است قرار دهیم تا به‌طور متوسط يك فوتون در هر ثانیه به‌شبیکی چشم برسد؟

۱۱. باریکه‌ای یکنواختی از نور نارنجی-قرمز (به‌طول موج $6060 \text{ \AA}$) دارای شدت $50 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$ است. (الف) انرژی يك فوتون با این طول موج را پیدا کنید. (ب) در يك ثانیه چند فوتون از 1 cm^2 از سطح عمود بر این باریکه می‌گذرد؟ (ج) در يك ثانیه چند قله موج از این سطح عبور می‌کند؟

۱۲. يك باریکه تکفام يك جهتی از فوتونها دارای شدت I و بسامد ν است. نشان دهید که چگالی متوسط فوتونها در این باریکه مساوی $I/h\nu c$ است.

۱۳. يك چشمه نقطه‌ای به‌طور پیوسته نور تکفام تابش می‌کند. چگالی فوتونها با فاصله r از چشمه در هر جهت، چگونه تغییر می‌کند؟

۱۴. يك الکترون 200 keV توسط يك اتم مس (به‌جرم 64) که در آغاز ساکن است منحرف می‌شود. در این برخورد يك تك‌فوتون پرتو x آفریده می‌شود، و مشاهده

می‌شود که این فوتون و الکترون منحرف شده، درجهتهای مخالف، که هر دو برجهت الکترون فرودی اولیه عمودند حرکت می‌کنند. (الف) انرژی جنبشی اتم مس پس‌زده چقدر است؟ (ب) انرژی فوتون پرتو X چقدر است؟ (ج) انرژی جنبشی الکترون منحرف شده چقدر است؟

۱۵. الکترون ۱ در اثر اختلاف پتانسیل V از حال سکون شتاب می‌گیرد. الکترون ۲ نیز که تحت تأثیر همین اختلاف پتانسیل از حالت سکون شتاب می‌گیرد، با هدفی برخورد می‌کند و به حال سکون درمی‌آید، و در نتیجه یک تک فوتون آفریده می‌شود. الکترون ۱ دارای اندازه حرکت بیشتری است یا فوتونی که به وسیله الکترون ۲ تولید می‌شود؟

۱۶. (الف) طول موج فوتونی که انرژی آن برابر انرژی یک الکترون 2eV است چقدر است؟ (ب) طول موج فوتونی که اندازه حرکت آن برابر اندازه حرکت یک الکترون 2eV است چقدر است؟

۱۷. (الف) تحت چه اختلاف پتانسیل کمینه‌ای باید الکترون‌ها از حال سکون شتاب بگیرند تا در برخورد به یک هدف، فوتونهایی با اندازه حرکت $10\text{keV}/c$ تولید کنند؟ (ب) تحت چه اختلاف پتانسیلی الکترون‌ها باید از حال سکون شتاب بگیرند تا اندازه حرکت آنها $10\text{keV}/c$ شود؟

۱۸. (الف) انرژی فوتونی را محاسبه کنید که اندازه حرکت آن برابر اندازه حرکت یک الکترون 40eV است. (ب) این تابش در کجای طیف الکترومغناطیسی قرار می‌گیرد؟

۱۹. یک لیزر می‌تواند تب کاملاً تکفامی از تابش الکترومغناطیسی مرئی را که توان آن 20MW است تولید کند. تب در حدود 10ms دوام دارد. فرض کنید طول موج تابش گسیل یافته $6000\text{\AA}$ باشد. (الف) اندازه حرکت کل تب نوری گسیل شده چقدر است؟ (ب) چند فوتون تولید می‌شود؟

۲۰. یک فرستنده رادار تپهای تابش میکروموجی را تولید می‌کند، که توان هر تب 10MW و دوام آن $10\mu\text{s}$ است. طول موج تابش گسیل شده را برابر 10cm اختیار کنید. (الف) اندازه حرکت کل تب رادار گسیل شده چقدر است؟ (ب) در هر تب چند فوتون گسیل می‌شود؟

۲۱. یک موشک فوتونی را به صورت یک چشمه تابش نقطه‌ای به توان 1000MW (احتمالاً چندفام) در نظر بگیرید که در کانون یک بازتابان سهموی قرار دارد (شکل زیر).



شکل مسئله ۲۱

۲۱. نشان دهید نیروی تابشی که توسط تابش گسیل شده به‌موشک وارد می‌شود بین 10^6 N و $3 \times 10^4 \text{ N}$ است.

۲۲. باریکه الکترومغناطیسی تک‌راستایی با شدت 600 W/m^2 بر روی آئینه کاملاً بازتابانی می‌تابد؛ زاویه بین جهت انتشار باریکه و عمود بر آئینه 30° است. بزرگی فشار تابشی وارد بر آئینه چقدر است؟

۲۳. یک چشمه نقطه‌ای همسانگرد 100 kW تابش الکترومغناطیسی، در مرکز یک پوسته کروی کاملاً درآشام قرار دارد. فشار تابشی بر جدار داخلی کره برای چه شعاعی برابر فشار استاندارد جو (10^5 N/m^2) خواهد شد؟

۲۴. شدت تابش خورشیدی در سطح زمین 1400 W/m^2 است. (الف) فشار این تابش در سطح زمین چقدر است؟ (ب) با فرض درآشامی کامل، نیروی کل وارد بر زمین را که ناشی از این تابش خورشیدی است محاسبه کنید (شعاع زمین $6371 \times 10^3 \text{ km}$ است).

۲۵. (الف) باریکه‌ای از فوتونهای تکفام به طول موج $6200 \text{ \AA}$ به یک هدف فلزی برخورد می‌کند. اگر تابش پراکنده نسبت به باریکه فرودی تحت زاویه 90° مشاهده شود، کدام دو طول موج غالب آشکار خواهند شد؟ (ب) چه طول موجهایی تحت زاویه پراکندگی 60° مشاهده می‌شوند؟

۲۶. فوتونهای به طول موج $6200 \text{ \AA}$ توسط الکترونهای آزاد پراکنده می‌شوند. طول موجهای فوتونهای پراکنده‌ای که زاویه پراکندگی آنها (الف) 90° و (ب) 180°

است چقدر است؟ (ج) انرژی انتقال یافته به الکترونهاى آزاد در قسمت الف چقدر است؟ (د) انرژی انتقال یافته به الکترونهاى آزاد در قسمت ب چقدر است؟

۲۷. نشان دهید که در پراکندگی کامپتون، انرژی $h\nu'$ فوتون پراکنده با رابطه زیر به انرژی $h\nu$ فوتون فرودى و به زاویه پراکندگی θ فوتون مربوط مى شود

$$\frac{1}{h\nu'} = \frac{1}{h\nu} + \frac{1 - \cos \theta}{m_0 c^2}$$

که در آن m_0 جرم سکون ذره مادى است که با فوتون فرودى برخورد مى کند.

۲۸. يك فوتون فرودى به وسیله الکترون آزادى که در ابتدا ساکن است پراکنده مى شود. پس از آن فوتون پراکنده مى تواند يك زوج الکترون-پوزیترون تولید کند. نشان دهید که اگر زاویه بین فوتون پراکنده و فوتون فرودى بزرگتر از 60° باشد، انرژی فوتون فرودى هر چقدر بزرگ باشد، فوتون پراکنده نمى تواند يك زوج الکترون-پوزیترون تولید کند.

۲۹. يك الکترون با انرژی 62 keV پس از برخورد به يك هدف مسى به حال سکون در مى آید و يك تك فوتون پرتو x تولید مى کند. آنگاه اين فوتون به يك هدف کربنى وارد و توسط يك الکترون آزاد پراکنده مى شود. انرژی جنبشى بیشینه الکترون پس زده کامپتون چقدر است؟

۳۰. يك باریکه فوتونى تکفام به يك ورقه مسى اصابت مى کند و باعث برخورد های کامپتونى مى شود. معلوم شده است که انرژی جنبشى بیشینه الکترونهاى پس زده برابر 511 MeV است. انرژی فوتونهاى چقدر است؟

۳۱. نشان دهید که در يك برخورد کامپتونى زاویه θ که تحت آن فوتون پراکنده مى شود با رابطه زیر بیان مى شود

$$\cos \theta = 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{h\nu} \right) \frac{E_k / h\nu}{1 - E_k / h\nu}$$

که در آن m_0 جرم سکون و انرژی جنبشى ذره پراکنده و $h\nu$ انرژی فوتون فرودى است.

۳۲. نشان دهید که در پراکندگی کامپتون انرژی جنبشى E_k ذره پراکنده ای به جرم سکون m_0 به صورت زیر به انرژی فوتون فرودى $h\nu$ مربوط مى شود

$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{(h\nu / m_0 c^2) (1 - \cos \theta)}{1 + (h\nu / m_0 c^2) (1 - \cos \theta)}$$

۳۳. برای يك فوتون فرودی با انرژی 51MeV ، چگونگی تغییر انرژی جنبشی E_k الکترون پس‌زده در اثر کامپتون را نسبت به زاویه بین فوتونهای پراکنده و فرودی، θ ، با رسم يك نمودار نشان دهید.

۳۴. تغییر بیشینه در انرژی فوتونهای پراکنده يك باریکه پرتوهای γ با انرژی 10MeV ، در اثر برخورد کامپتونی با پروتونهای آزاد چقدر است؟

۳۵. در يك برخورد کامپتونی پروتون آزادی که در ابتدا ساکن است توسط يك فوتون مورد اصابت قرار می‌گیرد و در نتیجه این پروتون انرژی جنبشی 50MeV را به دست می‌آورد. انرژی کمینه فوتون چقدر است؟

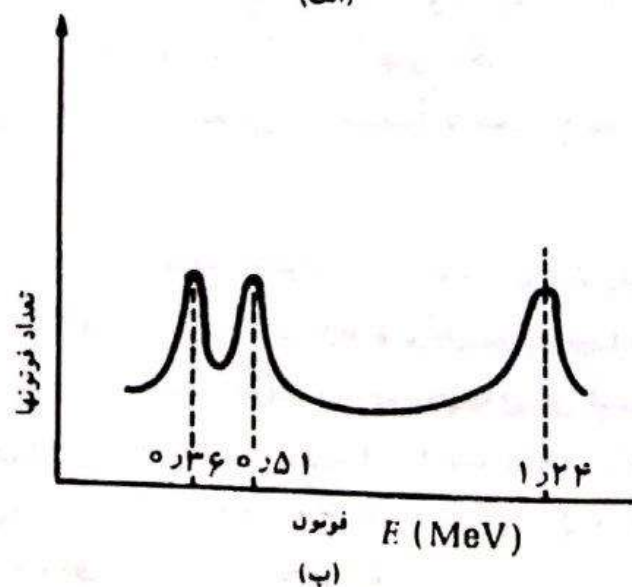
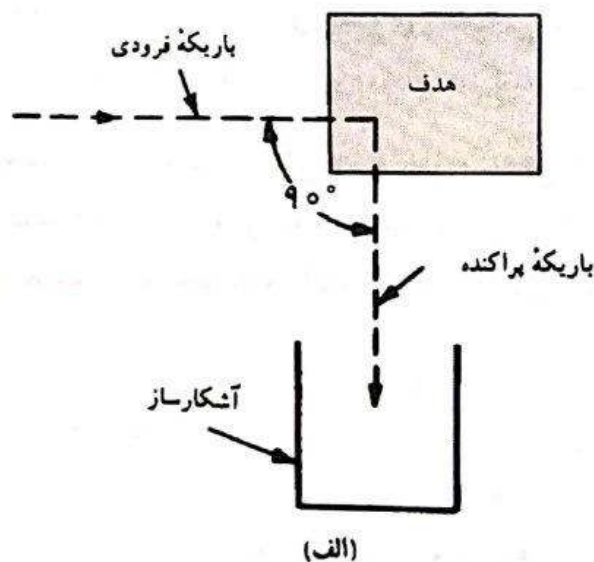
۳۶. با فرض اینکه انرژی جنبشی و اندازه حرکت الکترون توسط روابط کلاسیک بیان شوند (که فرض کاملاً ناصحیحی است)، رابطه جابه‌جایی طول موج کامپتون را به دست آورید؛ دقیقاً به همان رابطه‌ای خواهید رسید که از رابطه‌های نسبیتی اندازه حرکت و انرژی جنبشی الکترون مشتق شد. چرا باید این نتیجه را انتظار داشت؟ (دانهمایی: جابه‌جایی در طول موج مستقل از طول موج فوتون فرودی است.)

۳۷. از نظر ناظری که نسبت به چشمه نوری ساکن است يك چشمه نوری فوتونهایی با بسامد ν گسیل می‌کند. حال این ناظر با سرعت $v = c/5$ از چشمه نوری دور می‌شود. خواص فوتونی زیر، در مقایسه با مقادیر نظیر آنها وقتی که به وسیله يك ناظر ساکن نسبت به چشمه اندازه‌گیری شوند، چقدر تغییر خواهند کرد: (الف) بسامد، (ب) طول موج، (ج) سرعت، (د) انرژی، و (ه) اندازه حرکت؟ (دانهمایی: مسئله ۱۸ فصل ۲ که رابطه دوپلر نسبیتی را بیان می‌کند، ببینید.)

۳۸. دو چراغ قوه مشابه در دو جهت مخالف قرار دارند و به یکدیگر بسته شده‌اند. هر دو چراغ قوه را روشن می‌کنیم، و نخست به عنوان ناظری ساکن نسبت به آنها، چراغ قوه‌ها و باریکه‌های گسیل شده از آنها را نظاره می‌کنیم؛ باریکه‌های با شدت و اندازه حرکت یکسان در جهت‌های مخالف گسیل می‌شوند و نیروی تابشی خالص وارد بر هر دو چراغ قوه صفر است. حال فرض کنید که همان وضع را به عنوان ناظری که در جهت یکی از باریکه‌های گسیل شده حرکت می‌کند نظاره کنیم. به علت اثر دوپلر بسامدهای باریکه‌ها در دو جهت مخالف متفاوت‌اند. در نتیجه، اندازه حرکت فوتونی که در يك جهت در حرکت است با اندازه حرکت فوتونی که در جهت مخالف حرکت می‌کند فرق دارد. (الف) آیا در این حالت يك نیروی تابشی خالص بر هر دو چراغ قوه وارد

می‌شود؟ (ب) آیا چگالی فوتونهای دوساریکه یکسان است؟ (ج) این پارادوکس (ظاهری) را رفع کنید.

۳۹. باریکه تکفامی از فوتونها به قطعه فلزی برخورد می‌کند و فوتونهایی که از این قطعه تحت زاویه 90° نسبت به باریکه فرودی خارج می‌شوند توسط يك آشکارساز ثبت می‌شوند؛ شکل ۳۹ الف را ببینید. شکل ۳۹ ب نمایشگر طیف انرژی فوتونهایی است که تحت زاویه 90° مشاهده می‌شوند. ۳ قله مجزا و مشخص وجود دارند: در ۰٫۳۶، ۰٫۵۱ و ۱٫۲۴ مگا الکترون ولت. (الف) انرژی هر فوتون در باریکه فرودی چقدر است؟ (ب) اصول فیزیکی هریک از سه قله را بیان کنید.



شکل مسئله ۳۹

۴۰. يك فوتون با طول موج $121\text{\AA}$ در هنگام عبور از مجاورت يك هسته طلا (وزن اتمی، ۱۹۷) نابود می‌شود و يك زوج الكترون-پوزیترون آفریده می‌شود. (الف) انرژی فوتون را محاسبه کنید (بر حسب MeV) و آن را با انرژی سکون كل زوج آفریده شده مقایسه کنید. (ب) اگر الكترون و پوزیترون پس از آفرینش ساکن باشند (فوتون درست دارای بسامد آستانه باشد) قسمت کوچکی از انرژی فوتون باید به هسته طلا منتقل شود، زیرا این هسته باید اندازه حرکت اولیه فوتون را به خارج حمل کند؛ اندازه حرکتی را که به هسته طلا منتقل می‌شود محاسبه کنید. (ج) انرژی رسیده به هسته طلا را محاسبه و آن را با انرژی فوتون اولیه مقایسه کنید.

۴۱. يك فوتون با انرژی 1MeV ، يك زوج الكترون-پوزیترون تولید می‌کند و هر دو ذره آفریده شده با انرژیهای مساوی به سوی جلو حرکت می‌کنند. جهت و بزرگی اندازه حرکت منتقل شده به يك هسته سنگین مجاور را تعیین کنید.

۴۲. در صورتی که شعاع انحناهای الكترون و پوزیترونی که در اثر برهم کنش يك فوتون با يك هسته سنگین آفریده می‌شوند و در میدان مغناطیسی یکنواخت 50Wb/m^2 در مسیرشان خمیده می‌شود، 100cm باشند طول موج فوتون فرودی چقدر است؟

۴۳. باریکه تکفامی از فوتونهای با انرژی بسیار بالا با برگی برخورد می‌کند و زوج الكترون-پوزیترونهای تولید شده نسبت به میدان مغناطیسی یکنواخت تحت زاویه‌های 90° حرکت می‌کنند. الكترون و پوزیترون مربوط به هر زوج الزاماً دارای انرژی یکسان نیستند. نشان دهید که، حتی اگر انرژیهای الكترون و پوزیترون متفاوت باشند، انرژی فوتونی که يك زوج تولید می‌کند مستقیماً با مجموع شعاع انحناهای الكترون و پوزیترون متناسب است.

۴۴. يك الكترون و پوزیترون با هم به عنوان يك دستگاه (پوزیترونیم) با سرعت $c/2$ در حرکت‌اند. اگر این دوزره نابود و دو فوتون آفریده شوند، (الف) انرژی و اندازه حرکت هر فوتون چقدر است؟ (ب) زاویه بین جهت‌های حرکت این دو فوتون چقدر است؟ (آزمایشی که در آن اتمهای پوزیترونیم با سرعت $c/2$ در حرکت‌اند، توسط سده^۱ در سال ۱۹۶۳/۱۳۴۲ انجام شد؛ همان‌طور که انتظار می‌رفت زاویه بین کوانتومهای نابودی کمتر از 180° بود.)

۴۵. يك بارش آبخاری توسط فوتونی با انرژی 200MeV راه انداخته می شود. بیشترین تعداد پوزیترونهايي که این بارش می تواند تولید کند چقدر است؟

۴۶. ذره ای به جرم m با سرعت غیر نسبیتی به ذره دیگری به جرم m ، که در ابتدا ساکن است، به طور کاملاً ناکشسان برخورد می کند و در نتیجه انرژی E تلف می شود. نشان دهید که انرژی جنبشی کمینه ذره ای که در ابتدا در حرکت است برابر $2E$ (و نه E) است. (دانهایی: در هر برخورد باید هم انرژی و هم اندازه حرکت، پایسته باشند.)

۴۷. پادپروتونها برای نخستین بار در سال $1955/1334$ (توسط چمبرلن^۱، سرج^۲، ویجاند^۳ و سیلان تیس^۴، با استفاده از شتابدهنده بواترون^۵ در آزمایشگاه تابش دانشگاه کالیفرنیا) تولید و شناخته شدند. واکنش مربوط عبارت بود از $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + (p^+ + p^-)$ ؛ يك پروتون فرودی به يك پروتون در حال سکون برخورد می کند و در این برخورد يك پروتون و يك پادپروتون اضافی آفریده می شوند. نشان دهید که انرژی جنبشی کمینه پروتون فرودی مورد نیاز برای این واکنش 56GeV یا شش برابر انرژی سکون پروتون است. (دانهایی: نخست مسئله ۴۶ را ببینید. ظاهراً می توان تصور کرد که فقط دو برابر انرژی سکون پروتون برای آفرینش يك پروتون و پادپروتون اضافی مورد نیاز است. ولی، چون انرژی و اندازه حرکت هر دو باید در طول برخورد پایسته بمانند، چهار ذره ای که از این برخورد خارج می شوند باید دارای اندازه حرکت کل برابر اندازه حرکت پروتون فرودی باشند. در نتیجه، این ذرات باید با مقداری انرژی جنبشی از این برخورد خارج شوند، و برای آفریدن دو ذره اضافی فقط کسری از انرژی جنبشی پروتون فرودی دسترس پذیر خواهد بود. به علاوه این محاسبه مستلزم دینامیک نسبیتی است.)

برای پیدا کردن انرژی آستانه، می توان از استدلال زیر استفاده کرد. با نظاره از يك چارچوب مرجع ساکن نسبت به مرکز جرم دستگاه، می بینیم که پروتون فرودی و پروتون هدف در جهت های مخالف با انرژی مساوی و بزرگی اندازه حرکت مساوی به یکدیگر نزدیک می شوند؛ این دو پس از برخورد، در انرژی آستانه، چهار ذره ساکن می آفرینند. از این رو در چارچوب مرجع آزمایشگاه دیده می شود که این چهار ذره پس از برخورد دارای اندازه حرکت یکسان اند و با در نظر گرفتن بقای اندازه

حرکت، این اندازه حرکت درست يك چهارم اندازه حرکت پروتون فرودی است. برای این اساس، می‌توان نشان داد که ذره فرودی باید دارای اندازه حرکتی مساوی با $Mc(3^{1/2})$ باشد، که در آن M جرم سکون پروتون است. انرژی جنبشی مربوط به پروتون فرودی Mc^2 است.

۴۸. پرتوهای γ با انرژیهای ۱۰ره و ۱۰ره مگا الکترون ولت ولی با شدتهای مساوی بسرروی يك درآشام سربی فرود می‌آیند. ضریب درآشامی در سرب برای این سه انرژی به ترتیب برابر ۵۹۰۹، ۷۷ره و ۶۱ره برسانتیمتر است. (الف) ضخامت لازم سرب را برای اینکه شدت هر باریکه تکفام به يك دهم شدت اولیه کاهش یابد حساب کنید. (ب) در هر عمق x ، نسبت شدت کل (تمام انرژیهای سه فوتون) به شدت فرودی کل چقدر است؟

۴۹. نشان دهید که برای کاهش شدت يك باریکه تابش به نصف مقدار اولیه آن، ماده درآشامی به ضخامت $(\ln 2)/\mu$ لازم است، که در آن $\ln_e 2$ عبارت از لگاریتم ۲ در مبنای e است.

۵۰. می‌خواهیم برای تابش الکترومغناطیسی چندفام، حفاظی از يك ماده درآشام سربی طرح کنیم. با فرض اینکه در این تابش هیچ فوتونی دارای انرژی (الف) بیش از ۴۰۰ MeV، (ب) کمتر از ۴۰۰ MeV نباشد، توضیح دهید که چه بسامدهایی (پایین یا بالا) در گزینش ضخامت درآشام تعیین کننده‌اند.

اثرهای کوانتومی: جنبه‌های موجی ذرات مادی

۱۰۵ امواج دو بروی

دیدیم که تابش الکترومغناطیسی دارای دو جنبه است: یک جنبه موجی و یک جنبه ذره‌ای. آزمایش‌های مربوط به تداخل و پراش تابش الکترومغناطیسی را در صورتی می‌توان توضیح داد که تابش فقط متشکل از امواج باشد. همچنین اثرهای دقیقاً کوانتومی تابش الکترو-مغناطیسی، همچون اثرهای فوتوالکتریک و کامپتون را در صورتی می‌توان توصیف کرد که نور فقط متشکل از فوتونهای ذره‌گونه باشد. انرژی هر فوتون ذره‌گونه E و اندازه حرکت آن p است که دقیقاً به وسیلهٔ بسامد ν و طول موج λ تابش، به ترتیب زیر، مشخص می‌شوند

$$\nu = \frac{E}{h} \quad (۱۰۵)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (۲۰۵)$$

توجه کنید که در این معادله‌ها دو کمیتی که در طرف چپ ظاهر می‌شوند تنها وقتی مفهوم روشنی دارند که یک موج را توصیف کنند، و دو کمیتی که در طرف راست ظاهر می‌شوند معمولاً به یک ذره وابسته‌اند. از این رو، این روابط اساسی، دوگانگی موجی ذره‌ای تابش الکترومغناطیسی را نیز به طور ضمنی بیان می‌کنند؛ و ثابت بنیادی نظریهٔ کوانتومی، یعنی

ثابت پلانک h مشخصه‌های موجی و مشخصه‌های ذره‌ای را به هم ربط می‌دهد. می‌توان گفت که امواج الکترومغناطیسی تحت شرایطی مانند ذره و فوتونها (ذرات با جرم سکون صفر) تحت شرایطی مانند موج رفتار می‌کنند.

این دو معادله، که طبیعت موجی و طبیعت ذره‌ای را به تابش الکترومغناطیسی نسبت می‌دهند، دارای عمومیت بیشتری هستند و در مورد کلیه ذرات، یعنی در مورد ذرات با جرم سکون متناهی نیز همچون ذرات با جرم سکون صفر، به کار می‌روند؛ و این طبیعتاً مایه تعجب است. این سؤال برای اولین بار در سال ۱۹۲۴/۱۳۰۳ توسط لویی دو بروی مطرح شد. دو بروی حدس زد که يك ذره مادی، به خاطر تقارن طبیعت، باید خواص موجی را به خوبی نشان بدهد. علاوه بر این، او فرض کرد که این معادلات که مشخصه‌های ذره‌ای امواج الکترومغناطیسی را به دست می‌دهند، باید مشخصه‌های موجی ذرات مادی (مانند الکترون) را نیز به دست بدهند. آزمایشها موکداً صحت فرضیه دو بروی را تأیید کرده‌اند و در حال حاضر مشخصه موجی ذرات مادی به خوبی اثبات شده است. چون می‌توان طول موج را با استفاده از اثرهای تداخل یا پراش اندازه‌گیری کرد، توجه خود را به دومین رابطه، یعنی رابطه (۲.۵) معطوف خواهیم کرد (اهمیت سرعت موج دو بروی، $v\lambda$ ، و رابطه آن با سرعت ذره، v ، در بخش ۸.۵ مورد بحث قرار خواهد گرفت).

طول موج λ يك ذره مادی که اندازه حرکت آن $p = mv$ است (m جرم نسبی ذره و v سرعت آن است) به وسیله رابطه دو بروی داده می‌شود

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (3.5)$$

که در آن h ثابت پلانک است.

می‌توان پرسید «چنانچه الکترون، لااقل تحت شرایطی، به عنوان موج تلقی شود، در آن صورت آنچه موج می‌زند چیست؟» یادآور می‌شویم که همین سؤال در مورد طبیعت بنیادی نور نیز مطرح بود. قبل از نظریه الکترومغناطیسی ماکسول و آزمایشهای هرتز، فیزیکدانان نمی‌توانستند اظهار نظر قطعی کنند که خواص موجی نور بانوسانات میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متناظر است؛ ولی عدم شناخت طبیعت الکترومغناطیسی نور مانع از آن نبود که آنها مدتها قبل از ماکسول و هرتز خواص موج گونه نور را کشف و بر مبنای آن تداخل و پراش را تعبیر کنند. بنابراین، برای اینکه ثابت کنیم که يك ذره مادی دارای طبیعت موجی است، لازم نیست که نخست طبیعت پدیده موجی را بشناسیم. برای آزمایش فرضیه دو بروی کافی است که بر اساس آزمایش تعیین کنیم که آیا ذرات مادی پدیده‌های تداخل و پراش را نشان می‌دهند یا نه. البته، مسئله طبیعت فیزیکی جنبه موجی

يك ذره مادی مسئله بسیار مشکلی است؛ با وجود این، آن را به زمانی موکول می کنیم که آزمایشهای مربوط به تأیید اینکه يك ذره مادی دارای طول موج $\lambda = h/mv$ است را مورد بحث قرار داده باشیم.

الکترون در سال ۱۸۹۷/۱۲۷۶ توسط تامسون^۱ کشف شد. او نشان داد که الکترونها مسیرهای مشخصی را دنبال می کنند، دارای نسبت بار به جرم مشخصی (برای $c \gg v$) هستند، و دارای جرم، اندازه حرکت و انرژی هستند که می توانند در فضا جایگزیده شوند؛ یعنی، الکترونها خواص ذره ای از خود نشان می دهند. تا سال ۱۹۲۷/۱۳۰۶، یعنی تا هنگام انجام آزمایشهای مربوط به پراش الکترون توسط دیویسون^۲ و گرمر^۳ که رابطه دوبروی را تأیید کردند، طبیعت موجی الکترون کشف نشده بود. چرا مشخصه موجی الکترونها سالها پس از شناخت طبیعت ذره ای آنها کشف شد؟ گمان می رود که منشأ مشکلات مربوط به مشاهده خواص موجی الکترونها با مشکلات مربوط به مشاهده طبیعت موجی نور، یعنی خیلی کوچک بودن طول موج، یکی باشد. همان طور که رابطه (۳.۵) نشان می دهد، طول موج ذره ای به جرم $۱۰^{-۲۴}$ کیلوگرم و با سرعت $۱۰^{-۲۴}$ متر بر ثانیه فقط برابر $۶۶ \times 10^{-24} \text{ m} = ۶۶ \times 10^{-24} \text{ \AA}$ است. واضح است که در پرتاب توپهای بیسبال از يك پنجره باز به طرف دیواری در فاصله دور نباید انتظار داشت که در اصابت توپها به دیوار نقش پراش قابل تشخیص مشاهده شود؛ همچنان که انتظار مشاهده نقش پراش را برای عبور نور مرئی از يك چنین «شکاف» پهنی نداریم. طول موج يك ذره مادی معمولی، در مقایسه با ابعاد اجسام عادی خیلی کوچک است و بنابراین اثرهای تداخل و پراش آن ظریف و باریک اند. بنابراین، اگر طول موج جسمی آنقدر بزرگ باشد که بتواند اثرهای موجی قابل مشاهده تولید کند، باید، همان طور که از رابطه (۳.۵) برمی آید، جرم و سرعت آن کوچک باشند (واضح است که برای طول موج بزرگ و سرعت کم می توان از روابط غیر نسبیتی استفاده کرد).

توری پراشی که دارای «خطوط» با کمترین فاصله از هم است يك بلور است؛ یعنی جامدی است که در آن اتمها در يك آرایه هندسی سه بعدی قرار گرفته اند. فاصله نوعی بین دواتم مجاور از مرتبه $10^{-۱۰}$ متر یا يك آنگستروم است. مناسبترین شرایط برای مشاهده پراش ذرات آنهایی هستند که در آنها ذره دارای طول موجی قابل مقایسه با اندازه اتم است. چون طول موج با عکس جرم و سرعت ذره تغییر می کند، برای داشتن بلندترین طول موج باید ذره ای را انتخاب کنیم که دارای کوچکترین جرم ممکن باشد، یعنی باید الکترون را برگزینیم.

می خواهیم انرژی جنبشی الکترونی را محاسبه کنیم که طول موج آن $۱۰۰۰ \text{ \AA}$ است.

1. J. J. Thomson

2. C. Davisson

3. L. H. Germer

اختلاف پتانسیل الکتروستاتیکی V لازم برای اینکه الکترونی با بار e از حال سکون تا انرژی جنبشی نهایی $(1/2)mv^2$ شتاب داده شود عبارت است از

$$eV = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$$

$$V = \frac{h^2}{2me\lambda^2}$$

$$= \frac{(6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(1.00 \times 10^{-10} \text{ m})^2}$$

$$= 150 \text{ V}$$

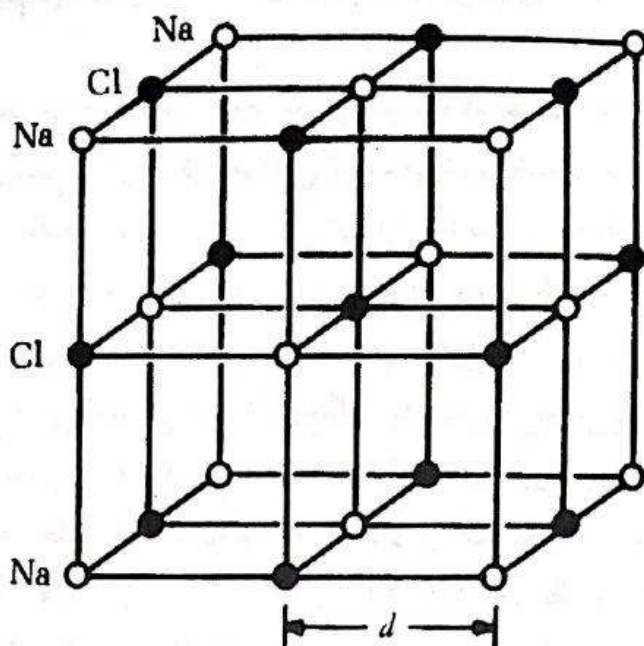
طول موج يك الکترون ۱۵۰ الکترون ولتی برابر با $1 \text{ \AA}$ است. چون این طول موج قابل مقایسه با طول موج فوتون پرتو x نوعی است می‌توان انتظار داشت که الکترون‌ها و پرتوهای x ، هنگام عبور از بلور، هر دو اثرهای پراش مشابهی را نشان بدهند.

۲.۵ قانون براگ^۱

ماکس فون لاهه^۲ اولین کسی بود که در سال ۱۹۱۲/۱۲۹۱ پیشنهاد کرد که جامدات بلورین، که در آنها آرایش اتم‌ها دارای يك نقش منظم است و فاصله بین اتم‌ها $1 \text{ \AA}$ است، می‌توانند به‌عنوان توریه‌های پراش برای اندازه‌گیری طول موج پرتو x به‌کار روند.

بلور کلرور سدیم را که دارای ساختار ساده و ویژه‌ای است و به‌عنوان ماده استاندارد جهت پراش پرتو x به‌کار می‌رود در نظر می‌گیریم. بررسی خصوصیات هندسی خارجی يك بلور سنگ نمک نشان می‌دهد که اتم‌های سدیم و کلر (یا به عبارت دقیقتر، یون‌های سدیم و کلر)، همان طور که در شکل ۱.۵ دیده می‌شود، در يك شبکه مکعبی ساده مرتب شده‌اند. اتم‌های سدیم و کلر متناوباً در گوشه‌های مکعب‌های اولیه یکسانی قرار می‌گیرند که طول ضلع هر کدام d است.

به کمک چگالی بلور کلرور سدیم و وزن اتمی سدیم و کلر می‌توان به‌سهولت فاصله شبکه‌ای d را محاسبه کرد. چنانچه d فاصله اتم سدیم تا نزدیکترین اتم کلر (بر حسب سانتیمتر) باشد، در آن صورت، در امتداد هر ضلع مکعبی به ضلع يك سانتیمتر، تعداد $1/d$ اتم وجود خواهد داشت (نیمی از این اتم‌ها سدیم و نیم دیگر کلرند). علاوه بر این،



شکل ۱۰۵ ساختار بلور سنگ نمک (کلرورسدیم).

درمکمی بهضام يك سانتيمتر از بلور کلرور سدیم، روی هم رفته $1/d^3$ اتم وجود دارد. بنابراین، تعداد کل اتمها در واحد حجم برابر با $1/d^3$ است. وزن اتمی سدیم برابر ۲۳٫۰۵، و وزن اتمی کلر ۳۵٫۴۵ است؛ بنابراین وزن مولکولی کلرور سدیم برابر ۵۸٫۴۵ است. چون عدد آووگادرو (6.022×10^{23}) تعداد اتمهای موجود در يك مول گرم را به دست می دهد، نتیجه می شود که تعداد 6.022×10^{23} اتم سدیم در ۲۳٫۰۵ گرم سدیم، و تعداد 6.022×10^{23} اتم کلر در ۳۵٫۴۵ گرم کلر وجود دارند. و بنابراین $2 \times 6.022 \times 10^{23}$ اتم (نیمی مربوط به سدیم و نیمی مربوط به کلر) در ۵۸٫۴۵ گرم کلرور سدیم موجود است. چگالی اندازه گیری شده کلرور سدیم در شکل بلورین سنگ نمک برابر ۲٫۱۶۳ گرم بر سانتیمتر مکعب است. بنابراین، می توان نوشت

$$\frac{\text{اتمها}}{\text{حجم}} = \frac{2 \times 6.022 \times 10^{23} \text{ atoms/g mol} \times 2.163 \text{ g/cm}^3}{58.45 \text{ g/g mol}} = \frac{1}{d^3}$$

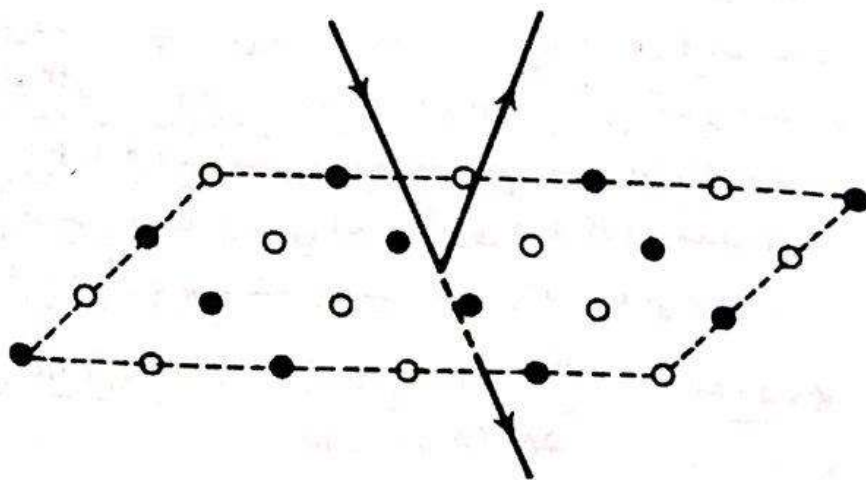
$$d = 2.820 \text{ \AA}$$

که برابر فاصله شبکه ای اتمهای سدیم و کلر در يك بلور سنگ نمک است. البته، این فاصله که فاصله نوعی بین اتمی اتمهای هر جامد است، با طول موج پرتوهای X با طول موج الکترونیهای با انرژی ۱۵۰ eV، قابل مقایسه است. به کمک فاصله شبکه ای و مشخصه هندسی

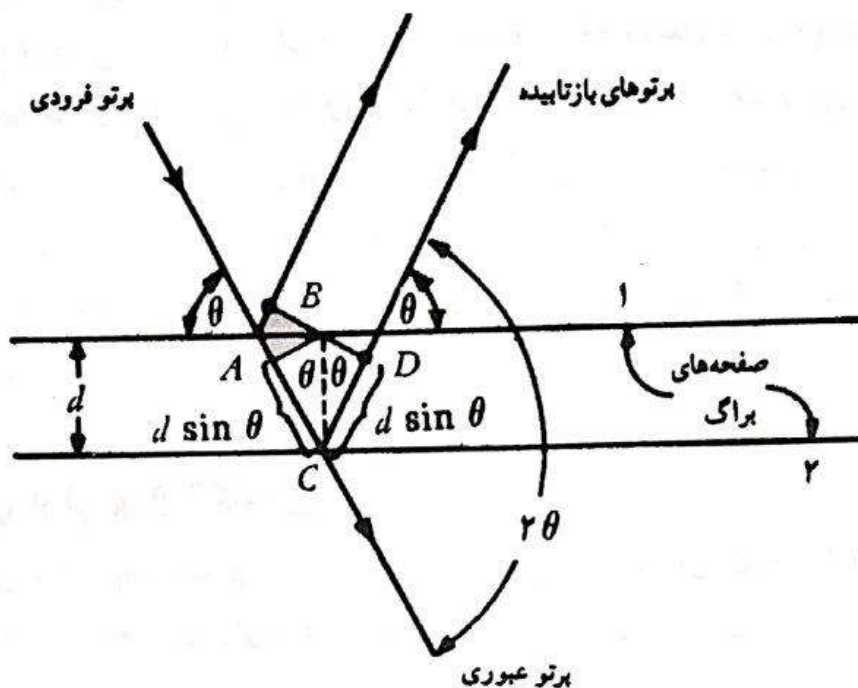
آرایش اتمی خواهیم دید که چگونه امکان تعیین طول موجهای پرتو x و الکترون وجود دارد.

هنگامی که يك موج با مجموعه‌ای از مراکز پراکننده، همانند اتمهای يك جامد بلورین، برخورد می‌کند از هر مرکز امواجی تولید می‌شود که در تمام جهات و به‌سوی خارج تابش می‌کنند. البته، موج بر ایند ناشی از کلیه مراکز پراکننده، در هر جهت که اندازه‌گیری شود، به تداخل بین تمام مراکز پراکننده بستگی دارد. جالب اینجاست که در داخل بلور اتمهای واقع بر هر صفحه نسبت به موج فرودی همانند آئینه نیم نقره اندودی نسبت به نور مرئی عمل می‌کنند (این مطلب به تفصیل در بخش ۴.۵ به اثبات خواهد رسید)؛ یعنی، اتمها بخشی از موج را بازمی‌تابانند و بقیه را عبور می‌دهند؛ شکل ۲.۵ را ملاحظه کنید. این صفحات و بازتابها را به‌یاد بود براگ^۱ صفحات براگ^۲ و بازتابهای براگ نامیدند. براگ همراه با پسرش^۲ در سال ۱۹۱۳/۱۲۹۴ نظریه بنیادی پراش پرتو x توسط بلورها را مطرح کردند. با قبول این مطلب می‌توان، به‌جای بررسی يك تداخل بین امواج تولید شده به‌وسیله تمام مراکز پراکننده، خیلی ساده‌تر، تداخل بین امواجی را که از صفحات موازی براگ بازتابیده‌اند، بررسی کرد.

مطابق شکل ۳.۵، بازتاب امواج از دو صفحه موازی و مجاور براگ را در نظر می‌گیریم. جهت‌های امواج فرودی و بازتابیده، که هر دو با θ نشان داده شده‌اند، بازایه بین جهت انتشار امواج و صفحه براگ (نه عمود بر صفحات بازتابنده) مشخص می‌شوند. در



شکل ۲.۵ اتمها در صفحه براگ.



شکل ۳.۵ بازتاب امواج ازدو صفحه موازی ومجاور براگ.

هر صفحه قسمتی از موج فرودی را به صورت موج انتقال یافته ومنحرف نشده قسمت دیگر را به صورت بازتابیده در نظر می گیریم.

قسمتی از پرتو فرودی در اولین صفحه براگ بازتابیده می شود، پرتو بازتابیده AB با صفحه ۱ زاویه θ می سازد. آن قسمت از پرتو فرودی (AC) که از اولین صفحه براگ عبور می کند نیز به طور جزئی در همان جهت θ ازدومین صفحه بازتابیده می شود. جبهه موج BD را، که بردوپرتو بازتابیده عمود است در نظر می گیریم. دوپرتو بازتابیده، تنها در صورتی که در نقاط B و D همفاز باشند، در یک نقطه دور باهم تداخل سازنده خواهند داشت. وقتی اختلاف مسیر $ACD - AB = 2d \sin \theta$ ، مضرب درستی (مانند n) از طول موج λ باشد نقاط B و D همفازند. به این ترتیب، شرط آنکه امواج بازتابیده از صفحات موازی ومجاور براگ تداخل سازنده داشته باشند چنین است

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (۲.۵)$$

که در آن n (مرتبه بازتاب) می تواند مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را دارا باشد. این معادله*، که

* معادله (۲.۵)، قانون براگ، مشابه معادله ای است که در تئوری پراش عادی به کار می رود، ولی، این دو معادله یکسان نیستند.

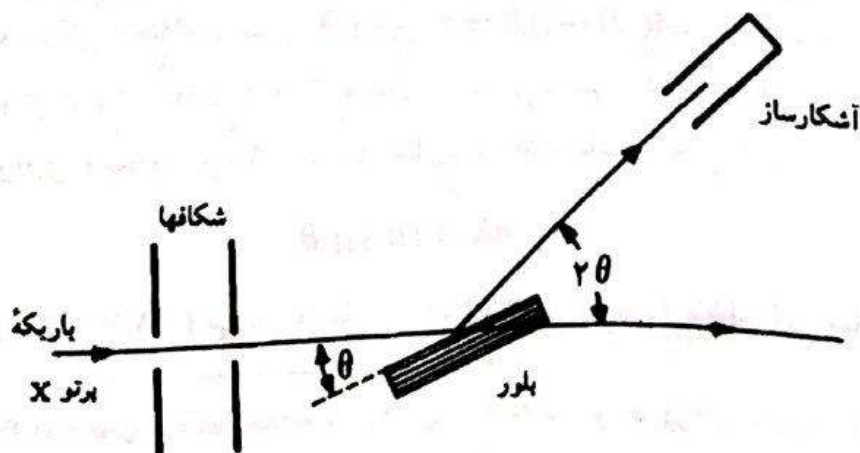
به قانون براگ موسوم است، پایه تمامی اثرهای پرتو همدوس x و پراش الکترون در بلورهاست. پرتوهای که تحت هر زاویه‌ای، بجز زاویه‌هایی که در معادله (۴.۵) صدق می‌کنند، باز می‌تابند تداخل ویرانگر می‌کنند و باریکه فرودی به‌طور کامل عبور می‌کند. قانون براگ وسیله‌ای برای اندازه‌گیری طول موجهای قابل مقایسه با فواصل بین اتمی است، زیرا واضح است که اگر d, n و θ معلوم باشند می‌توان λ را محاسبه کرد. در شکل ۳.۵ دیده می‌شود که زاویه بین پرتوهای عبور یافته و بازتابیده برابر با 2θ و صفحات براگ نیمساز این زاویه‌اند.

۳.۵ پراش پرتو x و الکترون

عناصر اساسی یک طیف‌سنج پرتو x ، یعنی دستگاهی برای اندازه‌گیری طول موجهای پرتو x ، در شکل ۴.۵ نشان داده شده‌اند. چشمه‌ای از پرتوهای تکفام x بر بلوری که ساختار و ابعاد بین‌اتمی آن معلوم است می‌تابد. یک آشکارساز، مانند اتاقکی که به اثرهای یونش پرتو x حساس است، شدت پرتوهای x وارد به‌خود را اندازه می‌گیرد. بلور و آشکارساز هردو قابل دوران‌اند، ولی آشکارساز همواره طوری تنظیم می‌شود که با باریکه جلویی زاویه 2θ بسازد. θ زاویه بین پرتوهای فرودی و صفحات براگی است که بازتاب از آنها مشاهده می‌شود. هنگامی که شرایط معادله (۴.۵) درمورد بازتاب براگ برآورده شوند شدت پرتو x در آشکارساز بیشینه شدیدی را نشان خواهد داد.

از این رو، چون از ساختار بلورین، d معلوم است و θ نیز اندازه‌گیری می‌شود، می‌توان طول موج λ را محاسبه کرد. برای مجموعه معلومی از صفحات براگ، فاصله d توری، طول موج λ و مرتبه n ، یک جهت 2θ نسبت به جهت باریکه فرودی وجود دارد که در آن باریکه پراشیده شدید است.

برگ فلزی نازکی را در نظر می‌گیریم که از آن یک باریکه پرتو تکفام x عبور

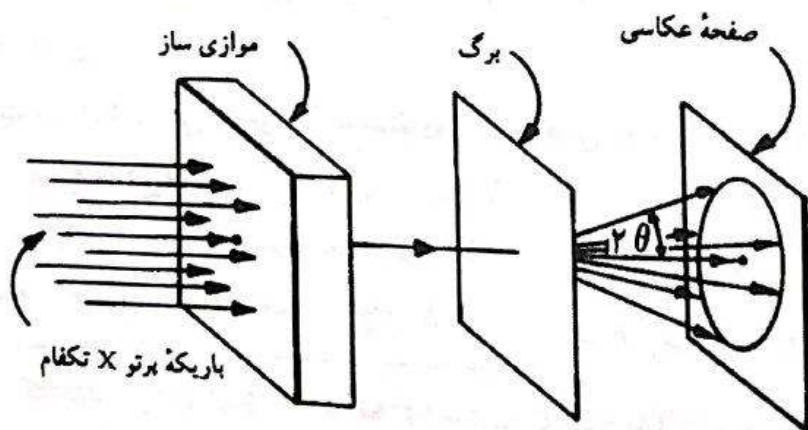


شکل ۴.۵ نمودار طرح‌وار یک طیف‌سنج بلوری پرتو x .

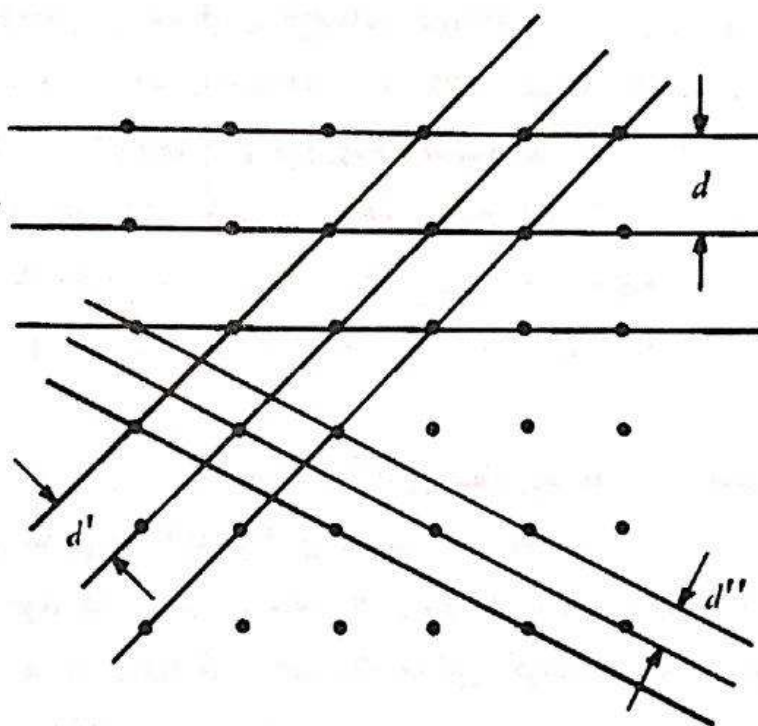
می‌کند. برگ شامل تعداد خیلی زیادی از بلورهای ساده و کامل است که به‌طور کتره‌ای نسبت به یکدیگر در داخل برگ قرار گرفته‌اند. تنها آن ریز بلورهای ویژه‌ای که طوری جهت یافته‌اند که شرط براگ را برآورده می‌کنند یک باریکه شدیداً پراشیده تولید خواهند کرد؛ دیگر ریز بلورها پرتو فرودی را به‌طور همدوس پراشیده نخواهند کرد. بنابراین، باریکه خروجی شامل دوبخش خواهد بود: یک باریکه شدید مرکزی منحرف شده و یک باریکه که به‌شکل مخروط پراکنده می‌شود و زاویه 2θ نسبت به باریکه فرودی می‌سازد (شکل ۵.۵). با معلوم بودن مرتبه n ، زاویه θ منحصرأ به وسیله رابطه براگ تعیین می‌شود.

هنگامی که باریکه پراکنده با صفحه عکاسی مسطحی برخورد کند نقشی از شدت‌پدیدار می‌شود. این نقش شامل یک لکه مرکزی شدید است که به وسیله دایره‌ای احاطه شده است. شعاع این دایره به سادگی اندازه گرفته می‌شود و فاصله بین برگ پراکنده و صفحه عکاسی نیز معلوم است، بنابراین زاویه 2θ را می‌توان محاسبه کرد؛ و سرانجام، طول موج پرتوهای x به کمک رابطه براگ محاسبه می‌شود.

تا به حال فرض کردیم که هر بلور مفروض تنها دارای یک مجموعه از صفحات موازی براگ است، ولی در واقع در هر تک بلور چندین مجموعه از این صفحات موجود است. برای اینکه بدانیم که این تعداد صفحات چگونه بر پراش پرتو x و الکترون تأثیر می‌گذارد، مجدداً ترتیب اتمها را در بلور کلرور سدیم در نظر می‌گیریم. صفحه براگ به صفحه‌ای گفته می‌شود که اتمها را در بر می‌گیرد و همان‌طور که در شکل ۶.۵ نشان داده شده است، در یک بلور مکعبی تعداد زیادی از این صفحات وجود دارد. روشن است که صفحات گوناگون (که فقط چندتا از آنها در شکل نشان داده شده است) در مقدار فاصله d توری باهم اختلاف خواهند داشت؛ در نتیجه، چندین زاویه براگ θ وجود دارد که هر کدام



شکل ۵.۵ پراکندگی پرتوهای تکفام x، به وسیله یک برگ فلزی نازک از مجموعه‌ای از صفحات براگ.

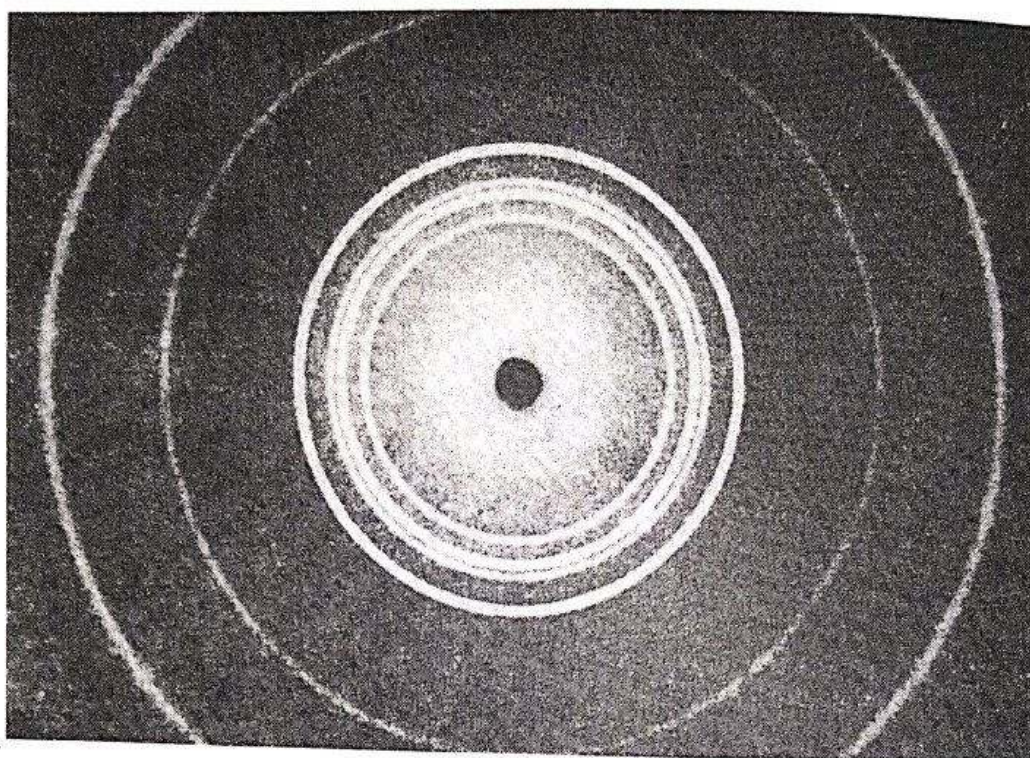


شکل ۶.۵ سه مجموعه از صفحات موازی براگ با فواصل توری متفاوت.

رابطه براگ را برای مجموعه بخصوصی از صفحات آن برآورده می کنند. بنابراین نقش پراش پرتو X تاحدی پیچیده تر از آن نقشی است که در شکل ۵.۵ ارائه شده است؛ معمولاً این نقش، به جای یک دایره، تعدادی دایره متحدالمرکز را نشان خواهد داد که هر کدام با پراشی از مجموعه بخصوصی از صفحات براگ متناظرند. ولی، شدت باریکه‌هایی که از صفحات مختلف بازتابیده می شوند یکسان نخواهد بود، زیرا ممکن است تعداد آنها در واحد سطح یک صفحه، که شدت باریکه بازتابیده را مشخص می کند، با تعداد آنها در واحد سطح صفحه دیگر متفاوت باشد. شکل ۷.۵ نقش پراش پرتو X از یک نمونه آلومینیوم چند بلوری است.

بحث درباره پراش از بلورها به استفاده از پرتوهای X مربوط می شود. همان طور که دیدیم طول موج الکترونها با انرژی جنبشی 150 eV ، برابر طول موج پرتوهای X ($1 \text{ \AA}$) است و یک باریکه الکترون تک انرژی* الزاماً باید همان اثرهای پراش پرتوهای X را نشان بدهد، و همین طور نیز هست. شکل ۸.۵ یک نقش پراش الکترون از یک برگ فلزی

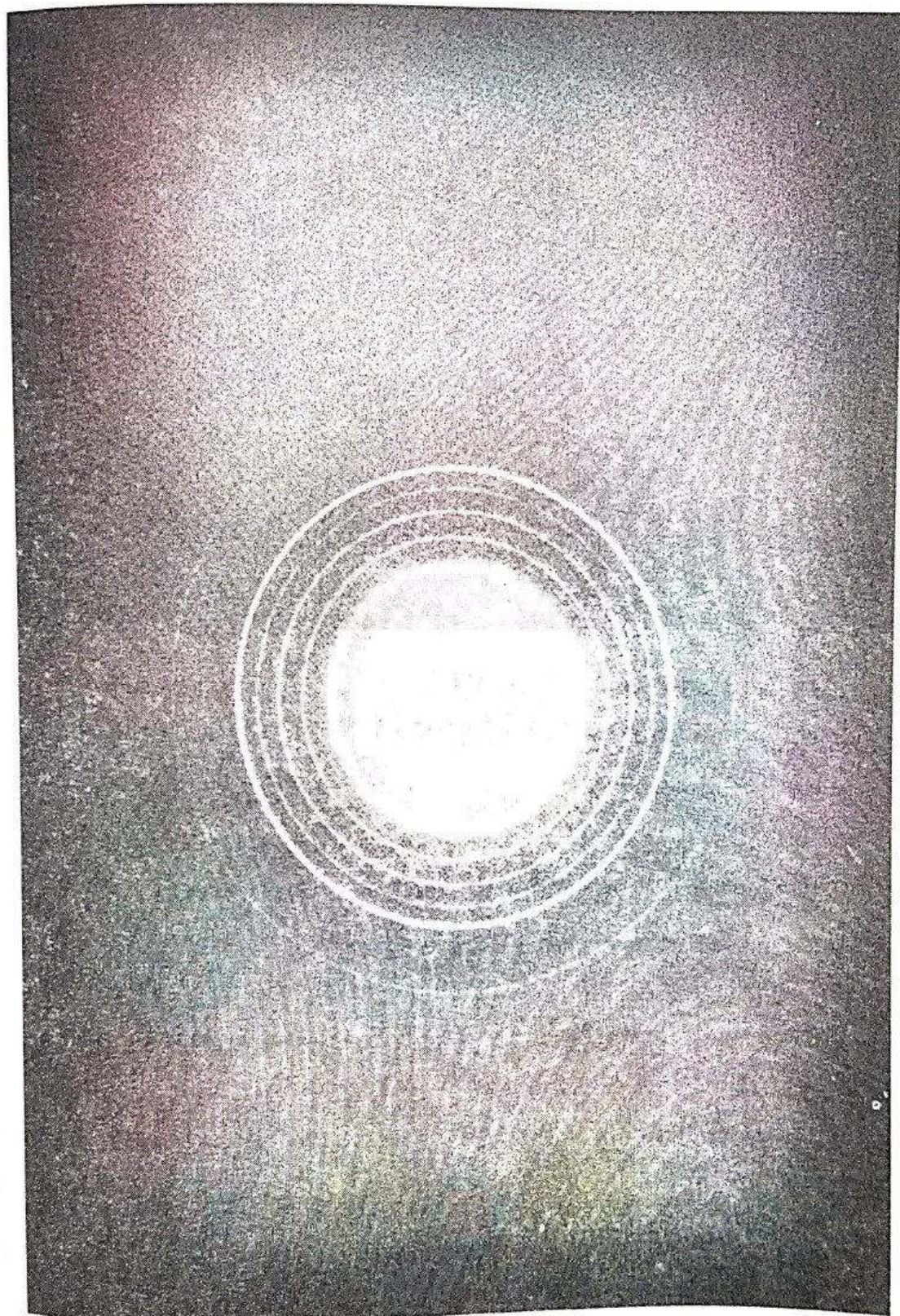
* یک باریکه تک انرژی از ذرات نه فقط تک انرژی است بلکه همچنین دارای یک تک طول موج نیز هست و بنابراین معمولاً، نسبت به جنبه موجی آن، از آن به عنوان باریکه «تکفام» یاد می شود.



شکل ۷۰۵ نقش پراش پرتو X از آلومینیوم چند بلوری. مرکز تاریک است، زیرا سوراخی در صفحه عکاسی تعبیه شده است تا باریکه مرکزی شدید بتواند از آن عبور کند.

است؛ این نقش با روابط براگ و دو بروی تطابق کامل دارد. به طور خلاصه، آزمایشهای پراش الکترون رابطه $\lambda = h/mv$ را تأیید می کنند. وقتی ساختار بلورین معلوم باشد برای اندازه گیری طول موج الکترونها و پرتوهای X می توان از نقشهای پراش الکترون و پرتو X استفاده کرد؛ برعکس، هنگامی که طول موج پرتوهای X و الکترونها معلوم باشند، برای دستیابی به شکل ساختار بلورین و فواصل بین اتمی جامدات، می توان از نقشهای پراش استفاده کرد. دو کاربرد اصول مربوط به پراش پرتو X را به طور خلاصه متذکر می شویم.

۱. اثر کامپتون را، که در آن فوتونهای پراکنده با یک طول موج تغییر نیافته و یک طول موج تغییر یافته پدیدار می شوند، می توان با استفاده از یک طیف سنج پرتو X، برای اندازه گیری طول موجهای تابش پراکنده توسط یک هدف، تحقیق کرد.
۲. وقتی باریکه ای از پرتوهای X که دارای گستره پیوسته ای از طول موجهاست باریک بلور فرود آید تنها اگر قانون براگ برقرار شود تداخل سازنده ای که باعث انحراف باریکه به اندازه زاویه 2θ می شود وجود دارد. برای زاویه مفروض θ ، مرتبه n ، و



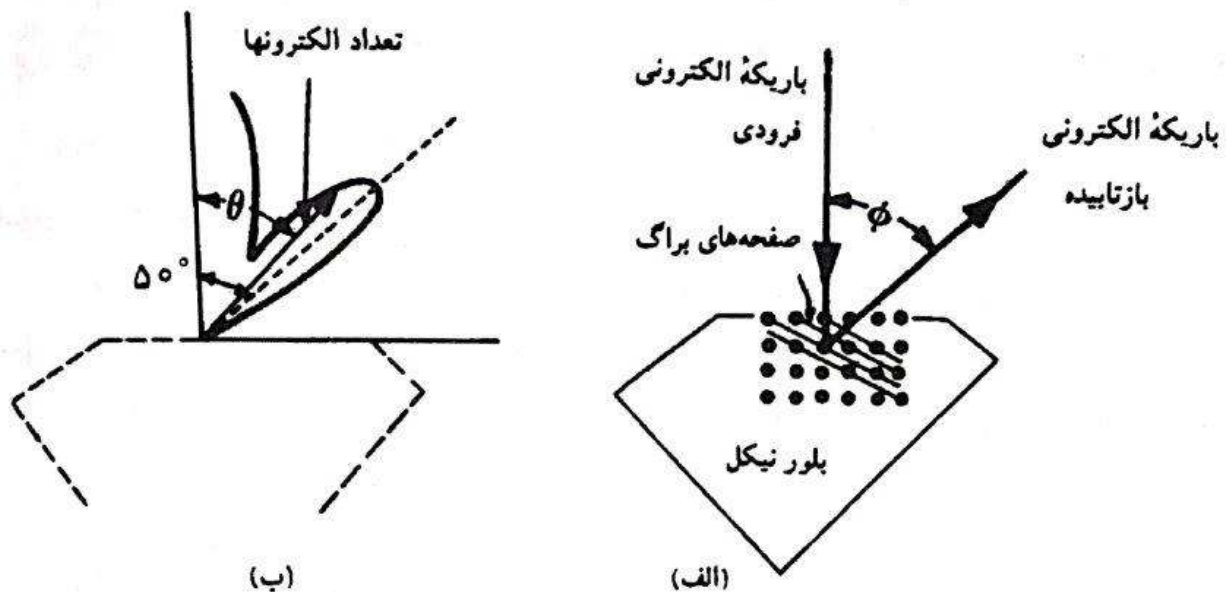
شکل ۸.۵ نقش پراش الکترون از کلرور تلوریوم چند بلوری.

فاصله بین اتمی d مقدار طول موج منحصرأ توسط قانون براگ، معادله (۴.۵)، مشخص می‌شود و تنها يك طول موج، تحت زاویه 2θ ، به شدت بازتاب خواهد یافت. در این

آرایش يك بلور همچون يك تكفام ساز عمل می کند، زیرا از گستره پیوسته طول موجهای فرودی بر بلور، يك باریکه تكفام را انتخاب می کند که تحت زاویه 2θ خارج می شود.

اکنون آزمایش دیویسون و گرمر را که در آن خواص موجی الکترونها برای نخستین بار به تأیید رسیدند به اختصار بررسی کنیم. باریکه ای از الکترونها با انرژی 54 eV بر يك تك بلور نیکل فرود می آید. الکترونها به دودلیل سطح نیکل را ترك می کنند؛ گسیل ثانوی، که در آن الکترونها فرودی انرژی جنبشی خود را به الکترونها موجود در فلز (که بعداً آزاد می شوند) انتقال می دهند؛ و پراش الکترون، که در آن الکترونها فرودی به وسیله بازتاب از صفحات براگ درون بلور نیکل پراشیده می شوند. دیویسون و گرمر دریافتند که علاوه بر تغییرات هموار در شدت الکترون، که ناشی از گسیل ثانوی است، قله مشخصی در $\phi = 50^\circ$ وجود دارد که می توان آن را به پراش الکترون نسبت داد؛ جهت محاسبه شده بازتاب شدید الکترونها با انرژی 54 eV در نیکل 50° درجه است. از این رو رابطه دوبروی مورد تأیید قرار گرفت. ولی، با توجه به اینکه طول موج الکترونها درون يك بلور با طول موج الکترونها در فضای تهی یکسان نیست، تحلیل این آزمایش پیچیده است. این اختلاف طول موج ناشی از تغییر در سرعت الکترونها هنگام ورود به سطح نیکل یا خروج از آن است؛ زیرا در سطح فلز، میدان الکتریکی روی الکترونها کار انجام می دهد (تابع کار برای هر ماده بخصوصی) و در نتیجه هنگام عبور از درون ماده سریعتر حرکت می کنند. مسیر الکترونها در سطح ماده، به علت تغییر سرعت، شکسته می شود (شکل ۹.۵). کمی پس از تأیید رابطه دوبروی برای الکترونها توسط دیویسون و گرمر، تامسون^۱ حلقه های پراش ناشی از عبور الکترونها از يك برگ نازك فلزی را (مانند شکل ۸.۵) مشاهده کرد. جالب اینجاست تامسونی که آزمایشهای خواص موجی الکترونها را در سال ۱۹۲۷/۱۳۰۶ نشان داد پسر همان تامسونی بود که با آزمایشهای پرتو کاتودی خواص ذره ای الکترونها را در سال ۱۸۹۷/۱۲۷۶ نشان داده بود.

اینکه جسمی به جرم m و با سرعت v دارای طول موجی برابر h/mv است، نه تنها به وسیله الکترونها، بلکه همچنین توسط آزمایشهای مربوط به اتمها، مولکولها، و ذرات هسته ای بی بار، مانند نوترون نیز به اثبات رسیده است. هنگامی که يك نوترون از ماده ای عبور می کند برخوردی با اتمهای ماده انجام می دهد. ابتدا نوترون، در هر برخورد، مقداری از انرژی جنبشی خود را از دست می دهد، و اتمهای مورد اصابت این انرژی را کسب می کنند. این فرایند ادامه پیدا می کند تا اینکه انرژی جنبشی نوترون با انرژی



شکل ۹.۵ (الف) بازتاب امواج الکترونی به وسیله مجموعه‌ای از صفحات براگ موجود در بلور نیکل؛ **(ب)** تعداد الکترونهاى بازتابیده از يك بلور نیکل به صورت تابعی از زاویه ϕ ، با ترسیم قطبی نشان داده شده است.

گرمایی اتمهای موجود در ماده قابل مقایسه شود. آنگاه، وقتی ترازمندی گرمایی با ماده برقرار شد، احتمال اینکه نوترون، در هر برخورد، انرژی جنبشی کسب کند با احتمال از دست دادن انرژی جنبشی توسط آن برابر است. رفتار نوترون شبیه به رفتار يك مولکول در يك گاز است و می‌توان دمای را به آن نسبت داد. رابطه بین انرژی جنبشی انتقالی متوسط هر ذره و دمای مطلق چنین است

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

به نوترونی با این انرژی جنبشی متوسط در دمای اتاق، یعنی در 300 K ، نوترون گرمایی گفته می‌شود. در این صورت، طول موج يك نوترون گرمایی، به جرم 1.67×10^{-27} کیلوگرم، برابر است با

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 = \frac{3}{2}kT$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} = 1.74 \text{ \AA}$$

این طول موج با فاصله بین اتمها در يك جامد بلورین قابل مقایسه است؛ در این شرایط

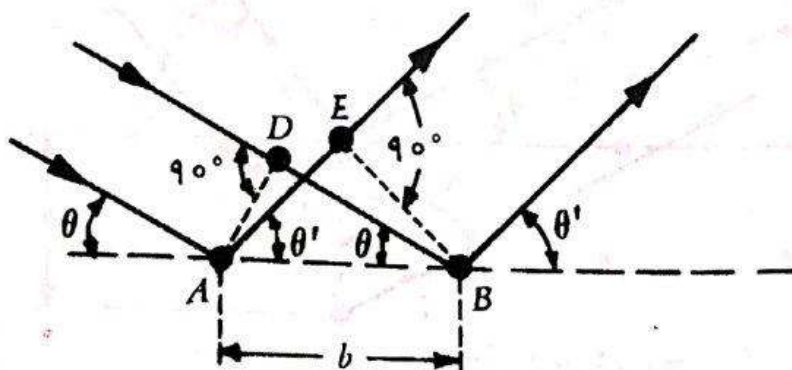
پراش فوتونی نوترونهای گرمایی قابل مشاهده است. رابطه دوبروی به هر ذره‌ای که دارای اندازه حرکت باشد يك طول موج نسبت می‌دهد. چون نوترونها ذراتی بی بارند و می‌توانند پراشیده شوند، خواص موجی آنها به داشتن بار الکتریکی وابسته نیست. وانگهی، اتمها و مولکولها، که دارای ساختار درونی اند، اثرهای پراش را نشان می‌دهند؛ بنابراین رابطه دوبروی را می‌توان حتی برای دستگاهی از ذرات هم به کار برد.

۴.۵ اثباتی برای بازتاب براگ

در استخراج رابطه براگ، معادله (۴.۵)، يك فرض مهم در نظر گرفته شد: پرتو x یا امواج الکترونی فرودی بر يك صفحه براگ (صفحه‌ای که اتمها را به عنوان مراکز پراکننده شامل است) چنان بازتابیده می‌شوند که گویی این صفحه يك آئینه نسبتاً بازتابان است. این فرض در اینجا به طور مفصل اثبات می‌شود.

می‌دانیم وقتی يك موج الکترومغناطیسی بر اتمهای يك بلور فرود می‌آید هر کدام از ذرات باردار را به نوسان وامی‌دارد و هراتم، تابشی با همان بسامد موج فرودی، منتهی در تمام جهات، دوباره گسیل می‌کند. موج دوبروی (یعنی، موج يك ذره مادی) نیز به همین طریق پراکنده می‌شود. سازنده یا ویرانگر بودن تداخل امواجی که از دو یا چند اتم پراکنده می‌شوند تنها به اختلاف مسیر آنها بستگی دارد.

تابشی را در نظر می‌گیریم که در جهت مشخص θ بر اتمهای A و B فرود می‌آید و تحت زاویه θ' پراکنده می‌شود، شکل ۱۰.۵. فاصله بین A و B برابر با b است. با توجه به شکل ۱۰.۵ درمی‌یابیم که



شکل ۱۰.۵ تابش فرودی بر اتمهای A و B که به فاصله b از هم قرار دارند.

$$BD = b \cos \theta$$

$$AE = b \cos \theta'$$

اختلاف مسیر بین دو پرتو، $BD - AE$ است، و اگر این اختلاف مسیر مضرب درستی از طول موج λ باشد، امواج پراکنده از اتمهای A و B باهم تداخل سازنده خواهند کرد

$$BD - AE = b \cos \theta - b \cos \theta' = \text{اختلاف مسیر}$$

$$b(\cos \theta - \cos \theta') = k\lambda \quad (5.5)$$

که در آن k عدد درستی (از جمله صفر) است. حال طبق شکل ۱۱.۵، تداخل سازنده از زوج دیگری از اتمهای B و C را در نظر می‌گیریم. خط BC شکل ۱۱.۵ بر خط AB شکل ۱۰.۵ عمود است. مراکز پراکنده B و C به فاصله a از هم قرار دارند؛ مجدداً زوایای پرتوهای فرودی و پرتوهای پراکنده را با θ و θ' نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل ۱۱.۵ داریم

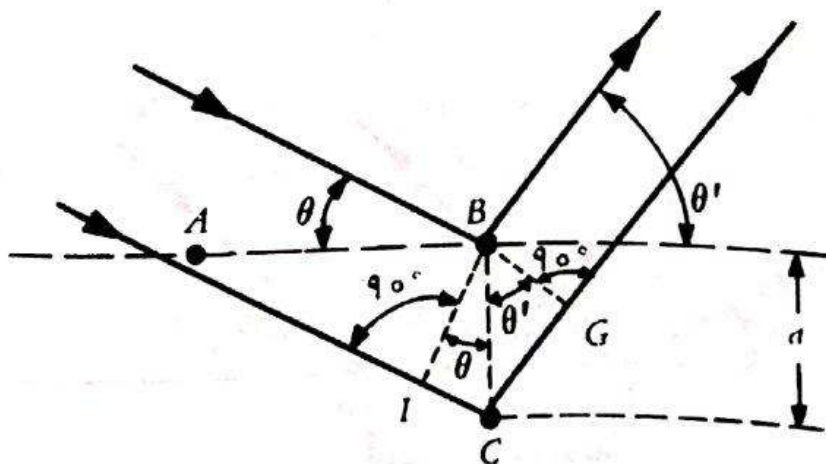
$$CF = a \sin \theta$$

$$CG = a \sin \theta'$$

مانند قبل، وقتی اختلاف مسیر مضرب درستی از طول موج باشد تداخل سازنده رخ می‌دهد

$$CF + CG = a \sin \theta + a \sin \theta' = \text{اختلاف مسیر}$$

$$a(\sin \theta + \sin \theta') = l\lambda \quad (6.5)$$



شکل ۱۱.۵ تابش فرودی بر اتمهای B و C که به فاصله a از هم قرار دارند.

که در آن l عدد درستی است. اتمهای A ، B ، و C فقط سه اتم از یک ردیف بزرگ در یک شبکه‌اند، که در آن مطابق شکل ۱۲.۵، فاصله افقی اتمهای مجاور، b و فاصله عمودی آنها، a است. در نتیجه، اگر روابط (5.5) و (6.5) هر دو برقرار شوند، در آن صورت امواج پراکنده از تمام اتمهای این آرایش هندسی به طور سازنده تداخل می‌کنند و بیشینه‌های پراش شدیدی را تولید می‌کنند.

همان‌طور که در شکل ۱۲.۵ نشان داده شده است، فرض می‌کنیم که صفحه MN (که در شکل دوبعدی به صورت یک خط است) از نقطه C طوری رسم شده است که با پرتوهای فرودی و پرتوهای پراکنده زاویه یکسان ϕ می‌سازد. در این صورت، همان‌گونه که شکل ۱۲.۵ نشان می‌دهد، داریم

$$\phi = \theta + \alpha$$

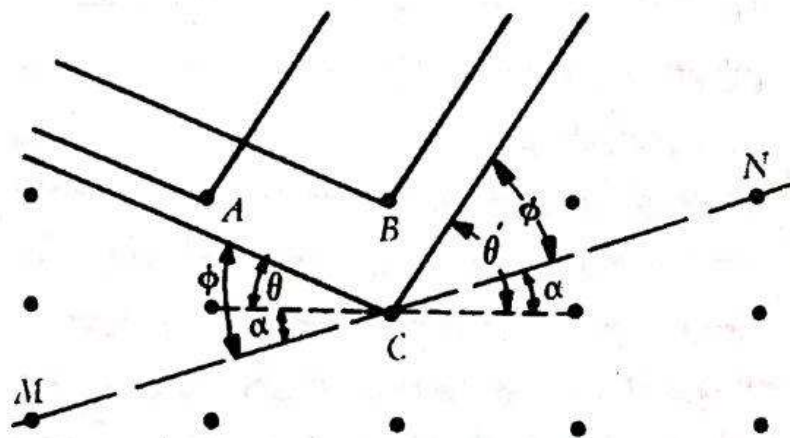
$$\phi = \theta' - \alpha \quad (7.5)$$

که در آن α زاویه بین AB و MN است. آنگاه معادله (5.5) را بدین صورت نیز می‌توان نوشت

$$b[\cos(\phi - \alpha) - \cos(\phi + \alpha)] = k\lambda$$

این رابطه به صورت زیر خلاصه می‌شود

$$2b \sin \phi \sin \alpha = k\lambda \quad (8.5)$$



شکل ۱۲.۵ تابش فرودی بر اتمهای A ، B ، و C (همان‌طور که در شکل‌های ۱۰.۵ و ۱۱.۵ نشان داده شده‌اند). خط MN طوری رسم شده است که با پرتوهای فرودی و بازتابیده زاویه یکسان ϕ می‌سازد.

همین‌طور، به کمک رابطه (۷.۵)، رابطه (۶.۵) را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a[\sin(\phi - \alpha) + \sin(\phi + \alpha)] = l\lambda$$

$$2a \sin \phi \cos \alpha = l\lambda \quad (۹.۵)$$

از تقسیم روابط (۸.۵) و (۹.۵) برهم، داریم

$$\tan \alpha = \frac{ka}{lb} \quad (۱۰.۵)$$

از این رو، زاویه α ، یعنی زاویه بین صفحه MN و سطح بلور (خط حاوی اتمهای A و B)، به وسیله رابطه (۱۰.۵) و بر حسب اعداد درست k و l و فواصل شبکه‌ای a و b داده می‌شود، نه بر حسب زوایای θ و θ' یا طول موج λ . به علاوه صفحه MN با توجه به شکل شامل یک اتم در نقطه C است. در واقع، این صفحه حاوی یک ردیف از اتمهایی است که به طور منظم قرار گرفته‌اند. یادآور می‌شویم که صفحه MN (با یک ردیف از اتمها در آن) طوری رسم می‌شد که با پرتوهای فرودی و پراکنده زوایای یکسان تشکیل می‌داد. ثابت کردیم که وقتی شرط تداخل سازنده برآورده شود، صفحه براگ را می‌توان به منزله بازتابگر امواجی که بر آن فرود می‌آیند در نظر گرفت.

۵.۵ اصل مکملی

دیدیم که باید به تابش الکترومغناطیسی و به ذرات مادی هم مشخصه‌های موجی و هم مشخصه‌های ذره‌ای نسبت داده شود. البته، در برخورد اول، این دوگانگی موجی ذره‌ای نگران کننده است. در اینجا منشأ این نگرانی و پیامد این بیان را که تابش الکترومغناطیسی و ذره مادی، هم مثل امواج و هم مثل ذرات رفتار می‌کنند بررسی خواهیم کرد و خواهیم دید که چگونه می‌توان این معما را به کمک اصل مکملی حل کرد.

در فیزیک، مفاهیم موج و ذره دو مفهوم اساسی‌اند، زیرا این دو نمایشگر تنها دو مدل ممکن انتقال انرژی‌اند؛ وقتی انرژی منتقل می‌شود همواره می‌توان انتشار آن را به کمک امواج یا ذرات توصیف کرد. در توصیف انتقال انرژی معمولی (بزرگ مقیاس) در فیزیک کلاسیک، همواره می‌توان یکی از این دو توصیف را به کار برد. به عنوان مثال، یک آشفنگی که در سطح آب استخر حرکت می‌کند یک پدیده موجی است و پرتاب توپ

* تحلیلی که در اینجا ارائه شد مبتنی بر تحلیلی است که توسط L. R. B. Elton و D. F. Jackson در مجله زیر ارائه شده است

یسیبال انتقال انرژی توسط يك «ذره» را بیان می کند. در این گونه موارد، که در آنها می توان آشفته گی در حال حرکت را مستقیماً مشاهده کرد، راجع به اینکه کدام توصیف را باید به کار برد، هرگز هیچ گونه تردیدی وجود ندارد.

اکنون به مثالهایی در مورد رفتار موج و ذره، که از صراحت کمتری برخوردارند می پردازیم. انتشار صوت از يك محیط کشان را می توان به صورت يك آشفته گی موجی درك کرد. اما آن طور که امواج آب را دیدیم امواج صوتی را نمی بینیم؛ با وجود این، توصیف موجی را با اطمینان خاطر درباره انتشار صوت به کار می بریم، زیرا تا آنجا که به تعبیر پراش و تداخل مربوط می شود، روی هم رفته، این پدیده با پدیده مربوط به امواج آب مشابه است. بنا بر این، وقتی گفته می شود که انتشار صوت جنبه های موجی را نشان می دهد مقصود آن است که می توان انتشار صوت را با يك مدل موجی تشریح کرد؛ زیرا مدل موجی با تمام مشاهدات تجربی درباره صوت توافق دارد. اکنون می خواهیم رفتار ذره ای را، آن طور که در نظریه جنبشی گازها ظاهر می شود، بررسی کنیم. هرگز مستقیماً مولکولهای يك گاز را مشاهده نمی کنیم، ولی کاملاً مطمئنیم که رفتار مولکولها نسبتاً همانند رفتار اجسام کروی سخت و خیلی کوچک است؛ زیرا آزمایشهای گوناگونی صحت این مطلب را نشان می دهند. اینجا نیز مقصود از بیان این مطلب آن است که يك مدل ذره ای تنها وسیله مناسب برای بیان رفتار مولکولهاست. از این رو، وقتی پدیده هایی را توضیح می دهیم که تا حدی از تجربه عادی ما به دورند (پدیده هایی که نمی توان جزئیات آنها را مستقیماً «مشاهده» کرد)، باز هم یکی از دو مدل توصیف را به کار می بریم، زیرا همواره یکی از آنها در توضیح حقایق تجربی موفق است.

توصیفهای موجی و ذره ای متقابلاً ناسازگار و متناقض اند. یادآور می شویم (بخش ۷۰۱) که هرگاه بخواهیم بسامد یا طول موج يك موج را با دقت بینهایت معلوم کنیم در آن صورت آن موج باید دارای گسترش بینهایت در فضا باشد. برعکس، چنانچه موج در ناحیه محدودی از فضا محبوس باشد، به طوری که انرژی آن در هر زمان به ناحیه محدودی نسبت داده شود، در آن صورت به واسطه این موضعی بودن، به ذره شباهت دارد، ولی نمی توان آن را با يك تك بسامد یا طول موج مشخص کرد؛ در عوض، باید تعداد زیادی از امواج سینوسی ایده ال را، که هر کدام دارای بسامد و طول موج مشخصی هستند برهم نهاد تا آشفته گی موجی محبوس به دست آید (بخش ۷۰۱). بنا بر این، يك موج ایده ال (یعنی موجی که بسامد و طول آن کاملاً معلوم است) روی هم رفته با يك ذره ایده ال (یعنی با ذره ای که هیچ گسترشی در فضا ندارد و بنابراین عباراتی چون بسامد و طول موج در مورد آن به کار نمی رود) ناسازگار است.

هر پدیده انتقال انرژی، خواه از مشاهده مستقیم یا تجربه ما به دور باشد خواه نباشد، باید بر حسب امواج یا بر حسب ذرات بیان شود. هر گاه بخواهیم که این پدیده را مجسم کنیم، هر گاه بخواهیم که نوعی تصویر از آنچه در برهم کنشهایی که مشاهده مستقیم وبدون واسطه آنها غیر قابل حصول است داشته باشیم، آن تصویر باید بر حسب رفتار موجی ویا بر حسب رفتار ذره‌ای باشد. هیچ شق دیگری موجود نیست؛ به دلیل وجود تناقض متقابل بین مشخصه‌های ذره‌ای و مشخصه‌های موجی، نمی‌توان توصیف ذره‌ای و توصیف موجی را به‌طور همزمان به‌کار برد. می‌توانیم و باید از یکی از این دو توصیف استفاده کنیم ولی هرگز نمی‌توانیم در یک زمان از هر دو استفاده کنیم.

در این صورت، آنچه توصیف تابش الکترومغناطیسی و ذرات مادی را مختل می‌کند، به‌کار بردن هر دو مدل موجی و ذره‌ای است؛ با وجود این هر گاه تعبیر خود را درباره آزمایشهایی که تاکنون بررسی شدند مرور کنیم، درمی‌یابیم که هرگز این دو توصیف را به‌طور همزمان به‌کار نگرفته‌ایم، زیرا همچنان که دیدیم این کار به‌طور منطقی غیر ممکن است.

نخست تابش الکترومغناطیسی را بررسی می‌کنیم. مدل موجی در تشریح آزمایشهای مربوط به تداخل و پراش به‌کار می‌رود. چون در تداخل و پراش با نوارهای متناوباً روشن و تاریک مواجهیم (یعنی، ناحیه‌هایی که در آنها شدت نور متناوباً کم و زیاد است) می‌گوییم که نور شامل امواج است و این امواج توسط نظریه موجی پیشگویی و توضیح داده می‌شوند. هرگز توصیف ذره‌ای را در مورد پراش و تداخل به‌کار نمی‌بریم. البته، اطمینان ما به مدل موجی انتشار نور، با این حقیقت که نظریه کلاسیک ماکسول در مورد امواج الکترومغناطیسی، تمامی پدیده‌های موجی مشاهده شده نور را پیشگویی می‌کند تقویت می‌شود؛ ولی، چون تمامی نظریه‌های فیزیکی بی‌پایان، آزمایشی، و دارای طبیعت غیر کامل اند نادرست است که معادله‌های ماکسول را معادله‌های نهایی یا کلام آخر درباره نظریه الکترومغناطیسی بدانیم. در واقع، به‌ناکامل بودن نظریه الکترومغناطیس کلاسیک آگاهیم، زیرا قادر به توجیه بعضی اثرهای کوانتومی نیست. به‌طور خلاصه، از مدل موجی برای توصیف انتشار نور استفاده می‌کنیم؛ مدل ذره‌ای را در مورد اثرهای تداخل و پراش نه به‌کار می‌بریم نه می‌توانیم به‌کار ببریم و نه نیازی به آن داریم.

اکنون به پدیده‌هایی که مدل ذره‌ای را برای تابش الکترومغناطیسی ایجاب می‌کنند باز می‌گردیم. این پدیده‌ها عبارت‌اند از اثر فوتوالکتریک، اثر کامپتون، تولید و نابودی زوج. تمامی این اثرها در برهم‌کنش با ذرات مادی، تابش الکترومغناطیسی نشان می‌دهند. فرض می‌کنیم که تابش حاوی فوتونهاست و به هر فوتون انرژی و اندازه حرکت ویژه‌ای

نسبت می‌دهیم. انتساب انرژی و اندازه حرکت به يك موج الکترومغناطیسی کاملاً امکانپذیر و درواقع ضروری است (بخش ۴.۱)؛ ولی انتساب آنها به يك ذره الکترومغناطیسی (فوتون) حاکی از آن است که انرژی و اندازه حرکت در نقطه خاصی از فضا، یعنی در مکان ذره جایگزیده هستند. برهم کنشهای بین تابش و ماده مستلزم توصیف ذره‌ای هستند زیرا این برهم کنشها را می‌توان به صورت برخورد، به بهترین نحو، توصیف کرد. تنها وقتی که فرض شود تابش الکترومغناطیسی حاوی ذراتی است که باهم برخورد می‌کنند می‌توان آزمایشها را درك کرد. به طور خلاصه، اگر بخواهیم که برهم کنشهای فوتون- الکترون را به كمك يك مدل متصور کنیم، آن مدل باید مدل ذره‌ای باشد؛ نه می‌توانیم و نه لازم است که مدل موجی را به کار ببریم.

تابش الکترومغناطیسی هم جنبه‌های موجی و هم جنبه‌های ذره‌ای را نشان می‌دهد، ولی نه در يك آزمایش آزمایشی که تداخل یا پراش را نشان می‌دهد مستلزم تعبیر موجی است و همزمان نمی‌توان از تعبیر ذره‌ای استفاده کرد؛ آزمایشی که برهم کنشهای فوتون - الکترون را به طور مشخص نشان می‌دهد مستلزم تعبیر ذره‌ای است و همزمان نمی‌توان از تعبیر موجی استفاده کرد. جنبه‌های موجی و ذره‌ای، خصوصیات ذاتی تابش الکترومغناطیسی هستند، و باید هر دو جنبه را بپذیریم. طبق اصل مکملی، که در سال ۱۳۵۷/۱۹۲۸ توسط نیلز بوهر پیشنهاد شد، جنبه‌های موجی و ذره‌ای تابش الکترومغناطیسی مکمل‌اند. در هر آزمایش، برای تعبیر رفتار تابش الکترومغناطیسی، بر حسب يك تصویر مرئی و بامعنی، باید یا توصیف ذره‌ای یا توصیف موجی را برگزینیم. جنبه‌های موجی و ذره‌ای مکمل‌اند، زیرا تازمانی که این دو جنبه هر دو معلوم نباشند دانش ما درباره خصوصیات تابش الکترومغناطیسی ناقص است. اما گزینش يك توصیف، که طبیعت آزمایش آن را ایجاب می‌کند، از گزینش همزمان توصیف دیگر جلوگیری می‌کند. بایك معمای واقعی رو به رو هستیم که در آن باید یکی از دوشق ممکن را اختیار کنیم. تابش الکترومغناطیسی پیچیده‌تر از آن است که بتوان آن را تنها با مفهوم ساده موجی و یا تنها با مفهوم ساده ذره‌ای درك کرد (مفاهیمی که از تجربه مستقیم معمولی ما درباره پدیده‌های بزرگ مقیاس حاصل شده‌اند). درست به همان طریق که نظریه نسبیت معلوم می‌کند که تصورات عادی ما از فضا، زمان، و جرم در پدیده‌های با سرعت زیاد کاربرد ندارند نظریه کوانتومی نیز، از طریق دوگانگی موجی - ذره‌ای، نشان می‌دهد که برای توصیف پدیده‌های زیر میکروسکوپیك مفاهیم ساده معمولی کفایت نمی‌کنند.

دیدیم که چگونه اصل مکملی بوهر جنبه‌های دوگانه موجی - ذره‌ای تابش الکترو- مغناطیسی را توضیح می‌دهد. اکنون می‌خواهیم، برای مشاهده چگونگی کاربرد اصل مکملی، دوگانگی موجی - ذره‌ای ذراتی چون الکترونها را بررسی کنیم. آزمایشهای

فراوانی طبیعت ذره گونه الکترونها را توضیح می‌دهند؛ آزمایشهای پرتوکاتودی نامسون را، که برای نخستین بار خاصیت ذره‌ای الکترونها را نشان دادند، در نظر می‌گیریم. الکترونها، در لامپ پرتوکاتودی، مسیرهای مشخصی را دنبال می‌کنند و توسط درخشهای خیلی کوچک و روشنی، برخورد خود با پرده فلوئورسان را نمایان می‌کنند. الکترونها همچنین به وسیله میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نیز منحرف می‌شوند. استنباط می‌شود که الکترونها ذره هستند (یا به عبارت بهتر، استنباط می‌شود که برای توصیف رفتار آنها، در آزمایشهای پرتوکاتودی، مدل ذره‌ای می‌تواند به کار برود)؛ زیرا هرگاه انرژی، اندازه حرکت، و بار الکتریکی الکترون در هر زمان به ناحیه کوچکی از فضا اختصاص داده شوند همه آثار مشاهده شده در آزمایشهای پرتوکاتودی دارای معنی می‌شوند. الکترونها، در برهم کنش با اجسام دیگر، چنان رفتار می‌کنند که گویی ذره هستند. می‌بینیم که طبیعت ذره‌ای الکترونها در آزمایشهای پرتوکاتودی آشکار می‌شود، و بنا بر این در این آزمایشها، با توجه به اصل مکملی، باید طبیعت موجی آنها را کنار گذاشت.

طبیعت موجی الکترونها در آزمایشهایی که پراش الکترون را نشان می‌دهند ظاهر می‌شود. در این آزمایشها فرض بر آن است که الکترونها مانند امواجی که دارای طول موج کاملاً معین اند انتشار می‌یابند؛ این امواج در فضا دارای گسترش نامعین اند و البته تعیین مکان الکترون و تعقیب حرکت آن غیر ممکن است. به طور خلاصه، آزمایشهای پراش الکترون طبیعت موجی آنها را نمایان می‌کنند و طبق اصل مکملی طبیعت ذره‌ای آنها در این آزمایشها کنار گذاشته می‌شود. جنبه‌های موجی و ذره‌ای الکترونها مکمل یکدیگرند، برای درک کامل خواص الکترون باید این هر دو جنبه را بپذیریم. الکترون یا هر ذره مادی دیگری نیز پیچیده تر از آن است که بتوان آن را تنها با مفهوم ساده موجی یا تنها با مفهوم ساده ذره‌ای درک کرد؛ برای متصور ساختن نتایج هر آزمایش بخصوصی می‌توان یکی از دو جنبه را مورد استفاده قرار داد، ولی نمی‌توان هر دو را همزمان به کار برد.

۵.۶ تعبیر امواج دو بروی به کمک نظریه احتمال

طبیعت موجی تابش الکترو مغناطیسی توسط میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نوسان کننده در فضا توضیح داده می‌شود؛ بنابراین، میدان موج وابسته به یک فوتون میدان الکترو مغناطیسی است. می‌خواهیم طبیعت امواج وابسته به یک ذره مادی را دقیقتر تحقیق کنیم و بدین سؤال نیز پاسخ دهیم که «وقتی گفته می‌شود یک الکترون یا هر ذره مادی دیگری دارای خواص موجی است، در آن صورت آنچه موج می‌زند چیست؟»

نخست پرده‌ای را در نظر می‌گیریم که توسط باریکه تکفامی از تابش الکترومغناطیسی (عمود بر سطح پرده) روشن می‌شود. هنگامی که شدت نور نسبتاً زیاد است به نظر می‌رسد که سراسر سطح به‌طور یکنواخت روشن شده است؛ از طرف دیگر يك صفحه عکاسی که در محل پرده در معرض نور قرار گرفته است، پس از ظاهر شدن، تاریکی یکنواختی را در سرتاسر صفحه نشان خواهد داد. وقتی شدت باریکه نور زیاد است، تعداد فوتونهای که به پرده می‌رسند آنقدر زیاد است که طبیعت ذاتاً دانه‌ای و گسسته تابش الکترومغناطیسی، به علت زیادی تعداد فوتونها، مبهم می‌شود و درخشهای روشنی که به‌طور مجزا و کتره‌ای مرتب شده‌اند يك روشنائی ظاهراً پیوسته و ثابت را نشان می‌دهند. شدت روشنائی (I) که همان انرژی در واحد سطح و در واحد زمان است از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$I = \epsilon_0 \epsilon^2 c$$

که در آن ϵ گذردهی الکتریکی فضای تهی و ϵ بسزرگی میدان الکتریکی لحظه‌ای در هر نقطه بروی پرده است (بخش ۴.۱)*.

فرض می‌کنیم که شدت باریکه فوق‌العاده ضعیف شود، در آن صورت، به جای سطحی که به‌طور یکنواخت روشن شده است مجموعه‌ای از درخشهای مجزا و روشن که به‌طور کتره‌ای در سراسر سطح صفحه مرتب شده‌اند دیده خواهد شد. هر درخش روشنی با ورود يك فوتون متناظر است.** مکان و زمان برخورد يك فوتون را با پرده نمی‌توان پیشگویی کرد، زیرا توزیع فوتونها کاملاً کتره‌ای است؛ ولی تعداد متوسط فوتونهای را که در واحد زمان به واحد سطح می‌رسند می‌توان پیشگویی کرد؛ این تعداد همان شار فوتونی، N ، است. شدت يك باریکه تکفام بر حسب شار فوتونی به صورت زیر داده می‌شود

$$I = (h\nu)N \quad (20.4)$$

که در آن $h\nu$ انرژی يك فوتون است. فرض کنید به جای افزایش شدت، که موجب می‌شود تا پرده به‌طور یکنواخت روشن شود، از يك باریکه خیلی ضعیف استفاده کنیم و مکان هر درخشی را که به پرده می‌رسد

* البته می‌توانستیم به جای اینکه شدت را بر حسب میدان الکتریکی بنویسیم آن را بر حسب میدان مغناطیسی نیز بیان کنیم

$$I = B^2 c / \mu_0$$

** در واقع، به جای چشم یا يك صفحه عکاسی، دستگاههای پیچیده می‌توانند ورود يك به يك فوتونها را ثبت کنند.

ثبت کنیم؛ آنگاه پس از گذشت يك زمان طولانی، خواهیم دید که پرده مجدداً به طور یکنواخت پوشانده می‌شود.

وضعی را که مورد بحث قرار دادیم تقریباً همانند وضعی است که در نظریه جنبشی گازها با آن مواجه بودیم. در آنجا فشار ظاهراً پیوسته يك گاز بر دیواره‌های ظرف را به براینده برخورد های فردی مولکولها با دیواره ظرف نسبت می‌دادیم. ورود مولکولها اساساً کتره‌ای و گسسته است، اما به دلیل زیاد بودن تعداد آنها، براینده برخوردها يك فشار پیوسته را نشان می‌دهد.

يك باریکه نور تکفام با شدت خیلی پایین را $1000 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2$ (تقریباً يك صد میلیونیم شدت نور ستاره در سطح زمین) در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که این باریکه حاوی فوتونهای فرابنفشی است که انرژی هر کدام $8000 \times 10^{-19} \text{ J}$ $= 5000 \text{ eV}$ است. در این صورت شار فوتونی به صورت زیر خواهد بود

$$N = \frac{I}{h\nu} = \frac{1000 \times 10^{-13} \text{ W/m}^2}{8000 \times 10^{-19} \text{ J/photon}}$$

$$= 125 \times 10^5 \text{ photon/m}^2\text{-s}$$

$$= 125 \text{ photon/cm}^2\text{-s}$$

این بدان معناست که در هر ثانیه تعداد ۱۲۵ درخش روشن در يك سانتی متر مربع از سطح پرده مشاهده خواهد شد. البته، مشاهده کسری از يك فوتون غیر ممکن است، در نتیجه هرگز ۱۲۵ فوتون نخواهیم دید؛ اما مشاهده ۱۱ درخش در يك بازه زمانی و ۱۳ درخش در بازه زمانی دیگر، و به همین ترتیب تا آخر امکانپذیر است؛ و بدین ترتیب متوسط تعداد درخشا در هر ثانیه ۱۲۵ خواهد بود. به علاوه، توزیع فضایی فوتونها روی 1 cm^2 برای تمام بازه‌های يك ثانیه‌ای یکسان نخواهد بود؛ درخشا به طور کتره‌ای توزیع خواهند شد و تنها در يك مدت زمان طولانی به يك توزیع یکنواخت نزدیک خواهند شد. شار فوتونی زمان و مکان هر فوتون را دقیقاً به دست نمی‌دهد، بلکه تنها احتمال مشاهده آن را به دست می‌دهد

احتمال مشاهده يك فوتون $N \propto$

شدت تابش الکترومغناطیسی تکفام را یا توسط توصیف موجی $I = \epsilon_0 E^2 c$ و یا به وسیله توصیف ذره‌ای $I = h\nu N$ می‌توان تعریف کرد. چون در شدت کمیتی وجود دارد که در هر دو توصیف دارای مفهوم دقیقی است، مطلب بسالا از اهمیت زیادی برخوردار است. شدت، ارتباط بین دو مدل نامتجانس را برقرار می‌کند.

می‌خواهیم ببینیم که در توصیف فوتونی نور چه مفهوم جدیدی را می‌توان به مجذور شدت میدان الکتریکی، $\mathcal{E}^2$ ، نسبت داد. چنانچه دو عبارت مربوط به شدت را با هم برابر قرار دهیم، داریم

$$I = h\nu N = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 c$$

بنابراین

$$N \propto \mathcal{E}^2$$

و

احتمال مشاهده يك فوتون $\propto \mathcal{E}^2$

احتمال مشاهده يك فوتون در نقطه ازضا با مجذور شدت میدان الکتریکی در آن نقطه متناسب است.

از این رو، از دیدگاه نظریه کوانتومی، میدان الکتریکی نه تنها کمیتی است که نیروی الکتریکی به ازای واحد بار الکتریکی را به دست می‌دهد، بلکه همچنین کمیت یا تابعی است که مجذور آن احتمال مشاهده يك فوتون را در هر مکان مفروضی به دست می‌دهد. گرچه نظریه الکترومغناطیسی کلاسیک قادر نیست خصوصیات دقیقاً کوانتومی تابش الکترومغناطیسی را به دست بدهد، ولی قادر است با محاسبه مقادیر $\mathcal{E}^2$ احتمال مشاهده فوتونها را به دست بدهد.

مفهوم طبیعت موجی يك ذره مادی مانند الکترون را می‌توان به طریق زیر روشن کرد. فرض می‌کنیم که رابطه بین احتمال مشاهده يك ذره و مجذور دامنه موج آن دقیقاً همانند رابطه بین احتمال مشاهده يك فوتون با جرم سکون صفر و مجذور دامنه موج آن (میدان الکتریکی) باشد. دامنه موج وابسته به يك ذره را با ψ نمایش می‌دهیم و آن را تابع موج می‌نامیم.

تابع موج ψ کمیتی است که مجذور آن، ψ^2 ، با احتمال مشاهده يك ذره مادی متناسب است.

از این رو، اگر ψ نمایشگر تابع موج در مکان x باشد، احتمال اینکه ذره بین x و $x+dx$ مشاهده شود برابر است با $\psi^2(x)dx$.

احتمال مشاهده يك ذره در بازه dx با $\psi^2 dx$ متناسب است.

بنابراین تابع موج يك ذره همانند میدان الکتریکی يك فوتون است؛ و همچنانکه میدان الکتریکی، عموماً، تابعی از مکان و زمان است، تابع موج نیز تابعی از مکان و زمان است.

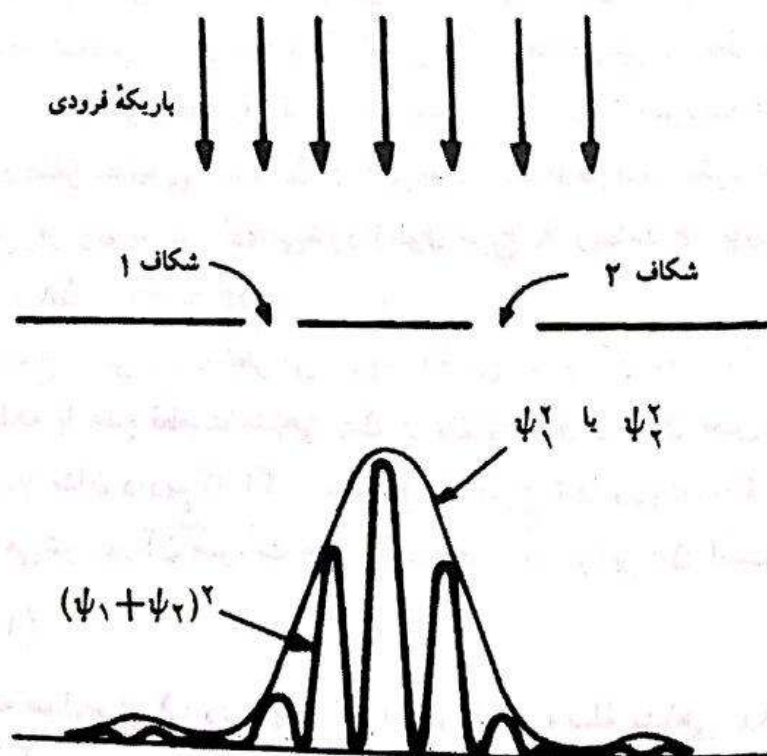
تعیین مکان مخصوص يك فوتون در يك زمان ویژه، با قطعیت کامل، غیرممکن است؛ اما تعیین احتمال مشاهده آن به كمك $\mathcal{E}$ امكانپذیر است. به طور مشابه، تعیین مکان مخصوص يك ذره در يك زمان ویژه با قطعیت کامل غیرممکن است، ولی به كمك $\mathcal{E}$ ، احتمال مشاهده آن را می توان تعیین کرد. از این رو، تابع موج يك ذره، علی الاصول به تعبیر احتمال مکان آن ذره منجر می شود.

تعبیر طبیعت موجی ذرات مادی بر حسب احتمالات، نخستین بار در سال ۱۹۲۶/۱۳۰۵ توسط ماکس بورن ارائه شد. آن شاخه از فیزیک کوانتومی که مسئله یافتن مقادیر $\mathcal{P}$ را بررسی می کند مکانیک موجی، یا مکانیک کوانتومی نام دارد. دو مبتکر اصلی مکانیک موجی ذرات اروین شرودینگر ۱۹۲۶/۱۳۰۵ و ورنر هایزنبرگ ۱۹۲۵/۱۳۰۴ بودند که مستقلاً مکانیک کوانتومی را با صورتهای ریاضی مختلف، ولی هم ارز، فرمولبندی کردند. درست همان گونه که نظریه الکترومغناطیسی ماکسول در معادلات ماکسول که مبنای محاسبه مقادیر $\mathcal{E}$ هستند خلاصه می شود، مکانیک موجی ماده نیز با معادله شرودینگر که مبنای محاسبه مقادیر $\mathcal{P}$ در هر مسئله فیزیک کوانتومی است مشخص می شود. ولی این همانندی در همینجا متوقف می شود. در حالی که میدان الکتریکی، که منشأ آن در بارهای الکتریکی است، نه تنها احتمال مشاهده يك فوتون بلکه همچنین نیروی الکتریکی وارد بر واحد بار الکتریکی مثبت را به دست می دهد، تابع موج معادله شرودینگر تنها بر حسب تغییر احتمال دارای مفهوم فیزیکی است: این تابع هیچ نوع نیرویی را نشان نمی دهد. تابع موج، مستقیماً قابل اندازه گیری یا قابل مشاهده نیست؛ ولی بیشترین اطلاعاتی را که می توان در رابطه با دستگاه اجسام به دست آورد و همچنین کلیه کمیتهای قابل اندازه گیری، همچون انرژی و اندازه حرکت و نیز احتمال مکان را می توان از آن به دست آورد. در بخش ۱۰.۵ معادله شرودینگر را به دست می آوریم و آن را در چند وضع ساده به کار می بریم.

آزمایشهای تداخل به كمك تداخل سنج مایکلسون و چشمه های خیلی ضعیف نور انجام شده اند. چشمه ها در واقع آنچنان ضعیف اند که به طور متوسط تنها يك فوتون بین چشمه نور و پرده مشاهده، در هر زمانی، یافت می شود. در دستگاه مایکلسون نقش تداخل از تداخل بین دو باریکه نوری ناشی می شود. نور دو مسیری را که از يك آینه نیم نقره اندود در دو جهت عمود بر هم دور می شوند دنبال می کند.* می توان تصور کرد که وقتی يك تك فوتون از دستگاه می گذرد تنها یکی از دو مسیر ممکن را طی می کند؛ با وجود این، نتایج تجربی، به كمك داده های گردآوری شده در يك زمان طولانی، نقش تداخل معمولی با نوارهای

متناوباً روشن و تاریک را نشان می‌دهد، و این می‌رساند که تک فوتون هر دومسیر را به‌طور همزمان طی می‌کند و با خود تداخل می‌کند. اصل مکملی این پارادوکس ظاهری را برطرف می‌کند. اگر بگوییم که فوتون یکی از دومسیر ممکن را طی می‌کند آن را جایگزیده می‌کنیم؛ یعنی آن را به‌عنوان یک ذره تلقی می‌کنیم و جنبه‌های موجی آن را به‌حساب نمی‌آوریم. از طرف دیگر، چنانچه از نقش تداخل فوتون سخن به میان آوریم آن را به‌عنوان یک موج می‌پذیریم. در نظر گرفتن هر دو طریق به یکباره هم بی‌معنی است.

در عبور امواج از دوشکاف موازی نیز وضع مشابهی دیده می‌شود. وقتی یکی از دوشکاف بسته باشد نقش حاصل نقش پراش یک شکاف نوعی است: طبق شکل ۸.۱ الف، این نقش دارای یک بیشینه مرکزی پهن است که در کنار یک بیشینه ضعیفتر (بیشینه ثانوی) قرار دارد. وقتی هر دو شکاف باز باشند، نقش حاصل آن‌طور است که در شکل ۱۳.۵ نشان داده شده است: ساختار ریز تداخلی در داخل یک پوش پراش. این نقش صرفاً حاصل برهم‌نهی نقشهای پراش دو تک شکاف نیست؛ تداخل بین امواجی که از هر دو شکاف



شکل ۱۳.۵ پراش دوشکافی ذرات. توابع موج ψ_1 و ψ_2 نقش پراش را وقتی هر یک از دوشکاف باز باشد به‌دست می‌دهند؛ وقتی هر دو شکاف باز باشند تابع موج برهم نهاده شده $\psi_1 + \psi_2$ این نقش را به‌دست می‌دهد (فاصله بین شکافها در این شکل بسیار بزرگ شده است).

می‌گذرند علت تغییرات سریع در شدت است. به‌طور خلاصه، در حالتی که امواج می‌توانند از چشمه تا نقطه مشاهده دویا چند مسیر را برگزینند، مسئله را ابتدا با برهم نهادن تابع موج (یا میدانهای الکتریکی) دوسیر مجزا حل می‌کنیم تا تابع موج منتهجه (یا میدان الکتریکی) به دست آید؛ آنگاه تابع موج منتهجه را مجذور می‌کنیم تا احتمال (یا شدت) به دست آید. این بدان معنی است که، اگر ψ_1 و ψ_2 نمایشگر توابع موج برای عبور جداگانه از دوشکاف ۱ و ۲ باشند، در آن صورت $(\psi_1 + \psi_2)^2$ ، و نه $\psi_1^2 + \psi_2^2$ ، احتمال مشاهده ذره را بر پرده به دست می‌دهد. آنگاه، چنانچه يك تك الكترون يا يك فوتون به طرف يك زوج شكاف متوجه شود، نمی‌توانیم بگوییم که الكترون یا فوتون از کدام شكاف عبور خواهد کرد؛ باید به زبان امواج صحبت کنیم و بگوییم که عملاً از هر دو شكاف عبور می‌کنند.

۲.۵ اصل عدم قطعیت

اصل مکملی نشان می‌دهد که کاربرد همزمان توصیفهای موجی و ذره‌ای در مورد يك ذره مادی یا يك فوتون غیر ممکن است. در صورتی که یکی از این دو توصیف را برگزینیم دیگری را کنار گذاشته‌ایم. برای مثال، اگر تابش الکترومغناطیسی را به زبان ذرات بیان کنیم و مکان فوتون را در هر لحظه با دقت کامل تعیین کنیم در آن صورت عدم قطعیت در مکان و زمان هر دو صفرند، یعنی $\Delta x = 0$ و $\Delta t = 0$ ؛ اما از طرف دیگر، عدم قطعیت در آنچه که به موج فوتون نسبت داده می‌شود (طول موج λ و بسامد ν) بینهایت بزرگ خواهد بود، $\Delta \lambda = \infty$ و $\Delta \nu = \infty$.

حال يك وضع میانی را در نظر می‌گیریم، وضعی که در آن مکان يك فوتون را، نه با قطعیت کامل، بلکه با عدم قطعیت متناهی Δx و Δt در مکان و زمان تعیین می‌کنیم. در بخش ۷.۱ نشان دادیم که اگر بسامد ν يك موج تنها در يك بازه زمانی متناهی Δt اندازه‌گیری می‌شود در آن صورت عدم قطعیت در بسامد برابر $\Delta \nu$ است

$$\Delta \nu \Delta t \geq 1 \quad (۱۶.۱) \text{ و } (۱۱.۵)$$

همین‌طور، چنانچه طول موج λ ، در جهت انتشار موج، در فاصله متناهی Δx اندازه‌گیری شود، عدم قطعیت آن برابر $\Delta \lambda$ خواهد بود با

$$\Delta x \Delta \lambda \geq \lambda^2 \quad (۱۹.۱) \text{ و } (۱۲.۵)$$

باید توجه داشت که این روابط بر مبنای ملاحظات کاملاً کلاسیک و بدون توجه به ملاحظات کوانتومی (حداقل به‌طور صریح) استخراج شده‌اند. اما در فیزیک کوانتومی نتایج مهمی

ایجاد می کنند؛ زیرا به هر جسمی با انرژی E و اندازه حرکت p باید بسامد $\nu = E/h$ و طول موج $\lambda = h/p$ را نسبت داد.

در این صورت عدم قطعیت در بسامد $\Delta\nu$ دلالت بر عدم قطعیت ΔE در انرژی دارد که به صورت زیر بیان می شود

$$\Delta E = h \Delta \nu \quad (۱۳.۵)$$

با حذف $\Delta\nu$ از روابط (۱۱.۵) و (۱۳.۵) خواهیم داشت

$$\Delta E \Delta t \geq h \quad (۱۴.۵)$$

از این رو، حاصل ضرب عدم قطعیت انرژی در عدم قطعیت زمان، لااقل با ثابت پلانک، h ، برابر است.* تفصیل رابطه (۱۴.۵) به شرح زیر است. چنانچه جسمی (یک فوتون یا یک الکترون و یا حتی دستگاهی از ذرات) برای مدت زمان Δt در حالت انرژی E وجود داشته باشد در آن صورت انرژی جسم حداقل به مقدار $h/\Delta t$ دارای عدم قطعیت خواهد بود؛ بنابراین، تنها اگر جسمی برای زمان نامتناهی موجود باشد ($\Delta t = \infty$)، انرژی آن با دقت بینهایت معلوم خواهد شد ($\Delta E = 0$). معادله (۱۴.۵) شکلی از اصل عدم قطعیت با اصل عدم موجییت است که در سال ۱۹۲۷/۱۳۰۶ توسط ورنر هایزنبرگ برای نخستین بار مطرح شد. پس از آنکه این اصل را در فرمولبندی دیگری بیان کنیم، به مفهوم دقیقتر آن دست خواهیم یافت.

عدم قطعیت در طول موج $\Delta\lambda$ جسمی با طول موج $\lambda = h/p_x$ (در جهت X) توسط رابطه زیر به عدم قطعیت در بزرگی اندازه حرکت Δp_x آن مربوط می شود

$$\Delta\lambda = \frac{h}{p_x^2} \Delta p_x$$

با جایگزینی این معادله در رابطه (۱۲.۵) خواهیم داشت

$$\Delta\lambda \Delta x = \frac{h \Delta p_x}{p_x^2} \Delta x \geq \lambda^2$$

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{(\lambda p_x)^2}{h}$$

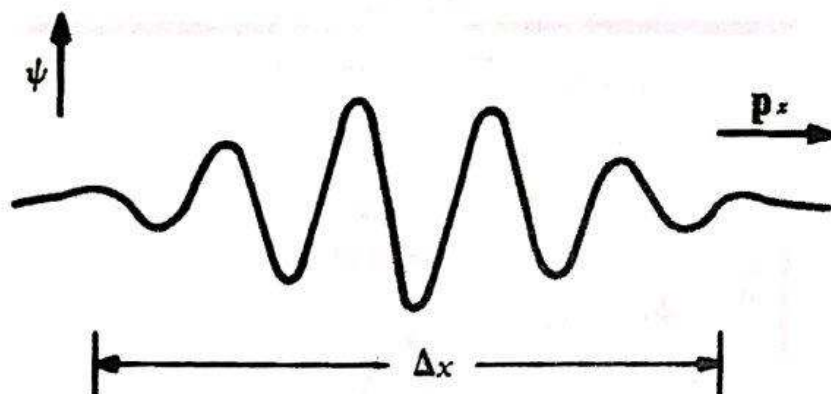
$$\Delta p_x \Delta x \geq h \quad (۱۵.۵)$$

* مقدار ثابت موجود در طرف راست معادله (۱۴.۵) به تعریف دقیق عدم قطعیت های ΔE و Δt بستگی دارد. با در نظر گرفتن قرار داد محتاطانه ای که در بخش ۷.۱ مورد استفاده قرار گرفت، این ثابت همان h است؛ ولی اگر ΔE و Δt نمایشگر مقادیر ریشه میانگین مربعی تعدادی از اندازه گیریهای مجزا باشند، در آن صورت این ثابت برابر $h/4\pi$ خواهد بود.

که این فرمولبندی دیگری از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است. فرض شد که طول موج درفاصله متناهی Δx درجهت انتشار موج اندازه‌گیری شود؛ با توجه به دوگانگی موجی ذره‌ای، می‌توان کمیت Δx را به‌عنوان عدم قطعیت در مکان ذره تعبیر کرد. از این رو، رابطه عدم قطعیت در معادله (۱۵.۵) بیان می‌دارد که حاصلضرب عدم قطعیت مکان در عدم قطعیت اندازه حرکت مساوی یا بزرگتر از ثابت پلانک است. توجه کنید که اندازه حرکت مکان که در این معادله به آنها اشاره شد، هر دو دیک جهت اندازه‌گیری می‌شوند: بنابراین رابطه عدم قطعیت، تعیین همزمان و بینهایت دقیق اندازه حرکت خطی یک ذره یا فوتون و مکان متناظر این اندازه حرکت غیرممکن است. گرچه $\Delta p_x \Delta x$ برابر با یا بزرگتر از $\hbar$ است اما حاصلضرب $\Delta p_y \Delta x$ می‌تواند صفر باشد؛ هیچ محدودیتی در اندازه‌گیری همزمان اندازه حرکت و تغییر مکان، که برهم عمودند، وجود ندارد.

محدودیت اساسی در مورد قطعیت اندازه‌گیریهای انرژی و زمان (یا مکان و اندازه حرکت) با اصل مکملی هماهنگ است. چنانچه طبیعت ذره‌ای یک ذره، مانند الکترون، کاملاً نمایان شود در آن صورت Δx و Δt هر دو باید صفر شوند. بنابراین، وقتی جنبه ذره‌ای را برمی‌گزینیم جنبه موجی الزاماً کنار گذاشته می‌شود. در نتیجه کلیه کمیت‌های v, E, λ, p کاملاً دارای عدم قطعیت‌اند؛ این مطلب یا از اصل عدم قطعیت یا از اصل مکملی ناشی می‌شود. از طرف دیگر، در صورتی که بخواهیم مشخصه‌های موجی یک ذره مادی یا تابش الکترومغناطیسی به‌طور کامل معین شوند، یعنی اگر $\Delta v = 0$ و $\Delta \lambda = 0$ (همچنین $\Delta E = 0$ و $\Delta p = 0$) باشد، در آن صورت، با توجه به اصل مکملی یا اصل عدم قطعیت، نمی‌توان همزمان با آن مشخصه‌های ذره‌ای را در فضا و در زمان تعیین کرد و x و t کاملاً دارای عدم قطعیت خواهند بود.

فرض کنید که می‌خواهیم الکترونی را به کمک خواص موجی آن نمایش دهیم و با وجود این آن را تا حدی در فضا جایگزیده می‌کنیم. نمی‌توان یک تک موج سینوسی را به این الکترون نسبت داد؛ زیرا چنین موجی تا بینهایت گسترش می‌یابد و قطعاً جایگزیده نیست. ولی، می‌توان تعدادی موج سینوسی را که بسامدهای آنها در گستره بسامدهای Δv باهم اختلاف دارند برهم نهاد و لذا، همان گونه که در بخش ۷.۱ شرح داده شد، یک بسته موج به دست آورد. امواج مؤلفه در ناحیه محدودی از فضا، Δx ، که به‌عنوان موضع تاحدی نامعین «ذره» شناخته می‌شود، به‌طور سازنده تداخل می‌کنند و حاصل تداخل تابع موج ψ ، که در شکل ۱۴.۵ نشان داده شده است، خواهد بود. چون گستره‌ای در بسامد، Δv ، و گستره‌ای در طول موج، $\Delta \lambda$ ، وجود دارد اندازه حرکت و انرژی وابسته به آنها الزاماً نامعین‌اند؛ و پیشگویی دقیق اینکه کی و کجا بسته موج به نقطه دیگر خواهد رسید و در آن نقطه اندازه



شکل ۱۴.۵ تابع موج يك بسته موج.

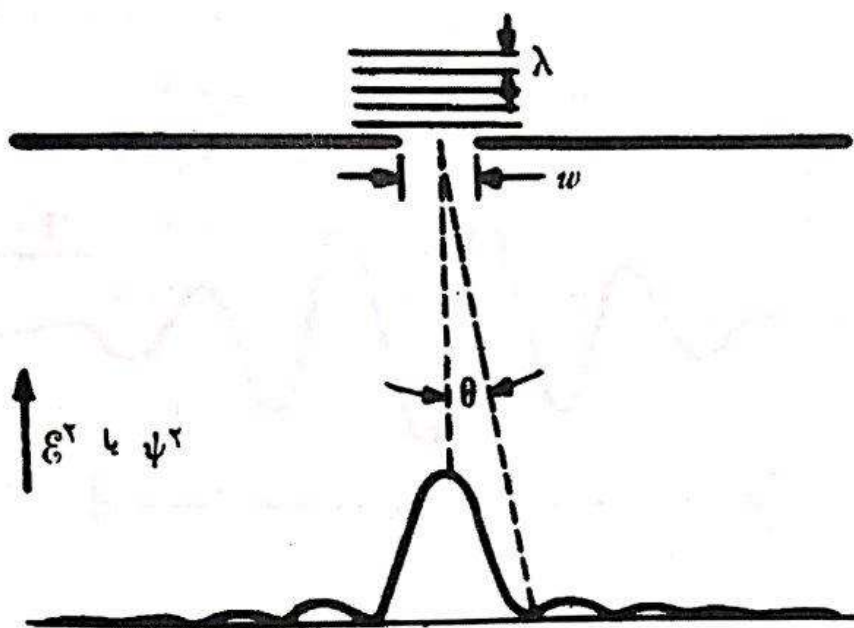
حرکت وانرژی آن چقدر خواهد بود غیرممکن است. رابطه عدم قطعیت که حاکی از عدم قطعیتی در انرژی، به بزرگی $h/\Delta t$ در بازه زمانی Δt است، همچنین حاکی از آن است که قانون بقای انرژی می تواند به مقدار $\Delta E = h/\Delta t$ ، ولی تنها برای بازه زمانی Δt ، نقض شود. هر چه مقدار انرژی قرض شده یا پس داده شده بیشتر باشد بازه زمانی که در آن عدم بقای انرژی ممکن است رخ دهد کوتاهتر خواهد بود. به همین ترتیب، عدم قطعیت در اندازه حرکت يك ذره $(h/\Delta x)$ دلالت بر آن دارد که ممکن است قانون بقای اندازه حرکت نقض شود، ولی تنها به مقدار $\Delta p = h/\Delta x$ و در ناحیه Δx از فضا.

برای به دست آوردن اصل عدم قطعیت به طریقی دیگر، پراشیدگی امواج به وسیله يك شکاف بالبه های موازی را در نظر می گیریم. يك مسوج تخت تکفام بر شکافی به پهنای w فرود می آید و همان گونه که در شکل ۱۵.۵ نشان داده شده است، نقش پراش بر پرده ای که باشکاف فاصله دارد تشکیل می شود. موضع نقاط با شدت صفر به وسیله معادله زیر داده می شود*

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{w} \quad (16.5)$$

که در آن λ طول موج $n = 1, 2, 3, \dots$ است. چون سطح زیر بیشینه مرکزی به مراتب

* رك بخش ۳۹. ۳ کتاب زیر



شکل ۱۵.۵ نقش پراش يك موج تحت تكفام كه بر شكافی به پهنای w فرود آمده است.

از سطح زیره‌ریشینه دیگری بیشتر است، لذا شدت کل دریشینه مرکزی خیلی بیش از شدت کل دره‌ریشینه ثانوی است. درواقع، سطح زیره‌ریشینه مرکزی تقریباً سه برابر سطح زیر تمام ریشینه‌های دیگر است؛ بنا براین، به‌طور تقریب، سه‌چهارم انرژی عبوری از شکاف در این ناحیه مرکزی قرار می‌گیرد. حدود این ناحیه مرکزی به‌وسیله معادله زیر و با $n=1$ مشخص می‌شود

$$\sin\theta = \pm \frac{\lambda}{w} \quad (17.5)$$

تاکنون مشخص نکرده‌ایم که چه نوع موجی به‌وسیله شکاف پراشیده می‌شود. چنانچه موج شامل تابش الکترومغناطیسی باشد در آن صورت شدت نقش پراش بامجذور میدان الکتریکی در پرده، یعنی با E^2 ، متناسب خواهد بود. از طرف دیگر، اگر موج شامل باریکه‌ای از الکترون‌ها باشد شدت نقش پراش با ψ^2 متناسب است. ψ^2 مجذور تابع موج در پرده است و احتمال یافتن يك الکترون را در هر نقطه واقع بر پرده به دست می‌دهد. تنها هنگامی که طول موج امواج، خواه از تابش الکترومغناطیسی و خواه از يك ذره مادی، با پهنای شکاف قابل مقایسه باشد اثرهای پراش مشخص می‌شوند (شکل ۸.۱)؛ در صورتی که طول موج امواج از پهنای شکاف خیلی کمتر باشد نقش شدت بر روی پرده، متناظر با سایه هندسی

لبه‌های شکاف است.

اکنون فرض کنید که مقدار تابش یا تعداد الکترون‌ها را (بسته به مورد) به شدت کاهش می‌دهیم. آنگاه، وقتی پرده را مشاهده می‌کنیم، دیگر تغییرات همواری را در طول آن نمی‌بینیم بلکه، در عوض، فوتون‌ها یا الکترون‌ها یکی یکی به پرده می‌رسند. شدت نقش پراش برای فوتون‌ها، λ^2 و برای الکترون‌ها، λ^3 است؛ از این رو، در شکل ۱۵.۵ شدت نمایشگر احتمال برخورد يك ذره به نقطه معینی از پرده است. با احتمال ۷۵ درصد ذره در ناحیه مرکزی نقش پراش فرود می‌آید؛ و با احتمال کمتر به نواحی دیگر، و با احتمال صفر ذره به صفرهای نقش خواهد رسید. در روشنایی خیلی پایین درخشهای روشن در سطح وسیعی از پرده ظاهر می‌شوند. با گذشت زمان، ذرات بیشتر و بیشتری بر پرده انبارده می‌شوند و درخشهای روشن و مجزا گردهم می‌آیند تا نقش شدتی را که دارای تغییرات هموار است (و با نظریه موجی پیشگویی می‌شود) تشکیل دهند.

پیشاپیش هیچ راهی برای پیشگویی اینکه هریک از الکترون‌ها یا فوتون‌ها در کجا بر پرده فرود می‌آیند وجود ندارد. تمام آنچه که مکانیک موجی به ما می‌گوید احتمال برخورد يك ذره به نقطه‌ای واقع بر پرده است. قبل از اینکه ذرات از شکاف عبور کنند، اندازه حرکت آنها، هم از لحاظ بزرگی (امواج تکفام) و هم از لحاظ جهت (در این حالت عمودی و به طرف پایین) با دقت کامل معلوم اند. مکان ذرات در امتداد خطی در جهت X ، که قبل از رسیدن آنها به شکاف کاملاً نامعین است، پس از عبور از شکاف با عدم قطعیتی برابر $\Delta x = w$ ، یعنی برابر با پهنای شکاف، معلوم می‌شود. ولی آنچه نامعلوم می‌ماند این است که هریک از ذرات دقیقاً به کجای پرده خواهند رسید. هر ذره تقریباً شانس سه بریک دارد تا به جایی واقع در ناحیه مرکزی، که مرزهای آن توسط رابطه (۱۷.۵) مشخص می‌شوند، فرود آید. همان طور که به آسانی در شکل ۱۶.۵ نیز دیده می‌شود، عدم قطعیتی لااقل به بزرگی $p \sin \theta$ در مؤلفه X اندازه حرکت p وجود خواهد داشت. بنابراین می‌توان نوشت

$$\Delta p_x \geq p \sin \theta$$

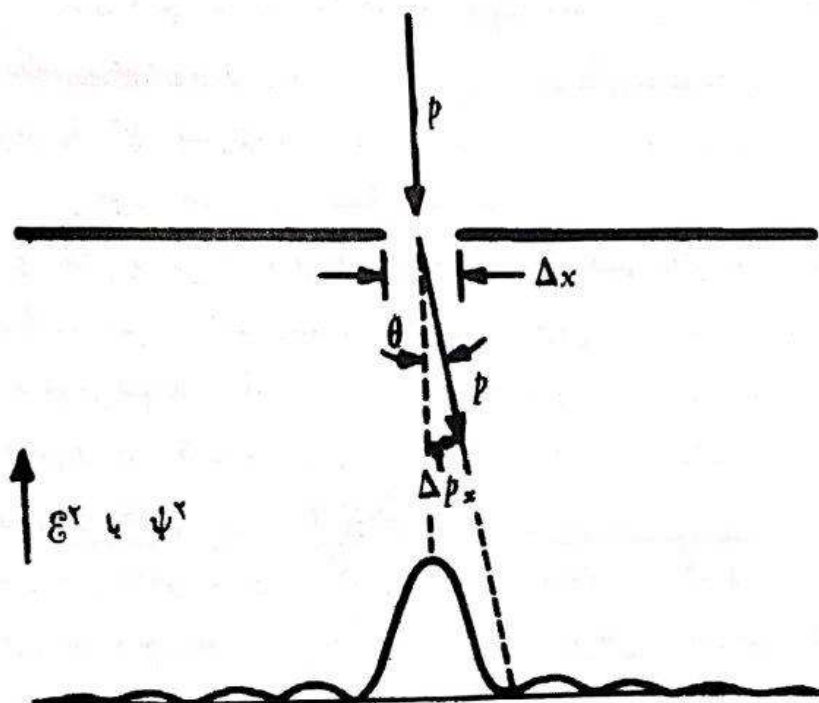
با استفاده از رابطه (۱۷.۵) داریم

$$\Delta p_x \geq \frac{p\lambda}{\Delta x}$$

و چون $p = h/\lambda$ است، لذا به رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ دست خواهیم یافت

$$\Delta p_x \Delta x \geq h$$

اکنون فرض می‌کنیم که Δx در مثال ما خیلی بزرگ باشد؛ یعنی شکاف خیلی پهن باشد. آنگاه عدم قطعیت در مکان افزایش می‌یابد و نمی‌توان با اطمینان گفت که الکترون



شکل ۱۶.۵ تصویری از عدم قطعیت در اندازه حرکت يك ذره که از يك شکاف عبور کرده است.

در کجای امتداد x قرار دارد. ولی متناسب با آن عدم قطعیت در اندازه حرکت کاهش می‌یابد و این را می‌توان با این حقیقت که اثرهای پراش کمتر واضح می‌شوند و اساساً تمامی الکترونها به داخل سایه هندسی فرود می‌آیند نشان داد (شکل ۸.۱) برعکس، همچنانکه پهنای شکاف کاهش می‌یابد و Δx خیلی کوچک می‌شود، نقش پراش در طول پرده پهن می‌شود و اگر بخواهیم قطعیت در مکان الکترون را افزایش دهیم متناظر با آن باید عدم قطعیت بزرگتری در اندازه حرکت الکترون را بپذیریم.

می‌بینیم که وقتی پهنای شکاف خیلی بزرگتر از طول موج است ذرات، برای فرود آمدن به داخل سایه هندسی، بدون انحراف از شکاف عبور می‌کنند. این مطلب با مکانیک کلاسیک، که در آن از جنبه موجی ذرات مادی چشمپوشی می‌شود، توافق دارد. از این رو، بین اپتیک موجی و اپتیک پرتوی و همچنین بین مکانیک موجی و مکانیک کلاسیک تشابه نزدیکی وجود دارد. هرگاه طول موج از ابعاد موانع یا دریچه‌هایی که نور با آنها مواجه می‌شود خیلی کوچکتر باشد، اپتیک پرتوی تقریب خوبی از اپتیک موجی است؛ همین طور، هرگاه طول موج يك ذره از ابعاد موانع یا روزنه‌هایی که ذرات مادی با آنها روبه‌رو هستند

خیلی کوچکتر باشد مکانیک کلاسیک تقریب خوبی از مکانیک موجی است. به طور نمادی می توان نوشت

$$\lim_{\lambda/w \rightarrow 0} (\text{اپتیک موجی}) = \text{اپتیک پرتوی}$$

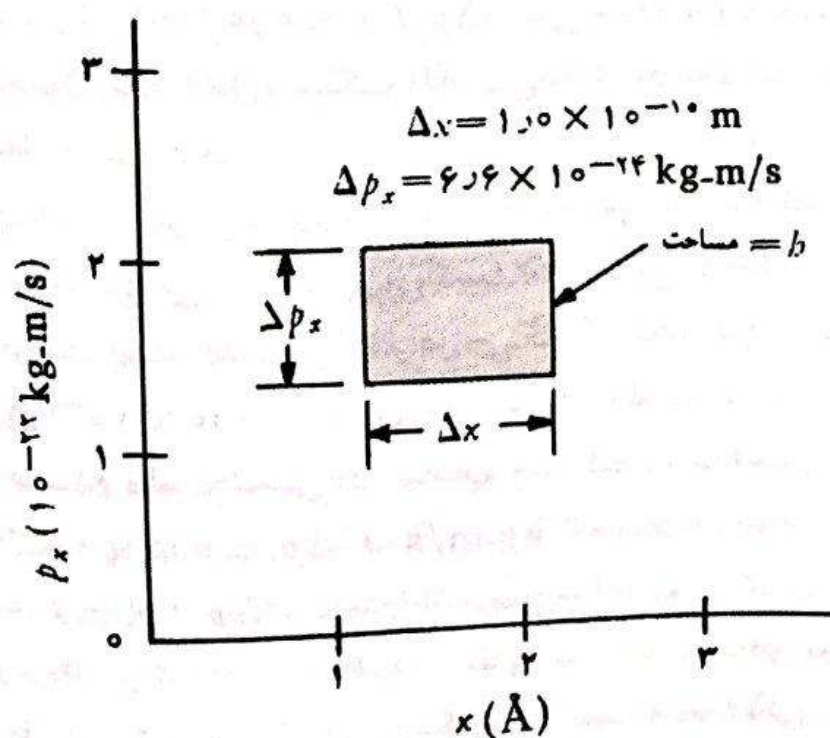
$$\lim_{\lambda/w \rightarrow 0} (\text{مکانیک موجی}) = \text{مکانیک کلاسیک}$$

عدم قطعیت بنیادی در آزمایش پراش را با هیچ ابتکاری نمی توان برطرف کرد. در مکانیک موجی، برخلاف مکانیک کلاسیک، در وضعی نیستیم که بتوانیم آشفتگیهای وارد بر جسم مورد اندازه گیری را به طور نامتناهی کاهش دهیم. این محدودیت، از طبیعت کوانتومی بنیادی الکترونها و فوتونها ناشی می شود و ذاتی جنبه های موجی و ذره ای آنها به شمار می رود.

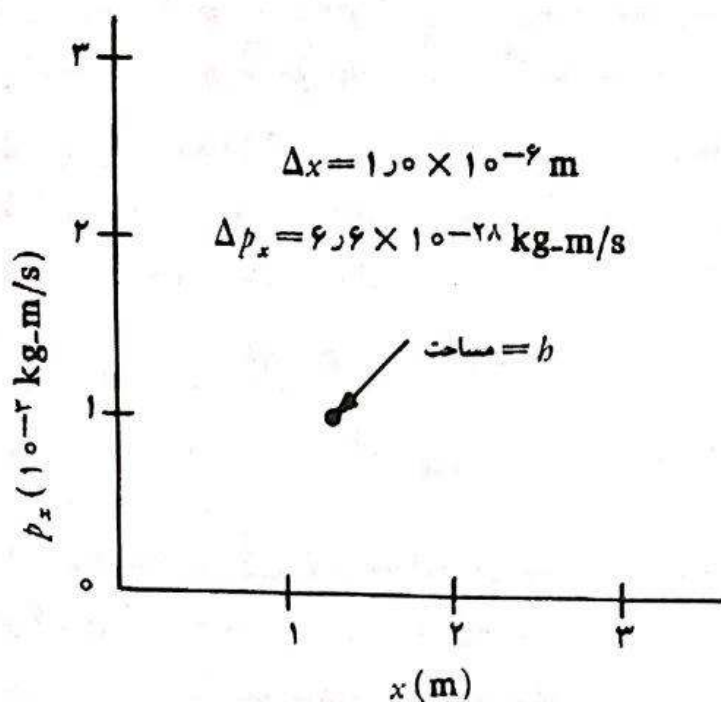
مثال ۱۰۵ برای روشن شدن اصل عدم قطعیت، عدم قطعیت در اندازه حرکت یک الکترون را محاسبه می کنیم؛ انرژی این الکترون ۱۰۰۰۰۰ الکترون ولت است و مکان آن دارای عدم قطعیتی است که از $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ یا اندازه تقریبی آنها بیشتر نیست؛ از رابطه $\Delta p_x \geq h/\Delta x$ نتیجه می شود که $\Delta p_x = 6.6 \times 10^{-24} \text{ kg-m/s}$ است. اینک می خواهیم این عدم قطعیت در اندازه حرکت را با خود اندازه حرکت، $p_x = (2mE_k)^{1/2} = 1.7 \times 10^{-24} \text{ kg-m/s}$ مقایسه کنیم. بنا بر این، عدم قطعیت نسبی در اندازه حرکت برابر با $\Delta p_x/p_x = 6.6/1.7$ یعنی حدود ۴۰ درصد است! به علت اصل عدم قطعیت، محال است اندازه حرکت الکترونی را که در ابعاد اتمی محبوس است، حتی با دقت متوسط، تعیین کرد.

اکنون عدم قطعیت مورد بحث را برای جسمی به جرم 100 g که با سرعت 1000 cm/s حرکت می کند بررسی می کنیم؛ یعنی جسمی با اندازه معمولی که با سرعت معمولی در حرکت است. علاوه بر آن فرض می کنیم که مکان این جسم دارای عدم قطعیتی در حدود 10^{-3} mm است. می خواهیم عدم قطعیت در اندازه حرکت این جسم، و بسویژه عدم قطعیت نسبی در اندازه حرکت را پیدا کنیم. درمی یابیم که $\Delta p_x = 6.6 \times 10^{-28} \text{ kg-m/s}$ و $p_x = 10^{-3} \text{ kg-m/s}$ است؛ بنابراین، $\Delta p_x/p_x = 6.6 \times 10^{-25}$ است؛ عدم قطعیت نسبی در اندازه حرکت این جسم ماکروسکوپیك در این مثال به قدری كوچك است كه در مقابل تمام محدودیتهای تجربی ممكن می توان از آن صرف نظر كرد. تنها در قلمرو میکروسكوپیك، آنجا كه دوگانگی موجی ذره ای دارای اهمیت است، اصل عدم قطعیت بر قطعیت اندازه گیریها محدودیت بنیادی اعمال می کند. در قلمرو ماکروسكوپیك، در عمل عدم قطعیتها ناچیزند (شکل ۱۰۱).

شکل ۱۷.۵، اندازه حرکت p_x الکترون مثال بالا را نشان می‌دهد که بر حسب مکان x الکترون رسم شده است. اصل عدم قطعیت ایجاب می‌کند که سطح سایه‌دار (حاصل ضرب عدم قطعیتها در اندازه حرکت و مکان) در این شکل برابر بزرگی ثابت پلانک، h ، باشد. چنانچه مکان با دقت زیاد معلوم شود اندازه حرکت با عدم قطعیت زیاد تعیین می‌شود؛ اگر اندازه حرکت با قطعیت زیاد تعیین شود الزاماً باید مکان بسیار نامعین باشد. بنا بر این محال است که مسیر آینده الکترونی را که در حدود ابعاد اتمی مجبوس است به تفصیل پیشگویی و دنبال کرد. قوانین حرکت نیوتون، که در به دست دادن مسیرهای ذرات بزرگ مقیاس کاملاً رضایتبخش‌اند، در اینجا نمی‌توانند به کار بروند؛ برای پیشگویی مسیر آینده هر ذره نه تنها شناختن نیروهای وارد بر آن لازم است بلکه مکان و اندازه حرکت اولیه آن را نیز باید شناخت. چون هم مکان و هم اندازه حرکت را بدون عدم قطعیت و به طور همزمان نمی‌توان شناخت، پیشگویی جزئیات مسیر آینده ذره غیر ممکن است. در عوض، برای یافتن احتمال قرار گرفتن ذره در هر لحظه در آینده باید از مکانیک موجی استفاده کرد. مجدداً جسمی به جرم 1000 g را که با سرعت 1000 cm/s در حرکت است در نظر می‌گیریم. شکل ۱۸.۵ اندازه حرکت و مکان آن را نشان می‌دهد. سطح h ، که نمایشگر حاصل ضرب عدم قطعیت اندازه حرکت در عدم قطعیت مکان است، در این وضعیتهای



شکل ۱۷.۵ عدم قطعیت در اندازه گیریهای همزمان مکان و اندازه حرکت يك الکترون.



شکل ۱۸.۵ عدم قطعیت در اندازه‌گیری‌های همزمان مکان و اندازه حرکت جسمی به جرم 10^{-28} g. (در این مقیاس عدم قطعیت در سطح h به اندازه 10^{-26} برابر بزرگ شده است.)

ماکروسکوپیکی به قدری کوچک است که به صورت نقطه‌ای بی نهایت کوچک در شکل ظاهر می‌شود. در این حالت، بدون تحمل عدم قطعیت محسوس، می‌توان از قوانین مکانیک کلاسیک استفاده کرد.

این مثال دیگری از اصل همخوانی است که در روابط بین فیزیک کلاسیک و فیزیک کوانتومی به کار می‌رود. اثرهای کوانتومی ناشی از اندازه متناهی ثابت پلانک اند. چون ثابت پلانک خیلی کوچک است (ولی نه صفر) اثرهای کوانتومی نیز ظریف اند. یادآور می‌شویم که چون سرعت نور خیلی زیاد است (ولی نه بی نهایت) اثرهای نسبی نیز ظریف اند. اگر ثابت پلانک به نحوی صفر می‌شد اثرهای کوانتومی نیز ناپدید می‌شدند. از این رو، وقتی h به سمت صفر میل کند، فیزیک کلاسیک حد متناظر فیزیک کوانتومی است. به طور نمادی می‌توان نوشت

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\text{فیزیک کوانتومی}) = \text{فیزیک کلاسیک}$$

۸.۵ بسته‌های موج و سرعت موج دوبروی

سرعت یک موج با بسامد $\nu = E/h$ و طول موج $\lambda = h/p$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$v_{ph} = v\lambda = \frac{E}{h} \frac{h}{p} = \frac{E}{p} \quad (18.5)$$

که در آن شاخص پایین نشاندهنده آن است که این سرعت، سرعت فاز است. سرعت فاز آهنگی است که با آن نقطه‌ای با فاز ثابت فضا را طی می‌کند. با استفاده از بسامد زاویه‌ای $\omega = 2\pi\nu$ و عدد موج $k = 2\pi/\lambda$ ، می‌توان نوشت

$$E = \hbar\omega \quad p = \hbar k$$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} \quad (19.5)$$

که در آن $\hbar = h/2\pi$ است. انرژی E و اندازه حرکت p ذره‌ای با جرم نسبیتی m که با سرعت v حرکت می‌کند به صورت زیر بیان می‌شود

$$E = mc^2 \quad p = mv \quad (20.5)$$

منظور از انتساب سرعت v به يك ذره این است که انرژی و اندازه حرکت آن تا حدی جایگزیده‌اند و با این سرعت منتقل می‌شوند. با جایگزین کردن رابطه (20.5) در رابطه (18.5) می‌توان سرعت v را با سرعت فاز v_{ph} ، مقایسه کرد

$$v_{ph} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} \quad (21.5)$$

فرض می‌کنیم این ذره يك فوتون که جرم سکون آن صفر است باشد. در این صورت سرعت آن $v = c$ است، و از رابطه (21.5) داریم

$$m_0 = 0 \quad \text{برای} \quad v_{ph} = c$$

يك فوتون با همان سرعت c موج الکترومغناطیس وابسته حرکت می‌کند. در این حالت فرض می‌کنیم که جرم سکون ذره متناهی باشد؛ در آن صورت باید سرعت v آن همواره از c کمتر باشد. با جایگزینی رابطه $v < c$ در رابطه (21.5) داریم

$$m_0 > 0 \quad \text{برای} \quad v_{ph} > c$$

این سرعت فاز موج وابسته به ذره از سرعت نور بیشتر است. در نتیجه، موج تکفامی که به يك ذره مادی نسبت داده می‌شود غیر قابل مشاهده است (وضعی که از دیدگاه مکانیک موجی ایجاد مزاحمت نمی‌کند)؛ زیرا مشاهدات، مربوط به احتمال یافتن يك ذره‌اند نه مربوط به سرعتی که فاز با آن پیش می‌رود.

البته، اگر بخواهیم جسمی را که انرژی و اندازه حرکت حمل می‌کند ذره‌پنداریم (یعنی انرژی و اندازه حرکت آن در ناحیه کوچکی از فضا محبوس باشد) در آن صورت، همان‌طور که در شکل ۱۴.۵ نشان داده شده است، باید دامنه تابع موج وابسته به این جسم در ناحیه نسبتاً کوچکی از فضا متمرکز شود. این شکل، موجی را با يك تك بسامد نمایش نمی‌دهد، زیرا چنین موجی مطلقاً سینوسی است و گسترش نامتناهی دارد؛ شکل مذکور بسته موجی را نشان می‌دهد که ترکیبی از امواج با بسامدهای مختلف است. امواج مؤلفه در مکان ذره، یعنی در ناحیه‌ای که تابع موج متوجه بزرگ است، به‌طور سازنده تداخل می‌کنند، و همان‌طور که در شکل ۱۴.۱ می‌بینیم، در دیگر نواحی تداخل آنها ویرانگر است. چون مکان ذره جایی است که در آن تابع موج احتمال بزرگ‌اند، سرعت v ، که ذره با آن حرکت می‌کند همان سرعتی است که ناحیه تداخل سازنده نیز با آن در فضا به‌پیش می‌رود.

اکنون چند نتیجه عمومی مربوط به سرعت‌های فاز و گروه را که در بخش ۸.۱ ارائه شدند یادآوری می‌کنیم. وقتی يك گروه (یا بسته) از امواج سینوسی مجزا را که بسامد و سرعت فاز آنها متفاوت است با هم ترکیب کنیم تا ناحیه‌ای با تداخل سازنده شدید تولید شود، سرعت گروه v_{gr} ، یعنی آن سرعتی که ناحیه فوق با آن به‌پیش می‌رود، با رابطه زیر به بسامد زاویه‌ای ω و عدد موج k امواج مؤلفه‌ای مربوط می‌شود

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \quad (۳۲.۱) \text{ و } (۲۲.۵)$$

همان‌طور که از استدلال‌های فوق برمی‌آید، سرعت گروه v_{gr} امواج در بسته موج، باید با سرعت ذره، یعنی v ، برابر باشد. می‌خواهیم این مطلب را به اثبات برسانیم.

چون $\omega = E/\hbar$ و $k = p/\hbar$ است پس می‌توان رابطه (۲۲.۵) را به صورت زیر

نوشت

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} \quad (۲۳.۵)$$

انرژی کل ذره توسط رابطه زیر به اندازه حرکت نسبی آن مربوط می‌شود

$$E = \sqrt{E_0^2 + (pc)^2} \quad (۱۴.۳)$$

با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه، داریم

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{E_0^2 + (pc)^2}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{mvc^2}{mc^2}$$

بنابراین رابطه (۲۳.۵) به صورت زیر درمی آید

$$v_{gr} = v \quad (24.5)$$

سرعت ذره درست برابر سرعت گروه بسته موج ذره است.

۹.۵ توصیف کوانتومی يك ذره محبوس

ذره‌ای که تحت تأثیر هیچ اثر خارجی نباشد، طبق قانون اول نیوتون، با اندازه حرکت ثابت در امتداد يك خط مستقیم حرکت می کند. به زبان مکانیک موجی، چنین ذره‌ای، که دارای اندازه حرکت ثابت و مشخصی است، باید به وسیله موج سینوسی تکفامی که دارای طول موج مشخصی است نمایش داده شود. هر گاه بخواهیم که این طول موج به طور دقیق تعریف شود، موج باید دارای گسترش نامتناهی در فضا باشد. بر طبق اصل عدم قطعیت، وقتی طول موج ذره (و بنا بر این، اندازه حرکت آن) دقیقاً مشخص شود مکان آن کاملاً نامعلوم و نامعین است.

در شکل ۲.۴ ج نمونه‌ای از بررسی کلاسیکی امواجی که دارای طول موجهای کاملاً معین بودند و در عین حال در ناحیه محدودی از فضا محبوس بودند، ملاحظه کردیم: امواج ایستاده تشدید در طول تار که دو انتهای آن ثابت بود. موج در طول تار مکرراً از مرزها (دو انتهای ثابت تار) باز می تابد، و با خود تداخل سازنده می کند. تنها وقتی طول تار مضرب درستی از نصف طول موج باشد، تشدید حاصل می شود؛ بنابراین نقش موج ایستاده بین مرزها می گنجد.

يك مسئله مکانیک موجی مقدماتی را که مانسته مسئله امواج ایستاده حاصل از ارتعاش تار است در نظر می گیریم. فرض می کنیم که موج وابسته به ذره، به همان طریقی که موج عرضی در طول تار محبوس بود، محبوس باشد. فرض کنید که این ذره آزادانه در امتداد محور x پس و پیش می رود ولی در $x=0$ و در $x=L$ با دیوارهای بینهایت سختی مواجه می شود؛ در نتیجه، ذره بین این دو مرز محبوس می ماند. این دیوارها برای تمام مقادیر x کوچکتر از صفر و بزرگتر از L با انرژی پتانسیل نامتناهی V مطابقت دارند. چون ذره بین صفر و L آزاد است انرژی پتانسیل آن V در این ناحیه ثابت است. آنچه توصیف شد، وضع يك ذره در يك جعبه يك بعدی یا در يك چاه پتانسیل با عمق نامتناهی است. چون دیوارها بینهایت سخت اند، ذره هیچ کسری از انرژی جنبشی خود را به آنها انتقال نمی دهد؛ بنا بر این انرژی کل آن ثابت می ماند و جهش به عقب و جلو را بین دیوارهای سخت ادامه می دهد.

از دیدگاه مکانیک موجی می‌توان گفت که اگر ذره بین حدود مذکور محبوس شود، و برای سهولت انرژی، پتانسیل آن بین صفر و L ، صفر اختیار شود، در آن صورت احتمال یافتن آن در خارج از این حدود صفر است. بنابراین، تابع موج ψ ، که مجذور آن مبین این احتمال است، باید برای $x \leq 0$ و $x \geq L$ صفر باشد.

می‌توانیم شرایط مسئله مورد بحث را از لحاظ ریاضی به صورت زیر خلاصه کنیم

$$V = \infty \quad \text{برای} \quad x > L, x < 0$$

$$V = 0 \quad \text{برای} \quad 0 < x < L$$

$$\psi = 0 \quad \text{برای} \quad x \geq L, x \leq 0$$

تنها آن توابع موجی که شرایط بالا را برآورده کنند مجازند. چون ذره آزاد است و بزرگی اندازه حرکت آن در سرتاسر ناحیه بین دیوارها ثابت است، در نتیجه با یک موج سینوسی نمایش داده می‌شود. برای اینکه این شرایط در مرزها برقرار شوند، تنها آن طول موجهایی مجازند که تعداد آنها در فاصله بین $x = 0$ و $x = L$ مضرب درستی از طول موج باشد. در این صورت شرط وجود امواج ساکن یا امواج ایستاده چنین است

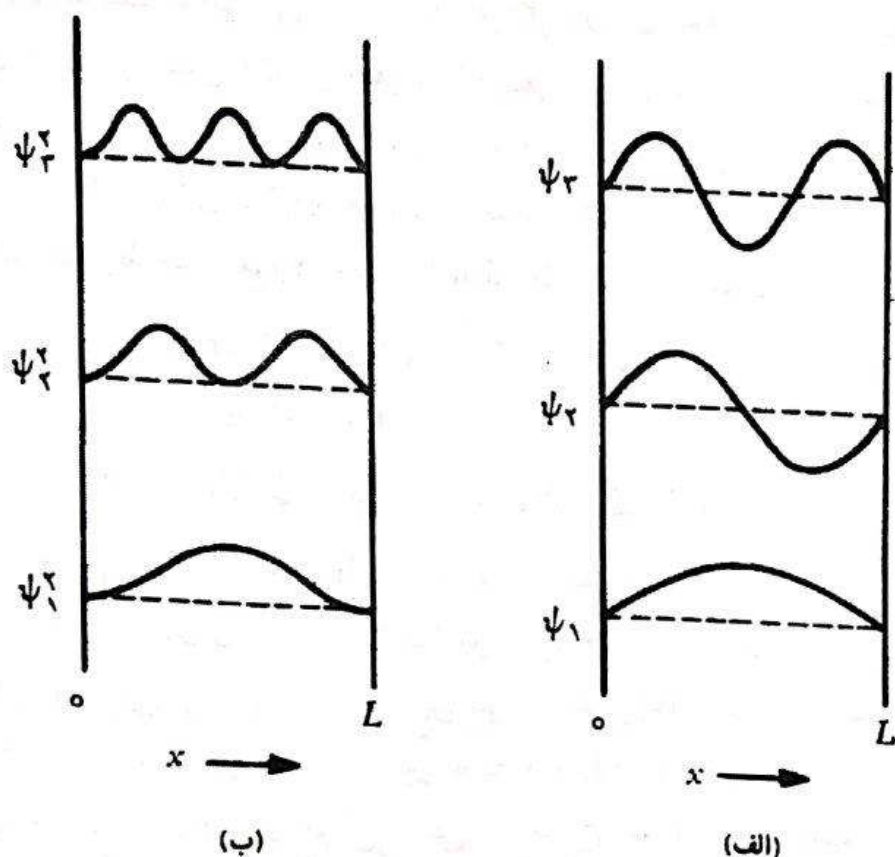
$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (25.5)$$

که در آن λ طول موج و n عدد کوانتومی با مقادیر ممکن $n = 1, 2, 3, \dots$ است. شکل ۱۹.۵ تابع موج ψ و احتمال ψ^2 را بر حسب x برای اولین سه حالت مانای ممکن ذره محبوس در جعبه نشان می‌دهد. توجه کنید، در حالی که ψ هم می‌تواند منفی و هم می‌تواند مثبت باشد، ψ^2 همواره مثبت است.

توزیع احتمال چنان است که ψ^2 همواره در مرزها صفر است. برای اولین حالت ($n=1$) محتملترین مکان ذره نقطه وسط بین دیوارها، یعنی $x = L/2$ است؛ ولی، برای حالت دوم ($n=2$) این نقطه، با کمترین احتمال مکان ذره است؛ در واقع در این نقطه، $\psi^2 = 0$ است؛ و این بدان معنی است که قرار گرفتن ذره در آنجا غیر ممکن است!

اعمال شرایط مرزی بر ψ ، یعنی تطبیق امواج بین دیوارها، طول موج ذره را به مقادیری که با رابطه (۲۵.۵) بیان می‌شوند محدود می‌کند. در این صورت، چنانچه فقط طول موجهای معینی مجاز باشند، بزرگی اندازه حرکت نیز به مقدار معینی محدود خواهد شد، زیرا $p = h/\lambda$ است. بنابراین، اندازه حرکتهای مجاز به صورت زیر بیان می‌شوند

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hn}{2L} \quad (26.5)$$



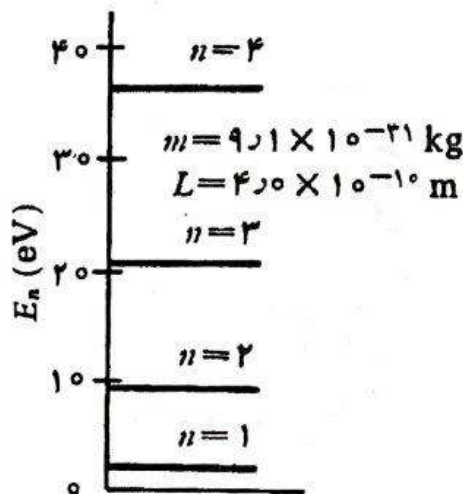
شکل ۱۹.۵ اولین سه حالت مانای ذره‌ای واقع در یک جعبه یک بعدی: (الف) توابع موج و (ب) توزیع احتمال.

سرانجام، انرژی جنبشی E_k (و بنابراین، انرژی کل E ذره، زیرا انرژی پتانسیل آن صفر است) به صورت زیر بیان می‌شود

$$E_k = E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(hn/2L)^2}{2m}$$

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \quad (27.5)$$

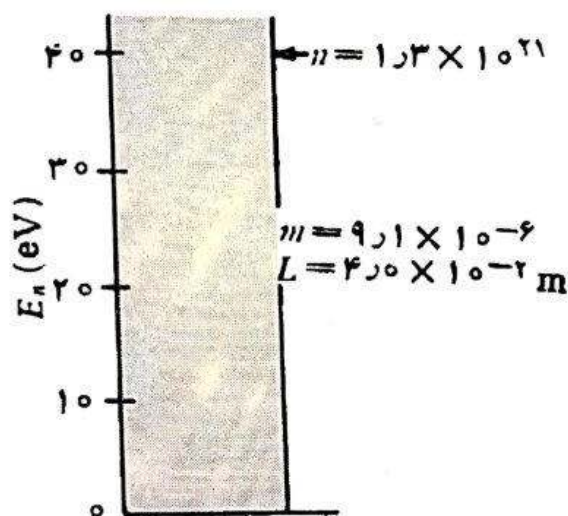
که در آن m جرم ذره است (این معادله تنها برای سرعت‌های غیرنسبیتی صادق است). شاخص پایین n حاکی از آن است که مقادیر ممکن انرژی، برای مقادیر ثابت m و L ، تنها به عدد کوانتومی n بستگی دارند. از روی این معادله مشاهده می‌کنیم که انرژی ذره واقع در جعبه یک بعدی کوانتیده است. ذره نمی‌تواند هر انرژی و یا هر سرعتی را بپذیرد؛ ولی فقط آن انرژی‌ها و سرعت‌های بخصوصی را می‌پذیرد که شرایط مرزی بر تابع موج اعمال می‌کنند. کوانتش انرژی مانسته کوانتومی شدن کلاسیک بسامدهای امواج تار است که دوانتهای آن ثابت است.



شکل ۲۰.۵ انرژیهای مجاز الکترون محبوس در جعبه‌ای یک‌بعدی با ابعاد اتمی.

می‌خواهیم مقادیر ممکن انرژی الکترونی به جرم $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ را محاسبه کنیم. این الکترون مقید است که در فاصله $L = 4 \text{ \AA}$ یا $4 \times 10^{-10} \text{ m}$ پس و پیش رود. درج این مقادیر در رابطه (۲۷.۵) انرژی حالت اول ($n=1$) را به دست می‌دهد که برابر $E_1 = 2.3 \text{ eV}$ است. چون $E_n = n^2 (h^2 / 8mL^2) = n^2 E_1$ است، دیگر انرژیهای ممکن ذره عبارت‌اند از $E_1, 4E_1, 9E_1, 16E_1, \dots$. انرژیهای مجاز الکترون واقع در جعبه‌ای به ضلع $4 \text{ \AA}$ در شکل ۲۰.۵، که نمودار تراز انرژی نامیده می‌شود، نشان داده شده‌اند. اشاره به این نکته جالب است که وقتی الکترونی در فاصله‌ای تقریباً برابر با قطر یک اتم محبوس است، انرژیهای ممکن آن در گستره چند الکترون‌ولت قرار دارند که با انرژی بستگی الکترونهاي واقع در اتم قابل مقایسه است.

اکنون انرژیهای مجاز جسم نسبتاً بزرگی را در نظر می‌گیریم که درجبه‌ای نسبتاً بزرگ محبوس است؛ فرض می‌کنیم که $m = 9.1 \text{ mg} = 9.1 \times 10^{-6} \text{ kg}$ و $L = 4 \text{ cm} = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$ باشد. معادله (۲۷.۵) نشان می‌دهد که به ازای این مقادیر، $E_1 = 2.3 \times 10^{-31} \text{ eV}$ است، که مقدار فوق‌العاده کوچکی است! شکل ۲۱.۵ نمودار تراز انرژی را برای این شرایط نشان می‌دهد؛ در این شکل انرژی با همان مقیاس شکل ۲۰.۵ رسم شده است. فاصله بین انرژیهای مجاور، در یک نمودار با این شرایط ماکروسکوپیکی، به قدری کوچک است که انرژی عملاً پیوسته است. به همین دلیل است



شکل ۲۱.۵ انرژیهای مجاز ذره‌ای به جرم
۹.۱ mg که در جعبه‌ای یک بعدی به ضلع
۴ cm محبوس شده است.

که هرگز تظاهر آشکار کوانتش انرژی یک ذره ماکروسکوپیکی را مشاهده نمی‌کنیم؛ انرژی اینگونه ذرات کوانتومی است اما برای مشاهده خیلی ریز است. البته، این نتیجه با اصل همخوانی سازگار است؛ این اصل ایجاب می‌کند که انرژیهای گسسته یک دستگاه مقید، در پدیده‌های بزرگ مقیاس، پیوسته به نظر برسند.

توجه کنید که پایینترین تراز انرژی ممکن یک ذره در جعبه‌ای با عمق نامتناهی صفر نیست بلکه برابر E_1 است. این مطلب با اصل عدم قطعیت سازگاری دارد. چنانچه انرژی این ذره صفر بود، یعنی ذره جایی در داخل جعبه ($\Delta x = L$) ساکن بود، هم اندازه حرکت p و هم عدم قطعیت در اندازه حرکت Δp_x صفر می‌شدند. در این صورت اصل عدم قطعیت نقض می‌شد، زیرا حاصلضرب $\Delta p_x \Delta x$ ، به جای h ، برابر $0 = 0$ می‌شد. برای $x = L$ ، عدم قطعیت در اندازه حرکت با $\Delta p_x = h/\Delta x = h/L$ بیان می‌شود. در نتیجه اندازه حرکت ذره، p_x ، در یک جهت باید لااقل به بزرگی عدم قطعیت Δp_x باشد. به علاوه نمی‌توان دانست که ذره به طرف چپ یا به طرف راست می‌رود؛ بنابراین، روی هم رفته، می‌توان نوشت که $\Delta p_x = 2p_x$ است. تحت این شرایط، انرژی ذره $E = p_x^2/2m = (\Delta p_x/2)^2/2m$ است، با $\Delta p_x = h/L$ داریم $E = h^2/8mL^2$ که دقیقاً همان انرژی حالت مجاز اول است که توسط رابطه (۲۷.۵) بیان شد.

برای الکترونی که در ابعاد اتمی محبوس است، انرژی در پایینترین حالت با

حالت پایه، چند الکترون ولت است. این الکترون هرگز ساکن نیست ولی با پایینترین انرژی ممکن یا به اصطلاح با انرژی نقطه صفر، بین دیوارهای محبوس کننده پس و پیش می رود. البته، این مطلب در مورد هر ذره محبوسی صادق است. می خواهیم کمینه سرعت ذره ای به جرم 9.1 mg را که در فاصله 4 cm محبوس شده است محاسبه کنیم. چون $E_1 = 2.3 \times 10^{-4} \text{ eV} = (1/2)mv^2$ است، درمی یابیم که $v = 9.0 \times 10^{-28} \text{ m/s}$ ، یا فقط $10^{-2} \text{ \AA}$ در هر هزار سال است. این ذره عملاً ساکن است.

مسئله مربوط به ذره واقع در جعبه، تا حدودی تصنعی است؛ زیرا چیزی به عنوان انرژی پتانسیل به طور نامتناهی بزرگ وجود ندارد و هنگامی که ذره در داخل جعبه است نمی تواند از تمام تأثیرهای خارجی کاملاً برکنار باشد. با وجود این، مسئله مهمی است، زیرا کوانتش انرژی را آشکار می کند. چون تنها مقادیر گسسته و معینی از طول موج می توانند بین مرزها قرار گیرند، کوانتش انرژی اساساً رخ می دهد.

۱۰.۵ معادله شرودینگر

مطلب را با معادله عمومی موج آغاز می کنیم و به معادله مستقل از زمان شرودینگر می رسم که جواب آن، توابع موج مجاز و انرژیهای کوانتیده دستگاههای مقید را به دست می دهد.

هر موجی که در جهت X انتشار می یابد از معادله عمومی موج پیروی می کند:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (28.5)$$

که در آن F تابع موجی است که هم به مختصه x و هم به زمان t بستگی دارد و w سرعت موج است. هنگامی که امواج عرضی در امتداد یک تار کشیده منتشر می شوند تابع F نمایشگر تغییر مکان عرضی تار از حالت تعادل است و w سرعت موج در امتداد تار است؛ وقتی امواج الکترومغناطیسی در خلا انتشار می یابند F میدان الکتریکی یا مغناطیسی و w سرعت نور است؛ هنگامی که امواج صوتی در یک گاز انتشار می یابند، F اختلاف فشار و w سرعت صوت است. در رفتار مکانیک موجی ذرات، تابع موج کمیتی است که مجذور آن احتمال قرار گرفتن ذره را در هر نقطه ای از فضا به دست می دهد؛ اکنون در خواهیم یافت که بهتر است این کمیت را ψ بنامیم.

فقط دستگاههایی را بررسی می کنیم که انرژی کل آنها E ثابت است و ذرات مربوط به آنها در امتداد محور X حرکت می کنند و مقیدند. در این صورت بسامد $\nu = E/h$

وابسته به این ذرات مقید نیز ثابت است و می‌توان تابع موج $\Psi(x, t)$ را به عبارت وابسته به فضای $\psi(x)$ و عبارت وابسته به زمان $f(t)$ تفکیک کرد

$$\Psi(x, t) = \psi(x)f(t)$$

چون فرض بر آن است که بسامد به طور دقیق مشخص می‌شود عبارت وابسته به زمان $f(t)$ باید به طور سینوسی با زمان تغییر کند و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$f(t) = \cos 2\pi\nu t$$

مشتق‌های جزئی دوم رابطه (۲۸.۵) عبارت‌اند از

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = f(t) \frac{d^2 \psi}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \psi(x) \frac{d^2 f}{dt^2} = -4\pi^2\nu^2 f(t)\psi(x)$$

درج این نتایج در رابطه (۲۸.۵) چنین به دست می‌دهد

$$f(t) \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{4\pi^2\nu^2}{w^2} f(t)\psi(x)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \psi = -\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 \psi \quad (29.5)$$

که در آن طول موج برابر $\lambda = w/\nu$ و اندازه حرکت ذره برابر $p = h/\lambda$ است. فرض می‌کنیم که ذره به جرم m ، از طریق تابع انرژی پتانسیل $V = V(x)$ ، با محیط اطراف خود (به جرم بینهایت) برهم کنش کند. در این صورت انرژی کل E دستگاه به صورت

$$E = E_k + V = \frac{p^2}{2m} + V$$

درمی‌آید که در آن E_k انرژی جنبشی ذره است. لذا داریم

$$p^2 = 2m(E - V)$$

و رابطه (۲۹.۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + (E - V)\psi = 0 \quad (30.5)$$

این معادله، معادله یک بعدی مستقل از زمان و غیرنسبیتی شرودینگر است.* برای اینکه معادله شرودینگر در سه بعد قابل استفاده باشد باید در معادله بالا به جای $d^2\psi/dx^2$ عبارت $\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 + \partial^2\psi/\partial z^2$ را جایگزین کرد.

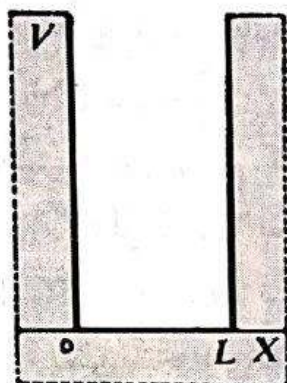
در استخراج معادله شرودینگر فرض کردیم که «ذره» به صورت یک موج انتشار می یابد (معادله موج را به کار بردیم) ولی ذره با محیط اطراف خود، به عنوان یک ذره، برهم کنش می کند (انرژی پتانسیل V به صورت تابعی از نقاط در فضا بیان می شود). در نتیجه اصل مکملی در معادله شرودینگر گنجانده شده است.

چنانچه نیروی وارد بر یک ذره مقید را بدانیم (یعنی، اگر انرژی پتانسیل به صورت تابعی، $V(x)$ ، از مکان ذره در دست باشد) می توانیم توابع موج مجاز و انرژیهای مجاز دستگاه را پیدا کنیم. جواب قابل قبول $\psi(x)$ باید متناهی، پیوسته و تک مقدار باشد؛ بخصوص، باید با شرایط مرزی که توسط مشخصه انرژی پتانسیل V اعمال می شود سازگار باشد. در واقع، اعمال شرایط مرزی بر تابع موج است که منجر به کوانتس انرژی یک دستگاه مقید می شود. به بیان غیرتحلیلی: باید ذره را به منزله موجی تلقی کرد که درون مرزهای یک دستگاه مقید به عقب و جلو باز می تابد و امواج ایستاده تشکیل می دهد؛ تطبیق امواج مانا با شرایط مرزی است که منجر به مقادیر کوانتیده انرژیهای مجاز یک دستگاه می شود. هرگاه انرژی پتانسیل وابسته به مکان باشد، ولی انرژی کل دستگاه، E ، ثابت باشد در آن صورت انرژی جنبشی ذره، اندازه حرکت و طول موج همگی باید به مکان بستگی داشته باشند. برای مثال طول موج با رابطه زیر بیان می شود

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad (31.5)$$

ذره واقع در یک چاه پتانسیل یک بعدی با ارتفاع نامتناهی. ساده ترین مسئله ای را که می توان به کمک معادله شرودینگر حل کرد مسئله یک ذره محبوس در جبهه یک بعدی با پهنای L است؛ یعنی، همان طور که در شکل ۲۲.۵ نشان داده شده است، فرض می شود که ذره در یک چاه پتانسیل با عمق نامتناهی قرار دارد. انرژی پتانسیل $V(x)$ درون جبهه ثابت

* گرچه شکل صحیح معادله مستقل از زمان شرودینگر [معادله (۳۰.۵)] را می توان از معادله عمومی موج [معادله (۲۸.۵)] به دست آورد، اما معادله عمومی موج برای محاسبه توابع موج احتمال مناسب نیست. زیرا معادله صحیح تابع موج وابسته به زمان شرودینگر تنها دارای مشتق اول نسبت به زمان است نه مشتق دوم. به علاوه، تابع موج کل $\Psi(x, t)$ عموماً باید مختلط باشد؛ در نتیجه احتمال یافتن یک ذره به صورت $\Psi^*\Psi$ بیان می شود که در آن Ψ^* مزدوج مختلط Ψ است.



شکل ۲۲.۵ انرژی پتانسیل یک جابه عمیق نامتناهی و پهنای L .

است (و برای سهولت آن را صفر اختیار می‌کنیم) و در مرزهای $x=0$ و $x=L$ ، V به بینهایت افزایش می‌یابد. پس، معادله شرودینگر (۳۰.۵) با $V=0$ ، برای فاصله $0 < x < L$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + E\psi = 0$$

یا

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -B^2\psi \quad (۳۲.۵)$$

که در آن

$$B^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$$

چون دیوارها به طور نامتناهی بلندند نمی‌توان ذره را در خارج از جعبه یافت. این می‌رساند که برای تمام نقاط واقع بر مرزهای جعبه و آن سوی آن باید $\psi(x)$ صفر باشد. از این رو باید جوابهای مجاز با شرایط مرزی، یعنی با $\psi(0) = 0$ و $\psi(L) = 0$ سازگار باشند. یک جواب مناسب به صورت زیر است

$$\psi(x) = A \sin Bx$$

که می‌توان آن را با جایگزینی در رابطه (۳۲.۵) تحقیق کرد. شرط مرزی اول، $\psi(0) = 0$ برای تابع سینوسی برآورده می‌شود (این شرط برای تابع کسینوسی برآورده نخواهد شد. در نتیجه کسینوس را کنار می‌گذاریم). تنها اگر $BL = n\pi$ باشد، که در آن

n عدد درستی است، شرط مرزی دوم برآورده می‌شود (زیرا $\sin n\pi \equiv 0$ است). پس با جایگزینی مقدار B داریم

$$n\pi = BL = \sqrt{2mE} \frac{L}{\hbar} \quad (۲۳.۵)$$

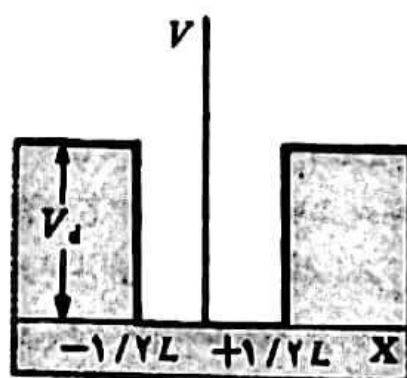
بنابراین، انرژیها و توابع موج يك ذره آزاد و محبوس در جبهه‌ای که دیوارهای آن به‌طور نامتناهی بلندند به‌صورت زیر است

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad \text{انرژیها:} \quad (۲۷.۵)$$

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{توابع موج:}$$

این نتایج با نتایج حاصل از بخش ۹.۵ سازگارند. توابع موج سینوسی و انرژیهای کوانتیده، که با مجذور عدد کوانتومی تغییر می‌کنند، در شکلهای ۱۹.۵ الف و ۲۰.۵ نشان داده شده‌اند.

ذره در يك چاه پتانسیل يك بعدی با ارتفاع متناهی. در این حالت فرض می‌کنیم که ارتفاع دیوارهای جبهه يك بعدی نامتناهی نباشند بلکه، همان‌طور که در شکل ۲۳.۵ نشان داده شده است، دارای ارتفاع متناهی V_0 باشند. این بار نیز انتهای چاه را به عنوان صفر انرژی پتانسیل برمی‌گزینیم. در این حالت صفر x را در مرکز چاه اختیار می‌کنیم. می‌دانیم که در فیزیک کلاسیک اگر انرژی جنبشی ذره از قدر مطلق V_0 کمتر باشد باید ذره در داخل چاه مربعی باقی بماند؛ یعنی، چنانچه ذره با انرژی کل E کمتر از V_0 مقید باشد نمی‌تواند در هر جایی یافت شود بلکه فقط در ناحیه $-L/2 < x < L/2$ ، یافت



شکل ۲۳.۵ انرژی پتانسیل يك چاه با عمق متناهی V_0 و پهنای L .

می‌شود. این شرط در مکانیک موجی از قید و بند کمتری برخوردار است: در اینجا می‌توان ذره را خارج از حدودی که به وسیله فیزیک کلاسیک مشخص می‌شود پیدا کرد. آنچه ظاهراً نقض بقای انرژی به نظر می‌رسد از طرف رابطه عدم قطعیت مجاز شمرده می‌شود. از این رو ممکن است که تابع موج در خارج از چاه، یعنی در $x < -L/2$ و $x > L/2$ ، واقعاً صفر نباشد. داخل چاه، یعنی جایی که انرژی پتانسیل ثابت است توابع موج، همانند گذشته سینوسی‌اند، ولی در این حالت در مرزها، یعنی در $x = -L/2$ و $x = +L/2$ الزاماً صفر نیستند. برای $x < -L/2$ و $x > L/2$ می‌توان معادله شرودینگر [رابطه (۳۰.۵)] را به صورت زیر نوشت

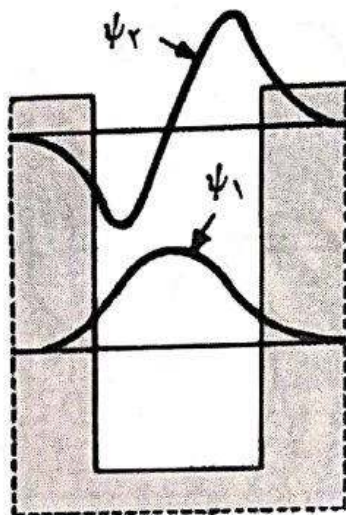
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(V_d - E)}{\hbar^2} \psi$$

انرژی پتانسیل یک ذره مقید از انرژی کل E بیشتر است، به طوری که $V_d - E$ ، که در طرف راست معادله بالا ظاهر می‌شود، مثبت است. اگر از $C^2 \equiv 2m(V_d - E)/\hbar^2$ استفاده کنیم، معادله بالا چنین می‌شود

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = C^2 \psi$$

که در آن برای نواحی خارج از چاه پتانسیل C^2 کمیت مثبتی است. جوابهای ممکن این معادله عبارت‌اند از $\psi = A_+ e^{+Cx}$ و $\psi = A_- e^{-Cx}$ ، که می‌توان آنها را با قراردادن در معادله بالا تحقیق کرد. ابتدا ناحیه خارجی طرف راست، جایی که $x > L/2$ است را بررسی می‌کنیم. چنانچه x مثبت باشد، جواب $\psi = A_+ e^{+Cx}$ را به دلایل زیر کنار می‌گذاریم: با وجود اینکه یک تابع موج قابل قبول ممکن است در آن سوی دیوارهای جعبه یک بعدی غیر صفر باشد، ولی نمی‌تواند نامتناهی باشد و اگر $\psi = A_+ e^{+Cx}$ یک جواب بود، در فاصله‌های نامتناهی از جعبه و در جهت مثبت محور x نامتناهی می‌شد، و این می‌رساند که در بزرگترین فاصله از جعبه احتمال یافتن ذره نامتناهی است. واضح است که این نتیجه قابل دفاع نیست و لذا جواب $\psi = A_- e^{-Cx}$ باقی می‌ماند، که بدان معنی است که این تابع موج در جهت دور شدن از جعبه و در جهت مثبت محور x ، به طور نمایی فرو می‌افتد و در فواصل بینهایت بزرگ صفر می‌شود. همچنین تابع موج در امتداد منفی محور x به طور نمایی فرو می‌افتد: چون x به طرف چپ جعبه منفی است شکل مناسب ψ در آنجا عبارت است از $A_+ e^{+Cx}$.

به طور خلاصه، در داخل جعبه تابع موج سینوسی است و در خارج آن به طور نمایی فرو می‌افتد. در هر حال، توابع موج داخل و خارج باید به طور هموار در نقاط



شکل ۲۴.۵ توابع موج برای دو حالت اول ذره‌ای که در یک چاه انرژی پتانسیل با عمق متناهی قرار دارد.

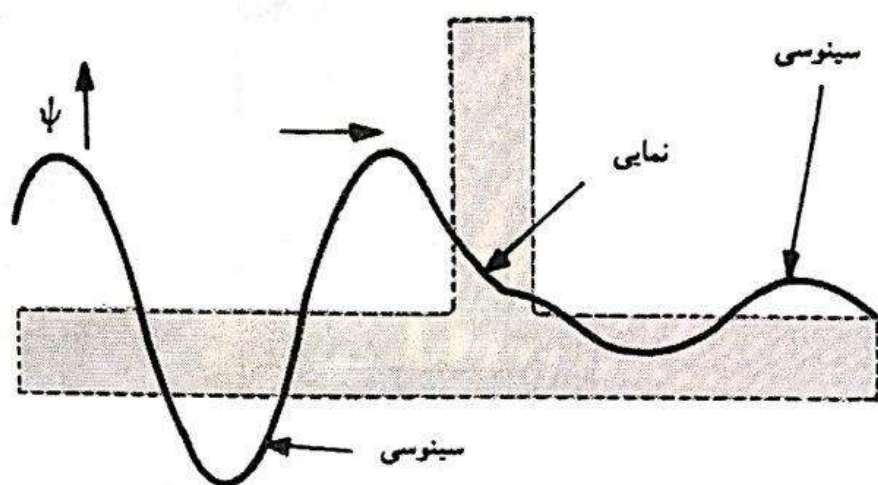
$x = -L/2$ و $x = +L/2$ به یکدیگر پیوندند. در هر دوی این نقاط داریم

$$\psi_{in} = \psi_{out}$$

$$\frac{d\psi_{in}}{dx} = \frac{d\psi_{out}}{dx}$$

توابع موج کامل اولین دو حالت مجاز، در شکل ۲۴.۵ نشان داده شده‌اند. در این دو حالت انرژی‌ها از انرژی‌های مربوط به حالتی که در آن دیوارهای جعبه به‌طور نامتناهی بلندند کمتر است. این امر نتیجهٔ بزرگتر بودن طول موج (و بنابراین کمتر بودن اندازه حرکت و کمتر بودن انرژی‌های جنبشی و کل) است و این به نوبهٔ خود ناشی از این حقیقت است که توابع موج در دیوارهای جعبه به صفر افت نمی‌کنند.

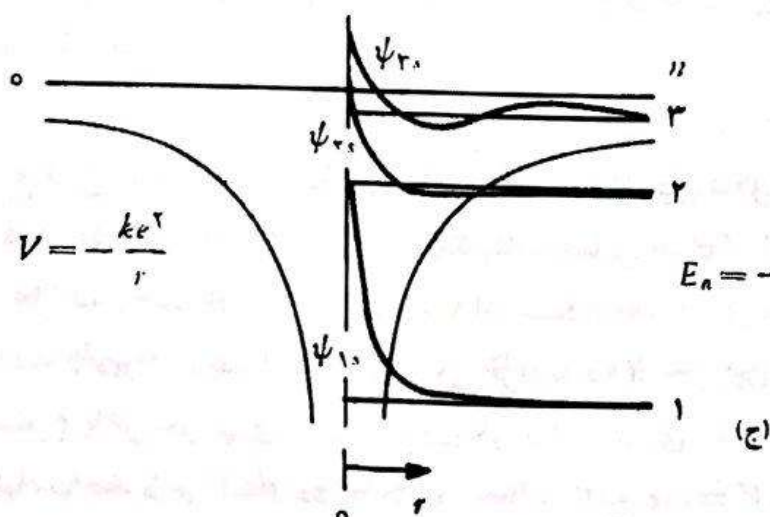
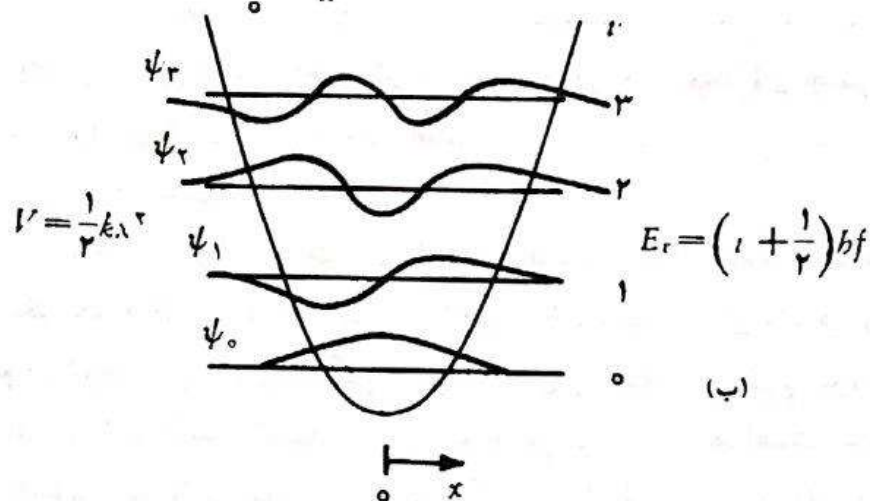
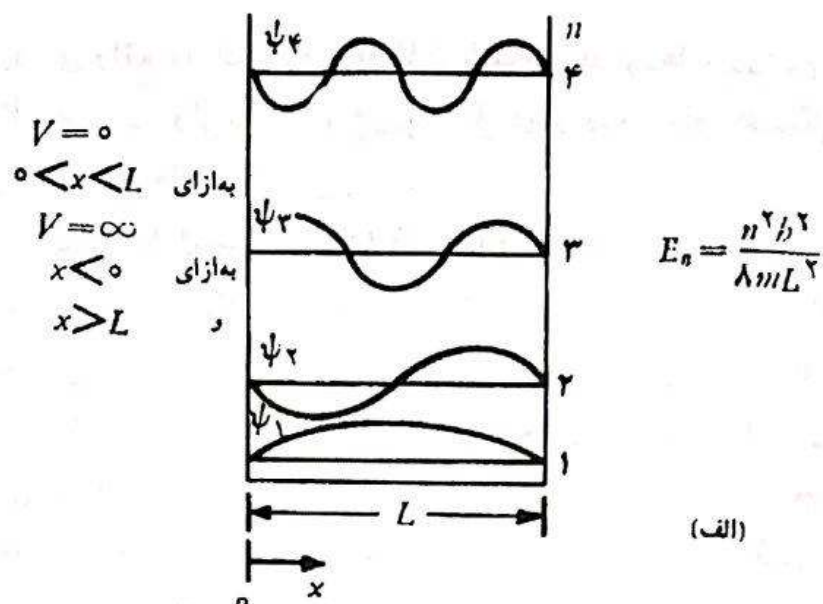
اثر تونل. چون از نظر مکانیک موجی یک ذره می‌تواند از حدود کلاسیک خود عبور کند، مطابق شکل ۲۵.۵، وقتی این ذره با دیوار پتانسیلی با پهنای ارتفاع متناهی برخورد کند با وضع عجیبی روبرو خواهیم شد. در فیزیک کلاسیک ذره‌ای که انرژی جنبشی آن از ارتفاع دیوار کمتر است هرگز، نه از طریق بالا رفتن و نه از طریق عبور، به آن سوی دیوار راه نخواهد یافت؛ خیلی ساده، به علت نقض قانون بقای انرژی این ذره نمی‌تواند به طرف دیگر دیوار راه یابد. همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی انرژی پتانسیل از انرژی کل بیشتر است، تابع موج غیر صفر است و به‌طور نمایی فرو می‌افتد. از این رو، تابع موج ذره‌ای که از طرف چپ به دیوار نزدیک می‌شود، در طرف چپ دیوار سینوسی در داخل دیوار نمایی و در طرف راست با دامنهٔ خیلی کوچکت‌ر سینوسی است. چون دامنهٔ



شکل ۲۵.۵ تابع موج ذره‌ای که از طرف چپ بر سدی با ارتفاع و پهنای متناهی فرود می‌آید.

تابع موج مقیاسی از احتمال جایگیری ذره را به دست می‌دهد احتمال کم ولی معینی وجود دارد که این ذره، که از طرف چپ به دیوار نزدیک می‌شود، در طرف راست یافت شود. به عبارت دیگر، احتمال وجود ذره در طرف چپ زیاد، در داخل دیوار کم و در طرف راست باز هم کمتر است. ذره یا به عبارت بهتر موج، می‌تواند از سد غیر قابل عبور کلاسیکی نفوذ کند یا در آن تونل بزند. احتمال این اثر تونل، بجز در سطح اتمی و هسته‌ای، خیلی ناچیز است. ولی این اثر در رفتار برخی وسایل نیمه رسانا (به اصطلاح دیوهای تونلی) و در گسیل ذرات α از هسته‌های ناپایدار و سنگین مشاهده می‌شود.

مثالهای دیگری از ذرات مقید، ذرات مقید در چاه پتانسیل یک بعدی را مورد بحث قرار دادیم؛ می‌توانیم دو مثال دیگر را نیز ذکر کنیم. شکل ۲۶.۵ انرژی و تابع موج مربوط به هر سه حالت را برای مقایسه، نشان می‌دهد. در یک نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی (بخش ۲.۱۲) یک ذره با انرژی پتانسیل $V(x) = (1/2)kx^2$ مقید است. ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی جاذبه عکس مجذوری با رابطه $V(r) = -ke^2/r$ قرار دارد همان اتم هیدروژن است؛ این شکل نموداری از توابع موج را برای جوابهایی که تقارن کروی دارند (حالتهای s)، در این پتانسیل نشان می‌دهد. جوابهای ریاضی مربوط به نوسانگر هماهنگ ساده و اتم هیدروژن به قدری پیچیده‌اند که در اینجا ارائه نمی‌شوند، ولی مسئله ۴۸ و بخش ۷.۶، به ترتیب، به توابع موج و انرژیهای آنها می‌پردازند. نکات زیر خصوصیات عام جوابهای مکانیک موجی اند که می‌توان آنها را در مثالهای شکل ۲۶.۵ مشاهده کرد.



شکل ۲۶.۵ توابع انرژی پتانسیل، توابع موج و انرژیهای مجاز مربوط
 به سه انرژی پتانسیل ساده؛ (الف) جاهی با عمق نامتناهی، (ب) یک نوسانگر
 هماهنگ ساده و (ج) یک ذره (اتم هیدروژن) که تحت تأثیر نیروی جاذبه
 عکس مجذوری قرار دارد.

۱. تابع موج ذره‌ای واقع در يك جعبه با ارتفاع نامتناهی در مرزها و در تمام نقاط خارج از جعبه، دقیقاً صفر است. ولی توابع موج دوپتانسیل دیگر در مرزهای کلاسیکی متناهی‌اند و به آن سوی این مرزها گسترش می‌یابند.

۲. مضارب درست نیم طول موجها، $(\lambda/2)$ ، $2(\lambda/2)$ ، $3(\lambda/2)$ ، ... متوالیاً بین مرزها، در حالتی که انرژیهای آنها به‌طور تصاعدی افزایش می‌یابند، قرار می‌گیرند.

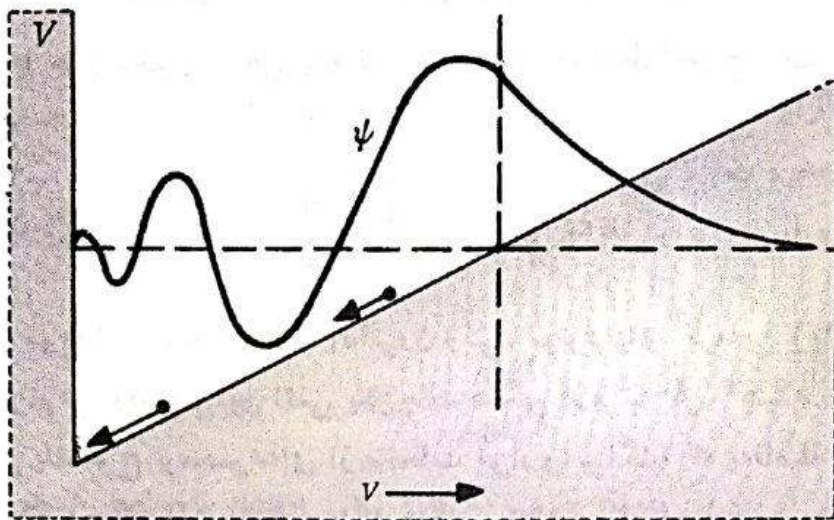
۳. در انرژی پتانسیل ثابت، طول موج ثابت است (مستقل از x) و در نتیجه تابع موج سینوسی است (مانند پتانسیل درون چاه با عمق نامتناهی)؛ اما برای انرژی پتانسیلی که با x تغییر می‌کند طول موج ثابت نیست (به x وابسته است) و در نتیجه تابع موج سینوسی نیست (مانند پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده و اتم هیدروژن). از معادله (۳۱.۵)، $\lambda = h/[2m(E-V)]^{1/2}$ چنین برمی‌آید که طول موج به تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ و بنابراین به x بستگی دارد. به همین دلیل، هرگاه انرژی جنبشی $E-V$ بزرگ باشد طول موج کوچک است و برعکس.

۴. پایینترین انرژی صفر نیست.

۵. ترازهای انرژی ذره‌ای واقع در يك چاه با عمق نامتناهی در ته چاه متراکم می‌شوند؛ برای نوسانگر هماهنگ ساده، ترازهای انرژی هم فاصله‌اند و برای اتم هیدروژن در بالا متراکم می‌شوند. این رفتار به شکل منحنی انرژی پتانسیل مربوط می‌شود: در شکل ۲۶.۵ الف، انرژی پتانسیل نسبت به انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده، شکل ۲۶.۵ ب، به‌سوی خط قائم متمایل است؛ حال آنکه در شکل ۲۶.۵ ج، انرژی پتانسیل به‌سوی خط افقی متمایل است.

مثال ۲۰.۵ تابع موج حالت برانگیخته ذره‌ای را که در پتانسیل شکل ۲۷.۵ حرکت می‌کند، رسم کنید. این همان مثال استاندارد در مکانیک مقدماتی است که اینک باید به کمک مکانیک موجی حل شود: يك ذره بريك سطح شیبدار بدون اصطكاك می‌لغزد (در اینجا در انتهای سطح شیبدار دیواری با ارتفاع نامتناهی قرار دارد). حل این مسئله با جزئیات تحلیلی کامل مستلزم یافتن جوابهای معادله شرودینگر برای انرژی پتانسیلی است که در $x=0$ به بینهایت صعود می‌کند و در $x>0$ ، مطابق تابع $V=ax$ ، به‌طور پیوسته افزایش می‌یابد؛ ولی حتی بدون تحلیل مفصل می‌توان خصوصیات عام جواب مکانیک موجی را نشان داد.

چون پتانسیل در $x=0$ به بینهایت صعود می‌کند در آنجا تابع موج باید صفر باشد. در انتهای دیگر، جایی که می‌توان ذره را در خارج از حد بالای کلاسیک یافت، باید تابع



شکل ۲۷.۵ سطح شیبدار مکانیک موجی، تابع انرژی پتانسیل و تابع موج پنجمین حالت مجاز.

موج به صفر فرو میفتند. در بین این دونا حیه، ذره دارای انرژی جنبشی غیر صفر است و لذا تابع موج در آنجا نوسانی است. به علاوه، در یک حالت نسبتاً برانگیخته شدید، از طریق اصل همخوانی باید خصوصیات جواب مکانیک موجی به خصوصیات کلاسیکی ذره‌ای که بر یک سطح شیبدار می‌لغزد و با دیوار سختی در انتهای سطح برخورد می‌کند، نزدیک شوند. چون این ذره در پایین سطح با سرعت زیاد و در بالای آن با سرعت کم حرکت می‌کند باید طول موج تابع موج در نزدیکی پایین سطح کمترین مقدار خود را دارا باشد و با نزدیک شدن به بالای سطح به طور صعودی افزایش پیدا کند. علاوه بر این، سرعت زیاد کلاسیک در پایین و سرعت کم در بالای سطح حاکی از آن است که ذره با احتمال زیاد در بالای سطح است نه در پایین آن. از این رو، باید دامنه تابع موج بیشترین مقدار خود را در بالا و کمترین مقدار خود را در پایین داشته باشد. با توجه به همه این خصوصیات می‌دانیم که جواب مکانیک موجی یک حالت برانگیخته همان است که در شکل ۲۷.۵ نشان داده شده است.

در حالت با انرژی بالاتر بعدی باید یک نیم طول موج اضافی بین دو انتهای چپ و راست قرار بگیرد و در حالت با انرژی پایینتر بعدی باید یک نیم طول موج کمتر قرار بگیرد؛ در پایینترین حالت باید بین صفرهای مربوط به ψ ، در دو انتهای چپ و راست، یک برآمدگی در ψ پیدا شود.

خلاصه

به هر ذره، با جرم سکون متناهی یا صفر يك بسامد و يك طول موج به صورت زیر نسبت داده می شود

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p} \quad (۱.۵) \text{ و } (۲.۵)$$

طول موج الکترونهاي ۱۵۰ الکترون ولتی، نوترونهاي گرمایی (۱.۲۵ eV) تا پرتوهای x نوعی و فواصل بین اتمی يك جامد همگی از مرتبه ۱ Å هستند. وقتی يك موج بر مجموعه‌ای از صفحات موازی براگ، که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند، فرود آید طبق رابطه براگ هنگامی تداخل سازنده رخ می دهد که

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (۴.۵)$$

باشد. پرتوهای x و الکترونها می توانند به وسیله جامدهای بلورین پراشیده شوند. می توان از آثار پراش پرتو x و الکترون برای اندازه گیری طول موجهای پرتو x و الکترون و فواصل بین اتمی و نیز برای تولید باریکه‌های تکفام استفاده کرد. طبق اصل مکملی بوهر، جنبه‌های موجی و ذره‌ای تابش الکترومغناطیسی و جنبه‌های موجی و ذره‌ای ذرات مادی مکمل یکدیگرند؛ ولی در هر وضعیت مشخص استفاده از يك توصیف مانع استفاده از توصیف دیگر می شود. مقایسه زیر، شباهت توصیف مکانیک موجی ذرات مادی را با توصیف تابش الکترومغناطیسی نشان می دهد

ذرات مادی
تابع موج ψ

تابش الکترومغناطیسی (فوتونها)
تابع موج: میدان الکتریکی $\mathcal{E}$
(یا میدان مغناطیسی)
احتمال مشاهده ذره در فاصله dx

$$\psi^2 dx$$

$$\mathcal{E}^2 dx$$

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ بر قطعیت اندازه گیری همزمان انرژی E و زمان t و بر قطعیت اندازه گیری همزمان اندازه حرکت p_x و مکان x محدودیت اعمال می کند

$$\Delta E \Delta t \geq h \quad (۱۴.۵)$$

$$\Delta p_x \Delta x \geq h \quad (۱۵.۵)$$

می توان يك ذره را با يك بسته موج نمایش داد؛ سرعت گروه بسته موج همان سرعت ذره است.

يك ذره آزاد و محبوس در يك جعبه يك بعدی (به طول L) با دیوارهای به طور نامتناهی بلند، محدود به حالتی است که در آنها مضرب درستی از طول موج ذره بین مرزها تطبیق داده شود. از این رو انرژی این ذره کوانتیده است و به صورت زیر بیان می شود

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \quad (27.5)$$

که در آن n عدد کوانتومی است، یعنی $n = 1, 2, 3, \dots$ بنا به اصل همخوانی

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\text{فیزیک کوانتومی}) = \text{فیزیک کلاسیک}$$

توابع موج ψ و انرژیهای مجاز E مربوط به حالات ساکن ذره ای به جرم m ، که توسط تابع انرژی پتانسیل V محبوس شده است، با معادله مستقل از زمان شرودینگر تعیین می شوند. شکل يك بعدی این معادله به صورت زیر است

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + (E - V) \psi = 0 \quad (30.5)$$

تابع موج، ψ مقدار و پیوسته است و طوری انتخاب می شود که با شرایط مرزی که به وسیله طبیعت تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ اعمال می شوند سازگار باشد.

مسائل

۱. طول موجهای (الف) يك فوتون 1000 MeV ، (ب) يك الكترون با انرژی جنبشی 1000 MeV و (ج) يك پروتون با انرژی جنبشی 1000 MeV چقدرند؟
۲. يك پروتون و يك الكترون هر دو از حال سکون با اختلاف پتانسیل الكتریکی 50 کیلوولتی شتاب داده می شوند. نسبت طول موج پروتون به طول موج الكترون چقدر است؟

۳. طبق معادله (۷.۴) طول موج فوتونی با انرژی E با رابطه

$$\lambda = (1240 \text{ MeV} \cdot \text{\AA}) / E$$

بیان می شود. نشان دهید که وقتی انرژی کل E ذره ای با جرم سکون غیر صفر از

انرژی سکون E_0 آن خیلی بزرگتر باشد، همین رابطه طول موج این ذره را نیز به دست می‌دهد.

۴. (الف) در مرکز شتابدهنده خطی استانفورد، الکترون‌ها تا انرژی جنبشی 20 GeV شتاب می‌گیرند؛ طول موج این الکترون‌ها چقدر است؟ (ب) در شتابدهنده انرژی بالای واقع در باتاویا، ایلینویز، پروتون‌ها دارای انرژیهای 500 GeV می‌شوند؛ طول موج این پروتون‌ها چقدر است؟

۵. ریشه میانگین مربعی سرعت مولکولی یک گاز هیدروژن مولکولی، در 300 K برابر 184 km/s است؛ طول موج این مولکول هیدروژنی چقدر است؟

۶. (الف) انرژی جنبشی اتم هیدروژنی که طول موج آن با قطر آن ($\approx 1 \text{ \AA}$) قابل مقایسه است چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی پروتونی که طول موج آن با قطر آن ($\approx 2 \times 10^{-15} \text{ m}$) قابل مقایسه است، چقدر است؟

۷. نشان دهید که طول موج ذره‌ای با انرژی سکون E_0 و انرژی جنبشی E_k (الف) وقتی $E_k \gg E_0$ باشد به صورت hc/E_k و (ب) وقتی $E_k \ll E_0$ باشد با $hc/(2E_0 E_k)^{1/2}$ بیان می‌شود.

۸. نشان دهید که طول موج ذره‌ای با انرژی سکون E_0 و انرژی جنبشی E_k از رابطه $\lambda = hc E_k^{-1/2} (2E_0 + E_k)^{-1/2}$ به دست می‌آید.

۹. ذراتی به جرم m و بار Q بدون انحراف از ناحیه‌ای از فضا عبور می‌کنند. در این ناحیه میدان الکتریکی E و میدان مغناطیسی B هر دو نسبت به جهت باریکه ذرات عرضی و بر یکدیگر عمودند. طول موج ذرات خروجی از این ناحیه چقدر است؟

۱۰. طول موج ذراتی با انرژی سکون E_0 و بار Q که در میدان مغناطیسی B بر مسیری دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کنند چقدر است؟

۱۱. فاصله شبکه‌ای اتم‌های واقع در یک تک بلور کلرور سزیوم را، که دارای ساختار مکعبی ساده مانند کلرور سدیم است، محاسبه کنید. جرم‌های اتمی سزیوم و کلر به ترتیب، برابر 132.9 و 35.5 و چگالی کلرور سزیوم برابر 3.97 g/cm^3 است.

۱۲. پرتوهای x تکفام شامل فوتون‌هایی با انرژی 50 MeV بزرگ بلور کلرور کلسیم فرود می‌آیند. فاصله شبکه‌ای این بلور $3.14 \text{ \AA}$ است. تحت چه زاویه‌ای نسبت

به باریکه فرودی، بازتاب اول براگ مشاهده می‌شود؟

۱۳. باریکه باریکی از نوترونهای گرمایی باریک بلور کلرور سدیم که فاصله شبکه‌ای آن $2.82 \text{ \AA}$ است فرودمی آید. (الف) برای تولید پراش مرتبه اول شدید، برای نوترونهایی با انرژی جنبشی 0.50 eV صفحات براگ را باید تحت چه زاویه‌ای (نسبت به باریکه فرودی) قرار داد؛ (ب) در آن صورت زاویه بین باریکه فرودی و باریکه پراشیده چقدر است؟

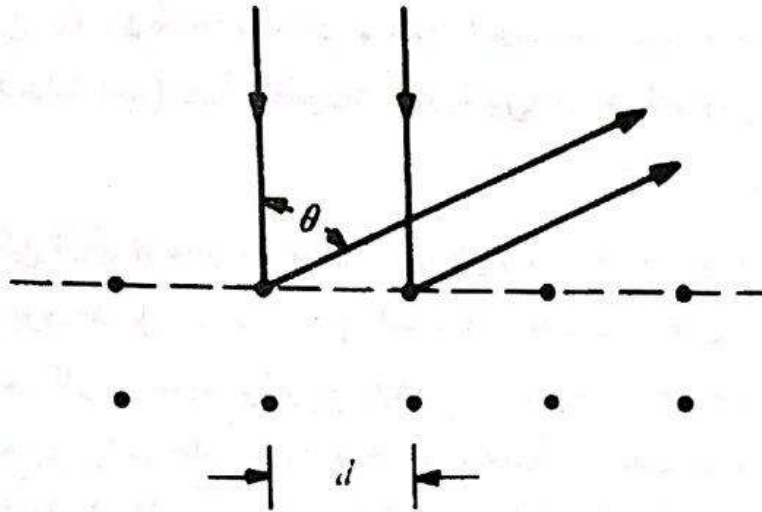
۱۴. باریکه باریکی از پرتوهای x ، با طول موج $0.62 \text{ \AA}$ ، برپودر کلرور سدیم فرود می‌آید. این پودر شامل ریز بلورهایی است که به طور کتره‌ای سمتگیری کرده‌اند. فاصله شبکه‌ای کلرور سدیم برابر $2.82 \text{ \AA}$ است. یک صفحه عکاسی تخت در فاصله 100 cm سانتیمتری پشت هدف پودر و عمود بر باریکه فرودی قرار دارد (شکل ۵.۵). (الف) شعاع دایره واقع بر صفحه عکاسی که ناشی از پراش مرتبه اول از صفحات براگ (به فاصله $2.82 \text{ \AA}$ از یکدیگر) است چقدر است؟ (ب) شعاع دایره ناشی از پراش مرتبه دوم از همان صفحات براگ چقدر است؟

۱۵. به وسیله مجموعه‌ای از کتره‌های کوچک واقع در گوشه‌های مکعبهایی به ضلع 10 cm سانتیمتر که تنگ هم قرار گرفته‌اند یک مدل بزرگ مقیاس از یک شبکه بلورین تولید می‌شود. این «بلور» تحت تابش میکروموجهای 30 cm سانتیمتری قرار می‌گیرد. برای تولید پراش شدید براگ نمونه بلور باید تحت چه زاویه‌ای چرخانده شود؟ چرخش را نسبت به پیکربندی اندازه بگیرید که در آن باریکه فرودی بروجوی از عناصر مکعبی عمود باشد.

۱۶. دوبرده سیمی مشبك و موازی به فاصله 20 cm متر از یکدیگر قرار دارند. باریکه تکفامی از امواج رادیویی بر این پرده‌ها فرود می‌آید و وقتی زاویه بین باریکه‌های فرودی و پراشیده 30° باشد پراش مرتبه اول شدید براگ رخ می‌دهد. بسامد این امواج رادیویی چقدر است؟

۱۷. مانند آزمایش دیویسون - گرمر، باریکه تکفامی از الکترونهای 54 eV باریک تک بلور نیکل فرود می‌آید؛ شکل مربوط به همین مسئله را ببینید. (الف) طول موج این الکترونها چقدر است؟ (ب) اگر باریکه پراشیده با زاویه θ ، نسبت به امتداد عمود بر سطح بلور، مشاهده شود و فاصله بین اتمهای واقع بر سطح بلور d باشد نشان دهید که بیشینه اول در باریکه پراشیده از سطح بلور فقط باید تحت زاویه‌ای ظاهر شود که با رابطه

$d \sin \theta = \lambda$ مشخص می‌شود. (ج) اگر فاصله اتمی d نیکل برابر $2.15 \text{ \AA}$ باشد زاویه θ برای بیشینه اول چقدر است؟ (دیویسون و گرمر بیشینه‌ای را در $\theta = 50^\circ$ مشاهده کردند.)



شکل مسئله ۱۷

۱۸. انرژی پتانسیل جاذبه‌ای بین یک جسم جامد معین و الکترونهای وارد به سطح آن 10 eV است. فرض کنید که الکترونهای 20 eV با زاویه فرودی 30° (نسبت به امتداد عمود بر سطح) به سطح وارد می‌شوند. (الف) زاویه شکست الکترونها در ماده چقدر است؟ (ب) طول موج الکترون در داخل ماده چقدر است؟

۱۹. نشان دهید که سرعت فاز موج وابسته به ذره‌ای به جرم سکون m_0 و با طول موج λ توسط رابطه $c[1 + (m_0 c \lambda / h)^2]^{1/2}$ بیان می‌شود.

۲۰. سرعت یک ذره $5c$ است. سرعت موج دو بروی وابسته به این ذره چقدر است؟

۲۱. الکترونی دارای انرژی جنبشی 10.2 eV است. (الف) سرعت فاز و (ب) سرعت گروه امواج وابسته به این الکترون چقدر است؟ (ج) چنانچه این امواج شامل یک بسته موج مجبوس در فاصله $50 \text{ \AA}$ باشند، عدم قطعیت در اندازه حرکت الکترون چقدر است؟ (د) عدم قطعیت نسبی در اندازه حرکت این الکترون چقدر است؟

۲۲. در یک لحظه یک ذره آزاد به جرم m و سرعت v به وسیله یک بسته موج به «پهنای» Δx نمایش داده می‌شود. (الف) عدم قطعیت در بزرگی اندازه حرکت این ذره چقدر است؟ (ب) پهنای بسته موج وابسته به این ذره مدتی بعد در زمان Δt چقدر است؟

۲۳. شدت یک باریکه تکفام تابش الکترومغناطیسی برابر 10^3 W/m^2 است. چنانچه این

باریکه شامل (الف) امواج رادیویی 100 MHz ، (ب) نور مرئی $6000 \text{ \AA}$ ،
(ج) پرتوهای γ با انرژی 2 MeV باشد چگالی فوتونها یا تعداد متوسط فوتونها
در یک سانتیمتر مکعب در هر یک از این حالتها چقدر است؟

۲۴. ذره‌ای به جرم $1 \mu\text{g}$ در امتداد محور X حرکت می‌کند سرعت این ذره دارای عدم
قطعیتی برابر 10^{-6} m/s $\times 6$ است. عدم قطعیت در مکان این ذره (الف) در
امتداد محور X و (ب) در امتداد محور Y چقدر است؟ الکترونی که دارای همان
عدم قطعیت در سرعت است در امتداد محور X حرکت می‌کند؛ در امتداد (ج) محور
 X و (د) محور Y عدم قطعیت در مکان این الکترون چقدر است؟

۲۵. ویروس کوچکترین جسمی است که می‌توان آن را با میکروسکوپ الکترونی «مشاهده»
کرد. فرض کنید که یک ویروس کوچک به اندازه $10 \text{ \AA}$ و هم چگالی با آب (1 g/cm^3)،
در ناحیه‌ای برابر با اندازه خود در فضا جایگزیده باشد. سرعت کمینه‌ی این ویروس
چقدر است؟

۲۶. مؤلفه اندازه حرکت یک الکترون با انرژی 102 MeV در جهت حرکت آن دارای
عدم قطعیتی به نسبت ۱ در 10^2 است. این الکترون در چه ناحیه کمینه‌ای از فضا
گسترش یافته است؟

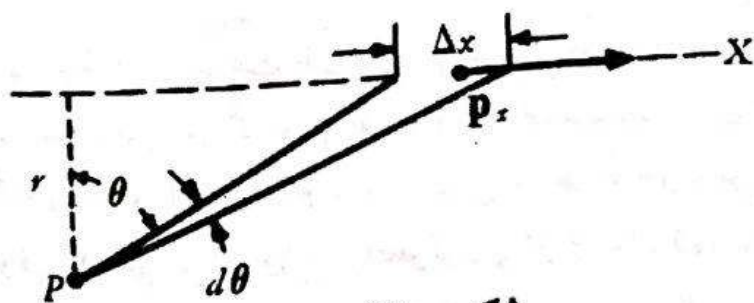
۲۷. دورپینی که در بجه آن به سرعت باز و بسته می‌شود در مدت 10^{-5} s $\times 10$ که در بجه
آن باز است یک عکس می‌گیرد. (الف) عدم قطعیت در انرژی هر فوتونی که از
در بجه می‌گذرد چقدر است؟ عدم قطعیت نسی متناظر با طول موج (ب) یک فوتون
۲ الکترون ولتی از نور مرئی و (ج) یک فوتون پرتو γ با انرژی 2 GeV چقدر است؟

۲۸. انرژی جنبشی کمینه (الف) یک الکترون و (ب) یک پروتون محبوس در ناحیه‌ای
از فضا چقدر است؟ اندازه هسته حدوداً 10^{-14} m است. (ج) معلوم شده است که
ذرات درون یک هسته اتمی دارای انرژی‌هایی از مرتبه چند MeV هستند و انرژی پتانسیل
جاذبه بین یک زوج از ذرات هسته‌ای نیز از همان مرتبه است؛ کدام یک از ذرات،
الکترون‌ها یا پروتون‌ها، ممکن است در درون یک هسته اتمی یافت شوند؟

۲۹. طول موج یک فوتون با دقت ۱ در 10^8 اندازه‌گیری می‌شود ($\Delta\lambda/\lambda = 10^{-8}$).
عدم قطعیت Δx در جایگزینی همزمان (الف) یک فوتون نور مرئی با طول موج
 $6000 \text{ \AA}$ ، (ب) یک فوتون رادیویی با بسامد 100 kHz ، (ج) یک فوتون پرتو γ با
طول موج $10 \text{ \AA}$ و (د) یک فوتون پرتو γ با انرژی 1224 GeV چقدر است؟

۳۰. یک ذره در ناحیه‌ای با ابعاد هسته‌اتم (تقریباً $2 \times 10^{-15} \text{ m}$) محبوس است. (الف) با استفاده از رابطه عدم قطعیت اندازه حرکت تقریبی این ذره را محاسبه کنید. (ب) چنانچه انرژی جنبشی این ذره چند MeV باشد انرژی سکون آن چقدر است؟ (ج) کدام ذره معمولی در بایسته‌های قسمتهای ب و ج را بر آورده می‌کند؟

۳۱. رابطه عدم قطعیت را می‌توان بر حسب اندازه حرکت خطی و مکان ($\Delta p_x \Delta x \geq h$) یا بر حسب انرژی و زمان ($\Delta E \Delta t \geq h$) نوشت. فرمولبندی دیگری از رابطه عدم قطعیت بر حسب اندازه حرکت زاویه‌ای L و زاویه θ به صورت ($\Delta L \Delta \theta \geq h$) است که در آن ΔL عدم قطعیت در اندازه حرکت زاویه‌ای ذره نسبت به یک نقطه دلخواه $\Delta \theta$ عدم قطعیت در مکان زاویه‌ای آن نسبت به همان نقطه است. شکل مربوط به همین مسئله را ببینید؛ در این شکل یک ذره آزاد در امتداد یک خط مستقیم حرکت می‌کند و اندازه حرکت زاویه‌ای آن $L = r p_x$ و مکان زاویه‌ای آن θ نسبت به نقطه‌ای اندازه‌گیری می‌شوند. (الف) با استفاده از رابطه عدم قطعیت در p_x و x رابطه عدم قطعیت در L و θ را به دست آورید. (ب) بنا به مدل ساده اتمی، الکترون در اتم هیدروژن به دور هسته می‌چرخد و اندازه حرکت زاویه‌ای آن نسبت به هسته برابر $h/2\pi$ است؛ رابطه عدم قطعیت درباره مکان الکترون در مدار دایره‌ای چگونه است؟



شکل مسئله ۳۱

۳۲. رابطه عدم قطعیت $\Delta E \Delta t \geq h$ را می‌توان از رابطه عدم قطعیت $\Delta p_x \Delta x \geq h$ به کمک ملاحظات زیر، به دست آورد. مکان ذره‌ای که در امتداد محور x حرکت می‌کند به اندازه Δx دارای عدم قطعیت است. بنابراین عدم قطعیت در زمانی که طی آن ذره به نقطه دیگری در امتداد محور x می‌رسد برابر $\Delta t = \Delta x / v$ است که در آن v نمایشگر سرعت متوسط ذره است. (الف) عدم قطعیت در انرژی جنبشی ذره را بر حسب سرعت متوسط v آن پیدا کنید. (ب) عدم قطعیت در اندازه حرکت آن را $\Delta p_x = m \Delta v_x$ ، که در آن Δv_x عدم قطعیت در سرعت ذره است به دست آورید. (ج) به کمک نتایج بالا نشان دهید که $\Delta E \Delta t = \Delta p_x \Delta x \geq h$ است.

۳۳. به سه دلیل عمده خطوط طیفی دارای پهنای متناهی اند: (۱) پهنای طبیعی خط به وسیله اصل عدم قطعیت مشخص می شود. (مسئله ۲۹ را ببینید)؛ (۲) پهن شدگی دوپلر، که از گسیل نور از اتمهای در حال حرکت یا از حرکت ناظر نسبت به اتمهای گسیل کننده ناشی می شود (مسئله ۱۸ فصل ۲ را ملاحظه کنید)؛ و (۳) پهن شدگی برخورد، که از طریق برخوردهای بین اتمهای گسیل کننده و دیگر اتمها ناشی می شوند. * نشان دهید که پهنای خط (اندازه گیری شده بر حسب بسامد) برای فرایند ۱ مستقل از دما، برای فرایند ۲ متناسب با $(T)^{1/2}$ ، و برای فرایند ۳ متناسب با عکس $(T)^{1/2}$ است. (دانهایی: T دمای مطلق است.)

۳۴. مزون π يك ذره بنیادی است که جرم سکون آن 140 MeV است. فرض کنید که يك پروتون به خودی خود چنین ذره ای بیافریند، $p \rightarrow p + \pi$ ، اصل عدم قطعیت، انرژی لازم برای این منظور را مجاز می داند. (الف) برای چه مدت زمان پیشینه ای يك مزون π می تواند به هستی خود ادامه دهد یا، به عبارت دیگر، طبق رابطه عدم قطعیت، برای چه مدت می توان 140 MeV را قرض گرفت؟ (ب) برای سهولت فرض کنید که يك مزون π با سرعت نور یا خیلی نزدیک به آن حرکت می کند، مسافت پیشینه ای که این مزون قبل از از دست دادن هستی خود (مثلاً در اثر ترکیب خود به خودی با پروتون دیگری) طی می کند چقدر است؟ نیروی جاذبه بین ذرات هسته ای، پروتونها و نوترونها، را می توان به مبادله مزون بین آنها نسبت داد؛ وقتی فاصله این ذرات از یکدیگر بیش از تقریباً $10^{-15} \times 2$ متر باشد نیروی هسته ای به صفرافت می کند.

۳۵. در يك میکروسکوپ الکترونی باریکه ای از الکترونها جانشین باریکه ای از نور می شود و میدانهای کانونی کننده الکتریکی و مغناطیسی جانشین عدسیهای بازتابان می شوند. کوچکترین فاصله ای را که در بهترین شرایط با هم میکروسکوپی می توان تفکیک کرد (توان تفکیک میکروسکوپ) تقریباً برابر طول موجی است که در میکروسکوپ به کار می رود. (الف) يك میکروسکوپ الکترونی نوعی با الکترونهای 50 کیلو الکترون ولتی کار می کند؛ کمینه فاصله ای را که به وسیله چنین میکروسکوپی می توان تفکیک کرد محاسبه کنید. (ب) توان تفکیک واقعی که حدود $20 \text{ \AA}$ است و در میکروسکوپیهای الکترونی به خوبی طراحی شده به دست می آید، چه مقدار از توان تفکیک نهایی

* ر.ک بخش ۹.۱۹ کتاب زیر

(کمینه فاصله بین دو جسم نقطه‌ای که به عنوان دو جسم مجزا قابل تشخیص اند) بیشتر می‌شود؟ این توان نهایی به وسیله خواص موجی الکترون‌ها محدود می‌شود.

۳۶. توان تفکیک نهایی (مسئله ۳۵) هر میکروسکوپی صرفاً به طول موج بستگی دارد. فرض کنید که می‌خواهیم جسمی را که دارای ابعاد $50 \text{ \AA}$ است مورد مطالعه قرار دهیم؛ اگر (الف) از الکترون‌ها و (ب) از فوتون‌ها استفاده کنیم کمینه انرژی و اندازه حرکت چقدر است؟ (ج) چرا میکروسکوپ الکترونی بر میکروسکوپ پرتو γ برتری دارد؟

۳۷. ذره‌ای به جرم m در یک جعبه سه بعدی با ابعاد a, b, c و c محبوس است. با اعمال شرایط مرزی بر توابع موج، در هر یک از سه بعد، نشان دهید که انرژیهای مجاز به قرار زیرند

$$E = \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \right) \left[\left(\frac{n_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{b} \right)^2 + \left(\frac{n_3}{c} \right)^2 \right]$$

که در آن اعداد کوانتومی n_1, n_2, n_3 می‌توانند مقادیر درست ۱، ۲، ۳، ۴، ... را اختیار کنند.

۳۸. وضعی را که در مسئله ۳۷ شرح دادیم در نظر بگیرید که در آن ذره‌ای به جرم m درون یک جعبه سه بعدی با ابعاد a, b, c و c محبوس است. نشان دهید که توابع موج مجاز عبارت‌اند از $\Psi = B [\sin(\pi n_1 x/a)] [\sin(\pi n_2 y/b)] [\sin(\pi n_3 z/c)]$ که در آن $B = (\frac{8}{abc})^{1/2}$ است. گوشه این جعبه در مبدأ مختصات واقع شده است، و جعبه طوری قرار گرفته است که تمام مختصات مربوط مثبت‌اند (دانه‌مایی): ثابت B با این شرط که احتمال وجود ذره در جایی درون جعبه صد درصد است تعیین می‌شود،

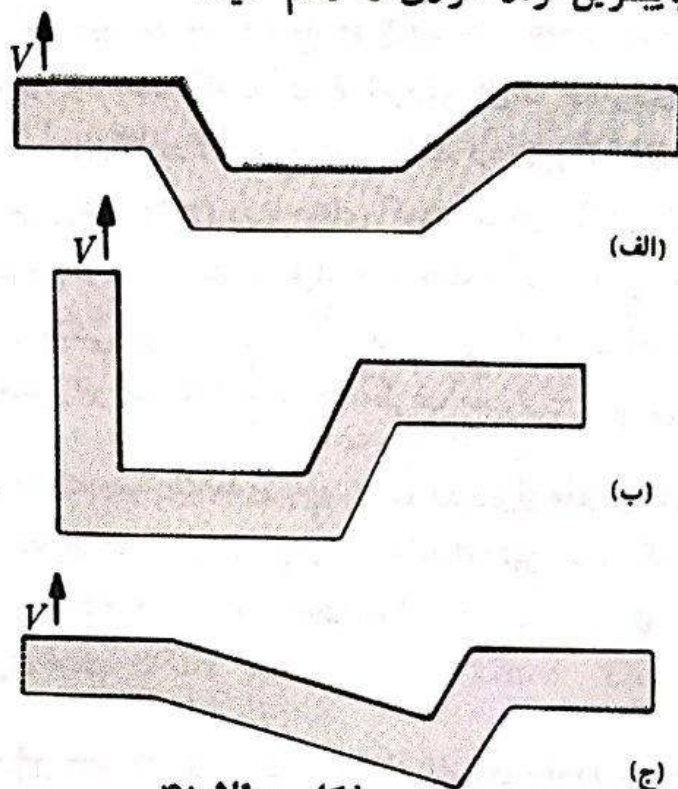
$$\text{یعنی } \int_0^a \int_0^b \int_0^c \Psi^2 dx dy dz = 1.$$

۳۹. مهره کوچکی به جرم m آزادانه در امتداد یک حلقه دایره‌ای به شعاع R می‌لغزد. (الف) انرژیهای مجاز مهره چقدرند؟ (ب) اندازه حرکت‌های زاویه‌ای مجاز چقدرند؟

۴۰. یک توپ بیلیارد به جرم m در یک جعبه دوبعدی (میز بیلیارد) با ابعاد L و W محبوس است. (الف) انرژیهای مجاز توپ بیلیارد چقدرند؟ کمینه انرژی توپ بیلیارد چقدر است (جرم توپ 14 kg و ابعاد میز 3.7 m و 1.9 m هستند)؟

۴۱. شکل مربوط به این مسئله سه چاه انرژی پتانسیل را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه برای انرژی جنبشی نسبتاً زیاد (و انرژی پتانسیل نسبتاً کم) طول موج کوچک است و اینکه

در فواصل نامتناهی توابع موج صفر می‌شوند، و اینکه در حد همخوانی اعداد کوانتومی بزرگ، باید توابع موج نتایج کلاسیکی متناظر را به دست بدهند، توابع موج تقریبی پنجمین پایتترین تراز انرژی را رسم کنید.



شکل مسئله ۴۱

۴۲. نشان دهید که در حد کلاسیکی اعداد کوانتومی بسیار بزرگ احتمال وجود یک ذره در هر فاصله کوچک ولی معین و متناهی Δx ، در یک جعبه یک بعدی، مستقل از مکان ذره درون جعبه است. این نتیجه با این انتظار کلاسیکی، که احتمال یافتن ذره‌ای که با سرعت ثابت در داخل جعبه یک بعدی حرکت می‌کند در تمام نقاط یکسان است، سازگار است.

۴۳. (الف) برای رسم چند تابع موج اول ذره‌ای که در یک پتانسیل سهمی گون (نوسانگر هماهنگ ساده) قرار دارد از این مطلب استفاده کنید که تابع موج ذره در ناحیه‌هایی از فضا که در آنها انرژی کل بر انرژی پتانسیل فزونی دارد نوسانی است، و لسی در ناحیه‌هایی که در آنها $(E - V) < 0$ باشد تابع موج فرو می‌افتد. (ب) از این مطلب که احتمال مکانیک موجی برای یافتن این ذره در هر نقطه از فضا، در حد اعداد کوانتومی بزرگ، به احتمال کلاسیکی متناظر میل می‌کند استفاده کنید و تابع موج را برای یک حالت شدیداً برانگیخته رسم کنید.

۴۴. با استفاده از توابع موج شکل ۲۶.۵، توابع موج و ترازهای انرژی را برای چاه

پتانسیلی که در پایینترین نقطه، سهمی گون ولی در پهلوها دارای دیسوارهای قائم معینی است رسم کنید.

۴۵. (الف) نشان دهید که تغییر در شیب تابع موج در بازه فضایی کوچک Δx برابر $\psi \Delta x \sqrt{2m/\hbar^2(E-V)}$ است، که در آن E انرژی کل و V انرژی پتانسیل است. (ب) نشان دهید در ناحیه‌ای که در آن تابع موج مثبت و $(E-V) > 0$ است تابع موج به‌سوی پایین‌خیم می‌شود و (ج) در ناحیه‌ای که در آن $(E-V) < 0$ است تابع موج به‌سوی بالا خیم می‌شود. (د) نشان دهید که به‌طور کلی، وقتی ذره کلاسیکی متناظر دارای انرژی جنبشی مثبت است و در آن نواحی که از لحاظ کلاسیکی ممنوع‌اند دور از محور x است، تابع موج به‌طرف محور x خیم می‌شود.

۴۶. توابع موج ذره‌ای در یک جعبه یک‌بعدی به‌پهنای L و بادیوارهای بینهایت بلند توسط رابطه $\psi_n = A_n \sin(\pi n x / L)$ بیان می‌شوند. با اعمال این شرط که احتمال کل وجود ذره جایی بین $x=0$ و $x=L$ صددرصد است، $\int_0^L \psi_n^2 dx = 1$ ، نشان دهید که $A_n = (\frac{2}{L})^{1/2}$ است.

۴۷. نشان دهید که اختلاف نسبی در انرژی بین دو تراز انرژی مجاور مربوط به ذره‌ای که در یک جعبه یک‌بعدی قرار دارد برابر $\Delta E / E = (2n+1)/n^2$ است. حد عدد کوانتومی بزرگ را n اختیار کنید و تحقیق کنید که در این حد ترازهای گسسته انرژی در فیزیک کوانتومی به‌توزیع پیوسته انرژی در فیزیک کلاسیک می‌گرایند.

۴۸. معادله شرودینگر را برای ذره‌ای به جرم m که در حرکت هماهنگ ساده است و انرژی پتانسیل آن $V = \frac{1}{2} k x^2$ است، در نظر بگیرید. (الف) نشان دهید که تابع موج $\psi = e^{-\alpha x^2}$ ، جوابی از این معادله است. (ب) نشان دهید که انرژی متناظر با این تابع موج $\frac{1}{2} \hbar \omega$ است، که در آن ω بسامد زاویه‌ای کلاسیک متناظر نوسان است، $\omega = (k/m)^{1/2}$.

۴۹. وقتی طول و انرژی بر حسب یکاهای به‌اصطلاح اتمی اندازه‌گیری شوند معادله شرودینگر صورت ساده‌ی خاصی به‌خود می‌گیرد. یکای اتمی طول $\hbar^2 / 4\pi^2 k m e^2$ است، که در آن k ثابت نیروی کولن ($F = k Q_1 Q_2 / r^2$)، جرم سکون الکترون، و e بار الکترون است. یکای اتمی انرژی $2\pi^2 k^2 m e^4 / \hbar^2$ است. (همان‌طور که در بخش ۴.۶ خواهیم دید، یکاهای طول و انرژی، به‌ترتیب، شعاع اولین مدار بوهر اتم هیدروژن و بزرگی انرژی اتم هیدروژن در پایینترین حالت کوانتیده آن هستند.) نشان دهید که

وقتی طول و انرژی بر حسب یکاهای اتمی اندازه گیری شوند، معادله یک بعدی مستقل از زمان شرودینگر به صورت $d^2\psi/dx^2 + (E - V)\psi = 0$ درمی آید.

کتابشناسی

1. Boorse, H. A., and L. Motz, eds.: *The World of the Atom*. New York: Basic Books, Inc., 1966.

این دو جلد شامل مقالات اولیه فراوانی در مورد اکتشافات اساسی مربوط به فیزیک اتمی و هسته‌ای همراه با شرح حال مختصر دانشمندان است. فصلهای ۵۱، ۵۲، و ۶۸ شامل پراش پرتو x و الکترون؛ فصلهای ۶۳ تا ۶۶ و ۷۱ شامل امواج دو بروی، تغییر امواج ذره‌ای از دیدگاه احتمالات، اصل عدم قطعیت و اصل مکملی‌اند.

2. Heisenberg, W.: *The Physical Principles of the Quantum Theory*. Chicago, Ill.: The University of Chicago Press, 1930.

چهار فصل اول این کتاب به اصل عدم قطعیت، مفهوم و نتایج آن می‌پردازد.

3. Heitler, W.: *Elementary Wave Mechanics*. Oxford: The Clarendon Press, 1946.

صد صفحه اول این کتاب پیشرفت مکانیک موجی و معادله شرودینگر را با ریاضیاتی ساده ارائه می‌دهد.

4. Schilpp, P. A., ed.: *Albert Einstein: Philosopher Scientist*. Evanston, Ill.: The Library of Living Philosophers, Inc., 1949.

فصل ۷، «بحث با اینشتین درباره مسائل معرفت شناختی در فیزیک اتمی» نوشته نیلز بوهر، شامل بحث نافذی درباره مفاهیم اصل عدم قطعیت و کوشش در جهت ساختن بعضی ماشینهای فرضی برای نقض این اصل است. همه این کوششها با شکست مواجه شدند.

5. Sherwin, C. W.: *Introduction to Quantum Mechanics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1959.

ساختار اتم هیدروژن

۱۰۶ پراکندگی ذره α

درک نوین ما از ساختار اتم با فرض خصوصیات اساسی زیر همراه است: يك هسته ناحیه بسیار کوچکی از فضا را که در آن تمامی بار مثبت و عملاً تمامی جرم اتم متمرکز است اشغال می‌کند، و الکترون‌ها هسته را احاطه می‌کنند. می‌خواهیم دلایل این مطلب را، که نخست توسط ارنست رادرفورد در سال ۱۹۱۱/۱۲۹۰ مطرح شد، بررسی کنیم.

در پایان قرن نوزدهم معلوم شد که بار الکتریکی منفی اتم توسط الکترون‌ها حمل می‌شود. جرم این الکترون‌ها فقط کسر کوچکی از جرم کل اتم است. چون اتم‌ها به عنوان يك کل از نظر الکتریکی خنثی هستند، اگر همه الکترون‌های يك اتم را از آن جدا کنیم، آنچه باقی می‌ماند شامل تمام بار الکتریکی مثبت و اساساً تمامی جرم اتم است. آنگاه این سؤال پیش می‌آید که «توزیع جرم و بار مثبت در حجم اتم چگونه است؟» از آزمایش‌های گوناگون معلوم شده است که «اندازه» (قطر) اتم‌ها از مرتبه A است؛ و چون بار مثبت و جرم در ناحیه‌ای به این کوچکی محبوس‌اند مشاهده جزئیات ساختار اتمی به وسیله هیچ اندازه‌گیری مستقیمی امکان‌پذیر نیست، و لذا باید به اندازه‌گیری غیرمستقیم متوسل شد. یکی از مؤثرترین روش‌های مطالعه توزیع ماده یا توزیع بار الکتریکی، روش پراکندگی است؛ و وجود هسته‌های اتمی توسط آزمایش‌های پراکندگی ذره α ، که توسط رادرفورد پیشنهاد

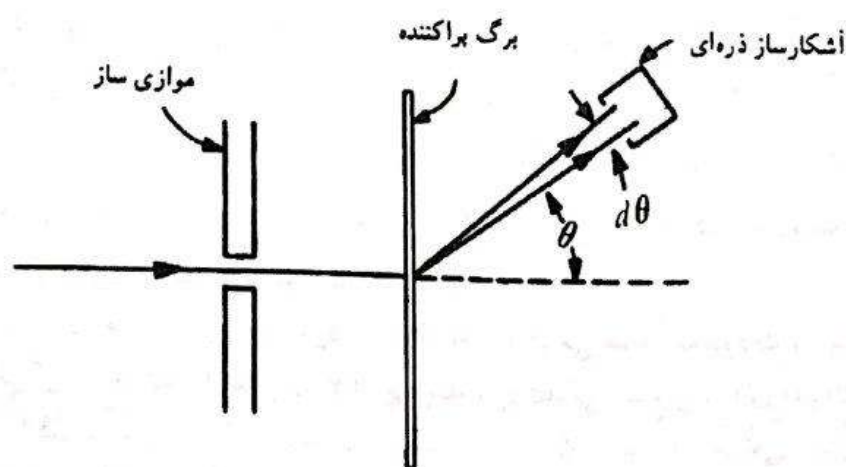
شدند، تأیید شدند.

نخست، با در نظر گرفتن نمونه ساده‌ای از آزمایش پراکندگی، می‌توان هدف نهایی روش پراکندگی را به بهترین نحو درک کرد. فرض کنید با جعبه سیاه بزرگی، که جرم محتوای آن معلوم است، روبه‌رو هستیم. برای مطالعه ساختار داخلی جعبه مجاز به دیدن داخل آن نیستیم، ولی از ما خواسته شده است که چگونگی توزیع جرم در داخل آن را تعیین کنیم. مثلاً، ممکن است جعبه با ماده‌ای به چگالی نسبتاً کم، مانند چوب، کاملاً پر شده باشد؛ یا امکان دارد که فقط بخشی از آن با ماده‌ای با چگالی زیاد پر شده باشد. چگونه می‌توان فهمید که کدامیک از این دو امکان نمایشگر توزیع واقعی ماده داخل جعبه است؟ می‌توان از راه حل خیلی ساده‌ای استفاده کرد: گلوله‌هایی به این جعبه شلیک کنیم و ببینیم برای آنها چه پیش می‌آید. در صورتی که تمام گلوله‌ها در جهت جلو با سرعت کاهش یافته از جعبه خارج شوند، می‌توان استنتاج کرد که جعبه با ماده‌ای چون چوب، که گلوله‌ها را فقط به اندازه جزئی منحرف می‌کند، پر شده است. اما اگر چند گلوله به مقدار زیاد از مسیرهای اصلی خود منحرف شوند می‌توان پذیرفت که گلوله‌ها با اجسام کوچک، سخت و سنگینی، که در سراسر جعبه پاشیده شده‌اند، برخورد کرده‌اند. بنابراین، با بررسی توزیع گلوله‌های پراکنده می‌توان اطلاعات فراوانی راجع به ترتیب ماده داخل جعبه کسب کرد. توجه کنید که لازم نیست گلوله‌ها را به هدف نشانه رویم، بلکه گلوله‌ها به‌طور کتره‌ای به‌وجه جلویی جعبه شلیک می‌شوند. این مطلب اساس آزمایشهای پراکندگی ذره در فیزیک اتمی و هسته‌ای است.

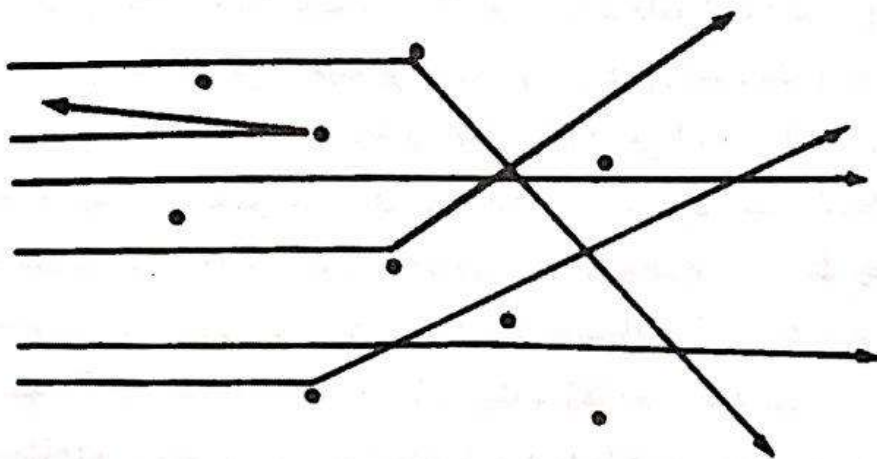
رادرفورد پیشنهاد کرد که جرم اتم و بار مثبت آن اساساً جرم و بار نقطه‌ای باشند. این جرم و بار مثبت را هسته اتم می‌نامند. علاوه بر آن، او پیشنهاد کرد که می‌توان این فرضیه را با شلیک ذرات با بار مثبت و با سرعت زیاد (گلوله‌ها) به داخل یک برگ فلزی نازک (جعبه سیاه) آزمود و آنگاه توزیع ذرات پراکنده را بررسی کرد. در آن زمان ذرات α تنها ذرات باردار مناسب و دسترس‌پذیری بودند که با انرژیهای چندین میلیون الکترون ولتی از مواد پرتوزا حاصل می‌شدند. رادرفورد قبلاً نشان داده بود که ذره α یک اتم هلیوم دوبار یونیده است؛ بنابراین بار الکتریکی این ذره مثبت و دو برابر بار الکترون است و جرم آن چندین هزار مرتبه از جرم الکترون بزرگتر است. با وجود این جرم این ذره از جرم اتم سنگینی چون طلا خیلی کوچکتر است. برای تأیید فرضیه هسته‌ای رادرفورد گایگر^۱ و مارسدن^۲ در سال ۱۹۱۳/۱۲۹۲ با استفاده از برگهای نازک طلا ذرات α را پراکنده کردند.

قسمتهای اصلی دستگاه پراکنده در شکل ۱.۶ نشان داده شده است. يك باریکه موازی از ذرات بر برگ نازکی از ماده پراکنده برخورد می کند و يك آشکارساز تعداد ذرات پراکنده در زاویه $d\theta$ تحت زاویه پراکندگی θ را می شمارد. این آزمایش شامل اندازه گیری تعداد نسبی ذرات پراکنده در زاویه های گوناگون θ است. گایگر و مارسدن در یکی از آزمایشهای خود، ذرات α ی با انرژی 7.7 MeV را از يك چشمه پرتوزا (پولونیوم) به کار بردند؛ این ذرات به برگي از طلا به ضخامت $10^{-5} \times 600$ سانتیمتر برخورد کردند. آشکارساز قابل دوران شامل يك پسرده سولفور روی بود، که توسط میکروسکوپی مشاهده می شد؛ ذرات در برخورد با پرده درخشهای روشن یا سوسوهای تولید می کردند، که می شد آنها را برای هر زاویه θ مشاهده و شمارش کرد.

رفتار ذرات α را هنگامی که از داخل برگ پراکنده می گذرند بررسی می کنیم. هر رویارویی ذره α با الکترونهاي داخل ماده را ناچیز فرض می کنیم، زیرا جرم ذره خیلی بزرگتر از جرم الکترون است؛ در چنین برخوردهایی ذره اساساً منحرف نمی شود و کسر ناچیزی از انرژی آن به هر يك از الکترونها منتقل می شود. از این رو، ذرات α تنها در برخوردهای نزدیک با هسته به طور محسوس منحرف و پراکنده می شوند. جرم هسته اتم طلا از جرم ذره α خیلی بزرگتر است (۵۰ برابر)؛ بنابراین در این برخورد هسته اتم طلا به طور محسوس پس زده نمی شود و می توان فرض کرد که در حال سکون باقی می ماند. چون ذرات α و هسته ها هردو دارای بار مثبت اند یکدیگر را دفع می کنند. در فرض رادرفورد نه فقط هسته ها به صورت بارهای نقطه ای بودند، بلکه تنها نیروی وارد بین هسته و



شکل ۱.۶ ترتیب يك آزمایش ساده پراکندگی، موازی ساز، ماده پراکنده و آشکارساز.



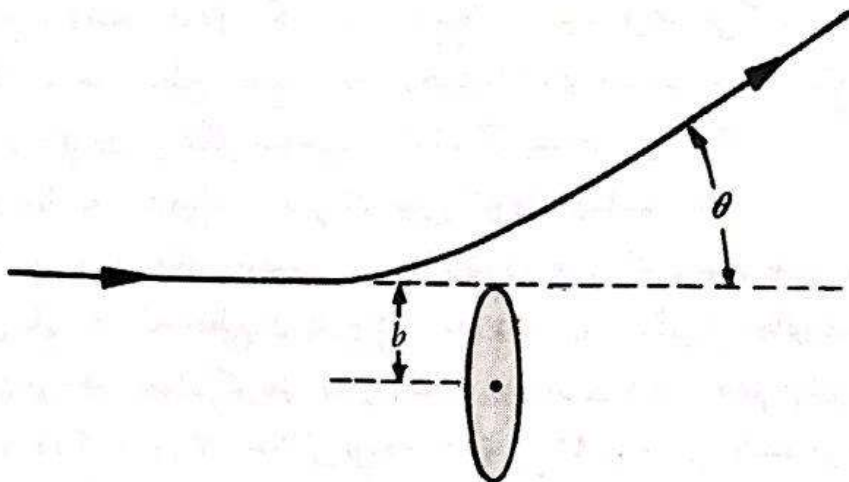
شکل ۲.۶ پراکندگی ذرات α توسط هسته‌های يك ماده (درمورد تعداد ذراتی که تحت زاویه‌های بزرگ پراکنده شده‌اند مبالغه شده است).

ذره α ، نیروی الکتروستاتیک کوئلی بود. همان‌طور که می‌دانیم نیروی مذکور باعکس مجذور فاصله بین بارها متناسب است؛ بنابراین، با وجودی که این نیرو هرگز صفر نمی‌شود (مگر در حالتی که فاصله دو بار بینهایت شود)، تنها وقتی ذره α کاملاً به هسته نزدیک شود يك نیروی دافعه قوی بر آن اثر می‌کند.

شکل ۲.۶ تعدادی از مسیرهای ذرات α را هنگام عبور از داخل برگ پراکنده نشان می‌دهد. اکثر ذرات تنها با انحراف اندکی از مسیر اصلی خود از ماده عبور می‌کنند؛ لذا شانس رویارویی نزدیک با هسته، یا مرکز پراکنده، نسبتاً بعید است. از طرف دیگر، آن چند ذره‌ای که تا برخورد رودررو فاصله چندانی ندارند تحت زاویه‌های بزرگی منحرف می‌شوند و آن ذرات فوق‌العاده نادری که برخورد رودررو می‌کنند به اندازه ۱۸۰ درجه منحرف می‌شوند؛ یعنی، این ذرات آن‌ا پس از برخورد به حال سکون درمی‌آیند و سپس در امتداد مسیرهای فرودی خود بازگشت می‌کنند.

حال برخوردیک ذره با بار مثبت (مثلاً، يك ذره α) با يك هسته سنگین (مثلاً طلا) را با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۳.۶ نشان داده شده است،

* چون يك پاریکه از ذرات هم انرژی از دیدگاه نظریه کوانتومی عملاً به صورت پاریکه‌ای از امواج تکفام در نظر گرفته می‌شود (بخش ۲.۵)، فرایند پراکندگی، شامل پراش امواج فرودی توسط مراکز پراکنده است. جالب اینجاست که بررسی کامل مکانیک موجی پراکندگی به وسیله نیروی عکس مجذوری دقیقاً همان نتیجه‌ای را به دست می‌دهد که با تحلیل ذره دقیقاً کلاسیکی به دست می‌آید. ولی، در حالات مربوط به دیگر نیروها، نتایج کلاسیکی و مکانیک موجی باهم اختلاف دارند.



شکل ۳.۶ پراکندگی ذره α که با پارامتر برخورد b به یک هسته سنگین نزدیک می‌شود.

ذره فرودی تحت زاویه θ پراکنده شده است. این ذره تا فاصله نسبتاً نزدیک به مرکز پراکنده در امتداد یک خط تقریباً مستقیم حرکت می‌کند؛ این مرکز به صورت نقطه‌ای در شکل نشان داده شده است (سایه، یک سطح دایره‌ای حول هسته را که تقریباً از طرف لبه دیده می‌شود نشان می‌دهد)؛ آنگاه ذره منحرف می‌شود و خط تقریباً مستقیمی را دنبال می‌کند؛ بنابراین مسیر آن به شکل یک هذلولی است. اگر هیچ نیرویی بین ذره و هسته وجود نداشت ذره با فاصله b از هسته می‌گذشت. این فاصله را پارامتر برخورد می‌نامند.

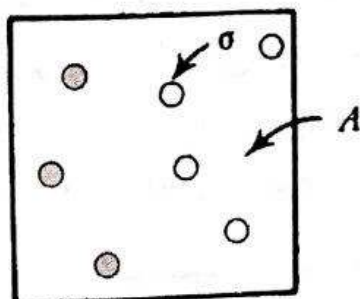
از شکل ۳.۶ دیده می‌شود که تمام ذرات فرودی که در راستای برخورد با محیط یا لبه دایره (با شعاع b) حول هسته پیش می‌روند تحت زاویه θ منحرف خواهند شد. به علاوه، هر ذره‌ای که در راستای برخورد با جایی در مساحت سایه دار πb^2 پیش می‌رود تحت زاویه‌ای بزرگتر از θ منحرف خواهد شد. البته ذره‌ای که به صورت دودرو برخورد کند ($b=0$) به اندازه 180° درجه منحرف می‌شود. مساحت πb^2 هدف را سطح مقطع σ می‌نامند

$$\sigma = \pi b^2 \quad (۱.۶)$$

از این رو، یک مساحت σ به هر مرکز پراکنده وابسته است، به طوری که اگر یک ذره فرودی با آن روبه‌رو شود در زاویه θ یا بزرگتر پراکنده خواهد شد. وقتی ذره‌ای با زاویه محسوسی منحرف شود سطح مقطع فوق‌العاده کوچک است؛ یعنی، در پراکندگی با زاویه بزرگ، هر هسته، در مقابل یک ذره فرودی، هدف بسیار کوچکی به شمار می‌رود.

حال می‌خواهیم مساحت کل هدفی را که توسط تمام مراکز پراکننده داخل يك
 برگ (به سطح A وضخامت t) تشکیل می‌شود محاسبه کنیم. فرض می‌کنیم که برگ آنقدر
 نازک باشد که مساحت سطح مقطع هریک از هسته‌ها روی مساحت سطح مقطع هسته دیگر
 نیفتد (شکل ۴.۶)؛ در این شکل مساحت کل نمایشگر مساحت برگ است. چنانچه مساحت
 سایه‌دار کل در مقایسه با مساحت برگ خیلی کوچک باشد احتمال اینکه ذره فرودی
 توسط بیش از يك هسته به‌طور محسوس منحرف شود، خیلی کم است؛ یعنی، اگر برگ
 به اندازه کافی نازک و سطح مقطع σ کوچک باشد «تک پراکندگی» به جای «پراکندگی
 چندگانه» رخ می‌دهد. تعداد کل مراکز پراکننده به ازای واحد حجم برابر n است. با
 استفاده از عدد آووگادرو، N_A ، چگالی ρ ، و جرم اتمی M_a برگ پراکننده، می‌توان مقدار
 n را از رابطه $n = N_A \rho / M_a$ محاسبه کرد (محاسبه مشابهی را در بخش ۲.۵ ببینید). اگر
 n هسته در واحد حجم وجود داشته باشد، در آن صورت در برگی به حجم At ، روی هم‌رفته
 nAt هسته وجود دارد. لذا، مساحت هدف پراکننده تحت زاویه‌ای حداقل به بزرگی θ ،
 برابر $\sigma(nAt)$ است.

می‌خواهیم کسری از ذرات فرودی را که به اندازه زاویه θ یا بیشتر پراکنده
 می‌شوند محاسبه کنیم. باریکه فرودی را نمی‌توان برای برخورد با هر هسته‌ای در برگ
 نشانه گرفت، زیرا باریکه بر روی مساحتی که در مقایسه با مساحت σ خیلی بزرگتر است
 پاشیده می‌شود. بنابراین، احتمال اینکه هر ذره فرودی تحت زاویه‌ای بزرگتر از θ پراکنده
 شود برابر نسبت مساحت هدف سایه‌دار σnAt به مساحت کل A برگ است. در این صورت،



شکل ۴.۶ مساحت‌های هدف که توسط مراکز
 پراکنده يك برگ نازک نمایش داده شده‌اند.
 این مراکز پراکننده باعث می‌شوند که
 ذرات فرودی در زاویه θ یا بزرگتر
 پراکنده شوند.

کسری از ذرات بیشمار فرودی که پراکنده می‌شود توسط رابطه $\sigma n A t / A$ ، یا

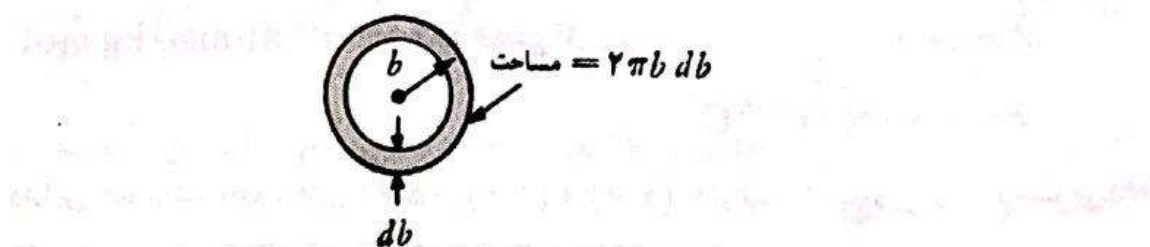
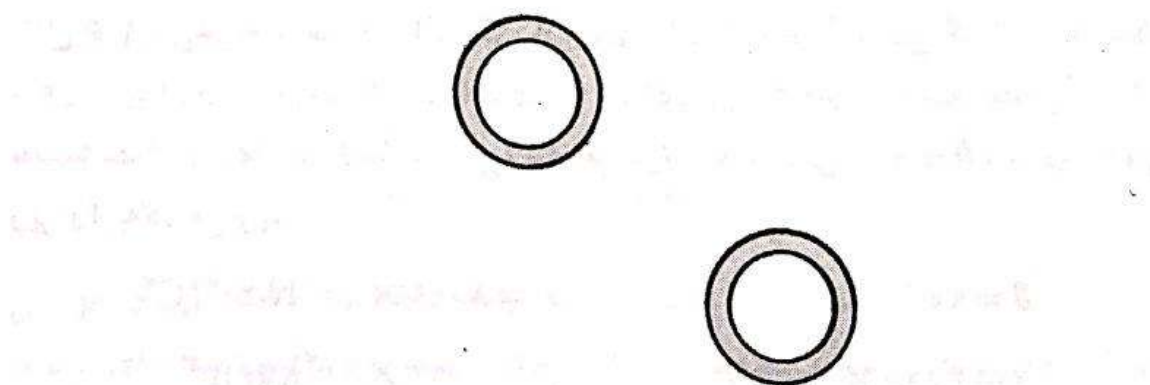
$$\frac{N_s}{N_i} = \sigma n t \quad (۲.۶)$$

داده می‌شود، که در آن N_i تعداد ذراتی است که بر روی برگ فرود می‌آیند و N_s تعداد ذرات فرودیی است که تحت زاویه θ یا بزرگتر پراکنده می‌شوند. در واقع آشکارساز ذره‌ای تعداد dN_s ذره پراکنده در زاویه $d\theta$ را تحت زاویه پراکنده‌گی θ اندازه‌گیری می‌کند. مساحت هدفی که ذرات را در زوایایی از θ تا $\theta + d\theta$ پراکنده می‌کند با سطح مقطع دیفرانسیلی $d\sigma$ برابر است، که با توجه به رابطه (۱.۶) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$d\sigma = 2\pi b db \quad (۳.۶)$$

همین نتیجه از شکل ۵.۶ نیز حاصل می‌شود، که در آن سطح مقطع دیفرانسیلی هرسته را به صورت حلقه‌ای به شعاع b ، محیط $2\pi b$ و پهنای db مشاهده می‌کنیم. در این صورت یک ذره فرودی که در راستای برخورد با مساحت سایه‌دار پیش می‌رود بین θ و $\theta + d\theta$ پراکنده می‌شود.

آنگاه با استفاده از روابط (۲.۶) و (۳.۶) تعداد dN_s ذرات پراکنده بین زاویه‌های



شکل ۵.۶ مساحت هسته‌ای هدف برای سطح مقطع دیفرانسیلی.

θ و $\theta + d\theta$ ، از رابطه زیر به دست می آید

$$\frac{dN_s}{N_i} = nt d\sigma = 2\pi b n t db \quad (4.6)$$

این معادله مبنای کلیه آزمایشهای پراکندگی با برکهای نازک است. تعداد ذرات فرودی و پراکنده N_i و dN_s را می توان مستقیماً به وسیله آزمایش اندازه گیری کرد و نسبت آنها را می توان با نسبت حاصل از این معادله مقایسه کرد. برای محاسبه dN/N_i ، باید چگونگی ارتباط پارامتر برخورد b را با زاویه پراکندگی θ دانست.

رابطه بین b و θ در پراکندگی ذرات با بار Q_1 و انرژی جنبشی E_k توسط یک بار نقطه ای بی اندازه سنگین Q_2 ، به شکل زیر بیان می شود*

$$b = \frac{k}{2} \frac{Q_1 Q_2}{E_k} \cot \frac{\theta}{2} \quad (5.6)$$

که در آن $k = 1/4\pi\epsilon_0$ ثابت قانون کولن و $Q_1 = +2e$ و $Q_2 = +Ze$ است؛ کمیت Z بار هسته را به صورت مضربی از بار e الکترون به دست می دهد. این معادله با استفاده از قوانین بقای انرژی، اندازه حرکت خطی و اندازه حرکت زاویه ای و با فرض اینکه نیروی کولن یک نیروی پایسته مرکزی و عکس مجذوری است حاصل می شود.

مثال ۱۰۶ می خواهیم نظریه پراکندگی ذرات α را در شرایط آزمایش گایگر و مارسدن به کار ببریم. در این آزمایش، ذرات α با انرژی 7.68 MeV توسط یک برگ طلا به ضخامت 600×10^{-5} سانتیمتر پراکنده می شوند. با گزینش $\theta = 90^\circ$ ، مقادیر معلوم زیر را به کار می ببریم

$$\theta = 90^\circ$$

$$k = 8.99 \times 10^9 \text{ N-m}^2/\text{C}^2$$

$$t = 6000 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\rho = 1930 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$E_k = 7.68 \text{ MeV}$$

$$w = 1972$$

$$Z = 79$$

$$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ atoms/kg mol}$$

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

در این صورت، معادله های (۵.۶)، (۱.۶) و (۲.۶) به ترتیب نتایج زیر را به دست می دهند

* رک بخش ۶.۲۲ کتاب زیر

$$b = 1.248 \times 10^{-14} \text{ m}$$

$$\sigma = 6.288 \times 10^{-28} \text{ m}^2$$

$$\frac{N_s}{N_i} = 2.243 \times 10^{-5}$$

تحت شرایط این آزمایش هر ذره فرودی که از آغاز چنان حرکت می کند که در فاصله ای در حدود 1.248×10^{-14} متر يك برخورد رود رو را از دست می دهد، حداقل به اندازه 90° منحرف خواهد شد. توجه کنید که پارامتر برخورد به مراتب از فاصله بین هسته های طلا (تقریباً 10^{-10} متر)، که برابر اندازه يك اتم طلا نیز هست، کمتر است. سطح مقطع یا مساحت هدف، برای پراکندگی ذرات α در زاویه ای بزرگتر از 90° ، برابر 6.288×10^{-28} متر مربع است که سطح خیلی کوچکی است. سرانجام درمی یابیم که N_s/N_i برابر با 2.243×10^{-5} است: از لحاظ نظری، در شرایط یاد شده، از بین هر ۱۰۰۰۰۰ ذره فرودی α ، کمی بیش از ۲ ذره به اندازه 90° یا بیشتر منحرف خواهند شد. فرض اینکه مساحت سایه دار در شکل ۴.۶ خیلی کوچکتر از مساحت کل برگ است کاملاً تأیید می شود، و بنا بر این در مواردی با این زاویه بزرگ پراکندگی فقط تك پراکندگی اهمیت دارد. در صورتی که این محاسبه برای $\theta = 1^\circ$ تکرار شود، $N_s/N_i = 0.325$ می شود، یعنی انتظار می رود که ۳۲ درصد از ذرات فرودی به اندازه 1° ، یا بیشتر پراکنده شوند.

با استفاده از رابطه (۵.۶) داریم

$$db = \frac{-kQ_1Q_2}{4E_k} \csc^2 \frac{\theta}{2} d\theta$$

علامت منها دال بر آن است که با کاهش پارامتر برخورد b زاویه پراکندگی θ افزایش می یابد؛ ولی، از این پس این علامت را به کار نخواهیم برد. با قراردادن رابطه های مربوط به b و db در رابطه (۴.۶) داریم

$$\frac{dN_s}{N_i} = \frac{\pi n t}{4} \left(\frac{kQ_1Q_2}{E_k} \right)^2 \cot \frac{\theta}{2} \csc^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi n t}{4} \left(\frac{kQ_1Q_2}{E_k} \right)^2 \frac{\cos(\theta/2) d\theta}{\sin^4(\theta/2)}$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ می توان این رابطه را به صورت زیر نیز نوشت

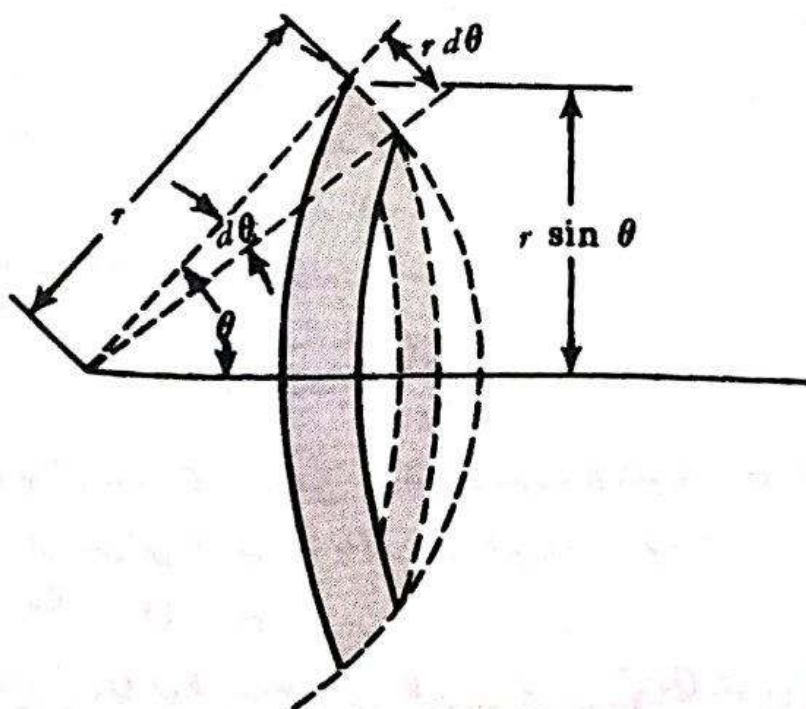
$$\frac{dN_s}{N_i} = \frac{\pi n t}{16} \left(\frac{kQ_1Q_2}{E_k} \right)^2 \frac{(2\pi \sin \theta d\theta)}{\sin^4(\theta/2)} \quad (6.6)$$

در این صورت، همان طور که در شکل ۶.۶ نشان داده شده است، مقدار $2\pi \sin \theta d\theta$ تمام زاویه فضایی $d\Omega$ تحت زاویه پراکندگی نموی $d\theta$ را به دست می‌دهد. آشکارساز ذرات پراکنده، که در فاصله ثابتی حول برگ پراکنده دوران می‌کند، همواره تحت یک زاویه فضایی متناسب با $d\Omega$ قرار می‌گیرد؛ یعنی، برای شمارش ذرات پراکنده در زوایای پراکندگی گوناگون θ ، سازه $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ با دوران آشکارساز تغییر نمی‌کند. آنگاه رابطه (۶.۶) چنین نتیجه می‌دهد

$$\frac{dN_s}{N_i} \propto \left(\frac{Q_1 Q_2}{E_k} \right)^2 \frac{nt}{\sin^4(\theta/2)} \quad (7.6)$$

برای پراکندگی ذره α ، $Q_1 = 2e$ و $Q_2 = Ze$ است، و این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dN_s}{N_i} \propto \frac{Z^2 e^4 nt}{E_k^2 \sin^4(\theta/2)}$$



شکل ۶.۶ زاویه فضایی $d\Omega$ که با نمو زوایای $d\theta$ تحت زاویه پراکندگی θ قرار می‌گیرد. بنا به تعریف، $d\Omega/4\pi$ مساحت سایه‌دار تقسیم بر مساحت کل سطح کروی است. مساحت سایه‌دار برابر $(2\pi r \sin \theta)(r d\theta)$ است. در این صورت $d\Omega/4\pi = (2\pi r^2 \sin \theta d\theta)/4\pi r^2$ و بنا بر این $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ است.

چون تعداد ذرات پراکنده با عکس $\sin^4(\theta/2)$ تغییر می کند بسا افزایش θ تعداد dN به شدت کاهش می یابد. برای مثال، به ازای هریک میلیون ذره ای که تحت زاویه $\theta = 10^\circ$ مشاهده شوند فقط ۲۳۲ ذره تحت زاویه $\theta = 90^\circ$ و فقط ۵۸ ذره تحت زاویه $\theta = 180^\circ$ منحرف می شوند.

بر اساس این فرض که بارهای هسته ای نقطه ای اند، باید اغلب ذرات فرودی فقط به اندازه جزئی منحرف شوند و تعداد کم ولی قابل ملاحظه ای از آنها تحت زاویه های بزرگ منحرف شوند. در صورتی که مدل کاملاً متفاوتی را برمی گزیدیم، یعنی مدلی که در آن پاشیدگی بسار مثبت اتم در ناحیه عمده ای از حجم آن به طور یکنواخت فرض می شد، احتمال پراکندگی بسا يك برگ نازك در زوایای بزرگ صفر بود. چنین مدلی توسط تامسون پیشنهاد شد، ولی آزمایشهای پراکندگی نشان دادند که این مدل نادرست است. فرضیه هسته ای رادرفورد به وسیله آزمایشهای گایگر و مارسدن تأیید شد. در این آزمایشها توزیع اندازه گیری شده ذرات پراکنده α ، با توزیعی که بر اساس فرض پراکندگی تحت يك نیروی کولنی ناشی از بارهای نقطه ای پیشگویی شده بود، یعنی با آن پراکندگی که با $1/[\sin^4(\theta/2)]$ متناسب است توافق داشتند. آنها نظریه رادرفورد را برای ذرات α با انرژیهای گوناگون و برای جنس وضخامت گوناگون برگ تأیید کردند.

ولی آزمایشهای پراکندگی نشان می دهند که وقتی ذرات باردار، هسته و ذره α ، در فاصله ای کمتر از 10^{-14} متر از هم قرار می گیرند قانون کولن برقرار نیست. وقتی تعداد مشاهده شده و تعداد پیشگویی شده ذرات α با انرژی بالا را، که تحت زاویه های بسیار بزرگ پراکنده می شوند مقایسه کنیم، بین آزمایش و نظریه پراکندگی کولنی اختلافی دیده می شود: ذرات α می توانند در فاصله ای کمتر از 10^{-14} متر از هسته قرار بگیرند. از این رو، برای فاصله هایی از این مرتبه یا کوچکتر، نیروی بین هسته و يك ذره α ، فقط بسا قانون کولن بیان نمی شود و باید فرض کرد که نیروی متمایز دیگری، موسوم به نیروی هسته ای، بین این ذرات عمل می کند. در بررسیهای مربوط به فیزیک هسته ای این انحرافها از نیروی کولنی دارای اهمیت اند؛ در حال حاضر توجه به این نکته کافی است که جرم و بار الکتریکی مثبت هراتم در ناحیه ای که از 10^{-14} متر بزرگتر نیست متمرکز است. به طوری که به درستی می توان فرض کرد که در يك اتم نوعی (با اندازه تقریباً 10^{-10} متر) الکترونها تحت تأثیر يك نیروی جاذبه کولنی و مطلقاً الکتروستاتیکی قرار دارند که ناشی از يك بار نقطه ای (هسته) است.

۲.۶ مدل سیاره‌ای کلاسیک

اینکه هسته، مرکز بار مثبت و مرکز جرم اتم است و اینکه نیروی بین ذرات باردار در ابعاد اتمی، به شکل نیروی الکتروستاتیک کولنی است را می‌توان به عنوان اساس يك مدل کلاسیکی خیلی ساده ساختار اتمی به کار برد. می‌خواهیم ساختار هیدروژن (ساده‌ترین اتمها) را به کمک این مدل کلاسیکی بررسی کنیم. هیدروژن معمولی شامل هسته‌ای با يك بار مثبت (پروتون) و يك الکترون است. پروتون که جرم آن ۱۸۳۶ برابر جرم الکترون است الکترون را با نیروی الکتروستاتیک کولنی، که با عکس مجذور فاصله بین آنها تغییر می‌کند، جذب می‌کند (نیروی گرانش بین این ذرات ۱۰۳۹ بار کوچکتر از نیروی الکتریکی است و بنا بر این می‌توان از آن چشمپوشی کرد). این وضع همانند وضع دستگاه خورشیدی است: جرم خورشید از جرم يك سیاره خیلی بیشتر است و سیاره و خورشید یکدیگر را توسط نیروی گرانش عکس مجذوری جذب می‌کنند. برای اینکه سیاره‌ای به خورشید مقید باشد باید در يك مسیر بیضوی یا دایره‌ای حول آن حرکت کند. در مدل اتمی سیاره‌ای، يك اتم مانند يك دستگاه خورشیدی كوچك فرض می‌شود که در آن هسته به جای خورشید، الکترون به جای سیاره و نیروی کولنی به جای نیروی گرانشی قرار می‌گیرد. این مدل، دقیقاً کلاسیکی است؛ هیچکدام از جنبه‌های موجی به الکترون نسبت داده نمی‌شود و تمام اثرهای کوانتومی مستثنی شده‌اند. برای سهولت، فرض می‌شود که الکترون در يك مدار دایره‌ای حول هسته هیدروژن در حرکت است و هسته در حال سکون باقی می‌ماند.

انرژی اتم هیدروژن و بسامد حرکت مداری را محاسبه می‌کنیم. انرژی مکانیکی کل E دستگاه (بجز انرژیهای سکون الکترون و پروتون) برابر مجموع انرژی جنبشی E_k الکترون و انرژی پتانسیل الکتریکی E_p بین الکترون و پروتون است. فرض می‌شود که الکترونی به جرم m در دایره‌ای به شعاع r با سرعت v (غیرنسبیتی) در حرکت است؛ الکترون و پروتون هر کدام دارای بار الکتریکی e اند، بنابراین

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-ke^2}{r} \right) \quad (۸.۶)$$

که در آن $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ است. نیروی شعاعی به سوی داخل، که الکترون را در مدار دایره‌ای خود نگه می‌دارد، توسط نیروی الکتریکی ناشی از هسته تأمین می‌شود. بنابراین

$$F = ma$$

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$mv^2 = \frac{ke^2}{r} \quad (۹.۶)$$

از روابط (۸.۶) و (۹.۶) چنان برمی‌آید که، وقتی مدار دایره‌ای است، انرژی جنبشی برابر نصف بزرگی انرژی پتانسیل خواهد بود. با قرار دادن رابطه (۹.۶) در رابطه (۸.۶) داریم

$$E = \frac{1}{2} \frac{ke^2}{r} - \frac{ke^2}{r}$$

$$E = -\frac{ke^2}{2r} \quad (۱۰.۶)$$

این معادله نشان می‌دهد که انرژی کل این دستگاه منفی است. E ، با افزایش شعاع مدار الکترون، به صفر می‌گراید؛ این بدان معنی است که وقتی الکترون در یک مدار دایره‌ای کوچک حرکت می‌کند قویاً به هسته مقید خواهد بود و فقط وقتی از بستگی هسته رها می‌شود که در فاصله نامتناهی از آن قرار داشته باشد. وقتی E منفی است، الکترون و پروتون یک دستگاه مقید تشکیل می‌دهند.

معلوم شده است که قطر اتم هیدروژن تقریباً $1 \text{ \AA}$ است و الکترون در این اتم با انرژی 13.6 eV به هسته مقید است. با قرار دادن $E = -13.6 \text{ eV}$ در رابطه (۱۰.۶) نتیجه می‌شود $r = 0.53 \text{ \AA}$ ؛ به این ترتیب تا اینجا مدل سیاره‌ای هیدروژن با حقایق تجربی توافق دارد.

حال می‌خواهیم تابش الکترومغناطیسی ناشی از یک اتم هیدروژن سیاره‌ای کلاسیکی را بررسی کنیم. از لحاظ کلاسیکی، امواج الکترومغناطیسی توسط یک بار الکتریکی شتابدار تولید می‌شوند و بسامد موج دقیقاً برابر بسامد نوسان این بار است.* الکترون در اتم هیدروژن سیاره‌ای به‌طور پیوسته شتاب می‌گیرد و در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند؛ بنابراین، این اتم به‌طور پیوسته تابش می‌کند. به علاوه، انتظار می‌رود که بسامد این تابش با بسامد حرکت مداری الکترون برابر باشد. این بسامد مداری با رابطه

* رک بخش ۷.۳۵ کتاب زیر

زیر داده می شود

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r} \quad (۱۱.۶)$$

که در آن ω سرعت زاویه ای مداری الکترون است. معادله (۹.۶) را می توان به شکل زیر نوشت

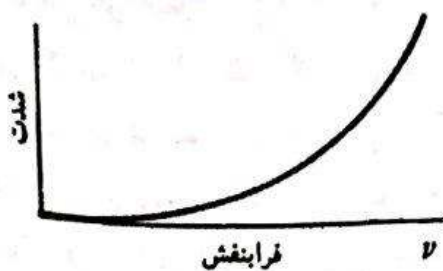
$$\frac{v}{r} = \sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}} \quad (۱۲.۶)$$

با قراردادن این رابطه در رابطه (۱۱.۶) نتیجه می شود

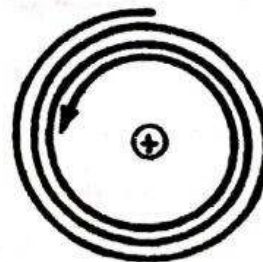
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}} \quad (۱۳.۶)$$

اگر در این معادله، $r = ۵\text{Å}$ را قرار دهیم، بسامد مداری f برابر $۷ \times ۱۰^{۱۵} \text{Hz}$ می شود؛ در این شعاع، بسامد تابش باید در ناحیه فرابنفش طیف الکترومغناطیس قرار بگیرد. حال اگر این اتم تابش کند، باید انرژی کل E آن کاهش یابد و حتی منفی شود. از رابطه (۱۰.۶) درمی یابیم که، اگر انرژی کل E کاهش یابد، شعاع مداری r نیز باید کاهش یابد و از رابطه (۱۳.۶) نتیجه می شود که f با کاهش r افزایش می یابد. به طور خلاصه، وقتی انرژی تابش می شود، E و r کاهش می یابند بسامد مداری f افزایش پیدا می کند و بنابراین، بسامد موج تابشی به طور پیوسته افزایش می یابد.

در این صورت، نظریه سیاره ای کلاسیک پیشگویی می کند که الکترونی که حرکت خود را از مدار اولیه ای آغاز می کند به طور مارپیچی به داخل هسته حرکت خواهد کرد، اتم یک طیف پیوسته تابش خواهد کرد، و بسامد با کاهش شعاع الکترون افزایش خواهد یافت (شکل ۷.۶). محاسبات نشان می دهند که الکترون در این مدل کلاسیکی در مدنی



(ب)



(الف)

شکل ۷.۶ فروریختن (رمبیدن) کلاسیکی یک اتم در اثر تابش پیوسته توسط الکترون در حال دوران، (الف) شعاع کاهش می یابد، (ب) توزیع شدن کلاسیکی تابش الکترومغناطیسی، به صورت تابشی از بسامد.

کمتر از 10^{-8} s به هسته می‌رسد و با آن ترکیب می‌شود. اتم فرومی‌ریزد (می‌رمبد) این مدل اتمی سیاره‌ای کلاسیک به وضوح از دو جهت مهم غیرقابل دفاع است: یکی پیشگویی آن در مورد اینکه اتمها ناپایدارند، و دیگری پیشگویی اینکه طیف تابش پیوسته است. این مطلب کاملاً با حقایق تجربی ناسازگار است: همان‌طور که در بخش بعد خواهیم دید، اتمها پایدارند و طیف گسسته‌ای از بسامدها تابش می‌کنند.

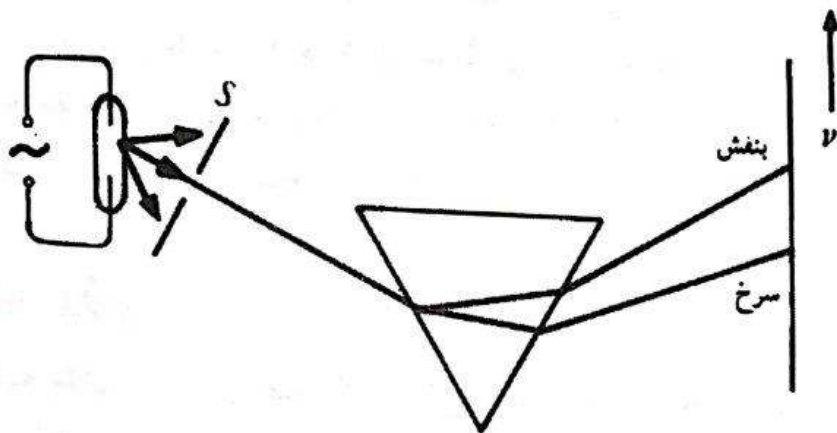
۳.۶ طیف هیدروژنی

مشاهده کردیم که مدل سیاره‌ای دقیقاً کلاسیکی به این انتظار منجر می‌شود که گستره پیوسته‌ای از تابش الکترومغناطیسی از اتمهای هیدروژن گسیل شود و اتم فروبریزد (برمبد). چون تابش مشاهده شده از اتم هیدروژن پیوسته نیست و چون اتمهای هیدروژن نیز پایدارند، این مدل اساساً ناقص است؛ یک مدل صحیح باید بتواند به تفصیل طیفهای مشاهده شده و پایداری اتمها را توجیه کند. قبل از بحث درباره مدلی که ساختار اتمهای هیدروژن را به قدر کافی توصیف کند (که این نقطه شروع طبیعی برای هر توصیف نظری از ساختار اتمی است) می‌خواهیم حقایق شناخته شده مربوط به طیف هیدروژنی را برشماریم.

برای مشاهده طیف اتمهای منزوی هیدروژن لازم است که از هیدروژن اتمی گازی استفاده کنیم؛ زیرا در هیدروژن اتمی گازی اتمها چنان از هم دورند که هر اتم مانند یک دستگاه منزوی رفتار می‌کند (هیدروژن مولکولی H_2 و هیدروژن جامد، طیفهایی تابش می‌کنند که بازتاب برخی از جنبه‌های اتمهای هیدروژن مقید به هم است).

طیف مرئی گسیل یافته از هیدروژن را می‌توان با یک نوع طیف‌سنج، که به شکل منشور است و طرح آن در شکل ۸.۶ نشان داده شده است بررسی کرد؛ برای پاشیدگی تابش می‌توان از یک توری پر اش به جای منشور استفاده کرد. گاز هیدروژن با تخلیه الکتریکی یا با گرمای فوق‌العاده برانگیخته می‌شود و تابش گسیل می‌کند. مقداری از این تابش از شکاف باریک S عبور می‌کند و توسط منشور یا توری پاشیده می‌شود. سپس، این تابش که به مؤلفه بسامدهای گوناگون خود تفکیک شده است بر روی یک پرده یا یک صفحه عکاسی فرود می‌آید و اندازه‌گیری بسامدها و شدتهای طیف گسیلی را ممکن می‌کند.

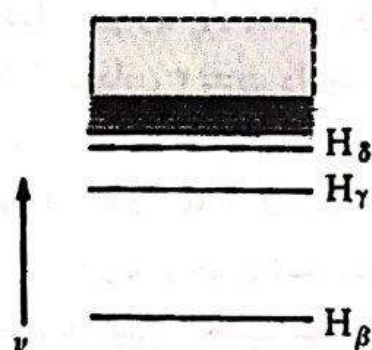
هر ابزاری که طول موجهای گوناگون باریکه‌ای از تابش الکترومغناطیسی را پاشاند و اندازه‌گیری کند طیف‌سنج نام دارد. ابزاری که نور را پاشاند و از طیف عکسبرداری کند به طیف‌نگار مشهور است؛ آن ابزاری که طیف را مستقیماً برای چشم مرئی می‌کند طیف‌نما نامیده می‌شود. طیف‌سنجها برای مطالعه هر یک از چند ناحیه طیف الکترومغناطیسی از قبیل بسامد رادیویی، پرتوهای x، و پرتوهای γ طرح می‌شوند. آن



شکل ۸.۶ طرح يك طيف سنج منشوری.

شاخه از فیزیک که مربوط به مطالعه گسیل یا درآشامی تابش الکترومغناطیسی به وسیله مواد است، طیف‌نمایی نام دارد. طیف‌نمایی برای تحقیق در ساختار اتمی، مولکولی، و هسته‌ای روش بسیار مناسبی است، و دارای دقت فوق‌العاده زیاد (بسامدها و طول موجها با دقت ۱ در ۱۰ میلیون، به آسانی اندازه‌گیری می‌شوند) و حساسیت خیلی بالایی (گسیل یا درآشامی از نمونه‌هایی به کوچکی کسری از يك میکروگرم قابل مشاهده‌اند) است. طیف مربوط به هیدروژن اتمی که توسط طیف‌سنج منشوری یا طیف سنج با توری پراش حاصل می‌شود متشکل از تعدادی خطوط تیز، گسسته، و روشن در زمینه‌ای سیاه است؛ این خطوط تصویرهای شکاف‌اند. در حقیقت، طیف تمام عناصر شیمیایی که به شکل گاز تک اتمی هستند مرکب از چنین خطوط روشنی است؛ هر طیف مشخصه‌ای از يك عنصر بخصوص است. این طیف به طیف خطی مشهور است. در این صورت طیف گسیلی ناشی از هیدروژن اتمی، که يك طیف خطی روشن است، مشخصه هیدروژن است. از آنجا که هر عنصر شیمیایی دارای طیف خطی مربوط به خود است، طیف‌نمایی يك روش فوق‌العاده حساس برای شناخت این عناصر است.

در شکل ۹.۶ طیف خطی هیدروژن اتمی، در ناحیه مرئی، نشان داده شده است. خطوط طیف به ترتیب افزایش بسامد و کاهش طول موج با H_α ، H_β ، و غیره مشخص می‌شوند. معمولاً خط H_α به مراتب شدیدتر از خط H_β است و به همین ترتیب H_β از H_γ شدیدتر است و الی آخر. با افزایش بسامد فاصله بین خطوط مجاور کوچکتر می‌شود و این خطوط گسسته به حد يك سری نزديك می‌شوند که در بالای آن طیف پیوسته ضعیفی پدیدار می‌شود. این گروه از خطوط هیدروژن، که در ناحیه مرئی طیف الکترومغناطیسی



————— H_{α}

شکل ۹.۶ توزیع بسامد تابش حاصل از هیدروژن اتمی در ناحیه مرئی. این گروه بخصوص از خطوط طیفی سری بالمر نام دارد.

ظاهر می‌شوند، به سری بالمر مشهورند، زیرا در سال ۱۸۸۵/۱۲۶۴ بالمر^۱ به یک فرمول تجربی ساده (به نام فرمول بالمر) دست یافت که با استفاده از آن توانست تمام طول موجهای مشاهده شده در این گروه را محاسبه کند. این فرمول که طول موج λ را برای تمام خطوط طیفی این سری به دست می‌دهد، به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (۱۴.۶)$$

که در آن

$$R = 1.0967758 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \approx 1.0968 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}$$

و n عدد درستی است که دارای مقادیر ۳، ۴، ۵، ... است.

1. J. J. Balmer

با قرار دادن $n=3$ در این فرمول، $\lambda = 65647 \text{ \AA}$ نتیجه می‌شود که مربوط به خط H_α است؛ همین طور با قرار دادن $n=4$ ، داریم $\lambda = 48627 \text{ \AA}$ ، که مربوط به خط H_β است. طول موج حدین سری وقتی $n=\infty$ است با فرمول بالمر بیان می‌شود. ثابت R به ثابت ریدبرگ معروف است. مقدار R به وسیله آزمایش طوری برگزیده می‌شود که بهترین توافق در مورد طول موجهای اندازه‌گیری شده حاصل شود. در طیف نمایی اتمی به جای اینکه خطوط طیفی بر حسب بسامد مشخص شوند نوعاً به وسیله طول موجهایشان تعین می‌شوند، زیرا آنچه اندازه‌گیری می‌شود طول موج است. هیدروژن، علاوه بر سری بالمر در ناحیه مرئی، یک سری از خطوط را در ناحیه فرابنفش و چندین سری را در ناحیه فرو سرخ تابش می‌کند. هر سری را می‌توان با فرمولی مشابه با معادله بالمر نمایش داد. در حقیقت، می‌توان یک فرمول کلی نوشت که به وسیله آن تمام خطوط طیف هیدروژنی محاسبه شوند. این فرمول به معادله ریدبرگ مشهور است و به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (15.6)$$

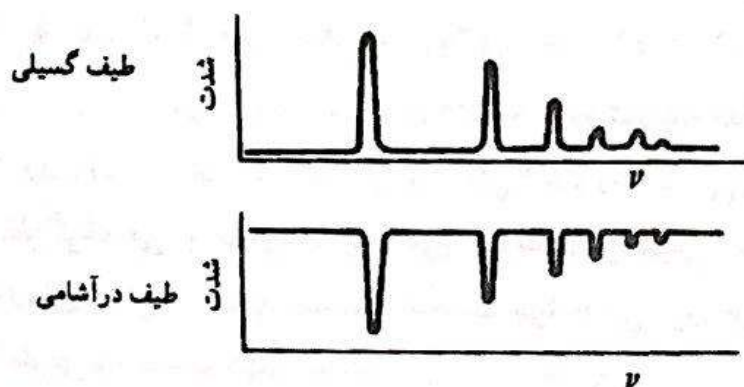
که در آن، $n_1 = 1$ و $n_2 = 2, 3, 4, \dots$ سری لیمان، ناحیه فرابنفش

$n_1 = 2$ و $n_2 = 3, 4, 5, \dots$ سری بالمر، ناحیه مرئی

$n_1 = 3$ و $n_2 = 4, 5, 6, \dots$ سری پاشن، ناحیه فرو سرخ

و همین‌طور برای سریهای بعدی که در ورای فرو سرخ قرار می‌گیرند. مقدار ثابت ریدبرگ در این معادله دقیقاً همان مقدار R در رابطه (۱۴.۶) است؛ در حقیقت، وقتی n_1 برابر ۲ اختیار شود رابطه (۱۵.۶) به صورت رابطه (۱۴.۶) درمی‌آید. در بخش ۴.۶ علت گزینش «(بالایی)» و «(پایینی)» به عنوان شاخص پایین اعداد درست در فرمول ریدبرگ، روشن خواهد شد. این چند سری از خطوط هیدروژن را به یادبود کاشفین آنها نامگذاری کرده‌اند. هر چند فرمول ریدبرگ در به دست دادن طول موجهای تابشی از اتم هیدروژن به طور قابل ملاحظه‌ای موفق بوده است، باید دانست که این فرمول صرفاً یک رابطه تجربی است و به خودی خود هیچ اطلاعی درباره ساختار هیدروژن ارائه نمی‌دهد. از طرف دیگر، یک نظریه کاملاً موفق در مورد اتم هیدروژن باید قادر به پیشگویی این خطوط طیفی باشد؛ یعنی، باید فرمول ریدبرگ را به عنوان یک نتیجه به دست بدهد.

طیف حاصل از هیدروژنی را که با تخلیه الکتریکی یا به وسیله گرمای فوق العاده زیاد



شکل ۱۰.۶ تغییر شدت با بسامد در طیفهای گسیلی و درآشامی هیدروژن.

برانگیخته شده است بررسی کردیم. هیدروژن اتمی در دمای اتاق به خودی خود تابش الکترومغناطیسی محسوسی گسیل نمی‌کند، ولی می‌تواند در این دما تابش الکترومغناطیسی را به‌طور گزینشی درآشامد و طیف درآشامی تولید کند. وقتی باریکه‌ای از نور سفید (با تمام بسامدها) از گاز هیدروژن اتمی عبور کند و طیف نور عبوری در یک طیف‌سنج بررسی شود، طیف درآشامی هیدروژن اتمی مشاهده می‌شود. آنچه در این بررسی مشاهده می‌شود عبارت است از یک سری خطوط تاریک که بر روی طیف نور سفید نهاده شده است؛ این طیف به طیف خط میاه مشهور است. این گاز برای تمام بسامدها، بجز بسامدهای متناظر با خطوط تاریک، شفاف و برای بسامدهای خطوط تاریک کدر است؛ یعنی، این اتمها از پیوستار امواجی که از گاز عبور می‌کند فقط امواجی را با برخی بسامدهای تیز و گسته درمی‌آشامند. انرژی درآشامیده شده به‌سرعت به‌وسیله اتمهای برانگیخته، نه فقط در راستای فرودی، بلکه در تمام راستاها تابش می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱۰.۶ به‌طور طرح‌وار نشان داده شده است، شدت برحسب بسامد رسم شده است. در این شکل خطوط تاریک در طیف درآشامی هیدروژن دقیقاً با همان بسامدهای مربوط به خطوط روشن در طیف گسیلی نمایان می‌شوند. هیدروژن فقط در بسامدها یا طول موجهای مشخصی که توسط فرمول ریذبرگ داده می‌شوند تابشگر امواج الکترومغناطیسی است و فقط در همان بسامدها درآشام تابش است.

آنچه درباره طیفهای گسیلی و در آشامی هیدروژن اتمی بحث کردیم در مورد طیفهای خطی عناصر دیگر هم صادق است. وقتی اتمها انرژی تابش می کنند يك مجموعه از بسامدهای مشخصه گسیل می شود؛ وقتی يك نوار پیوسته بسامد امواج الكترومغناطیسی از گازی عبور داده شود همان مجموعه از بسامدها توسط اتمها در آشامیده می شوند.

۴.۶ نظریه ساختار اتمی بوهر

مدل سیاره ای اتم هیدروژن که در بخش ۲.۶ نشان داده شد يك مدل کلاسیکی است، زیرا در آن الكترون دقیقاً به صورت يك ذره و تابش الكترومغناطیسی دقیقاً به عنوان امواج پیوسته در نظر گرفته می شوند. چون این نظریه اثرهای کوانتومی، خواص موجی الكترون و خواص ذره ای تابش را شامل نیست با شکست مواجه می شود. هر مدل موفقی باید این اثرهای کوانتومی را توجیه کند.

نخستین نظریه کوانتومی اتم هیدروژن در سال ۱۹۱۳/۱۲۹۲ توسط نیلز بوهر، شاگرد رادرفورد، مطرح شد. طبیعت فوتونی تابش الكترومغناطیسی تا آن زمان به تأیید رسیده بود؛ ولی جنبه های موجی ذرات مادی تا سال ۱۹۲۴/۱۳۰۳ شناخته نشده بودند. با وجود این، در بحث راجع به اتم بوهر، از طبیعت موجی ذرات که در حال حاضر کاملاً جا افتاده است بهره خواهیم گرفت. به زودی خواهیم دید که این عمل معادل روش اولیه بوهر است، هر چند آن مدل طبیعت موجی الكترون را به صراحت در بر نداشت.

مدل اتمی بوهر نخستین گام به سوی استفاده از يك بررسی مکانیک موجی تمام و کمال در ساختار اتمی بود؛ ولی، از هم اکنون باید دانست که نظریه بوهر دارای کاربرد محدودی است. با وجود این، برای اینکه ساختار اتمی به سادگی بر حسب مدل ذره ای تجسم شود، این مدل خصوصیات کلاسیکی را به اندازه کافی حفظ می کند و برای ارائه توصیف نسبتاً دقیقی از طیف اتمی هیدروژن، خصوصیات کوانتومی را نیز به اندازه کافی دخالت می دهد. بنابراین، نظریه بوهر يك نظریه واسطه بین مکانیک کلاسیک و مکانیک موجی است که در دهه ۱۹۲۰/۱۲۹۹ تکامل یافت. در بخش ۷.۶، يك بررسی دقیقاً مکانیک موجی از اتم هیدروژن، که در آن از معادله شرودینگر استفاده می شود، ارائه خواهد شد.

نظریه اتم هیدروژن بوهر بر مبنای سه اصل اساسی که شامل جنبه های اصلی کوانتومی هستند قرار دارد. به جای آنکه اکنون این اصول را فهرست کنیم نشان خواهیم داد که با استفاده از اثرهای اساسی کوانتومی، که در فصلهای ۴ و ۵ مورد بحث قرار گرفتند، می توان به طور کاملاً طبیعی نظریه بوهر را به دست آورد.

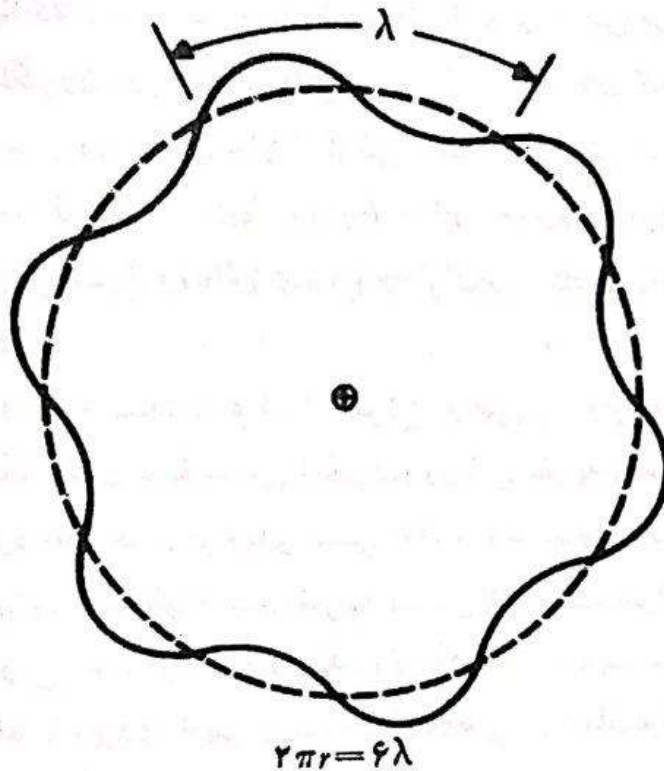
آنگاه این اصول به منزله نتایج ضروری طبیعت موجی ذرات و طبیعت فوتونی تابش پدیدار خواهند شد. در پایان این بخش این اصول موضوعه را صریحاً فهرست خواهیم کرد. مانند مدل دقیقاً کلاسیکی اتم هیدروژن، نظریه بوهر فرض می‌کند که پروتون در حال سکون باشد و الکترون در یک مسیر دایره‌ای حول آن حرکت کند. نیرویی که الکترون را در مدار خود نگه می‌دارد نیروی جاذبه کولنی الکتروستاتیکی بین الکترون و پروتون است. از این رو از معادله (۹.۶) رابطه $mv^2 = ke^2/r$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، و در این حالت نیز انرژی کل اتم از رابطه (۱۰.۶) $E = -ke^2/2r$ به دست می‌آید. تاکنون، مطلب جدیدی نگفته‌ایم.

با یادآوری وضع مانسته‌ای که شامل امواج عرضی بر روی یک سیم است، می‌توان فهمید که چگونه ممکن است جنبه موجی الکترون در این نظریه داخل شود. اگر سیم در هر دو انتها ثابت شود فقط طول موجهای معینی باعث نوسانهای تشدید می‌شوند؛ آن طول موجهایی که برای آنها طول سیم مضرب درستی از نصف طول موج است. در چنین حالتی مجازی امواج ایستاده وجود دارند. وقتی که سیم در یک حالت مجاز است از نظر اصولی می‌تواند با انرژی ثابتی برای دوره نامعینی از زمان نوسان کند. حال فرض می‌کنیم که این سیم به شکل یک حلقه دایره‌ای بسته خمیده شود. هرگاه بخواهیم که امواج عرضی حول این حلقه منتشر شود، در آن صورت موج به طور ویرانگر با خود تداخل خواهد کرد، مگر آنکه به طوری هموار به خود پیوندد. بنابراین، تنها اگر تعداد دمستی از تمام طول موجها در طول محیط دایره قرار بگیرند، امواج تشدید می‌ایستاده در یک حلقه دایره‌ای بسته وجود خواهند داشت.

می‌خواهیم شرایط مشابهی را در مورد مدارهای الکترونی هیدروژن به کار ببریم. مشاهده کردیم که طبیعت موجی باید به یک ذره مادی نسبت داده شود، که در آن طول موج به وسیله $\lambda = h/mv$ [معادله (۳.۵)] داده می‌شود. از این رو، می‌توان الکترون را به صورت موجی که در یک مدار دایره‌ای منتشر می‌شود در نظر گرفت؛ فقط وقتی محیط $2\pi r$ دایره مضرب درستی از طول موج الکترون باشد، امواج مانا می‌توانند در این مدار وجود داشته باشند (شکل ۱۱.۶). برخلاف نظریه کلاسیک تابش، انرژی اتم در حالتی مانا مقدار ثابتی اختیار می‌شود. از این رو، مادامی که اتم در یک حالت مانا قرار دارد امواج الکترومغناطیسی تابش نمی‌کند. «مدارهای مانا» که به ازای آنها هیچ تابشی وجود ندارد در رابطه

$$n\lambda = 2\pi r \quad (11.6)$$

صدق می‌کنند، که در آن n برابر با ۱، ۲، ۳، ... است و عدد کوانتومی اصلی نام دارد.



شکل ۱۱.۶ امواج مانا در یک مدار الکترونی، در این مثال محیط مدار برابر شش طول موج است.

البته، اگر شعاع مداری محدود به بعضی مقادیر مجاز باشد، در آن صورت انرژی E اتم نیز توسط این معادله به بعضی مقادیر گسسته محدود می‌شود. با به حساب آوردن خواص موجی الکترون توانستیم به سادگی به یک مدل اتمی پایدار برسیم. وقتی در رابطه (۱۶.۶) به جای λ مقدار h/mv را قرار دهیم، داریم

$$\frac{nh}{mv} = 2\pi r$$

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (17.6)$$

نماد $\hbar$ ، ثابت پلانک تقسیم بر 2π ، برای سهولت معرفی شده است. طرف چپ این معادله درست برابر اندازه حرکت زاویه‌ای mvr الکترون در حرکت مداری خود نسبت به هسته است. در این صورت حالت‌های مانا را می‌توان به طریق دیگری توصیف کرد: حالت‌های مانا (یا مدارهای مانا) ی یک اتم آنهایی هستند که برای آنها اندازه حرکت زاویه‌ای مداری

اتم $\hbar$ ، $2\hbar$ ، $3\hbar$ ، ... است.

اتم در هر يك از حالت‌های مانای مجاز دارای يك انرژی دقیقاً معلوم است. می‌خواهیم انرژی‌های مجاز E_n ، شعاع‌های مداری مجاز r_n ، و سرعت‌های v_n ... را محاسبه کنیم؛ این کمیت‌ها با شاخص پایین n مشخص می‌شوند، زیرا مقادیر مربوط به آنها به عدد کوانتومی n بستگی خواهند داشت. معادله‌های (۹.۶) و (۱۷.۶) را می‌توان به‌طور همزمان برای r و v حل کرد. با حل معادله (۱۷.۶) برای سرعت مناسب الکترون، داریم

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr_n} \quad (18.6)$$

و با قرار دادن این مقدار در رابطه (۹.۶)، داریم

$$m \left(\frac{n\hbar}{mr_n} \right)^2 = \frac{ke^2}{r_n}$$

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{kme^2} \quad (19.6)$$

در اینجا نیز $n = 1, 2, 3, \dots$ است. کوچکترین شعاع مجاز، موسوم به شعاع اولین مدار بوهر، توسط رابطه

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.528 \text{ \AA} \quad (20.6)$$

داده می‌شود که در آن مقادیر مربوط به ثابت‌های معلوم اتمی به کار برده شده‌اند. در این صورت مدل بوهر پیشگویی می‌کند که اندازه اتم هیدروژن با کوچکترین مدار مانا از مرتبه $1 \text{ \AA}$ است، و این با نتایج تجربی به‌خوبی توافق دارد. با قراردادن رابطه (۲۰.۶) در رابطه (۱۹.۶) می‌توان شعاع‌های مجاز را به‌شکل ساده‌تری بیان کرد:

$$r_n = n^2 r_1 \quad (21.6)$$

بنابراین شعاع‌های مدارهای مانا r_1 ، $4r_1$ ، $9r_1$ ، ... هستند. در حالت‌های مانا، سرعت مداری الکترون را می‌توان به‌سادگی از رابطه (۱۸.۶)، که در آن به‌جای r_n مقدار $n^2 r_1$ نهسته است به‌دست آورد

$$v_n = \frac{n\hbar}{m(n^2 r_1)} = \frac{1}{n} \frac{\hbar}{mr_1} = \frac{1}{n} \frac{ke^2}{\hbar} \quad (22.6)$$

این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$v_n = \frac{v_1}{n} \quad (۲۳.۶)$$

که در آن $v_1 = \hbar / mr_1 = ke^2 / \hbar$ است. هر گاه سرعت بیشینه الکترون در اولین مدار، v_1 باشد، سرعتهای مداری مجاز عبارت اند از v_1 ، $v_1/2$ ، $v_1/3$ ، ... نسبت این سرعت به سرعت نور، v_1/c ، با نماد α مشخص می شود. با استفاده از رابطه (۲۲.۶) داریم

$$\alpha = \frac{v_1}{c} = \frac{ke^2}{\hbar c} \quad (۲۴.۶)$$

با قراردادن مقادیر معلوم ثابتها در طرف راست این معادله، $\alpha = 1/137.03598$ می شود. از این رو، الکترون واقع در نخستین مدار بوهر با سرعت $1/137$ سرعت نور حرکت می کند. کمیت α ، که به کرات در نظریه ساختار اتمی پدیدار می شود، به ثابت ساختار دینامیک مشهور است. بررسی اتم هیدروژن بوهر به عنوان يك مسئله غیر نسبیتی نامعقول نیست؛ ولی به خاطر دقت بسیار بالای اندازه گیریهای طول موج در طیف نمایی، اثرهای نسبیتی را می توان مشاهده کرد و لذا باید این مسئله را در يك نظریه کاملتر بررسی کرد.

در این صورت مقادیر مجاز انرژی کل اتم هیدروژن (بدون در نظر گرفتن انرژیهای سکون پروتون و الکترون) را می توان به آسانی از روابط (۱۰.۶) و (۲۱.۶) تعیین کرد

$$E_n = -\frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{1}{n^2} \frac{ke^2}{2r_1} \quad (۲۵.۶)$$

اگر کمیت $ke^2/2r_1$ را با E_I نمایش دهیم، در این صورت این معادله به شکل زیر درمی آید

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2} \quad (۲۶.۶)$$

از این رو، تنها انرژیهای ممکن دستگاه مقید الکترون-پروتون، که اتم هیدروژن را تشکیل می دهند عبارت اند از $-E_I$ ، $-E_I/4$ ، $-E_I/9$ ، ... این انرژیهای مجاز گسته اند و بنا بر این، انرژی کوانتیده است. پایینترین انرژی (یعنی، منفیترین انرژی) متعلق به حالتی است که در آن عدد کوانتومی اصلی n معادل ۱ است؛ این حالت را حالت پایه می نامند. انرژی در حالت پایه برابر $E_1 = -E_I$ است، و مقدار آن که از روابط (۲۵.۶)

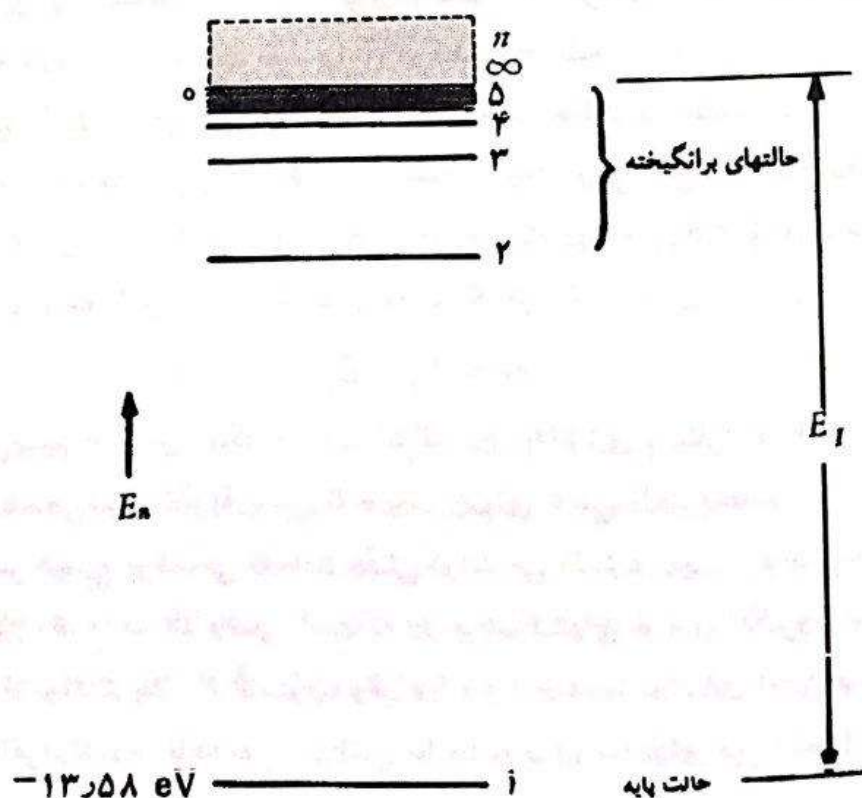
* ثابت ساختار دینامیک، نقشی قاطع در الکترو دینامیک کوانتومی ایفا می کند، زیرا رابطه ای ارائه می دهد که شامل ثابتهای اساسی الکترومغناطیسی (e و $\hbar$)، نظریه کوانتومی ($\hbar$)، و نسبیت (c) است.

و (۲۰.۶) محاسبه می شود برابر است با

$$E_n = -\frac{k^2 e^4 m}{2n^2 \hbar^2} \quad (27.6)$$

$$E_1 = -E_I = -13.6 \text{ eV} \quad (28.6)$$

شکل ۱۲.۶ يك نمودار تراز انرژی اتم هیدروژن را نشان می دهد. با توجه به رابطه (۲۶.۶)، E برای حالت های مقید کمتر از صفر است، و فقط انرژی های گسته مجازند. وقتی n به سوی بینهایت میل می کند، اختلاف بین تراز های انرژی مجاور به صفر می گراید. وقتی n بینهایت باشد، E_n صفر می شود و اتم هیدروژن می تواند به صورت الکترون و پروتون که هر دو در حال سکون اند و به فاصله نامتناهی از یکدیگر قرار دارند در آید. در این شرایط گفته می شود که اتم یونیده است و انرژی که باید در پایین ترین حالت یا حالت پایه ($n=1$) به آن افزوده شود تا انرژی آن به $E_n = 0$ افزایش یابد، درست برابر E_I ، یا به اصطلاح انرژی یونش است. این مقدار پیشگویی شده توسط نظریه بوهر، $E_I = 13.6 \text{ eV}$ ، با مقدار حاصل از آزمایش کاملاً توافق دارد. وقتی انرژی کل مثبت است و الکترون و پروتون



شکل ۱۲.۶ نمودار تراز انرژی اتم هیدروژن.

غیرمقیدند، یعنی دیگر اتمی را تشکیل نمی‌دهند، الکترون در يك مدار بسته حرکت نمی‌کند. در این صورت طول موج الکترون، محدود به قرار گرفتن تعداد درستی از امواج حول این مسیر نیست؛ و بنابراین انرژی کل محدود نیست. تمام انرژیهای ممکن مثبت مجازند، و برای $E > 0$ پیوستاری از ترازهای انرژی وجود دارد.

مقایسه شکل ۱۲.۶، یعنی نمودار تراز انرژی يك دستگاه دوزره‌ای بر حسب نظریه کوانتومی، با شکل ۱۰.۴ ج، یعنی نمودار تراز انرژی يك دستگاه دوزره‌ای بنابه نظریه کلاسیکی، جالب توجه است. در حالی که در نظریه کلاسیکی، پیوستاری از انرژیها برای هر دو دستگاه مقید و غیرمقید وجود دارد، نظریه کوانتومی حالت‌های کوانتیده (مانند انرژی، اندازه حرکت زاویه‌ای) را برای يك دستگاه مقید ایجاب می‌کند.

هر يك از انرژیهای مجاز یا کوانتومی شکل ۱۲.۶ با حالت مانایی متناظر است که در آن اتم می‌تواند بدون اینکه تابش کند وجود داشته باشد. تمام حالت‌های مانا در بالای حالت پایه، $n = 2, 3, 4, \dots$ ، حالت‌های برانگیخته نام دارند؛ زیرا اتم در هر يك از این حالت‌ها گرایش به گذار به حالت مانای پایینتر را دارد. در گذار به سوی پایین می‌توان فرض کرد که الکترون به‌طور ناگهانی از يك مدار به مدار کوچکتری جهش می‌کند؛ وقتی اتمی در حالت برانگیخته‌ای با انرژی E_n باشد، مقدار فزونی این انرژی بر انرژی حالت پایه را انرژی برانگیختگی می‌نامند. انرژی بستگی آن انرژی است که باید به يك اتم در هر حالتی افزوده شود تا ذرات مقید را آزاد کند و در نتیجه $E_n = 0$ شود.

اتمی را در نظر می‌گیریم که در آغاز در يك حالت برانگیخته بالاتر و با انرژی E_n قرار دارد و به حالت پایینتر E_1 گذار انجام می‌دهد. وقتی این گذار رخ دهد اتم مقدار $E_n - E_1$ انرژی از دست می‌دهد. بوه‌ر فرض کرد که در چنین گذاری فوتونی با انرژی $h\nu$ آفریده و توسط اتم گسیل می‌شود. با در نظر گرفتن بقای انرژی

$$h\nu = E_n - E_1 \quad (29.6)$$

در اینجا می‌بینیم با فرض اینکه هر وقت اتم گذاری به انرژی پایینتر انجام می‌دهد يك تك فوتون آفریده می‌شود، نظریه بوه‌ر با طبیعت ذره‌ای تابش الکترومغناطیسی یکی می‌شود. نظریه بوه‌ر هیچ توضیحی درباره جهش کوانتومی الکترون یا آفرینش فوتون ارائه نمی‌دهد. این وضع همانند وضعی است که در برهم‌کنشهای فوتون-الکترون با آن مواجه شدیم (اثر فوتوالکتریک، اثر کامپتون، و غیره)؛ زیرا در آنجا جزئیات این برهم‌کنشها را مورد توجه قرار ندادیم بلکه صرفاً قوانین بقا را در مورد حالت‌های قبل و بعد از برهم‌کنش به کار بردیم.

می‌خواهیم، بسامد و طول موج فوتون‌هایی را که بنا به مدل بوه‌ر می‌توانند توسط يك

اتم هیدروژن تابش شوند محاسبه کنیم. با استفاده از معادله‌های (۲۹.۶) و (۲۶.۶)، داریم

$$\nu = \frac{E_u - E_l}{h} = \left(\frac{-E_I}{n_u^2 h} \right) - \left(\frac{-E_I}{n_l^2 h} \right) = \frac{E_I}{h} \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad (30.6)$$

که در آن n_l و n_u به ترتیب اعداد کوانتومی حالت‌های انرژی بالاتر و پایتترند. در این صورت طول موجهای $\lambda = c/\nu$ فوتونهای گسیل شده را می‌توان چنین بیان کرد

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_I}{hc} \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad (31.6)$$

این معادله دقیقاً دارای همان شکل ریاضی فرمول ریذبرگ است که به‌طور تجربی به‌دست آمد

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad (15.6)$$

با مقایسه این دو معادله نسبت به $1/\lambda$ ، می‌توان ثابت ریذبرگ R را با استفاده از ثابت‌های اتمی معلوم ارزیابی و آن را با مقدار حاصل از آزمایش برای هیدروژن که برابر است با $1.0968 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}$ ، مقایسه کرد

$$R = \frac{E_I}{hc} = \frac{k^2 e^2 m}{4\pi \hbar^2 c} \quad (32.6)$$

برای رسیدن به جمله آخر این معادله به‌جای E_I مقدار مساوی آن $ke^2/2r_1$ از رابطه (۲۵.۶) و به‌جای r_1 مقدار مساوی آن $\hbar^2/kme^2$ از رابطه (۲۰.۶) قرار داده‌ایم. با قرار دادن مقادیر معلوم ثابت‌های فیزیکی در این معادله، مقدار $1.0974 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}$ را، که با مقدار حاصل از آزمایش‌های طیف‌نمایی توافق نزدیک دارد برای R به‌دست می‌آوریم. از این‌رو فرمول ریذبرگ، که طیف درآشامی و گسیلی هیدروژن را به‌دست می‌دهد، يك نتیجه ضروری مدل اتمی بوهر است.

جرم‌های هسته‌ای متناهی و اتم‌های هیدروژنی. تا اینجا فرض شده است که جرم هسته‌ای عملاً نامتناهی و بار هسته‌ای دارای بزرگی e است. به آسانی می‌توان نظریه بوهر را طوری تعمیم داد که شامل (۱) جرم‌های هسته‌ای متناهی و (۲) اتم‌های هیدروژن گونه یا اتم‌هایی که در آنها يك الكترون حول هسته‌ای با بار $+Ze$ حرکت می‌کند، هم بشود.

۱. دريك اتم منزوی، الكترون با جرم m و هسته با جرم M هر دو نسبت به مرکز جرم اتم، که به‌حال سکون باقی می‌ماند، در حرکت‌اند. می‌توان صرفاً با جایگزینی جرم الكترون (در هر رابطه‌ای که ظاهر می‌شود) با به اصطلاح جرم کاهش یافته $m/(1+m/M)$ حرکت

هسته را به حساب آورد (مسئله ۳۹). از این رو، با استفاده از رابطه (۳۲.۶)، ثابت ریدبرگ برای يك اتم به جرم هسته‌ای M به صورت $R_M = R_\infty / (1 + m/M)$ درمی آید، که در آن R_∞ همان ثابت ریدبرگ در رابطه (۳۲.۶) است. برای مثال، در مورد هیدروژن ^1H ، با يك پروتون به عنوان هسته و با جرم هسته‌ای $\mu = 1.00728 \text{ u}$

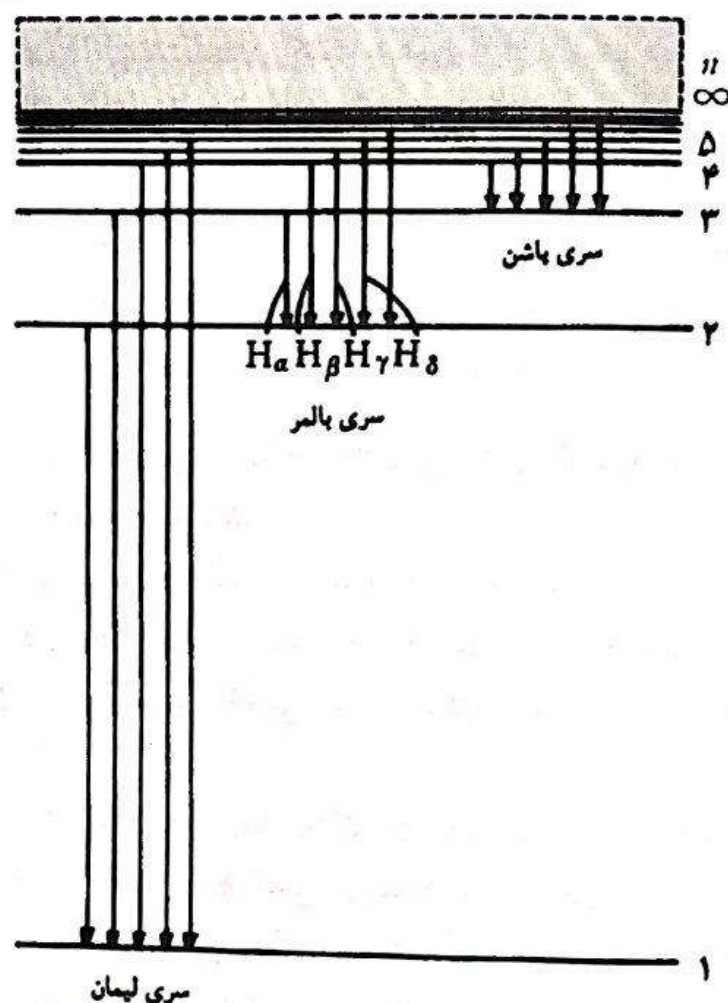
$$R_M = 1.09678 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}$$

است، که با تغییرات متناظر در طول موجهای تابش گسیل شده و در آشامیده شده همراه است. از طرف دیگر، برای دوتریوم، ^2H (یا هیدروژن سنگین) که جرم هسته‌ای آن $\mu = 2.01355 \text{ u}$ و متشکل از يك پروتون و نوترون مقید به هم است، ثابت ریدبرگ برابر $R_M = 1.09707 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}$ است. اختلاف بین طول موجها اگرچه کوچک است ولی قابل اندازه گیری است. برای مثال خط H_α برای ^1H در $6562.80 \text{ \AA}$ ، و برای ^2H در $6561.01 \text{ \AA}$ است. در حقیقت در سال ۱۹۳۲/۱۳۱۱ برای نخستین بار دوتریوم با مشاهده زوج خطهای نزدیک به هم در طیف هیدروژن کشف شد.

۲. يك اتم هیدروژن گونه دارای يك الكترون مقید به هسته با بار $+Ze$ است. در اینجا Z نماینده عدد اتمی، یا تعداد پروتونهای موجود در هسته است. برای مثال لیتیوم دوبار یونیده، Li^{++} ، با $Z=3$ ، يك اتم هیدروژن گونه است. برای پیدا کردن انرژیها، بسامدها، و طول موجهای تابش شده اتمهای هیدروژن گونه، فقط به جای کمیت e^2 در هر رابطه‌ای که توسط نظریه بوهر داده می شود، کمیت Ze^2 را قرار می دهیم.

حال می توان خطوط طیفی مشاهده شده هیدروژن را بر حسب نمودار تراز انرژی شکل ۱۳.۶ تعبیر کرد. خطوط قائم نمایشگر گذارهای بین حالتها مانا هستند؛ طول این خطوط با انرژیهای فوتون مربوط و بنابراین با بسامدهای آنها متناسب است. خطوط سری لیمان مربوط به آن فوتونهایی است که هنگام گذار اتمهای هیدروژن از یکی از حالتها برانگیخته ($n_u = 2, 3, 4, 5, \dots$) به حالت پایه ($n_l = 1$) تولید می شوند. گذار از حالتها غیر مقید ($E > 0$) به حالت پایه، طیف پیوسته مشاهده شده واقع در ورای حد این سری را توضیح می دهد. به همین طریق می توان سری بالمر را که توسط گذار از حالتها برانگیخته ($n_u = 3, 4, 5, \dots$) به نخستین حالت برانگیخته ($n_l = 2$) تولید می شود توجیه کرد. سریهای گسیلی دیگری هم، به خاطر گذار به حالتها $n_l = 3, n_l = 4$ وجود دارند؛ این سریها به طور تصاعدی به سوی طول موجهای بلندتر میل می کنند.

گسیل از يك اتم هیدروژن را بررسی کردیم. اتم در هر زمان می تواند فقط در یکی از حالتها انرژی کوانتیده خود باشد و وقتی از حالتی به حالت پایینتر گذار انجام می دهد يك فوتون گسیل می شود. وقتی تمامی طیف گسیلی مربوط به يك گاز هیدروژن برانگیخته (مجموعه‌ای از تعداد زیادی اتم هیدروژن) در يك طیف نما مشاهده شود، گسیل همزمان



شکل ۱۳.۶ برخی از گذارهای ممکن انرژی در هیدروژن اتمی.

تعداد بیشماری از فوتونها را، که توسط گذار به سوی پایین از هریک از حالات برانگیخته تولید می‌شوند، مشاهده می‌کنیم. بنا بر این، برای مشاهده تمامی طیف گسیلی، باید در هریک از حالت‌های برانگیخته تعداد خیلی زیادی از اتم‌های هیدروژن داشته باشیم تا گذار به سوی همه حالت‌های پایینتر را انجام دهند.

در این حال مبنایی برای درک مشخصه‌های طیف در آشامی را نیز در اختیار داریم. همان‌طور که در شکل ۱۵.۶ نشان داده شده است، یک طیف در آشامی، خطوط سیاه واقع بر یک زمینه سفید را با همان طول موج‌های مربوط به خطوط روشن واقع بر زمینه سیاه، در طیف گسیلی متناظر، نشان می‌دهد. وقتی نور سفید، که شامل فوتون‌هایی است که دارای تمام بسامدها یا انرژی‌های ممکن‌اند، از گازی عبور کند می‌توان آن فوتون‌های بخصوصی را که دارای انرژی‌های برابر با اختلاف انرژی بین حالت‌های مانا هستند از باریکه جدا

کرد. این فوتونها ناپدید می‌شوند و از این طریق انرژی الکترومغناطیسی تابشی خود را به انرژی برانگیختگی داخلی اتمها می‌دهند. یک مجموعه از ترازهای انرژی کوانتیده هم در گسیل و هم در درآشامی شرکت می‌کند؛ به همین دلیل بسامدهای خطوط گسیل و درآشامی یکسان‌اند. (چون اتمها تنها برای زمان خیلی کوتاهی در یک حالت برانگیخته باقی می‌مانند، در درآشامی فقط سری لیمان مشاهده می‌شود.)

در به دست آوردن مدل اتم هیدروژنی به‌طور ضمنی از اصول اساسی نظریه بوهر استفاده کردیم. ولی از آنجا که این اصول در بررسیهای کاملتر مکانیک موجی ساختار اتمی شکلهای اصلی خود را حفظ می‌کنند، جدا کردن آنها مفید است:

۱. یک دستگاه اتمی مقید فقط می‌تواند در حالتهای مانای گسسته، بدون اینکه در این حالتها تابش کند، وجود داشته باشد.

۲. حالتهای مانا حالتهایی هستند که در آنها اندازه حرکت زاویه‌ای مداری اتم، mvr ، مضرب درستی از $\hbar$ (ثابت پلانک تقسیم بر 2π) است. (این کوانتومی شدن اندازه حرکت زاویه‌ای، نتیجه طبیعی خواص موجی الکترون محبوس در یک مندار دایره‌ای کلاسیکی است.)

۳. وقتی یک اتم گذاری از حالت انرژی بالاتر E_u به حالت انرژی پایینتر E_l را انجام می‌دهد، یک فوتون با انرژی $h\nu$ گسیل می‌شود؛ بقای انرژی ایجاب می‌کند $h\nu$ برابر با $E_u - E_l$ باشد؛ اگر فوتونی درآشامیده شود، طبق همین رابطه، این اتم گذاری از حالت انرژی پایینتر به حالت انرژی بالاتر را انجام خواهد داد.

۵.۶ اتم هیدروژن و اصل همخوانی

طبق نظریه کوانتومی بسامد فوتون گسیل شده یا درآشامیده شده صرفاً توسط اختلاف انرژی بین دو حالت مانایی که در گذار شرکت می‌کنند تعیین می‌شود

$$\nu = \frac{E_u - E_l}{h}$$

$$\nu = \frac{E_l}{h} \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) = cR \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad (۳۰.۶) \text{ و } (۳۳.۶)$$

یادآور می‌شویم که در مدل کلاسیک سیاره‌ای اتم هیدروژن، با پیروی از الکترومغناطیس کلاسیک، فرض شد که بسامد امواج الکترومغناطیسی تولید شده توسط بار الکتریکی شتابدار دقیقاً برابر بسامد حرکت الکترون حول هسته است

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ke^2}{mr^3}} \quad (۱۳.۶) \text{ و } (۳۴.۶)$$

معادله‌های (۳۳.۶) و (۳۴.۶) بر اساس فرضهای متفاوت حاصل شدند و به وضوح مشاهده می‌شود که این دو بسامد پیشگویی شده کاملاً غیرمتشابه‌اند. البته، نظریه کوانتومی نظریه صحیحی است؛ این نظریه نه فقط طول موج کوتاه تابش مرئی حاصل از دستگاههای اتمی را توضیح می‌دهد بلکه تابش طول موجهای بلند، از قبیل امواج رادیویی، را نیز به درستی توصیف می‌کند. نظریه الکترومغناطیسی کلاسیک در توجیه طیفهای اتمی عاجز است؛ از طرف دیگر، این نظریه با آزمایشهایی که با امواج رادیویی با طول موج بلند انجام شده است و در آنها بسامد تابش با بسامد نوسان بارهای الکتریکی برابر است سازگار است.

اصل همخوانی عمومی (بخش ۵.۱) ایجاب می‌کند که نظریه عمومیت‌ر کوانتومی همان نتایج نظریه محدودتر کلاسیکی را برای وضعیتهایی که نظریه کلاسیکی بسنده است به دست بدهد. بنابراین، وقتی فقط وقتی که اتم هیدروژن را بتوان به شرایطی نزدیک کرد که در آنها نظریه کلاسیکی به کار می‌رود بسامدهای تابش اتمی فوتونهای گسیل شده، ν ، باید به بسامدهای مداری f نزدیک شوند. در این صورت، می‌خواهیم نشان دهیم که در حد همخوانی $\nu = f$ است.

هرگاه عدد کوانتومی اصلی n ، عدد درست بسیار بزرگی بشود وجهشهای کوانتومی کوچک مورد نظر باشند به آسانی می‌توان نشان داد که اتم بوهلر به شرایط کلاسیکی نزدیک می‌شود. همین که n بزرگ شود، ترازهای گسسته نزدیکتر باهم اجتماع می‌کنند و به‌مشخصه پیوستاری دستگاه مقید کلاسیکی نزدیک می‌شوند (شکل ۱۲.۶). وقتی n بزرگ باشد فوتونهایی که در گذارهای بین ترازهای انرژی مجاور گسیل می‌شوند دارای طول موج بسیار بلندند. علاوه بر این، با افزایش n ، شعاعهای مدارهای مانا بزرگ می‌شوند و اتم هیدروژن به دستگاهی ماکروسکوپی، که فیزیک کلاسیک برای آن بسنده است می‌گراید.

می‌خواهیم بسامد فوتون گسیل شده در گذار بین حالت‌های مجاور $n_u = n$ و $n_l = n-1$ را، وقتی $n \gg 1$ است، محاسبه کنیم. با استفاده از رابطه (۳۳.۶) داریم

$$\nu = cR \left(\frac{n_u^2 - n_l^2}{n_u^2 n_l^2} \right) = cR \frac{(n_u - n_l)(n_u + n_l)}{n_u^2 n_l^2} \quad (۳۵.۶)$$

ولی $n_u - n_l = 1$ ، $n_u + n_l \approx 2n$ ، و $n_u^2 n_l^2 \approx n^4$ است. بنابراین، این معادله برای مقادیر بزرگ n به صورت زیر درمی‌آید

$$\nu = \frac{2cR}{n^2} \quad (36.6)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که این بسامد کوانتومی ν با بسامد مداری کلاسیک f برابر است. با استفاده از رابطه (۲۵.۶) می‌توان شعاع الکترون r را در رابطه (۳۴.۶) قرار داد و نتیجه زیر را به دست آورد

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ke^2}{mr^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{ke^2}{m}\right) \left(\frac{ke^2 m}{n^2 \hbar^2}\right)} = \frac{2c}{n^2} \frac{k^2 e^4 m}{4\pi \hbar^2 c} \quad (37.6)$$

کمیت دوم در حاصل رابطه بالا همان ثابت ریدبرگ (R) در رابطه (۳۲.۶) است. از این رو، این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$f = \frac{2cR}{n^2} \quad (38.6)$$

از مقایسه روابط (۳۶.۶) و (۳۸.۶)، درمی‌یابیم که

$$\nu = f$$

و این همان است که اصل همخوانی ایجاب می‌کند.

درحقیقت با کاربرد اصل همخوانی بود که بوهر برای نخستین بار به کوانتش اندازه حرکت زاویه‌ای مداری، یعنی اصل دوم نظریه اتمی خویش، دست یافت. بوهر در مقاله اصلی خود درباره نظریه کوانتومی اتم هیدروژن چنین بیان می‌کند:

... ما فقط فرض می‌کنیم (۱) که تابش به صورت کوانتومهای $h\nu$ به خارج فرستاده می‌شود، و (۲) که بسامد تابش گسیل شده در خلال عبور از دستگاه بین دو حالت مانای پی در پی، با بسامد چرخش الکترون در ناحیه ارتعاشهای کند منطبق خواهد شد.

بوهر نشان داد که کوانتش اندازه حرکت زاویه‌ای مداری يك نتیجه ضروری از این دو اصل است. ما این روش را در بررسی اتم بوهر معکوس کردیم؛ یعنی، خواص موجی الکترون را پذیرفتیم و آنها را هم‌ارز کوانتش اندازه حرکت زاویه‌ای مداری قرار دادیم؛ در حد همخوانی، یکسانی بسامدهای فوتونی و مداری به عنوان يك نتیجه به دست آمد.

❖ رك

۶.۶ موفقیتها و شکستهای نظریه بوهر

خصوصیات نظریه اتمی بوهر که در زیر شرح داده می‌شوند عبارت از آن خصوصیات عامی هستند که در هر نظریه فراگیرنده ساختار اتمی به کار می‌روند: (۱) وجود حالت‌های مانایی که تابش نمی‌کنند، (۲) کوانتش انرژی يك دستگاه مقید از ذرات، (۳) کوانتش اندازه حرکت زاویه‌ای و (۴) گسیل یا درآشامی فوتونها در گذار بین حالت‌های مانا.

به طور مشخصتر نظریه بوهر می‌تواند (۱) پایداری اتمها، (۲) طول موج طیفهای گسیلی و درآشامی اتمهای هیدروژنی، و (۳) انرژیهای یونش اندازه‌گیری شده اتمهای تك الكترونی را توجیه کند.

ولی نظریه اتمی بوهر دارای چندین نقطه ضعف جدی است: (۱) غیرنسبیتی است؛ (۲) هیچ روشی برای محاسبه شدت خطوط طیف به دست نمی‌دهد؛ (۳) قادر به توضیح طیفهای اتمهایی که بیش از يك الكترون دارند نیست؛ (۴) بستگی اتمها در مولکولها، مایعات و جامدها را توضیح نمی‌دهد؛ (۵) حتی برای هیدروژن در توجیه جزئیات ریز طیف عاجز است (طیف نگارهای با توان جداکنندگی بالا نشان می‌دهند که هر «خط» که توسط نظریه بوهر پیشگویی می‌شود شامل دو یا چند خط نزديك به هم یا ساختار ریز است)، و این نظریه قاعده‌ای برای اندازه حرکت زاویه‌ای (درحالی که کوانتش آن را به حساب می‌آورد) به دست می‌دهد که کمتر از آنچه حقیقتاً هست پیچیده است.

تمام این نقایص در يك بررسی مکانیک موجی نسبیتی تصحیح می‌شوند. در این کتاب به این بررسی، به خاطر پیچیدگی ریاضیات آن، پرداخته نمی‌شود. دلیل اساسی نقص نظریه بوهر در این است که بیش از حد بر طبیعت ذره‌ای کلاسیکی الكترون تأکید می‌کند: الكترون چنان در نظر گرفته می‌شود که گویی بر يك مسیر دایره‌ای مشخص حرکت می‌کند، و شعاعها، سرعتها، و بسامدهای مداری آن دقیقاً معین‌اند. در بررسی مکانیک موجی، الكترون، که به صورت يك موج سه بعدی در نظر گرفته می‌شود، باید مجاز به گسترش و حرکت در سراسر ناحیه‌ای از فضا که هسته را احاطه می‌کند باشد. مسئله تطبیق امواج سه بعدی الكترون، با استفاده از جوابهای معادله شرودینگر، برای پیدا کردن حالت‌های کوانتیده مانا را در بخش بعدی در توصیف چند حالت ساده و خاص دنبال می‌کنیم.

۷.۶ اتم هیدروژن و توابع موج آن با استفاده از معادله شرودینگر

مسئله عبارت است از یافتن توابع موج مجاز معادله مستقل از زمان (غیرنسبیتی) شرودینگر

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (۳۵.۵) \text{ و } (۳۹.۶)$$

برای ذره‌ای به جرم m (الکترون) که تحت تأثیر نیروی جاذبهٔ عکس مجذوری (نیروی کولنی هسته) است.

می‌خواهیم جوابهای معادلهٔ شرودینگر را برای انرژی پتانسیل الکتریکی کولنی

$$V = -\frac{ke^2}{r}$$

پیدا کنیم. این انرژی، انرژی پتانسیل بین دو بار نقطه‌ای است که بزرگی بار هر یک e و به فاصلهٔ r از هم قرار دارند. بار نقطه‌ای مثبت در مبدأ مختصات ثابت باقی می‌ماند. برای دستیابی به عامترین جوابهای معادلهٔ شرودینگر می‌توان مختصات قائم رابطهٔ (۳۹.۶) را به مختصات کروی (r, θ, ϕ) تبدیل کرد و به آن وسیله پیشگویی کرد که وقتی تقارن انرژی پتانسیل (که فقط شامل مختصهٔ r است) با تقارن دستگاه مختصات جور باشد جوابهای معادلهٔ شرودینگر ساده‌ترین شکل ریاضی خود را اختیار می‌کنند. ولی، ما روش ساده‌تری را دنبال خواهیم کرد.

چون انرژی پتانسیل فقط به فاصلهٔ شعاعی r بستگی دارد باید یک دسته توابع موجی که در رابطهٔ (۳۹.۶) صدق می‌کنند و دارای تقارن کروی‌اند وجود داشته باشند، یعنی فقط به مختصهٔ r بستگی داشته باشند

$$\psi = F(r)$$

همان‌طور که در رابطهٔ (۳۹.۶) دیده می‌شود، معادلهٔ شرودینگر شامل مشتقات جزئی بر حسب مختصات قائم x, y, z است. چون جوابهایی که فقط به r بستگی دارند مورد نظر ماست، نخست باید این معادله را به معادله‌ای که فقط شامل مشتقات r است تبدیل کنیم. واضح است که

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

از این رو

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right) = \frac{x}{r}$$

حال $\partial^2 \psi / \partial x^2$ را در نظر می‌گیریم. با یادآوری اینکه ψ فقط باید به r بستگی داشته باشد، داریم

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{d\psi}{dr}$$

آنگاه مشتق دوم چنین می‌شود

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{x^2}{r^2} \frac{d\psi}{dr} + \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2 \psi}{dr^2} \quad (۴۰.۶)$$

مشتقات $\partial^2 \psi / \partial y^2$ و $\partial^2 \psi / \partial z^2$ درست همانند رابطه (۴۰.۶) هستند بجز اینکه y و z به جای x نوشته‌اند. از جمع این سه معادله، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{3}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{d\psi}{dr} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{d^2 \psi}{dr^2} \\ &= \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2 \psi}{dr^2} \end{aligned}$$

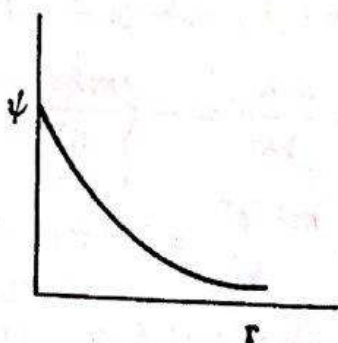
در این صورت معادله (۳۹.۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{ke^2}{r} \right) \psi = 0 \quad (۴۱.۶)$$

به جای اینکه این معادله را به تفصیل و به روش تحلیلی حل کنیم، آنچه را که به نظر می‌رسد شکل معقولی از تابع موج برای حالت پایه است برمی‌گزینیم و سپس آن را امتحان می‌کنیم تا ببینیم که آیا واقعاً يك جواب معادله هست یا نه. می‌دانیم که احتمال اینکه الکترون در نزدیکی هسته یافت شود به مراتب بیش از آن است که خیلی دور از هسته باشد و احتمال یافتن آن در بینهایت صفر است. این می‌رساند که تابع موج ψ برای مقادیر کوچک r نسبتاً بزرگ و برای $r = \infty$ برابر صفر است. تابع موجی که این در بایستها را برآورده کند به صورت

$$\psi = e^{-ra} \quad (۴۲.۶)$$

است، که در آن a میرایی‌نمایی به طرف خارج درامنداد است (شکل ۱۴.۶). حال امتحان



شکل ۱۴.۶ تابع موج $\psi = e^{-ra}$ برای حالت پایه هیدروژن.

می‌کنیم که آیا این تابع موج آزمایشی در معادله شرودینگر صدق می‌کند یا نه. از معادله (۴۲.۶) داریم

$$\frac{d\psi}{dr} = -ae^{-ra} = -a\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = a^2 e^{-ra} = a^2 \psi$$

با قرار دادن ψ ، $d\psi/dr$ و $d^2\psi/dr^2$ در معادله (۴۱.۶)، داریم

$$\left[a^2 - \frac{2}{r}a + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{ke^2}{r} \right) \right] \psi = 0 \quad (43.6)$$

يك جواب ممکن که در همه جا صادق است عبارت است از $\psi = 0$ ، ولی این جواب غیر قابل قبول است. بنابراین، با مرتب کردن مجدد جملات در معادله (۴۳.۶)، داریم

$$\left(a^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{2mke^2}{\hbar^2} - 2a \right) = 0 \quad (44.6)$$

این معادله باید برای تمام مقادیر r از صفر تا بینهایت برقرار باشد. وقتی $r = 0$ و $1/r = \infty$ را قرار دهیم می‌بینیم که تنها اگر جمله واقع در پرانتز دوم صفر شود و جمله طرف چپ می‌توانند با یکدیگر جمع و برابر صفر شوند. بنابراین

$$a = \frac{mke^2}{\hbar^2}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\hbar^2}{mke^2} = r_1 = 0.53 \text{ \AA} \quad (20.6) \text{ و } (45.6)$$

است. که از آن دیده می‌شود که a چیزی بجز عکس r_1 ، یعنی شعاع اولین مدار بوهر، نیست. حال فرض می‌کنیم که r در رابطه (۴۴.۶)، بتواند هر مقدار متناهی را بپذیرد. از آنجا که جمله دوم صفر است، برای آنکه این معادله برقرار باشد، باید جمله اول نیز صفر شود، و

$$E = -\frac{a^2 \hbar^2}{2m} = -\left(\frac{mke^2}{\hbar^2} \right)^2 \frac{\hbar^2}{2m}$$

$$E = -\frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV} \quad (27.6)$$

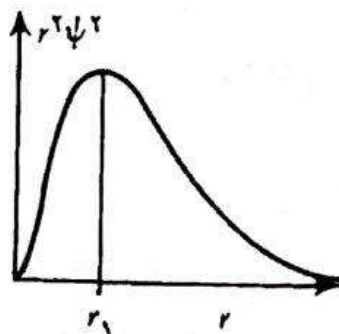
انرژی این اتم برابر $E = -13.6 \text{ eV}$ است که طبق نظریه بوهر، درست همان انرژی حالت پایه هیدروژن است. تابع موج مفروض در رابطه (۴۲.۶) در حقیقت تابع موج متناظر با حالت پایه در نظریه بوهر است.

یادآور می‌شویم که $\psi^2 dv$ احتمال یافتن يك ذره در عنصر حجمی dv است. برای اتم هیدروژنی که در حالت پایه است احتمال بودن الکترون در يك عنصر حجمی کوچک dv متناسب است با

$$\psi^2 dv = e^{-2ra} dv$$

در این حالت، احتمال یافتن الکترون در عنصر حجمی dv در هسته ($r=0$) بیشتر از احتمال یافتن آن در همین حجم ولی در هر جای دیگری است. اکنون این سؤال پیش می‌آید که احتمال بودن الکترون بین r و $r+dr$ ، یعنی داخل پوسته‌ای کروی به شعاع r ، ضخامت dr ، و حجم $4\pi r^2 dr$ چقدر است. گرچه $\psi^2 dv$ در مبدأ مختصات بیشینه است ولی حجم يك پوسته کروی واقع در مبدأ مختصات خیلی کوچک است، در حالی که در فواصل خیلی دور از مبدأ مختصات، این حجم بزرگ و چگالی احتمال بسیار کم است. باید يك بیشینه در احتمال یافتن الکترون در پوسته کروی بین دو انتهای $r=0$ و $r=\infty$ وجود داشته باشد. برای پوسته‌ای به شعاع r و ضخامت dr ، $dv = 4\pi r^2 dr$ است؛ احتمال متناظر متناسب است با $r^2 e^{-2ra}$. این احتمال در شکل ۱۵.۶ رسم شده است. این منحنی در آغاز صعود می‌کند (به خاطر r^2)، به بیشینه‌ای می‌رسد، و سپس برای مقادیر بزرگ r به صفر می‌گراید (به دلیل e^{-2ra}). در چه فاصله‌ای از هسته، داخل گستره dr ، بیشترین احتمال برای قرار گرفتن الکترون وجود دارد؟ البته، این مقدار r همان مقدار متناظر با بیشینه در شکل ۱۵.۶ است. قله $r^2 e^{-2ra}$ در محل زیر رخ می‌دهد

$$\frac{d}{dr}(r^2 e^{-2ra}) = 0$$



شکل ۱۵.۶ احتمال یافتن يك الکترون در حالت پایه هیدروژن بین r و $r+dr$ (متناسب با $r^2 \psi^2$) به صورت تابعی از فاصله r از هسته.

$$2re^{-2ra} - 2ar^2e^{-2ra} = 0$$

$$r_{\max} = \frac{1}{a} = r_1$$

این بیشینه دقیقاً در شعاع اولین مدار بوهر قرار دارد. هرچند ممکن است الکترون در هر جایی یافت شود ولی محتملترین است که در حالت پایه در فاصله r_1 از هسته باشد تا در هر فاصله دیگری از آن.

توابع موج دیگری هم که دارای تقارن کروی هستند وجود دارند. با جایگزینی در رابطه (۴۱.۶) می‌توان به آسانی نشان داد که تابع موج $(2-ra)e^{-ra/2}$ نیز يك جواب است. انرژی متناظر با این تابع موج برابر با $E_2 = -13.6 \text{ eV}/4 = -3.4 \text{ eV}$ است، که همان انرژی اولین حالت برانگیخته هیدروژن است. در واقع، انرژیهای E_n اتم هیدروژن برای تمام توابع موج با تقارن کروی توسط معادله زیر داده می‌شوند

$$E_n = -\left(\frac{mk^2e^2}{2\hbar^2}\right)\frac{1}{n^2} = -\frac{E_I}{n^2} \quad (27.6) \text{ و } (46.6)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ است، باز هم این نتیجه با نظریه بوهر توافق دارد. چون انرژی پتانسیل $V = -ke^2/r$ دارای تقارن کروی است، همان‌طور که مشاهده کردیم توابع موج با تقارن کروی وجود دارند. ولی توابع موج متقارن ناکروی هم وجود دارند. ساده‌ترین این توابع عبارت‌اند از

$$\psi = xF(r) \quad (47.6)$$

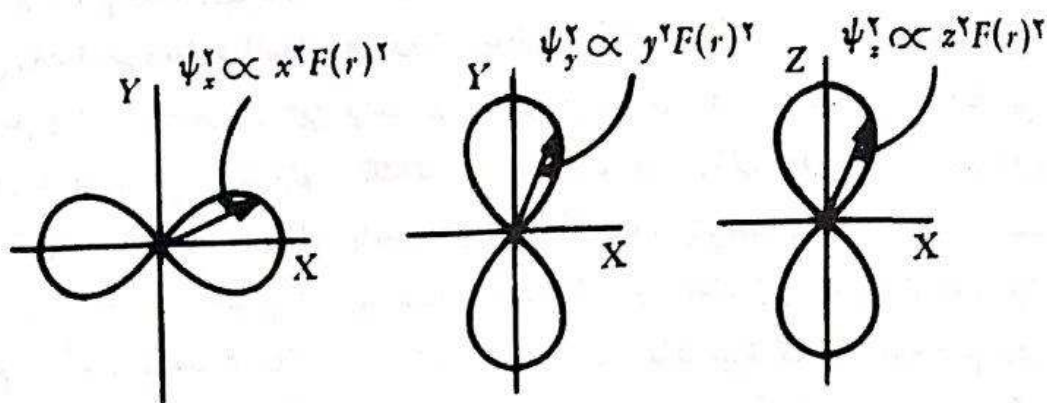
که در آن باز هم $F(r)$ فقط تابعی از r است. این جوابی است که به وسیله محاسبه مشتقات $d\psi/dr$ و $d^2\psi/dr^2$ و قرار دادن آنها در رابطه (۴۱.۶) امتحان می‌شود. انرژی متناظر با $F(r) = e^{-ar/2}$ برابر است با $E_2 = -13.6 \text{ eV}/4 = -3.4 \text{ eV}$ که همان انرژی اولین حالت برانگیخته هیدروژن است.

اگر $\psi = xF(r)$ يك جواب باشد در این صورت $\psi = yF(r)$ و $\psi = zF(r)$ نیز جواب‌اند، که در آن $F(r)$ برای هر سه حالت یکسان است. انرژی برای همگی این حالتها یکسان است. توابع موج متقارن ناکروی از نوع

$$\psi = xF(r)$$

$$\psi = yF(r)$$

$$\psi = zF(r)$$



شکل ۱۶.۶ نمودار قطبی تغییرات ψ^2 با زاویه برای حالت‌های p .

به حالت‌های p موسوم‌اند (توابع با تقارن کروی به حالت‌های s مشهورند). شکل ۱۶.۶ توزیع‌های احتمال برای یک حالت p (یا یک مدار p) در یک نمودار قطبی را نشان می‌دهد. برای تمام حالت‌های با تقارن کروی اندازه حرکت زاویه‌ای مداری اتم صفر است. برای حالت‌هایی که تقارن کروی ندارند، مانند حالت‌های p شکل ۱۶.۶، اندازه حرکت زاویه‌ای مداری اتم صفر نیست؛ در حقیقت، می‌توان نشان داد که اندازه حرکت زاویه‌ای مداری (در امتداد هر راستایی در فضا) همواره مضرب درستی از $\hbar$ است.

۸.۶ برانگیختگی اتمی در اثر برخورد: آزمایش فرانک-هرتز

دستگاه‌های اتمی (مانند اتم هیدروژن) کوانتیده‌اند و انرژی‌های مجاز گسته‌اند؛ در نتیجه یک فوتون تنها در صورتی می‌تواند درآشامیده شود که انرژی $h\nu$ آن با اختلاف انرژی $E_2 - E_1$ بین دو حالت مجاز جور باشد. برای مثال، فقط فوتون‌های با انرژی 10.2 eV باعث خواهند شد که اتم‌های هیدروژن در حالت پایه به اولین حالت برانگیخته برسند. ممکن است این سؤال مطرح شود که آیا انرژی یک دستگاه کوانتیده می‌تواند، نه فقط از طریق برخورد با فوتونها، بلکه از طریق برخورد با ذرات دارای جرم سکون غیر صفر (مانند الکترون) نیز تغییر کند. برای نخستین بار در سال ۱۹۱۴/۱۲۹۳ آزمایش فرانک و هرتز نشان داد که برانگیختگی اتم‌ها توسط بمباران ذره‌ای امکان‌پذیر است و کوانتش انرژی بر این فرایند نیز حاکم است.

نخست هیدروژن اتمی را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که اتم‌های هیدروژن، در حالت پایه، توسط یک باریکه تک انرژی از الکترون‌هایی که انرژی جنبشی آنها از 10.2 eV (انرژی برانگیختگی اولین حالت برانگیخته هیدروژن) کمتر است بمباران

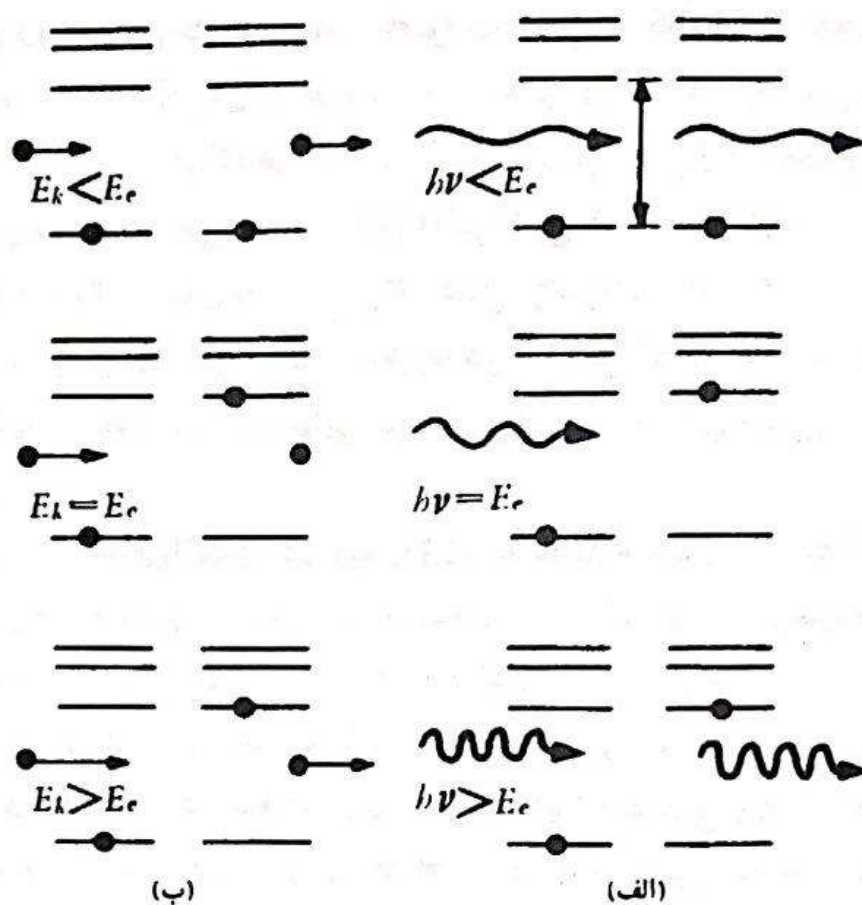
شوند. چون اتم هیدروژن در حالت پایه نمی‌تواند انرژی خود را کمتر از این مقدار افزایش دهد الکترون‌ها با اتمهای هیدروژن به‌طور کاملاً کشسان برخورد می‌کنند و انرژی جنبشی کل ذرات خروجی، در این برخورد، با انرژی جنبشی کل ذرات ورودی کاملاً برابر است. از طرف دیگر، الکترونهای تک‌انرژی که انرژی جنبشی آنها دقیقاً برابر 10.2 eV است با اتمهای هیدروژن در حالت پایه برخورد می‌کنند و این برخورد می‌تواند غیر کشسان باشد. در این حالت، با تبدیل انرژی جنبشی اولیه الکترون به انرژی داخلی اتم هیدروژن، این اتم يك گذار به‌سوی بالا، از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته، انجام می‌دهد.* چون بعضی اتمها بدین طریق به يك حالت برانگیخته می‌رسند پس از آن می‌توانند با گسیل يك فوتون با انرژی 10.2 eV ، به حالت پایه واپاشیده شوند.

هنگامی که الکترونهای بمباران‌کننده دارای انرژی جنبشی بیش از 10.2 eV باشند نیز برخورد غیر کشسان خواهد بود؛ فقط 10.2 eV به انرژی داخلی برانگیختگی اتمی تبدیل خواهد شد. انرژی جنبشی باقیمانده نمی‌تواند توسط این اتم هیدروژن درآشامیده شود و الزاماً به‌صورت انرژی جنبشی الکترون خروجی (و تا حد کمتری، به‌صورت انرژی جنبشی اتمی که مورد اصابت قرار گرفته است) ظاهر می‌شود. با افزایش باز هم بیشتر انرژی ذرات بمباران‌کننده، اتمها می‌توانند به‌دومین حالت برانگیخته و به‌حالت‌های بالاتر برسند. در هر يك از این برخوردهای غیر کشسان، اتم فقط آن انرژی را که باعث گذار از يك تراز انرژی کوانتیده به تراز بالاتر خواهد شد درمی‌آشامد (شکل ۱۷.۶). به‌طور خلاصه، اگر انرژی برانگیختگی يك اتم با E_e و انرژی جنبشی ذره سبك بمباران‌کننده با E_k نشان‌داده شوند، برخوردهای غیر کشسان با برانگیختگی اتمی فقط در صورتی رخ می‌دهند که

$$E_k \geq E_e \quad (۲۸.۶)$$

در آزمایش اولیه فرانک-هرتز الکترون‌ها وادار به برخورد با اتمهای بخار جیوه شدند، طول موج تابش متناظر با گذار بین حالت پایه و اولین حالت برانگیخته جیوه برابر $2536\text{ \AA}$ است؛ انرژی فوتون معادل با آن برابر با انرژی برانگیختگی، 4.88 eV ، است. فرانک و هرتز دریافتند که الکترونهایی با این حداقل انرژی جنبشی برای تولید برانگیختگی در اتمهای جیوه مورد نیازند. این مطلب از این حقیقت استنباط شد که وقتی انرژی الکترون‌ها از 4.88 eV کمتر بود برخوردها کاملاً کشسان بودند، ولی وقتی انرژی

* چون اندازه حرکت در هر برخورد باید پایسته بماند اندازه حرکت پس از برخورد اتمی که مورد اصابت قرار گرفته است با اندازه حرکت الکترون، قبل از برخورد برابر است؛ ولی انرژی جنبشی این اتم در مقایسه با تغییر در انرژی داخلی آن ناچیز است، زیرا جرم اتم به‌مقدار قابل توجهی از جرم الکترون بزرگتر است.



شکل ۱۷.۶ برانگیختگی یک گذار کوانتومی، (الف) توسط بمباران فوتونی، که در آن E_e انرژی برانگیختگی اتمی است؛ (ب) توسط بمباران ذره‌ای که در آن E_k انرژی جنبشی ذره است.

آنها بیشتر بود تعدادی برخورد غیر کشان رخ می‌داد. در همان زمان معلوم شد که اگر، و فقط اگر، الکترونیایی با حداقل انرژی برانگیختگی ۴۷۸۸ eV با اتمهای جیوه برخورد کنند، اتمهای جیوه تابش $۲۵۳۶\text{ \AA}$ گسیل می‌کنند.

اهمیت تاریخی آزمایش فرانک-هرتز در این است که: این آزمایش نشان داد که دستگاههای اتمی کوانتیده‌اند و این موضوع، نه فقط در آزمایش و گسیل فوتون، بلکه در بمباران ذره‌ای نیز نمایان شد. در عمل می‌توان برخوردهای غیر کشان الکترونها را از طریق اندازه‌گیری جریان الکتریکی ناشی از حرکت الکترونها در یک گاز مولکولی مشاهده کرد. اگر سرعت الکترونها در اثر برخوردهای غیر کشان ناشی از برانگیختگی اتمی به شدت کاهش یابد، در آن صورت، وقتی انرژی جنبشی الکترونها با انرژی برانگیختگی مطابقت داشته باشد، جریان ثبت شده به شدت افت می‌کند. در حقیقت، اگر الکترونها به اندازه کافی انرژی داشته باشند، هر یک از آنها در عبور از گاز، ممکن است

تعدادی برخورد غیر کشسان انجام دهند؛ و در هر برخورد انرژی برابر E_e از دست بدهند. از این رو، جریان مشاهده شده به صورت تابعی از پتانسیل شتابدهنده الکتریکی (که انرژی جنبشی کل الکترون در غیاب برخوردهای غیر کشسان را تعیین می کند) چند افت تیز را نشان خواهد داد، که هر افت با ضرب درستی از E_e مطابقت دارد. در همین زمان مشاهده می شود که وقتی برخوردهای الکترونی غیر کشسان ابتدا برانگیختگیهای اتمی را تولید کنند، فوتونهای با انرژی E_e گسیل می شوند.

یونش از برخوردها نیز می تواند نتیجه شود. اگر ذرات بمباران کننده الکترون باشند، اتمها تنها توسط آن الکترونهایی یونیده می شوند که انرژی جنبشی آنها با انرژی یونش اتم برابر است.

در دمای اتاق تمامی اتمهای گاز هیدروژن، اساساً در حالت پایه اند و گسیل چندانی رخ نمی دهد. می خواهیم ببینیم که چرا این امر صحت دارد. انرژی جنبشی متوسط هر مولکول گاز kT ($3/2$) در دمای اتاق برابر 0.04 eV است. از این رو تعداد بسیار کمی از آنها دارای انرژی جنبشی انتقالی برابر با 10.2 eV هستند؛ این انرژی برابر است با انرژی کمینه لازم برای بالابردن یک اتم هیدروژن از حالت پایه ($n=1$ و $E_1 = -13.6 \text{ eV}$) به اولین حالت برانگیخته ($n=2$ و $E_2 = -3.4 \text{ eV}$). وقتی که مقداری از انرژی جنبشی انتقالی دو اتم برخورد کننده به انرژی برانگیختگی داخلی یکی یا هر دوی آنها تبدیل شود، برانگیختگی گرمایی روی می دهد؛ انرژی جنبشی انتقالی در یک چنین برخوردی پایسته نیست و از این رو این برخورد غیر کشسان است. هنگامی که دمای این گاز به حدی افزایش یابد که در آن انرژی جنبشی انتقالی متوسط اتم kT ($3/2$) تقریباً با یک انرژی برانگیختگی ممکن برابر باشد تعداد محسوسی از اتمها می توانند، در برخوردهای غیر کشسان، به اندازه کافی انرژی درآشامند تا به این حالت برسند. برای برانگیختن اتمها توسط گرما، دماهای بسیار بالا مورد نیاز است؛ برای مثال kT ($3/2$) در دمای 75000 K برابر 10 eV است.

روش ساده تر و متداولتری برای برانگیختن اتمها توسط فرانک-هرتز پیشنهاد شد. در این روش از تخلیه الکتریکی توسط یک میدان الکتریکی خارجی استفاده می شود که در آن الکترونها و یونها شتاب می گیرند و انرژیهای جنبشی خیلی بالا کسب می کنند؛ این روش، در عمل، با اعمال یک اختلاف پتانسیل بین دو الکترود واقع در یک اتاقک شیشه ای محتوی گاز انجام می شود. از این رو با برانگیختگی گرمایی و برانگیختگی الکتریکی طیفهای گسیلی تولید می شود.

اکنون می توان فهمید که چرا در نظریه جنبشی گازها، وقتی که گاز در دمای متوسطی

است، می‌توان مولکولهای گاز یا اتمها را مانند ذرات بی‌اثر و بدون ساختار داخلی که با یکدیگر برخورد‌های کاملاً کشسان می‌کنند در نظر گرفت. ساختار داخلی اتم نمی‌تواند تغییر کند، انرژی جنبشی انتقالی کل در یک برخورد پایسته می‌ماند و برخورد کاملاً کشسان خواهد بود، مگر آنکه انرژی جنبشی انتقالی هر اتم با اختلاف انرژی بین حالت پایه و اولین حالت برانگیخته قابل مقایسه باشد. اگر دمای گاز به قدر کافی بالا باشد برخورد‌های غیر کشسان روی می‌دهد. در نتیجه بعضی اتمها برانگیخته می‌شوند و دیگر نمی‌توان آنها را مانند ذرات بی‌اثری که نتوانند تغییرات داخلی را متحمل شوند در نظر گرفت.

خلاصه

آزمایشهای رادرفورد در مورد پراکندگی ذرات α نشان دادند که تمام بار مثبت و اساساً تمام جرم یک اتم در ناحیه بسیار کوچکی از فضا (که بزرگتر از 10^{-14} متر نیست) به نام هسته محبوس است.

کسری از ذرات فرودی که به وسیله برگ نازکی به ضخامت t و شامل n پراکننده در واحد حجم پراکنده می‌شود به صورت زیر است

$$\frac{N_s}{N_i} = \sigma n t \quad (2.6)$$

که در آن σ سطح مقطع مؤثر وابسته به هر مرکز پراکننده است. مدل سیاره‌ای کلاسیک پیشگویی می‌کند که اتمها ناپایدارند و یک طیف پیوسته گسیل می‌کنند.

مشاهده می‌شود که اتمهای هیدروژن خطوط طیفی گسته‌ای را درمی‌آشامند و یا گسیل می‌کنند که طول موج λ آنها توسط رابطه زیر داده شود

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad (15.6)$$

که در آن R ثابت ریدبرگ و n_i و n_u اعداد درستی‌اند. نظریه اتمی کوانتومی بوهر، در گذارها موارد زیر را فرض می‌کند: (۱) حالت‌های مانا، (۲) اندازه حرکت زاویه‌ای مداری $n\hbar$ و (۳) $h\nu = E_u - E_i$. انرژی‌ها و شعاعهایی که به وسیله نظریه اتمی بوهر برای هیدروژن پیشگویی می‌شوند به وسیله روابط زیر داده می‌شوند

$$E_u = -\frac{E_I}{n^2} \quad \text{که در آن} \quad E_I = \frac{k^2 e^2 m}{2\hbar^2} = 13.605 \text{ eV} \quad (26.6)$$

$$r_n = n^2 r_1 \quad \text{که در آن} \quad r_1 = \frac{\hbar^2}{kme^2} = 0.53 \text{ \AA} \quad (21.6)$$

جوابهای مکانیک موجی معادله شرودینگر برای هیدروژن همین انرژیها را به دست می دهد؛ شعاع r_1 اولین مدار بوهر فاصله ای از هسته را به دست می دهد که برای آن می توان الکترون را با بیشترین احتمال در حالت پایه یافت. آزمایش فرانک-هرتز تأیید کرد که برانگیختگی و یونش اتمها توسط ذرات، در برخورد های غیر کشسان، از شرط کوانتومی پیروی می کنند.

مسائل

۱. بیست هزار کره سخت کوچک، هریک به قطر ۲۰۰ میلیمتر به طور کتره ای در سرتاسر داخل یک جعبه مکعبی، به ضلع ۱۰ متر، پاشیده می شوند. (الف) اگر یک میلیون ذره، که هریک در مقایسه با این کره ها بسیار کوچک اند، به طور کتره ای بروجهی از جعبه شلیک شوند، انتظار می رود که چند تا از این ذرات، در برخورد با کره ها، در جهت روبه جلو پراکنده شوند؟ (ب) اگر یک میلیون کره، هریک به قطر ۲۰۰ میلیمتر به کره های واقع در داخل جعبه شلیک شوند، چند تا از آنها پراکنده خواهند شد؟
۲. (الف) اندازه حرکت، و (ب) طول موج یک ذره α با انرژی ۵۰ MeV چقدرند؟
۳. ذرات α از برگ نازکی از یک ماده با عدد اتمی Z_1 ، چگالی ρ_1 و وزن اتمی w_1 پراکنده می شوند و تحت زاویه ثابت θ مشاهده می شوند. برگ اول را با برگ دیگری (Z_2 ، ρ_2 و w_2) که دارای همان مساحت کل و جرم است عوض می کنیم. نسبت تعداد ذرات مشاهده شده تحت زاویه θ برای برگهای اول و دوم چقدر است؟
۴. باریکه ای از پروتونهای با انرژی ۸ MeV بر روی یک برگ نقره به ضخامت 10^{-6} متر فرود می آید و بر طبق فرمول رادرفورد پراکندگی کولنی انجام می دهد. (الف) کمترین فاصله نزدیک شدن چقدر است؟ (ب) پارامتر برخورد را برای پروتونهایی که تحت زاویه 90° پراکنده می شوند پیدا کنید. (ج) احتمال اینکه یک پروتون فرودی به طرف عقب پراکنده شود (یعنی، $\theta > 90^\circ$) چقدر است؟ چگالی نقره 10.5 g/cm^3 ، و وزن اتمی آن 107.88 g/mol است.
۵. ذرات α که از یک برگ نازک پراکنده می شوند تحت زاویه پراکندگی ثابت θ مشاهده می شوند. هنگامی که (الف) سرعت ذرات فرودی، بدون هیچگونه تغییر در

تعداد ذراتی که در واحد زمان به برگ برخورد می کنند، دو برابر شود، و (ب) سرعت ذرات فرودی دو برابر و جریان الکتریکی باریکه فرودی نیز دو برابر شود. تعداد ذرات پراکنده در واحد زمان، تحت زاویه θ ، با چه نسبتی تغییر می کند؟

۶. يك ذره α به ترتیب با (الف) يك هسته طلا، (ب) يك ذره α ، و (ج) يك الكترون، كه همگی در آغاز در حال سکون اند برخورد رو در رو می کند. چه کسری از انرژی جنبشی اولیه ذره α به هر کدام از ذرات فوق منتقل می شود؟

۷. يك ذره α با انرژی 8.0 MeV با الكترونی كه در آغاز به حال سکون است برخورد رو در رو می کند. پس از برخورد، انرژیهای جنبشی (الف) الكترون و (ب) ذره α ، چقدرند؟ (ج) برای اینکه انرژی جنبشی اولیه ذره α به اندازه ۱۰ درصد کاهش یابد، چند برخورد رو در رو با الكترونهايي كه در آغاز به حال سکون اند لازم است؟

۸. فرض کنید كه ذرات α با انرژی 7.68 MeV به برگي از طلا به ضخامت $10^{-5} \times 600$ سانتیمتر فرود می آیند. این ذرات دوبار در این برگ و هر بار تحت زاویه 10° پراکنده می شوند (برای سهولت فرض می کنیم كه این برگ در هر دو پراکندگی دارای ضخامت یکسان است). برای چه کسری از ذرات فرودی این پراکندگی دو گانه روی خواهد داد؟

۹. يك ذره α با انرژی 8.0 MeV به يك هسته مس ($Z=29$ ، وزن اتمی ۶۵) نزدیک می شود. (الف) وقتی این ذره در فاصله 4×10^{-14} متر از هسته قرار دارد، انرژی جنبشی آن را محاسبه کنید. (ب) نشان دهید كه اگر این فاصله كوچكترین فاصله ای باشد كه ذره α و هسته مس را در خلال این برخورد غیر رو در رو از هم جدا می کند پارامتر برخورد باید 3.4×10^{-14} متر باشد. (دانهایی: از بقای اندازه حرکت زاویه ای استفاده کنید.)

۱۰. نشان دهید كه يك ذره با بار مثبت، دريك برخورد رو در رو، خیلی بیشتر به يك هسته سنگین نزدیک می شود تا دريك برخورد غیر رو در رو. (دانهایی: از بقای انرژی استفاده کنید.)

۱۱. ذرات α با انرژی چندین MeV ، در دمای اتاق بر هدفی از اتمهای هلیوم در گازی فرود می آیند. ذرات هدف عملاً ذرات در حال سکون α هستند، زیرا انرژی گرمایی متوسط هر مولکول هلیوم فقط 0.04 eV است. چون ذرات هدف خیلی سنگینتر از

ذرات فرودی نیستند، روابط پراکندگی حاصل از این فرض، در این مثال به کار نمی‌روند. نشان دهید که هیچکدام از ذرات α (فرودی یا هدف) را نمی‌توان تحت زاویه پراکندگی بزرگتر از 90° مشاهده کرد.

۱۲. برای يك برگ معین فلزی سطح مقطع پراکندگی يك باریکه دوترون تحت زاویه θ برابر σ_r است. با فرض اینکه پراکندگی کولنی مطابق فرمول رادفورد است، رابطه‌ای را برای D (کمترین فاصله نزدیک شدن در يك برخورد رودر رو) به صورت تابعی از σ_r و θ پیدا کنید.

۱۳. يك ذره α با انرژی 5.0 MeV توسط يك هسته طلا به اندازه 60° پراکنده می‌شود. (الف) پارامتر برخورد متناظر چقدر است؟ (ب) در صورتی که ضخامت برگ طلا برابر 2.5×10^{-2} متر باشد، چه کسری از ذرات α ی فرودی، با انرژی 5.0 MeV ، تحت زاویه‌ای بیش از 60° پراکنده می‌شود؟

۱۴. يك ذره α با انرژی 5.0 MeV ، قبل از آنکه به حال سکون درآید، فاصله 3.5 سانتیمتر را در هوا می‌پیماید. يك ذره α در هر برخورد با مولکولهای هوا تقریباً 5 eV انرژی را از طریق برانگیختگی و یونش از دست می‌دهد. سطح مقطع تقریبی برانگیختگی و یونش مولکولهای هوا توسط ذرات α را محاسبه و آن را با ابعاد اتمی مقایسه کنید. ($1 \text{ kg/m}^3 \approx$ چگالی هوا و $30 \approx$ وزن مولکول)

۱۵. (الف) جریان الکتریکی را برای الکترونی که در اولین مدار بوهر حرکت می‌کند محاسبه کنید، (ب) بزرگی میدان مغناطیسی ناشی از حرکت مداری الکترون، در محل پروتون، چقدر است؟ (ج) آیا این میدان مغناطیسی همجهت یا در جهت مخالف بردار اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون است؟

۱۶. يك اتم هیدروژن در يك حالت برانگیخته است. انرژی بستگی الکترون، در این حالت 3.40 eV است. این اتم به حالتی که انرژی برانگیختگی آن 12.75 eV است گذاری انجام می‌دهد. (الف) انرژی فوتون وابسته به این گذار چقدر است؟ (ب) آیا این فوتون گسیل می‌شود یا درآشامیده؟

۱۷. نشان دهید که انرژیهای کوانتیده اتم هیدروژن را می‌توان به شکل $E_n = (-1/2\alpha^2)(mc^2)/n^2$ نوشت، که در آن α ثابت ساختار ریز و mc^2 انرژی سکون است.

۱۸. شکل دقیق ثابت ساختار ریز در دستگاه یکاهای گوناگون به طور جزئی تغییر می کند و در نهایت فقط به ثابتهای فیزیکی h ، e ، و c بستگی دارد. تابعی از این ثابتها را بر حسب (الف) یکاهای cgs، (ب) یکاهای mks، بنویسید. (ج) نشان دهید $\alpha = n\beta_n$ است که در آن $\beta_n = v_n/c$ است.

۱۹. در نظریه اتم هیدروژنی بوهر نشان دهید که $r_n E_n = (-1/2)e^2$ (بر حسب یکاهای cgs) و $r_n E_n = (-1/2)(ec)^2 \times 10^{-7}$ (بر حسب یکاهای mks)، که در آن r_n و E_n شعاع و انرژی کل وابسته به عدد کوانتومی n هستند.

۲۰. (الف) نشان دهید که حاصلضرب شعاع اولین مدار بوهر در ثابت ساختار ریز، برابر است با طول موج کامپتون الکترون تقسیم بر 2π . (ب) نشان دهید که شعاع اولین مدار بوهر برابر $\alpha/4\pi R_\infty$ است.

۲۱. نشان دهید که اصل ترکیب ریتز معتبر است. این اصل بیان می کند که عدد موج هر خط طیفی، که توسط یک عنصر تابش یا درآشامیده شود، برابر است با اختلاف یا مجموع اعداد موج هر زوج خط دیگری که توسط همان عنصر تابش می شوند. عدد موج عکس طول موج است.

۲۲. فرض کنید که ۱۲۰۰۰ اتم هیدروژن در آغاز در حالت $n=5$ باشند. آنگاه این اتمها گذارهایی به حالت های انرژی پایتتر انجام می دهند. (الف) چند خط طیفی مجزا گسیل خواهند شد؟ (ب) برای سهولت فرض کنید که برای هر حالت برانگیخته معلوم احتمال انجام تمام گذارهای ممکن به سوی پایین یکسان است، تعداد کل فوتونهای گسیل شده چقدر است؟

۲۳. میون یک ذره بنیادی است که بار آن مساوی با الکترون ولی جرم آن ۲۰۷ برابر جرم الکترون است. میون را می توان توسط پروتون (و همچنین به وسیله هسته های دیگر) گیر انداخت، تا یک اتم «میونی» تشکیل شود. (الف) شعاع اولین مدار بوهر را برای چنین اتمی محاسبه کنید. (ب) انرژی یونش یک اتم میون-پروتون چقدر است؟ (ج) سرعت میون در اولین مدار را با سرعت الکترون در اولین مدار مقایسه کنید. چون اتم هیدروژن میونی به مراتب کوچکتر از اتم هیدروژن معمولی است، حتی در دماهای متوسط یک زوج اتم میونی می توانند آنقدر بهم نزدیک شوند که دوهسته یکدیگر را با نیروی هسته ای بین خود جذب کنند، و یک واکنش هسته ای

تولید کنند. برای تولید يك واکنش هسته‌ای بین اتمهای يك گاز از اتمهای هیدروژن معمولی، دماهای میلیون درجه‌ای لازم است (بخش ۹.۱۵). از این رو اتمهای هیدروژن می‌توان در فرایند مشهور به «همجوشی سرد» به کار برد.

۲۴. خورشید، همانند زمین، تقریباً به صورت کره‌ای است که حول محوری دوران می‌کند. ولی مانند يك جسم صلب دوران نمی‌کند: خورشید هر چه به خط استوا نزدیکتر باشد دوران آن سریعتر است. وقتی طیف درآشامی تابش H_α بی که از دو طرف مقابل خط استوای خورشید گسیل می‌شود باهم مقایسه شوند، يك اختلاف طول موج $0.0914 \text{ \AA}$ دیده می‌شود. با انتساب این اختلاف به اثر دوپلر (مسئله ۲۶)، تناوب دوران در خط استوای خورشید را پیدا کنید. قطر خورشید $10^9 \times 1.4$ متر است.

۲۵. مشاهده شده است که يك کهکشان (کوازار C ۳) با سرعت فوق‌العاده زیاد $81c$ از ما دور می‌شود. (الف) طول موج خط H_α ی گسیل شده از اتمهای هیدروژن واقع در آن کهکشان را، که بر روی زمین مشاهده می‌شود، محاسبه کنید. (ب) این خط در کدام ناحیه از طیف الکترومغناطیسی قرار خواهد گرفت؟

۲۶. وقتی بسامد ν' ، که توسط يك ناظر اندازه‌گیری می‌شود، با بسامد ν ، که از چشمه نوری گسیل می‌شود، اختلاف داشته باشند اثر دوپلر نوری روی می‌دهد. در حالت خاصی که در آن ناظر و چشمه در امتداد خط واصل بین خود با سرعت نسبی ($\nu \ll c$) از یکدیگر دور و یا به هم نزدیک می‌شوند، بسامد ظاهری ν' توسط رابطه $\nu' = \nu(1 \pm \nu/c)$ داده می‌شود؛ علامت منها دلالت بر دور شدن و علامت مثبت نشانه نزدیک شدن است. از این رو، تغییر نسبی در بسامد یا طول موج برابر $\Delta\nu/\nu = \Delta\lambda/\lambda = \nu/c$ است. اثر دوپلر یکی از دلایلی است که خطوط طیفی به طور نامتناهی نیز نیستند. مؤلفه سرعت اتمهای تابش کننده گوناگون، در امتداد راستای انتشار نوری که به طیف منبج وارد می‌شود مختلف است. با فرض اینکه يك گاز هیدروژن برانگیخته در دمای 25000 K (دمای فوتوسفر از رده معلوم O ستاره‌های آبی-سفید) است و با فرض اینکه سرعتهای بیشینه دور شدن و نزدیک شدن را به طور تقریبی با رابطه $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$ بیان کنیم، پهنای خط H_α ناشی از پهن شدن دوپلر را بر حسب آنگستروم محاسبه کنید.

۲۷. کوانتس انرژی يك دستگاه اتمی مانند اتم هیدروژن حاکی از آن است که از طریق هم‌ارزی جرم-انرژی نظریه نسبیت، جرم دستگاه مقید کوانتیده است. مقادیر ممکن جرم کل يك اتم هیدروژن را بنویسید.

۲۸. وقتی اتمی در يك حالت برانگیخته و ابتدا در حال سکون يك فوتون گسیل می‌کند، بقای اندازه حرکت ایجاب می‌کند که اتم پس زده شود. از این رو، اختلاف انرژی بین دو حالت مانای اتم دقیقاً برابر انرژی فوتون گسیل شده به اضافه انرژی اتم پس زده است. (الف) نشان دهید که وقتی انرژی پس زدن اتم را به حساب آوریم، بسامد فوتون گسیل شده به اندازه کسر $h\nu/2Mc^2$ کاهش می‌یابد، که در آن ν (با تقریب) بسامد فوتون و M جرم اتمی است. (ب) وقتی این اثر به حساب آورده شود، تصحیح نسبی در بسامد لیمان فوتونهای α که توسط هیدروژن گسیل می‌شوند چقدر است؟

۲۹. (الف) انرژی، (ب) اندازه حرکت، و (ج) طول موج فوتون گسیل شده از اتم هیدروژنی که گذار پاشن α را انجام می‌دهد چقدر است؟ (د) با فرض اینکه اتم هیدروژن در آغاز به حال سکون است، وقتی چنین فوتونی گسیل شد اتم با چه انرژی پس زده می‌شود؟

۳۰. (الف) بسامد فوتون گسیل شده توسط اتم هیدروژنی که يك گذار از حالت $n=11$ به حالت $n=10$ را انجام می‌دهد چقدر است؟ (ب) بسامد هم ارز الکترونی که به طور کلاسیک در حالت $n=10$ دوران می‌کند چقدر است؟

۳۱. اتم قبل از آنکه گذاری به يك حالت انرژی پایینتر انجام دهد برای زمان متوسط 10^{-8} s، در حالت برانگیخته معینی باقی می‌ماند. (الف) عدم قطعیت در انرژی (بر حسب الکترون ولت) اتم برای این حالت برانگیخته چقدر است؟ (ب) اگر گذار بعدی به سوی پایین باعث گسیل يك فوتون $5000 \text{ \AA}$ شود، عدم قطعیت نسبی در بسامد یا طول موج تابش گسیل شده چقدر است؟ (ج) حال فرض کنید که گذاری به سوی پایین باعث گسیل يك فوتون با بسامد 10 MHz شود؛ این بار نیز اتم با طول عمر 10^{-8} s در حالت بالاتر گذار انجام داده است. در این صورت عدم قطعیت نسبی در بسامد تابش گسیل شده چقدر است؟

۳۲. وقتی تابشی که بر ماده‌ای فرود می‌آید باعث شود که آن ماده نوری با طول موج متفاوت با طول موج فرودی تابش کند، پدیده فلوئورسانس رخ می‌دهد. (مثلاً، در لامپهای معمولی فلوئورسانس نور فرا بنفش باعث گسیل نور مرئی می‌شود.) (الف) نشان دهید که پدیده فلوئورسانس را می‌توان بر حسب فوتونی با انرژی بالا که آنها را به يك حالت برانگیخته نسبتاً بالا برمی‌انگیزد تعبیر کرد. این اتمها از طریق حالت‌های برانگیخته میانی گذارهایی به سوی پایین انجام می‌دهند. (ب) قاعده استوکس^۱ در مورد

فلوئورسانس چنین بیان می‌کند که بسامد نور گسیل شده در فلوئورسانس از بسامد نور محرك تجاوز نمی‌کند. نشان دهید که قاعده استوکس وقتی که در مورد اتم‌ها به کار رود از نظریه کوانتومی پیروی می‌کند.

۳۳. انرژی کل يك اتم هیدروژن، در هر حالت کوانتیده‌ای، به‌طور بسیار دقیق تعریف می‌شود. با وجود این، بنا به مکانیک موجی، مکان الکترون دارای عدم قطعیت است شکل ۱۵.۶؛ در این صورت اندازه حرکت و انرژی جنبشی الکترون نیز دارای عدم قطعیت خواهند بود. عدم قطعیت در انرژی جنبشی الکترون در مقایسه با عدم قطعیت در انرژی پتانسیل دستگاه الکترون-پروتون چگونه باید باشد؟

۳۴. اگر تابع موج حالت پایه اتم هیدروژن، همان‌طور که در معادله (۲۲.۶) داده شده است به صورت $Ae^{-r/a}$ باشد، ضریب A را می‌توان چنان برگزید که احتمال کل آنکه الکترون در جایی وجود داشته باشد ۱۰۰ درصد شود. A را بر این اساس پیدا کنید.

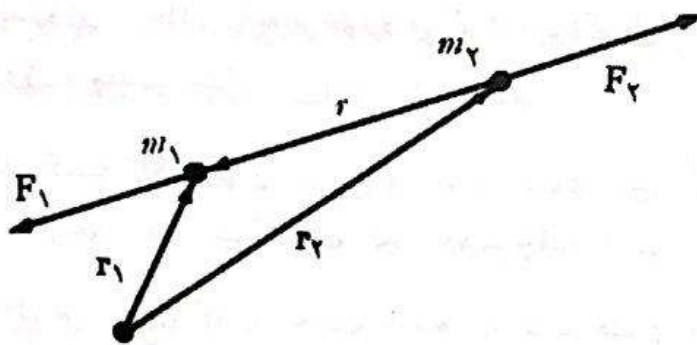
۳۵. چقدر محتملتر است که در حالت پایه هیدروژن، الکترون را در فاصله شعاع بوهرا از پروتون بیابیم تا در فاصله‌ای به اندازه دو برابر این شعاع؟

۳۶. انرژی اتم هیدروژن را می‌توان به‌طور تقریبی با استفاده از رابطه عدم قطعیت محاسبه کرد. برای اتم هیدروژنی که در حالت پایه قرار دارد، عدم قطعیت در فاصله الکترون از پروتون تقریباً برابر با يك شعاع بوهرا است (شکل ۱۵.۶)، در نتیجه، اندازه حرکت الکترون در حالت پایه لااقل به اندازه $\hbar/2a$ دارای عدم قطعیت است. قدر مطلق اندازه حرکت الکترون باید لااقل به بزرگی عدم قطعیت در اندازه حرکت آن باشد. بر این اساس عدم قطعیت در انرژی جنبشی الکترون را محاسبه و آن را با انرژی هیدروژن در حالت پایه مقایسه کنید.

۳۷. چهارمین پتانسیل یونش برلیوم چقدر است؟ یعنی، پس از آنکه از چهار الکترون آن سه الکترون اول ازجا کنده شدند چقدر انرژی برای ازجا کردن چهارمین الکترون مورد نیاز است؟

۳۸. (الف) نمودارهای تراز انرژی هیدروژن اتمی، هلیوم يك بار یونیده، لیتیم دو بار یونیده را با يك تراز انرژی صفر مشترك رسم کنید. (ب) کدام يك از حالت‌های تا $n=3$ از این سه دستگاه اتمی دارای انرژی یکسان‌اند (از تفاوت در جرم هسته‌ای چشم‌پوشی کنید)؟ (ج) کدام يك از بسامدهای فوتون تا حالت‌های $n=3$ در درآشامی و گسیل مشابه خواهند بود؟

۳۹. رابطه‌ای به طریق زیر برای جرم کاهش یافته به دست آورید. همان طور که در شکل مربوط به همین مسئله نشان داده شده است، دوزره به واسطه یک نیروی مرکزی با یکدیگر برهم کنش می کنند. (الف) محل و جرم ذره ۱ به ترتیب m_1 و r_1 است و نیروی وارد بر آن، از طرف ذره ۲، برابر $F_1(r/r)$ است که در آن $r = r_2 - r_1$ تغییر مکان ذره ۱ نسبت به ذره ۲ است. قانون دوم نیوتون را همانگونه که در مورد حرکت ذره ۱ به کار می رود، بر حسب m_1 ، r_1 و $F_1(r/r)$ به شکل برداری بنویسید. (ب) محل و جرم ذره ۲ به ترتیب عبارت اند از m_2 و r_2 ؛ قانون دوم نیوتون را، همانگونه که در مورد این ذره به کار می رود بر حسب m_2 ، r_2 و $F_2(r/r)$ بنویسید. (ج) این دو معادله را با هم ترکیب کنید تا رابطه $d^2r/dt^2 = (1/m_1 + 1/m_2)F_1(r/r)$ به دست آید، توجه کنید که فقط تغییر مکان r یک ذره نسبت به ذره دیگر در این رابطه وارد می شود. (د) نشان دهید که یک ذره هم ارز با جرم کاهش یافته μ را که به وسیله $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$ داده می شود می توان چنان فرض کرد که تحت تأثیر نیرویی حرکت می کند (این نیرو فقط به فاصله دو ذره‌ای که واقعاً برهم کنش می کنند بستگی دارد).



شکل مسئله ۳۹

۴۰. ذره‌ای بر روی یک نعلبکی بدون اصطکاک سر می خورد. (الف) اگر این ذره در آغاز از کناره نعلبکی به طریقی داخل شود که سرعت آن به سوی مرکز نعلبکی نباشد، نشان دهید که این ذره را هرگز نمی توان در مرکز نعلبکی یافت. (ب) با استفاده از نتیجه کلاسیکی قسمت (الف) نشان دهید که هر ذره‌ای که دارای یک اندازه حرکت زاویه‌ای متناهی نسبت به یک مرکز نیرو است باید دارای تابع موجی باشد که در محل مرکز نیرو صفر است. اگر ذره‌ای تحت تأثیر یک نیروی جاذبه مرکزی دارای اندازه حرکت زاویه‌ای صفر نسبت به مرکز نیرو باشد تابع موج متناظر باید در مرکز نیرو دارای

مقداری غیر از صفر باشد.

۴۱. نشان دهید که عدم توجه به اینکه هسته اتمی دارای جرم متناهی M است منجر به پیشگویی نظری خطوط طیفی می شود که انرژی آنها بسیار بزرگ و طول موج آنها بسیار کوچک است. این افزایش در انرژی و کاهش در طول موج هر دو به نسبت m/M خواهند بود، که در آن m جرم الکترون است.

۴۲. با فرض اینکه ثابت ریدبرگ برای يك هسته بی اندازه سنگین $10^{-3} \text{Å}^{-1} \times 10997373$ است نشان دهید که این ثابت برای هیدروژن معمولی (به جرم اتمی ۱) برابر $10^{-3} \text{Å}^{-1} \times 1099678$ است (جرم پروتون 1836 برابر جرم الکترون است).

۴۳. ثابتهای ریدبرگ را برای هیدروژن معمولی، ^1H با جرم هسته ای 10007276u ، و هیدروژن سنگین، ^2H با جرم هسته ای 201355u محاسبه کنید و با استفاده از آن مقادیر طول موجهای خطوط H_α مربوط به آنها را حساب کنید (اختلاف مشاهده شده در طول موجها 179Å است).

۴۴. انرژی جنبشی کمینه الکترونها برای تولید (الف) گسیل خط H_α ، وقتی الکترونها به اتمهای هیدروژن در حالت پایه برخورد می کنند (ب) گسیل تمام خطوط موجود از طیف هیدروژن، چقدر است؟

۴۵. انرژی جنبشی کمینه الکترونهايي که می توانند با اتمهای لیتیم دوبار یونیده (Li^{2+}) در حالت پایه برخورد های غیر کشان انجام دهند چقدر است؟

۴۶. (الف) دو اتم هیدروژن که در حالت پایه هستند با سرعت های مساوی با هم برخورد رودرو می کنند؛ انرژی جنبشی کمینه هراتم که برای بالابردن اتم دیگر به اولین حالت برانگیخته لازم است (بر حسب انرژی یونس E_I اتم هیدروژن) چقدر است؟ (ب) يك اتم هیدروژن در حالت پایه با اتم هیدروژن دیگری که آن نیز در حالت پایه ولی در آغاز به حال سکون است برخورد می کند، انرژی جنبشی کمینه لازم برای بالابردن یکی از اتمها به اولین حالت برانگیخته چقدر است؟

۴۷. هیدروژن اتمی در حالت پایه بمباران می شود و خطوط طیفی با طول موجهای کوتاه خط سوم سری لیمان گسیل می کنند. (الف) انرژی جنبشی کمینه الکترونهايي كه انرژی بمباران کننده که این گسیل را تولید می کنند چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی کمینه فوتونهايي بمباران کننده که این گسیل را تولید می کنند چقدر است؟ (ج) انرژی جنبشی

کمینه اتمهای هیدروژن در حالت پایه که در اثر بمباران این گسیل را تولید می کنند چقدر است؟

۴۸. دمای کمینه تقریبی گاز هیدروژن اتمی که اتمها را آنچنان یونیده می کند که به پروتونها و الکترونها شکسته شوند (پلاسما) چقدر است؟

۴۹. پدیده های شفق شمالی (نورهای شمالی) و شفق جنوبی (نورهای جنوبی)، نمایشهای درخشان آسمان در نزدیك قطب زمین، وقتی تولید می شوند که در ۱۰۰ کیلومتری یا بیشتر بالای جوزمین ذرات بارداری که به وسیله خورشید به خارج پرتاب می شوند با اکسیژن و ازت برخورد کنند و بدان وسیله برانگیختن و یونیدن این اتمها را باعث شوند. (الف) می دانیم که این ذرات باردار فاصله $10^{11} \times 10^5$ متر، از خورشید تا زمین را، در حدود $24h$ طی می کنند؛ با فرض اینکه این ذرات پروتون باشند انرژی جنبشی متوسط آنها چقدر است؟ (ب) چرا این ذرات باردار فقط در مجاورت قطبهای زمین یونش محسوسی در اکسیژن و ازت تولید می کنند؟

۵۰. مشاهده طیف نمایی نشان می دهد که وقتی بخار سدیم با الکترونهایی بمباران شود که از حال سکون با اختلاف پتانسیل $2.11V$ شتاب گرفته اند، تابشی با طول موج $5893\text{\AA}$ گسیل می شود (خطوط مشهور به D سدیم که به این طریق گسیل می شوند ناشی از گذارهای بین حالت پایه و اولین حالت برانگیخته هستند). مقدار h/e را از این داده ها محاسبه کنید.

کتابشناسی

1. Boorse, H.A., and L. Motz, eds: *The World of the Atom*. New-York: Basic Books, Inc., 1966.
این دو جلد شامل بسیاری مقالات اولیه درباره کشفیات اساسی در فیزیک اتمی و هسته ای، همراه با شرح حال زندگی دانشمندان است. فصلهای ۴۳ و ۴۴ درباره آزمایشهای پراکندگی رادرفورد، فصل ۴۵ در مورد نظریه هیدروژنی بوهر و فصل ۴۶ درباره آزمایش فرانک-هرتز بحث می کند.
2. Feynman, R. P., R. L. Leighton, and M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics* (vol. 3, Quantum Mechanics), Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.
فصل ۱۹ این کتاب درباره جواب مکانیک موجی معادله شرودینگر برای هیدروژن بحث

می‌کند. این کتاب به‌طور کلی یک دوره جالب از مکانیک کوانتومی مقدماتی است.

3. Friedman, F. L., and L. Sartori: *Origins of Quantum Physics* (vol. I, The Classical Atom). Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1955.

فصل سوم این کتاب که مربوط به اجزای اصلی اتم و مدل‌های اتمی است درباره تکامل مدل‌های اتمی تامسون و رادرفورد به‌طور مفصل بحث می‌کند.

4. Heitler, W.: *Elementary Wave Mechanics*. Oxford. The Clarendon Press, 1946.

فصل‌های ۲ و ۳ این کتاب کوچک به بررسی ساده مکانیک موجی اتم هیدروژن (که در بخش ۷.۶ این کتاب روی آن بحث شد) می‌پردازند.