1601

دعای پیش از مطالعه

اَللهُمَ اَخرِجنی مِن ظُلُماتِ الوَهمِ وَاَکرِمنی بِنُورِ الفَهمِ
اَللهُمَ افتِح عَلَینا اَبوابَ رَحمتَکَ وَ انشُر عَلَینا خَزائِنِ عُلُومِکَ
بِرَحمَتِکَ یا اَرحَمَ الرّاحِمینَ

پروردگارا، خارج کن مرا از تاریکی‌های فکر و گرامی بدار به نور فهم
پروردگارا، بگشای بر ما درهای رحمتت را و بگستران گنج‌های دانشت را به امید رحمت
تو ای مهربان‌ترین مهربانان

آناهید گستر خلیلی

AGK

Anahid Gostar Khalili

درسنامه روش‌های آماری

(رگرسیون، روش‌های ناپارامتری، نمونه‌گیری و طرح آزمایشات)

ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار زیستی

تألیف و گردآوری:

میثم اسلامی

سرشناسه	: اسلامی، میثم، ۱۳۶۹-
عنوان و نام پدیدآور	: AGK درسنامه روش‌های آماری (رگرسیون، روش‌های ناپارامتری، نمونه‌گیری و طرح آزمایشات): ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار زیستی [کتاب] / تألیف و گردآوری میثم اسلامی.
مشخصات نشر	: تهران: آناهید گستر خلیلی، ۱۴۰۳.
مشخصات ظاهری	: ۱۴۴ص.؛ مصور، جدول؛ ۲۲ × ۲۹ س‌م.
شابک	: 978-622-4907-42-4
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
موضوع	: زیست‌سنجی -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی) Biometry -- Study and teaching -- Examinations, questions, ect (Higher) دانشگاه‌ها و مدارس عالی -- آزمون‌ها Universities and colleges -- Examinations
رده‌بندی کنگره	: QH۳۲۳/۵
رده‌بندی دیویی	: ۵۷۴/۱۵۱۹۵
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۸۶۰۹۰۶

نام: AGK درسنامه روش‌های آماری

(رگرسیون، روش‌های ناپارامتری، نمونه‌گیری و طرح آزمایشات)

(ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار زیستی)

تألیف و گردآوری: میثم اسلامی

ناشر: آناهیـد گستر خلیلـی

نوبت و سال چاپ: اول. ۱۴۰۳

شمارگان: ۱۰۰۰

چاپ و صحافی: گیلان

مدیر تولید: امیرحسین خلیلی

مدیر فنی و هنری: مریم آرده

تایپ و صفحه‌آرایی: آرزو راضی

بهاء: ۲۵۰۰۰۰ تومان

آموزشگاه/ فروشگاه: ۰۲۱۶۶۵۶۸۶۲۱

مرکز پخش: ضلع جنوب‌غربی میدان انقلاب . جنب بانک پارسیان . مجتمع تجاری پارس . طبقه اول

مدیر فروش: ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ (ارتباط از طریق پیامک)

agkpublisher@gmail.com **www.agkins.com**

طلیعه سخن مدیر تولید:

سپردن کار به اهلش نشانه‌ی خردمندی است.

برای تولید بسته‌های آموزشی تمام تلاش خود را به کار گرفته‌ایم تا محصولی شایسته را تقدیم شما عزیزان نماییم.

مجموعه‌ای که پیش روی شماست براساس معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور و به قلم مجرب‌ترین اساتید تألیف شده است و مطالعه آن موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه شما خواهد شد.

ارائه بالاترین آمار قبولی در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری در دهه اخیر بیان‌گر توانایی این مجموعه در راستای اهداف آموزشی خود می‌باشد. اینک با اتکا به تجربه‌ای ۱۷ ساله می‌توانیم ادعا کنیم که مجموعه حاضر، بی‌شک از جمله کامل‌ترین و به‌روزترین بسته‌های آموزشی موجود در عرصه کنکور می‌باشد.

✍ **برخی از ویژگی‌های بسته‌های آموزشی:**

- منطبق با معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور
- گردآوری و تألیف توسط مجرب‌ترین اساتید کنکور
- تدریس مطالب از سطح پایه تا پیشرفته به بیان ساده و روان
- انتقال بهتر مفاهیم با استفاده از شکل، جدول و نمودار
- تألیف مبتنی بر نحوه‌ی طراحی سوالات کنکور
- مطالعه یک منبع منسجم به‌جای مطالعه چندین منبع مختلف
- منبعی خودآموز و بدون نیاز به مدرس

اینک علاوه بر مطالعه بسته‌های آموزشی استفاده از خدمات و محصولات زیر را به عنوان ضمانتی برای قبولی به شما داوطلبان عزیز توصیه می‌کنم؛

✍ **آزمون‌های آزمایشی: خوش بود گر محک تجربه آید به میان**

داوطلب شجاع کیست؟ داوطلبی است که خود را مورد سنجش (خود را با خود) و ارزیابی (خود را با دیگران) قرار دهد تا پیش از کنکور به نقاط ضعف خود پی ببرد و آن‌ها را تقویت نماید. آزمون‌های آزمایشی دارای یک برنامه‌ریزی منسجم است و به شما اولتیماتوم می‌دهد. یعنی شما باید در یک زمان معین مطالب معینی را مطالعه نمایید.

آزمون‌های آزمایشی مجموعه دارای سوالات استاندارد، پاسخنامه تشریحی و کارنامه تحلیلی می‌باشد. صادقانه شرکت در آزمون‌های آزمایشی را به شما عزیزان توصیه می‌کنم.

✍ **مشاوره تخصصی و برنامه‌ریزی: زیر نظر حرفه‌ای‌ها درس بخوانید ...**

در صورتی که نمی‌توانید با توجه به زمان آزادتان برنامه‌ی مطالعاتی استانداردی را برای خود تدوین کنید حتماً از افراد متخصص کمک بخواهید. افرادی که تجربیات خود را صادقانه در اختیار شما قرار می‌دهند و برنامه‌ریزی مناسب با شرایط شما را انجام می‌دهند.

✍ **کتاب تست:**

کوچک‌ترین واحد یادگیری در کنکور، تست است.

شما می‌توانید برای این‌که سطح یادگیری خود را پس از مطالعه بسنجید از کتاب‌های تست مجموعه (تست کنکور) و ماطراحان (تست‌های تألیفی) استفاده کنید. این کتاب‌ها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده‌اند و می‌توانند نحوه‌ی طرح سوالات کنکور و سطح آن‌ها را به‌صورت واضح به شما نشان دهند.

✍ **درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم مناسب‌ترین منابع برای دوران مرور و جمع‌بندی:**

بیش‌تر داوطلبان حین مطالعه نگران خلاصه‌نویسی و مرور آموخته‌های خود هستند و برای خلاصه‌نویسی زمان زیادی را صرف می‌کنند. اینک به شما مژده می‌دهیم که این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است و دیگر با استفاده از درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم نیاز به خلاصه‌نویسی ندارید.

شما می‌توانید نظرات، انتقادات و پیشنهادهای سازنده خود را در مورد بسته‌های آموزشی به شماره‌تلفن همراه ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ فقط و فقط پیامک نمایید.

مشاور و مدیر تولید

امیرحسین خلیلی

طلیعه سخن مؤلف:

مدت کوتاهی است که خداوند نعمت زندگی را به بنده عطا فرموده، ولی همین مدت کم ولی طولانی! کـه همچـون تُنـگ کوچک ولی عمیقی بود، دریافتم که خوشبختی یعنی واقف بودن به این که هرچه داریم از رحمـت خداسـت و هـر آن‌چـه نداریم از حکمت او، احساس خوشبختی در رسیدن به خواسته‌ها نبود، بلکه لذت بردن از داشته‌ها بود و حیـف کـه همـین چند صباح را در غفلت گذراندم.

همه این‌ها را گفتم تا بدانید همین که به این مرحله و این جایگاه رسیده‌اید یعنی قدم بزرگـی در زنـدگی برداشـته‌ایـد. از همین داشته‌ها لذت ببرید و با پشتوانه این حس خوشبختی و آرامش، به مسیر خود ادامه دهید. در ایـن مجموعـه شـاهد چکیده‌ای خواهید بود از تمام کتب منبع، کتب مرتبط و هم‌چنین تألیفات اینجانب که شـامل درسـنامه جـامع روش‌هـای آماری، آموزش EasyFit و ریاضی برای علوم‌پزشکی است.

با بنده در ارتباط باشید و برای مطالعه درس روش‌های آماری، برنامه‌ریزی صحیح و علمی به‌کار گیرید. اگر بـیش از چهـار ماه برای مطالعه این درسنامه فرصت دارید، اصلا شتاب‌زده عمل نکنید، ابتدا مباحث هر جلسـه (از پـیش تعیـین شـده) را مرور سریع کنید و پس از مطالعه، نگاهی به منابع اصلی داشته باشید و در انتها برای تسـلط کـافی بـه سـراغ تسـت‌هـای کنکور یا مثال‌های درسنامه بروید.

میثم اسلامی

Meysam.islami@gmail.com

فهرست مطالب

فصل و عنوان **صفحه**

بخش اول

رگرسیون

آتامید کستر خلیلی

راهنمای مطالعه این کتاب

در ابتدای کار کاملاً صریح اعلام می‌کنیم این درسنامه حاصل تجربه و به زبان شخص مؤلف نگارش شده است ولی بدیهی است که سؤالات چند گزینه‌ای، فرمول‌ها، قضایا و مفاهیم پایه از کتاب‌های منبع گردآوری شده است و تنها هنر مؤلف بیان ساده‌تر و طبقه‌بندی شده‌ی مطالب است.

در هریک از بخش‌ها ابتدا درسنامه‌ای جامع و کافی بیان گردیده و انتظار می‌رود پس از مطالعه و پاسخ به سؤالات هر بخش، توانایی کسب نمره لازم را داشته باشید.

فصل

۱

رگرسیون خطی ساده

در کتاب بانک سوالات درسنامه جامع آمار زیستی و کتاب آمار ناپارامتری و نمونه‌گیری، تألیفات اینجانب از انتشارات مؤسسه دکتر خلیلی به‌طور مفصل به بیان ضریب زیبای همبستگی پرداختیم و باتوجه به جنس هریک از متغیرها به نحوه کاربست ضرایب همبستگی پیرسون، اسپیرمن و کندال اشاره شد. ضریب همبستگی بین دو متغیر همانند قد و وزن افراد تنها به وجود و عدم وجود رابطه می‌پردازد و نمی‌توان هریک را از روی دیگری پیش‌بینی کرد.

در این درس با استفاده از فنون ریاضی یک رابطه خطی بین دو متغیر را به یک مدل ریاضی تبدیل می‌کنیم و با استفاده از این مدل که سعی داریم بهترین مدل باشد، هریک از متغیرها را با استفاده از دیگری تقریب خواهیم زد.

Y متغیر وابسته ⟵ متغیری است که قصد داریم برای آن پیش‌بینی به‌دست بیاوریم و اثر متغیر مستقل را بر روی آن می‌سنجیم.

x متغیر مستقل ⟵ متغیری که اثر آن را بر روی متغیر وابسته می‌سنجیم و با استفاده از آن متغیر وابسته را پیش‌بینی می‌کنیم.

مثال ۱: برای پیش‌بینی میزان فروش فروشندگان براساس میزان سابقه فروش، ۱۵ فروشنده را انتخاب می‌کنیم.

(x_i, Y_i) = (میزان فروش فرم i-ام (میلیون در ماه) و میزان سابقه فرد i-ام (ماه)) ⟵ فرد i-ام

فرد اول ⟵ (x_1, Y_1) ⟵ $(۱۵, ۲/۱)$

فرد دوم ⟵ (x_2, Y_2) ⟵ $(۱۵, ۱/۸)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

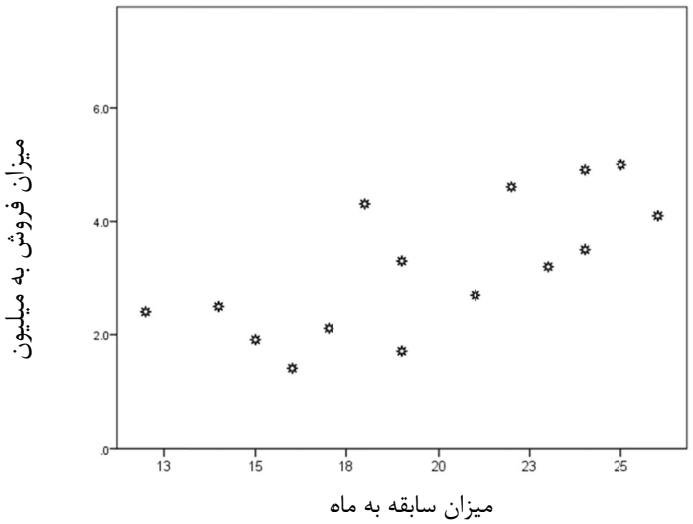
فرد پانزدهم ⟵ (x_{15}, Y_{15}) ⟵ $(۵۰, ۵/۵)$

تمامی داده‌ها در جدول زیر قابل مشاهده است:

جدول ۱-۱

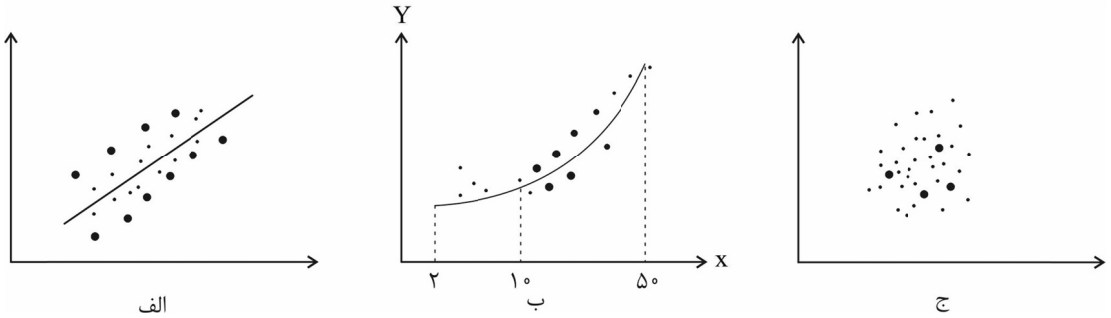
Sales	1.4	1.7	1.9	2.1	2.4	2.5	2.7	3.2	3.3	3.5	4.1	4.3	4.6	4.9	5.0
Record	16	19	15	17	12	14	21	23	19	24	26	18	22	24	25

نمودار پراکنش بین میزان سابقه (Record) و میزان فروش (Sales) افراد به‌صورت زیر است:



نگاره ۱-۱

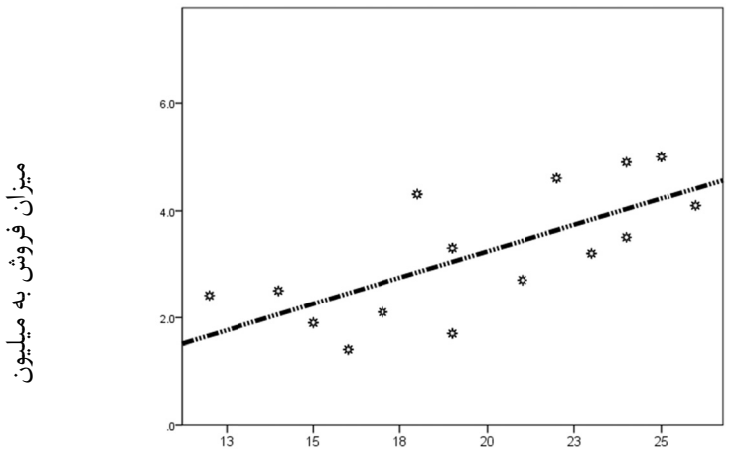
در حالت کلی روابط زیادی بین متغیرها می‌تواند برقرار باشد، به سه نمودار زیر دقت کنید.



نگاره ۱-۲

برای انجام تجزیه و تحلیل رگرسیونی بایستی رابطه بین دو متغیر همچون نمودار «الف» در نگاره ۱-۲، خطی باشد. البته در نمودار «ب» می‌توان برای $۲ \leq x \leq ۱۰$، از فنون رگرسیونی استفاده شود زیرا رابطه‌ی خط مستقیم به‌دست آمده از مشاهدات وابسته به این فاصله ممکن است یک تابع کاملاً مناسب برای این فاصله باشد چون رابطه دو متغیر در این فاصله خطی است اما برای $۲ \leq x \leq ۵۰$ و سایر جاها ممکن است تابع نباشد.

با توجه به نگاره ۱-۱ چون رابطه دو متغیر خطی است می‌توان یک خط از بین نقاط عبور داد و معادله آن را به‌صورت $Y = f(x)$ در نظر گرفت.



نگاره ۱-۳

فصل

۲

رگرسیون چندگانه

ابتدا به مفاهیم زیر دقت کنید:

۱. رگرسیون خطی ساده: اگر یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته داشته باشیم.

۲. رگرسیون خطی چندگانه: اگر چند متغیر مستقل و یک متغیر وابسته داشته باشیم.

۳. رگرسیون خطی چند متغیره: اگر چند متغیر مستقل و چند متغیر وابسته داشته باشیم.

رگرسیون چندگانه[1]

پس در صورتی‌که با یک متغیر وابسته و چند متغیر مستقل سروکار داشته باشیم آن‌گاه برای برازش مدل، بایستی مدل رگرسیون چندگانه را به‌کار گیریم.

اگر k متغیر مستقل داشته باشیم آن‌گاه در رگرسیون چندگانه مدل ما به شرح زیر است:

$$Y=\beta_{۱}+\beta_{۲}X_{۱}+\beta_{۳}X_{۲}+...+\beta_{p}X_{k}+\varepsilon$$

در این حالت که k تعداد متغیر مستقل و p پارامتر داریم که ضرایب رگرسیونی هستند و رابطه $p=k+۱$ بین آن‌ها برقرار است. برای پیشگویی می‌توان همچون حالتی که با یک متغیر مستقل سروکار داریم عمل نمود، یعنی:

$$E(\hat{Y}\Big|_{X_{۱}=x_{۱},...,X_{k}=x_{k}})=b_{۱}\times ۱+b_{۲}\times x_{۱}+b_{۳}\times x_{۲}+...+b_{p}\times k_{k}$$

که در آن $\hat{y}$ پیش‌بینی مقدار y است. اگر مشاهده اول برابر واحد فرض شود، مقدار $b_{۱}$ همان مقدار ثابت (در حالت خطی برابر عرض از مبدأ) است. اگر از هر متغیر مستقل n مشاهده داشته باشیم، معادله رگرسیون را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_{n\times ۱}=X_{n\times p}\beta_{p\times ۱}+\varepsilon_{n\times ۱}$$

ضرایب رگرسیونی به‌صورت زیر برآورد می‌شوند:

$$b=\hat{\beta}=\left(X^{T}X\right)^{-۱}\left(X^{T}Y\right)$$

که در آن X^{T} ترانهاده ماتریس X است و $\left(X^{T}X\right)^{-۱}$ معکوس ماتریس $\left(X^{T}X\right)$ است.

---

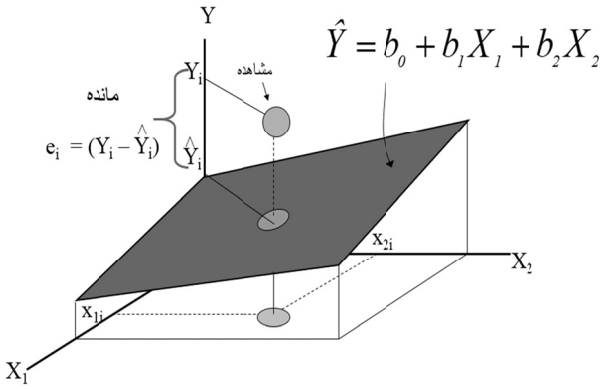
1. Multiple Regression

جدول تحلیل واریانس در این مدل به‌صورت زیر است:

جدول تحلیل واریانس

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	آماره F
رگرسیون (انحراف تبیین نشده)	SSR	$p-1$	MSR	$\frac{MSR}{MSE}$
مانده‌ها (انحراف تبیین شده)	SSE	$n-p$	MSE	
جمع کل	SST	$n-1$		

که در آن مجموع تغییرات با همان مفهوم قبل هستند، با این تفاوت که به‌جای یک متغیر، با چند متغیر مستقل سروکار داریم.



$SST =$ کل تغییرات در y یا مجموع مجذورات کل

$$SST = \underset{\sim}{Y}^T\left(\underset{\sim}{1} - \frac{1}{n}\underset{\sim}{1}^T\underset{\sim}{1}\right)\underset{\sim}{Y}$$

$SSE =$ منبع تغییرات ناشی از خطا

$$SSE = \underset{\sim}{Y}^T\left(\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{X}^T)^{-1}\underset{\sim}{X}^T\right)\underset{\sim}{Y}$$

$SSR =$ تغییرات تبیین شده

$$SSR = SST - SSE$$

نحوه‌ی تصمیم‌گیری همچون حالت قبلی است. اگر $F > F_{1-\alpha,p-1,n-p}$ باشد آن‌گاه فرض صفر (یعنی عدم رابطه خطی بین تمامی متغیرها) در سطح معناداری α پذیرفته نمی‌گردد.

خطای معیار برآورد (خطای استاندارد برآورد)

همان‌طور که به یاد دارید واریانس بیانگر میزان پراکندگی در داده‌ها می‌باشد. پس اگر واریانس خطای پیش‌بینی کم‌تر باشد آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که مدل ما دقت بالایی در پیش‌بینی دارد. واریانس خطای پیش‌بینی به‌صورت:

$$MSE = \frac{SSE}{n-p} = \frac{\underset{\sim}{Y}^T\left(\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{X}(\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{X}^T)^{-1}\underset{\sim}{X}^T\right)\underset{\sim}{Y}}{n-p}$$

فاصله اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای پیش‌بینی Y در یک نقطه جدید X_h

$$\left(\hat{Y} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{MSE\times\left(X_h^T(X^TX)^{-1}X_h + 1\right)}, \hat{Y} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-2}\sqrt{MSE\times\left(X_h^T(X^TX)^{-1}X_h + 1\right)}\right)$$

فصل ۳

بررسی مانده‌ها

همان‌طورکه به یاد دارید برای انجام آزمون‌های پارامتری همچون تی مستقل بایستی برخی فروض ازجمله کمی بودن داده‌ها و نرمال بودن توزیع آن‌ها برقرار باشد و در غیر این‌صورت آزمون‌های مذکور و در حالت کلی استنباط‌های آماری از درجه اعتبار ساقط هستند.

اعتبار مدل و میزان شایستگی آن را به‌وسیله مانده‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم. در صورتی‌که n زوج مشاهده به‌صورت (x_i, Y_i) داشته باشیم آن‌گاه n مانده به‌صورت زیر داریم:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad , \qquad i = ۱,۲,...,n$$

Y_i : مقدار مشاهده شده

$\hat{Y}_i$: مقدار پیش بینی شده برای Y_i براساس مدل

یک مدل رگرسیون معتبر است هرگاه:

۱) خطاها مستقل از یکدیگر باشند.

۲) خطاها دارای میانگین صفر و واریانس ثابت $\sigma^۲$ باشند.

۳) خطاها دارای توزیع نرمال باشند.

برای بررسی مانده‌ها روش های متعددی وجود دارد که چند مورد را بررسی خواهیم کرد:

A) با استفاده از چند نکته تحلیلی

- **نکته ۳-۱:** فرض سوم یا نرمال بودن خطاها برای آزمون‌های F و βها موردنیاز است.
- **نکته ۳-۲:** اگر مدل دارای پارامتر $\beta_۰$ باشد آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{n} e_i = ۰$ است زیرا:

$$\Sigma \hat{Y}_i = \Sigma Y_i \Rightarrow \Sigma e_i = \Sigma (Y_i - \hat{Y}_i) = \Sigma Y_i - \Sigma \hat{Y}_i = ۰$$

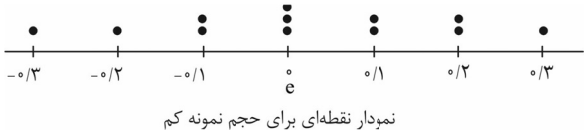
- **نکته ۳-۳:** در رگرسیون چندگانه بردارهای e و $\hat{Y}$ ناهمبسته هستند یعنی برای هر i و j $(i \neq j)$ داریم:

$$Cov(e_i, \hat{Y}_j) = ۰$$

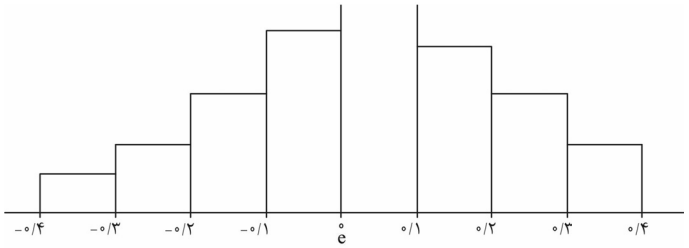
B) نمودار نقطه‌ای

یکی دیگر از راه‌های بررسی مانده‌ها، نمودار نقطه‌ای و در حالتی که تعداد مشاهدات یا به‌عبارتی تعداد زوج داده‌ها زیاد باشد، نمودار هیستوگرام یا بافت نگار است.

اگر مدل برازش داده شده یک مدل رگرسیونی مناسب باشد آن‌گاه نمودار نقطه‌ای مانده‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین صفر است که نباید در سمت چپ و راست نمودار نقاط زیادی یا به‌عبارتی داده دور افتاده مشاهده شود. نمودار نقطه‌ای زیر، بیانگر مناسب بودن مدل مرتبط با آن است:



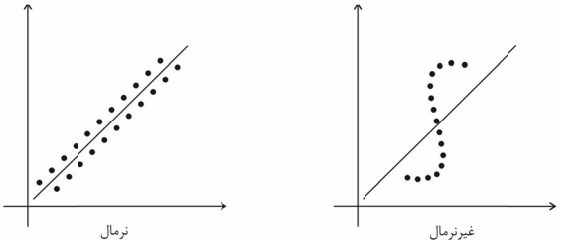
نمودار نقطه‌ای برای حجم نمونه کم



بافت نگار برای حجم نمونه زیاد

C) کاغذ احتمال

می‌توان روی کاغذهای احتمال معمولی، نمودار نرمال یا نمودار نیم نرمال از مانده‌ها را رسم کرد. در صورتی‌که نقاط، بیش‌تر حول خط $Y=x$ باشند آن‌گاه مانده‌ها دارای توزیع نرمال هستند. به نگاره‌های زیر دقت کنید.



D) آزمون فرض

یکی از فروض اساسی در رگرسیون آن است که $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ باشد و طبق روش های آمار ریاضی می‌توان نشان داد که $\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \sim N(0,1)$ و اگر مدل رگرسیونی مناسب و صحیح باشد آن‌گاه میانگین توان دوم خطاها یا به‌عبارتی MSE برای σ^2 ناریب است:

$$E(MSE) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(e_i-\bar{e})^2}{n-p}\right) \underset{\sum e_i=0}{=\!=} E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-p}\right) = \sigma^2$$

اما در صورتی این برآوردگر ناریب است که $\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \sim N(0,1)$ باشد. پس باید آزمون فرض روبه‌رو انجام شود.

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\varepsilon_i}{\sigma} \sim N(0,1) \\ H_1 : \frac{\varepsilon_i}{\sigma} \nsim N(0,1) \end{cases}$$

برای انجام این آزمون باید مقادیر $\frac{e_i}{\sqrt{MSE}}$ را برای $i=1,2,...,n$ محاسبه کرد و برای مقایر حاصل، نمودار نقطه‌ای ترسیم کرد. در صورتی‌که ۹۵٪ از نقاط در فاصله (۱/۹۶+ و ۱/۹۶-) قرار بگیرد فرض صفر پذیرفته می‌شود.

توجه: معمولا مانده‌ها مستقل نیستند و دارای واریانس مشترک نیستند و به ماتریس X وابسته هستند و در نتیجه استفاده از این روش ممکن است گمراه کننده بوده و روش کاملاً دقیقی نیست.

فصل

۴

مدل‌های پیچیده

مدل‌های به‌ظاهر غیرخطی

در ادامه برخی مدل‌های مهم که به‌ظاهر غیرخطی هستند ولی ذاتاً خطی هستند را بیان می‌کنیم که همیشه مورد توجه طراح محترم سؤالات بوده و هست و خواهد بود و آن‌ها را با یک تبدیل مناسب می‌توان به ذات خود برگرداند.

الف) مدل ضربی $\xleftarrow{\text{تبدیل مناسب}}$ **لگاریتم**

$$\underbrace{LnY}=\underbrace{Ln\alpha}+\underbrace{\beta Ln x_1}+\underbrace{\gamma Ln x_2}+\underbrace{\delta Ln x_3}+Ln\varepsilon \quad \xleftarrow{Ln} \quad Y=\alpha x_1^{\beta}x_2^{\gamma}x_3^{\delta}\varepsilon$$

$$W = \beta_0 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 + \varepsilon^*$$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta$: پارامترهای نامعلوم ε : یک متغیر تصادفی

$$\varepsilon^* = \ln\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$$

ب) مدل نمایی $\xleftarrow{\text{تبدیل مناسب}}$ **لگاریتم**

$$\underset{\downarrow}{LnY} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + Ln\varepsilon \xleftarrow{Ln} Y = e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2}\cdot\varepsilon$$
$$W = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon^*$$

ج) مدل معکوس $\xleftarrow{\text{تبدیل مناسب}}$ **معکوس طرفین**

$$\underset{\downarrow}{\frac{1}{Y}} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon \longleftarrow Y = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon}$$
$$W = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon^*$$

د) مدل نمایی و پیچیده‌تر $\xleftarrow{\text{تبدیل مناسب}}$ **معکوس طرفین و سپس لگاریتم**

$$Y=\frac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\varepsilon}} \longleftarrow Y=1+e^{\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\varepsilon} \longleftarrow \ln\left(\frac{1}{Y}-1\right)=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\varepsilon^-$$

$$\downarrow$$

$$W=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\varepsilon^*$$

نکته: توجه شود که برای بررسی مانده‌ها بایستی متغیر تبدیل یافته را بررسی کنیم و عبارت خطا یعنی ε^* دارای توزیع $N(\underset{\sim}{0},\sigma^2I_n)$ خواهد بود و ضرایب از روش کم‌ترین توان‌های دوم خطا برآورده می‌شود.

متغیرهای ظاهری در رگرسیون چندگانه

در مدل‌هایی که تا به حال بیان شده، متغیرهای مستقل مقادیر مختلفی را می‌تواند به خود بگیرد و به‌عبارتی فضای نمونه‌ای آن‌ها پیوسته است. اما گاهی متغیر مستقل به‌صورت گسسته است و تنها چند عضو محدود را در فضای نمونه‌ای خود دارد. تصور کنید در مثال وزن و قد افراد، بخواهیم وضعیت ابتلا به فشارخون را به‌عنوان یک متغیر مستقل وارد مدل کنیم. بدیهی است که این متغیر تنها دو مقدار به خود می‌گیرد.

$$Z=\begin{cases}1 & \text{مبتلا به فشار خون}\\ 0 & \text{عدم ابتلا به فشار خون}\end{cases}$$

و مدل رگرسیونی به‌صورت $Y=\beta_0+x\beta_1+z\beta_2+\varepsilon$ خواهد بود.

Y: مثلاً قد x: مثلاً وزن z: وضعیت فشارخون

اما گاهی متغیر ظاهری بیش از دو انتخاب را در بردارد. به‌عنوان مثال بخواهیم رنگ چشم افراد را هم به‌صورت متغیر ظاهری به مدل اضافه کنیم و بدانیم همه افراد دارای چشم‌هایی با رنگ مشکی، قهوه‌ای و سبز هستند در این صورت سه متغیر ظاهری به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$Z_1=\begin{cases}1 & \text{رنگ چشم فرد مشکی است}\\ 0 & \text{رنگ چشم فرد مشکی نیست}\end{cases}$$

$$Z_2=\begin{cases}1 & \text{رنگ چشم فرد قهوه‌ای است}\\ 0 & \text{رنگ چشم فرد قهوه‌ای نیست}\end{cases}$$

$$Z_3=\begin{cases}1 & \text{رنگ چشم فرد آبی است}\\ 0 & \text{رنگ چشم فرد آبی نیست}\end{cases}$$

اما نیاز نیست هر سه متغیر را وارد مدل کنیم زیرا هرگاه $Z_1=0$ و $Z_2=0$ آن‌گاه بدون شک $Z_3=1$ خواهد بود، به‌عبارتی متغیر Z_3 به مقدار Z_1 و Z_2 وابسته است و نیازی نیست Z_3 را بررسی کنیم و مدل را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Y=\beta_0+x\beta_1+Z_1\beta_2+Z_2\beta_3$$

پس می‌توان به یک نکته تپل دست یافت که برای r سطح یا متغیر ظاهری، بایستی $(r-1)$ متغیر ظاهری وارد مدل کنیم البته اگر $r=1$ باشد همان یک متغیر را وارد می‌کنیم.

گزینش بهترین معادله رگرسیون

در حالت کلی هرچه متغیرهای مستقل بیش‌تری در مدل حضور داشته باشد، دقت پیشگویی مدل بالا خواهد بود ولی طبیعتاً به هزینه و پیچیدگی مدل افزوده خواهد شد.

می‌توان تمام مدل‌های رگرسیونی ممکن را برازش داد، که اگر r متغیر مستقل داشته باشیم تعداد کل مدل‌ها 2^r خواهد بود، و از طریق ملاک‌های زیر، مدل‌ها را ارزیابی نمود و بهترین را انتخاب کرد:

الف) ضریب تعیین یا R_P^2 (که $P=k+1$ و k متغیر مستقل است)

ب) MSEP یا R_P^2

ج) آماره مالوس یا C_P

بخش دوم

روش‌های ناپارامتری

آتامید کستر خلیلی

فصل

۱

آماره‌های ترتیبی

در این فصل به مفهوم آماره ترتیبی و کاربست آن می‌پردازیم. همان‌طور که می‌دانید متغیر تصادفی با حرف بزرگ و معمولا با X نشان می‌دهیم و نمونه تصادفی را به‌صورت $X_1,...,X_n$ و مقدار مشاهده شده آن‌ها را به‌صورت $x_1,...,x_n$ نشان خواهیم داد.

می‌دانید که هر صفت یا ویژگی مورد بررسی را با متغیر تصادفی X نشان می‌دهیم، در حالت پارامتریک هر ویژگی در جامعه یا X، از یک توزیع مانند $F(x)$ با تابع چگالی $f(x)$ است. متغیرهای تصادفی $X_1,X_2,...,X_n$ را یک نمونه تصادفی از توزیع $F(x)$ می‌نامند، هرگاه این متغیرها دارای توزیع $F(x)$ باشند و حتماً مستقل باشند.

هر تابعی از نمونه تصادفی را که در آن پارامتر نباشد آماره گویند. البته در اکثر کتاب‌ها در تعریف آماره از اصطلاح «پارامتر مجهول» استفاده می‌کنند که این اصطلاح اشتباه است زیرا در تعریف پارامتر داریم: هر ویژگی مجهول از جامعه را پارامتر گوییم، پس پارامتر به نوبه خود مجهول است. به‌عنوان مثال $\overline{X}$ یک آماره بوده و برآوردگر میانگین جامعه است ولی $\overline{x}+\mu$ آماره نیست چون پارامتر μ در آن وجود دارد.

آماره‌های ترتیبی

دنباله نمونه تصادفی را به این دلیل با حروف بزرگ به‌صورت $X_1,X_2,...,X_n$ نشان می‌دادیم که مجهول بودند. حال اگر آن‌ها را به‌صورت غیرنزولی مرتب کنیم و به‌صورت:

$$Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n$$

یا

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$$

نشان دهیم آن‌گاه Y_1 یا $X_{(1)}$ کوچک‌ترین و Y_n یا $X_{(n)}$ بزرگ‌ترین آماره مرتب هستند. به‌عنوان مثال اگر یک تاس را ۵ بار پرتاب کنیم و یافته‌های ما $x_1=6, x_2=3, x_3=4, x_4=5, x_5=2$ و $Y_1=2$ باشند، آن‌گاه $Y_5=6$ است.

نکته ۱-۱: اگر X_i ها $\frac{\text{گسسته}}{\text{پیوسته}}$ باشد آن‌گاه Y_i ها نیز $\frac{\text{گسسته}}{\text{پیوسته}}$ هستند.

فصل ۲

آماره‌های رتبه‌ای

فرض کنید متغیر تصادفی X را سن افراد تعریف کنیم و با زحمت و اصرار سن ۵ تن از بانوان اقوام را یادداشت کرده‌ایم و نتایج به‌صورت زیر بوده است.

$$x_۱ = ۳۲, x_۲ = ۲۱, x_۳ = ۴۴, x_۴ = ۲۵, x_۵ = ۲۴$$

در این‌صورت:

$$Y_۱ = ۲۱, Y_۲ = ۲۴, Y_۳ = ۲۵, Y_۴ = ۳۲, Y_۵ = ۴۴$$

اگر رتبه فرد iام را با R_i نشان دهیم آن‌گاه:

شماره فرد (i)	نفر اول	نفر دوم	نفر سوم	نفر چهارم	نفر پنجم
رتبه فرد (R_i)	۴	۱	۵	۳	۲
	$R_۱$	$R_۲$	$R_۳$	$R_۴$	$R_۵$

$R = (R_۱, ..., R_۵)$ را بردار رتبه‌ها گوئیم و قصد داریم قضایا و نکاتی درباره توزیع تکی و توأم R_iها و بردار R بیان کنیم.

قضیه ۱: اگر نمونه تصادفی $X_۱, ..., X_n$ را از توزیع پیوسته $F(x)$ با چگالی $f(x)$ برداشت کنیم. آن‌گاه:

$$P(X_۱ < X_۲ < \cdots < X_n) = \frac{۱}{n!}$$

توجه: اگر یک نمونه سه تایی داشته باشیم، منظور از قضیه ۱ آن است که:

$$P(X_۱ < X_۲ < X_۳) = P(X_۲ < X_۳ < X_۱) = \ldots = P(X_۳ < X_۲ < X_۱) = \frac{۱}{۶}$$

فصل

۳

آزمون‌های معروف براساس رتبه

در این فصل به بیان برخی آزمون‌های معروف می‌پردازیم که «رتبه» نقش مهمی در آن‌ها دارد.

I) آزمون جمعی رتبه‌ای ویلکاکسون

دو نمونه تصادفی زیر را در نظر بگیرید.

متغیرها	X	Y
نمونه‌ها	X_1	Y_1
	$\vdots$	$\vdots$
	X_n	Y_n
توزیع‌ها	$F_X(x)$	$G_Y(y)$

می‌توان رابطه $Y \overset{d}{=} X + C$ را در نظر گرفت و سه آزمون زیر را انجام داد.

$$I)\begin{cases} H_0 : C = 0 \\ H_1 : C > 0 \end{cases} \qquad II)\begin{cases} H_0 : C = 0 \\ H_1 : C < 0 \end{cases} \qquad III)\begin{cases} H_0 : C = 0 \\ H_1 : C \neq 0 \end{cases}$$

که در هریک از سه آزمون در صورتی‌که فرض صفر پذیرفته شود می‌توان به یکسانی دو گروه یا بی‌اثری مورد پژوهش، باتوجه به نمونه مشاهده شده در سطح معناداری α رسید.

به‌عنوان مثال در آزمون شماره (II) اگر فرض صفر پذیرفته نشود و رد شود، یعنی $C < 0$ خواهد بود و به‌عبارتی Xها $> Y$ ها خواهد بود.

$$j = i,\dots,n \text{ ،ها } Y_i \xrightarrow{\text{رتبه ها } Y_j} S_j \qquad\qquad i = 1,\dots,m \text{ ،ها } X_i \xrightarrow{\text{رتبه ها } X_i} R_i$$

اگر $N = m + n$ تعریف کنیم، N یعنی تعداد کل داده‌ها، آن‌گاه مجموع کل رتبه‌ها به‌صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{m} R_i + \sum_{j=m+1}^{n} S_i = \sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$$

آماره‌های جمعی رتبه‌ای و یلکاکسون به‌صورت زیر هستند.

$$W_R = \sum_{i=1}^{m} R_i \quad , \quad W_S = \sum_{j=1}^{n} S_j$$

برای انجام آزمون I ناحیه بحرانی به‌صورت $\{W_S \geq k\}$، برای آزمون II به‌صورت $\{W_S \leq k\}$ و برای آزمون III به‌صورت زیر است:

$$P - Value = 2\min\{P(W_S \geq k), P(W_S \leq k)\}$$

فصل ۴

همبستگی

شدت رابطه بین دو متغیر تصادفی را و به‌عبارتی همبستگی بین دو متغیر تصادفی را با ضریب همبستگی می‌توان محاسبه کرد. با توجه به جنس و نوع متغیرهای تصادفی می‌توان نسبت به محاسبه آن اقدام کرد.

I) ضریب همبستگی پیرسون (ساده)

دو متغیر تصادفی X و Y را با میانگین‌های μ_X و μ_Y و انحراف معیارهای σ_X و σ_Y و کوواریانس σ_{XY} باشد آن‌گاه میزان شدت رابطه خطی بین دو متغیر

$$\rho = P(X,Y) = Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

نکته ۱-۴: اگر a و b و c و d اعداد ثابتی باشند به‌طوری که $ac > 0$ آن‌گاه:

$$\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y)$$

نکته ۲-۴: همواره داریم:

$$-1 \le \rho \le +1$$

نکته ۳-۴:

$$\rho = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} = \mp \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$$

نکته ۴-۴: اگر $Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} \pm \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$ آن‌گاه:

$$\begin{cases} E(Z) = 0 \\ Var(Z) = 2 \pm 2\rho \ge 0 \end{cases}$$

نکته ۵-۴:

$$r = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2}\sqrt{\bar{Y}^2 - \bar{Y}^2}}$$

فصل

۵

آزمون دوها

دوها و کاربرهای آن

فرض کنید اعضای تیم استقلال را با x و اعضای تیم پیروزی را با y نشان دهیم. فرض کنید مربی وقت تیم ملی آقای کی‌روش افراد را به‌صورت زیر از چپ به راست صدا زده باشد:

$$\underline{xx}\ \underline{yyy}\ \underline{x}\ \underline{yy}\ \underline{x}\ \underline{y}\ \underline{xxxx}$$

آن دسته از اعضای هم نوع را که پشت سرهم آمده‌اند رایک یا دو گردش می‌نامند. شماره تمام دوها را با R و تعداد دوهای از نوع x را با $R_۱$ و تعداد دوهای از نوع y را با $R_۲$ نشان می‌دهیم که

$$R = R_۱ + R_۲$$

است. در این مثال $R_۱ = ۴$ و $R_۲ = ۳$ است و $R = ۷$ خواهد بود.

$$\mu_R = E(R) = ۱ + \frac{۲n_۱n_۲}{(n_۱ + n_۲)} \qquad \sigma_R^۲ = \frac{(\mu_R - ۱)(\mu_R - ۲)}{n_۱ + n_۲ - ۱} \qquad \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \xrightarrow{d} Z \sim N(۰,۱)$$

توجه داشته باشید چون **R** یک متغیر گسسته است بایستی تصحیح پیوستگی را (عدد $\frac{۱}{۲}$) در نظر گرفت. اگر r مقدار مشاهده شده برای R باشد آن‌گاه:

$$\text{if } r < \mu_R \Rightarrow P - Value = P\left(R \le \left(r + \frac{۱}{۲}\right)\right) \qquad \text{if } r > \mu_R \Rightarrow P - Value = P\left(R \ge \left(r - \frac{۱}{۲}\right)\right)$$

مثال: در مثال ارائه شده می‌خواهیم بدانیم آیا جناب کی‌روش افراد را به‌صورت تصادفی صدا زده است؟ فرض تصادفی بودن را با میزان $\alpha = ۰/۰۵$ بسنجید.

$$n_۱ = ۸ , n_۲ = ۶ , r = ۷ \qquad \mu_R = ۱ + \frac{۲(۸)(۶)}{(۶+۶)} = ۹ \qquad \sigma_R = \sqrt{\frac{(۹-۱)(۹-۲)}{۸+۶-۱}} = \sqrt{\frac{۵۶}{۱۳}} \simeq ۲/۰۷$$

$$\xrightarrow{r<R} P(R \le ۷/۵) = P\left(\frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \le \frac{۷/۵ - ۹}{۲/۰۷}\right) = P\left(۲ \le -۰/۷۲\right) \simeq ۰/۲۳۵۸$$

چون $۰/۲۳ \not< ۰/۰۵$ پس فرض صفر یعنی تصادفی بودن را می‌پذیریم.

فصل

۶

آزمون‌های نیکویی برازش

در این بخش می‌خواهیم آزمون کنیم آیا متغیر تصادفی X دارای توزیع $F_X(x)$ است؟ یا به بیان دیگر آیا توزیع $F(x)$ برازنده بر X است؟

I) آزمون χ^2 برای برازندگی

فرض کنید با انجام O_i بار نتیجه C_i را مشاهده کنیم ولی فراوان مورد انتظار ما e_i باشد آن‌گاه $e_i = np_i$ و داریم:

$$\sum_{i=1}^{k} O_i = \sum_{i=1}^{k} e_i = n$$

که در آن k تعداد پیشامدها است. فرض H_0 بیان می‌کند آیا آزمایش تصادفی دارای مدل احتمال زیر است؟

مجموعه	C_1	C_2	C_3	$\cdots$	C_k
احتمال	P_1	P_2	P_3	$\cdots$	P_k

آماره این آزمون به‌صورت زیر است:

$$V_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

اگر n بزرگ باشد، تحت فرض صفر آن‌گاه V_k دارای توزیع χ^2 با $k-1$ درجه آزادی است و آماره پیرسون نامیده می‌شود.

$$\text{Reject } H_0 \text{ if } V_k > \chi^2_{1-\alpha,k-1}$$

توجه: فراوانی هر دسته نباید کم‌تر از ۵ باشد وگرنه مجبوریم با سایر رده‌ها ادغامش کنیم.

نکته ۱-۶: V_k به‌طور مجانبی با $\chi^2_{(k-1)}$ هم‌توزیع است.

در چهار راه ولیعصر یک دستگاه کار گذاشتیم و تعداد تصادف‌ها در ۵۰ هفته را ثبت کردیم و نتایج به‌صورت جدول زیر خلاصه کرده‌ایم.

تعداد تصادف‌ها در هفته	۰	۱	۲	≥ 3
فراوانی هفته‌ها	۳۲	۱۲	۶	۰

فصل

۷

توزیع تجربی و سه آزمون معروف

می‌دانید که $P(X \le x) = F_X(x)$ و منظور از $X \sim F_X(x)$ آن است که X دارای توزیع $F_X(x)$ است و در این صورت انتظار داریم که $\left[nF_X(x) \right]$ از X_iها از x کوچک‌تر باشند.

$$\hat{F}_X(X) = \frac{\text{تعداد } X_i \text{های کوچک‌تر یا مساوی } X}{n}$$

این برآورد تنها به n بستگی دارد و با $F_n(x)$ نشان داده می‌شود و تابع توزیع تجربی نام دارد.

توزیع تجربی با استفاده از متغیرهای برنولی

اگر $X \sim F_X(x)$، آن‌گاه برای هر عدد حقیقی ثابت x، متغیر تصادفی برنولی $I_{X_i}(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{X_i}(x) = \begin{cases} ۱ & X_i \le x \\ ۰ & X_i > x \end{cases}$$

$$P\left(I_{X_i}(x) = ۱ \right) = P(X_i \le x) = F_{X_i}(x)$$

و

$$E\left(I_{X_i}(x) \right) = F_X(x)$$

$$Var\left(I_{X_i}(x) \right) = F(x)\left[۱ - F(x) \right]$$

حال توزیع تجربی براساس متغیر تصادفی برنولی به‌صورت زیر است:

$$F_n(x) = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} I_{X_i}(x)$$

$$E\left(F_n(x) \right) = F(x)$$

$$Var\left(F_n(x) \right) = \frac{F(x)\left[۱ - F(x) \right]}{n}$$

بخش سوم

نمونه‌گیری

آناهید کستر خلیلی

فصل

۱

آشنایی با برخی مفاهیم پایه

جامعه: مجموعه‌ای است، از تمام مشاهدات ممکن، که می‌تواند با تکرار یک آزمایش رخ بدهد.

جامعه آماری: مجموعه‌ای از افراد یا اشیاء یا به بیان ساده‌تر جامعه‌ای که اعضای آن حداقل در یک ویژگی، مشترک باشند.

سرشماری: روشی است که طی آن تمام اعضای جامعه آماری مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نمونه: در این روش تنها بخشی از جامعه آماری مورد بررسی قرار می‌گیرد و در وهله اول بایستی تصادفی انتخاب شود و در وهله بعد بایستی این نمونه تصادفی معرف جامعه‌ی آماری باشد تا بتوان نتایج حاصل آن را به جامعه تعمیم داد.

علم آمار یا به بیان دیگر بررسی‌های نمونه‌ای به دو بخش توصیفی و استنباطی تقسیم می‌شود، که در بخش توصیفی ویژگی‌های مشاهدات را بررسی می‌کنیم و در بخش آمار استنباطی، استنباط‌های لازم مرتبط با جامعه را از نمونه استخراج می‌کنیم.

مزایای نمونه‌گیری در مقایسه با سرشماری

۱. کاهش هزینه
۲. افزایش سرعت در تلخیص داده‌ها
۳. قدرت عمر بیش‌تر (آموزش تمام آمارگیران امکان‌پذیر نیست).
۴. صحت عمل بیش‌تر (افرادی که نمونه را بررسی می‌کنند حرفه‌ای‌تر هستند).
۵. حفظ واحدهای جامعه (تمام اعضاء را مورد آزمایش قرار نمی‌دهیم).

مراحل یک بررسی نمونه‌ای

۱. مشخص نمودن هدف از انجام کار (اهداف بررسی)
۲. مشخص نمودن جامعه مورد نمونه‌گیری
۳. جمع‌آوری داده‌ها
۴. مشخص نمودن میزان عدم دقت (تعیین درجه دقت مطلوب)
۵. تعیین روش اندازه‌گیری
۶. فهرست نمودن واحدهای نمونه (چارچوب)
۷. تعیین حجم نمونه
۸. پیش آزمون (اصلاح اشتباهات ممکن در بخش‌های قبل و اتخاذ تصمیم متناسب با آن)
۹. آموزش آمارگیران

جامـــع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

جمع‌آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به‌صورت فصل‌بندی شده

الگـــوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

دریافت نمونه‌ی کتاب به‌صورت رایگان

FREE
DOWNLOAD

www.agkins.com

جامـــع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

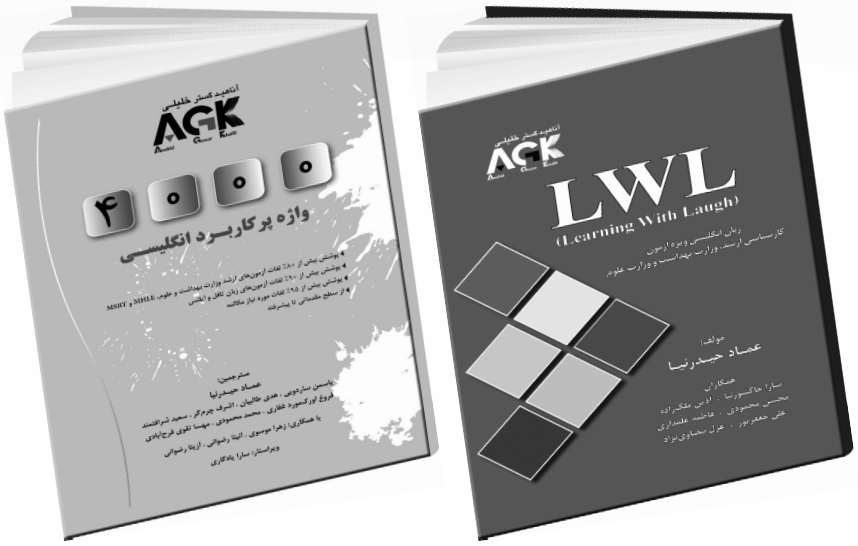
جمع‌آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به‌صورت فصل‌بندی شده

الگـــوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به‌صورت رایگان

FREE
DOWNLOAD

www.agkins.com

شماره تماس با نمایندگی‌های فعال و رسمی
آناهیـد گستـر خـلیـلی

نمایندگی	شماره تماس	نمایندگی	شماره تماس
اراک (آقای حسینی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۵۰	سبزوار (آقای شریفان)	۰۹۱۰۱۷۱۱۸۷۲
اردبیل (خانم عاصمی‌زاده)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۸	شاهرود (آقای سلمانی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۱
ارومیه (آقای آرمیون)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۱	شهرکرد (خانم تقی‌پور)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۹
اسفراین (خانم اسماعیل‌زاده)	۰۹۱۹۶۳۲۱۸۵۲	شیراز (آقای فروردین/ خانم هوشمندی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲
اصفهان (آقای کیانی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۰	فسا (خانم شعبانی)	۰۹۱۹۳۷۱۳۷۴۲
اهواز (آقای دکتر رضازاده)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۴	قزوین (خانم چگینی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۹
ایلام (آقای دکتر بوچانی)	۰۹۱۹۰۹۸۰۳۱۸	کرج (آقای دکتر علیرضاپور)	۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۷
بروجرد (آقای احمدی‌صدر)	۰۹۱۹۶۸۵۳۱۱۶	کرمان (خانم ضمانتی‌یار)	۰۹۱۳۱۹۸۱۲۷۰
بم (خانم سرحدی‌نژاد)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۹	کرمانشاه (آقای ابراهیمی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸
بیرجند (آقای دکتر بهروان)	۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۳	کوهدشت (خانم یاریان)	۰۹۱۹۵۳۷۱۸۹۰
تبریز (خانم عاصمی‌زاده)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۷	گرگان (آقای شاه‌علی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۷
جهرم (آقای یاعلی جهرمی)	۰۹۰۱۳۷۳۷۸۹۶	مراغه (آقای صمدی)	۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹
جیرفت (خانم دکتر محمدی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۰	مشهد (خانم دکتر شجاعی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۴
خرم‌آباد (خانم میر)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۸	میاندوآب (آقای صمدی)	۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹
رشت (خانم تنها)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۳	نیشابور (آقای موسوی)	۰۹۱۹۶۳۵۰۷۶۸
رفسنجان (آقای یوسفی)	۰۹۱۹۶۸۲۹۲۸۰	هرمزگان (آقای زارعی)	۰۹۱۹۵۷۳۳۲۸۴
زاهدان (آقای مهمان‌دوست)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۵	همدان (آقای سوری)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۵
زنجان (خانم دکتر هوشیار)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۱	یاسوج (آقای مرتضوی)	۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۴
ساری (آقای دکتر اکبری)	۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۴	یزد (خانم آزاد)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۳

بانک کتاب ناهید

«هر کتابی، از هر انتشاراتی را از ما بخواهید»

- ✓ جامع‌ترین بانک کتاب
- ✓ تحویل روزانه
- ✓ ارسال به تمامی نقاط کشور
- ✓ سفارش کتاب به‌صورت تلفنی و آنلاین

www.NIBS.ir

کتب دانشگاهی، فنی‌و مهندسی، علوم پزشکی، علوم انسانی، عمومی، ادبی، مذهبی، کمک آموزشی، کودک و نوجوان و کتب نفیس

فروشگاه: تهران – خیابان انقلاب- روبه‌روی درب اصلی دانشگاه تهران

پاساژ فروزنده – طبقه همکف – پلاک ۳۳۱

تلفن: ٦٦٤٨٩٣٧٥ – ۰۲۱ – ٦٦٤٨٩٣٤٩ – ۰۲۱