

دایره

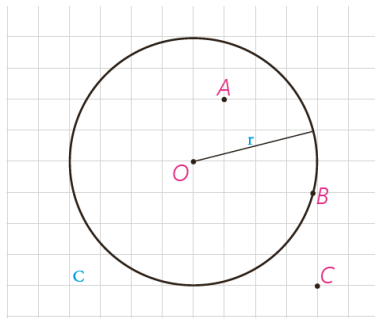


■ **هندسه در ساخت استحکامات دفاعی، قلعه‌ها و برج و باروها از دیرباز کاربردهای بسیاری داشته است. یک قضیه بنیادی در هندسه موسوم به «قضیه هم‌پیرامونی» می‌گوید در بین همه شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است. این موضوع در طراحی دایره‌ای شکل قلعه‌ها اهمیت بسیاری دارد. قلعه فلک‌الافلاک (شاپور خواست) که از دوره ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد به‌جای مانده است نمونه گویایی از همین کاربردهاست.**

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده‌است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصله ثابت (اندازه شعاع دایره) هستند. معمولاً دایره $C(O, r)$ به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که:



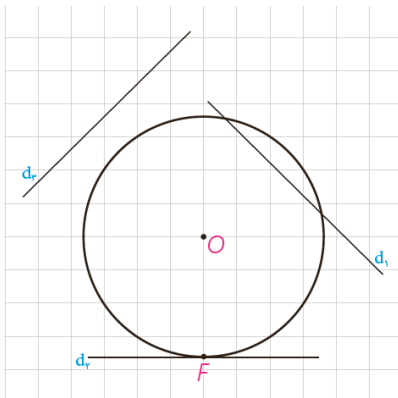
الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره **برابر** به شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره **بزرگ‌تر** از شعاع دایره است.

پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره $C(O, r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره **کوچک‌تر** از شعاع دایره است.

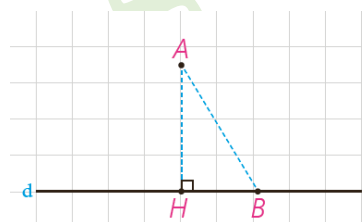
■ اوضاع نسبی خط و دایره

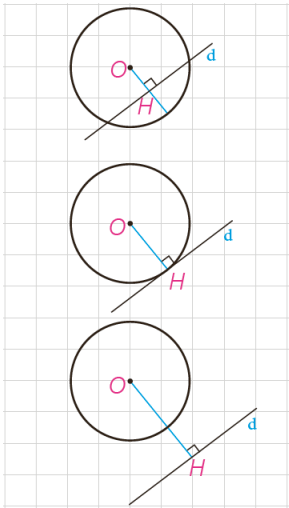
در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطه اشتراک داشته، و یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند. در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است و در حالتی که خط و دایره دو نقطه اشتراک داشته باشند، خط و دایره را متقاطع می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.



یادآوری

اگر خط d و نقطه A غیر واقع بر d داده شده، و نقطه H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازه پاره خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصله نقطه A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است ($AB > AH$).





اگر d یک خط و $C(O, r)$ یک دایره و نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد ($OH < r$)، خط و دایره ... **در دو** ... نقطه اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند

ب) اگر فاصله خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد ($OH = r$)، خط و دایره ... **در یک** ... نقطه اشتراک دارند؛ یعنی مماسند.

پ) اگر فاصله خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد ($OH > r$)، خط و دایره نقطه اشتراک ندارند.

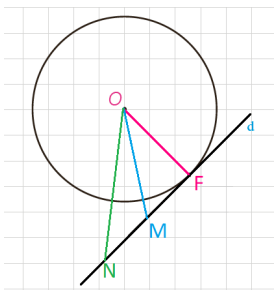
فعالیت

۱- فرض کنیم خط d بر دایره C در نقطه F مماس است.

الف) نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O کدام است؟ چرا؟

نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O نقطه F است. می‌دانیم طول $OF = R$ و هر نقطه دیگر از خط d خارج دایره است و با توجه به قسمت (پ) مطالب فوق فاصله ی آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟



در نقطه F قطع می‌کند. اگر فرض کنیم که در F قطع نکند پس نقطه ی دیگری مانند M وجود

دارد که OM بر خط d عمود است و M پای عمود است. نقطه ی دیگری مانند N روی خط d

هست که M بین N و F قرار دارد و $FM = MN$ در نتیجه :

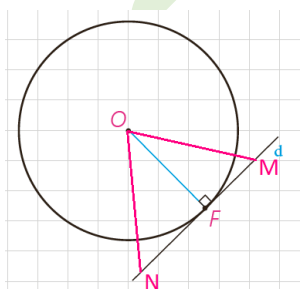
$$\left. \begin{array}{l} FM = MN \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OMN \cong \triangle OMF \Rightarrow ON = OF = R$$

بنا براین نقطه ی N نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط d بر دایره تناقض دارد. پس خط مماس در نقطه F بر OF عمود است.

پ) نتیجه : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F **بر هم عمودند**.

ت) با توجه به قسمت (پ) اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خط مماس بر دایره در نقطه F را رسم کنید؟

با توجه به مطلب فوق کافی است خطی را که در نقطه F بر OF عمود می‌شود رسم کنیم. این خط مماس بر دایره می‌باشد.



۲- خط d در نقطه F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همه نقاط خط

d نسبت به دایره C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطه تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

فرض کنیم M نقطه دیگری غیر از F روی خط d باشد چون $OM > OF$ در نتیجه

نقطه M برون دایره C است. بنا براین خط d با دایره C فقط یک نقطه مشترک دارد.

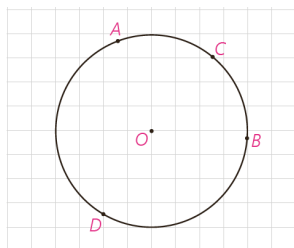
در نتیجه خط d بر دایره مماس است.

بنابراین :

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

با تعاریف زوایای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

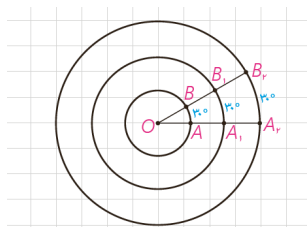
- ۱- شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.
- ۲- وتر دایره: پاره‌خطی که دوسر آن روی دایره باشد.
- ۳- قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.
- ۴- زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.
- ۵- زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.



- ۶- **کمان** : کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان $\widehat{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان $\widehat{ACB}$ و $\widehat{ADB}$ را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از $\widehat{AB}$ کمان کوچک تر مشخص شده توسط A و B است.

- ۷- اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می شود و واحد آن درجه است.

- ۸- با توجه به شکل به سادگی دیده می شود که کمان های دایره های مختلف می توانند اندازه های برابر و طول های نابرابر داشته باشند.



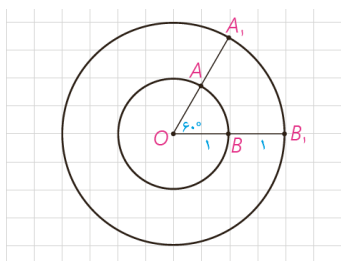
۱- با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازه 36° است، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{360} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}$$

- ۲- با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.

$$\widehat{AB} = 60^\circ \quad \widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$$

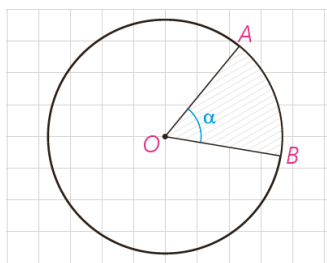
$$\widehat{A_1B_1} = 60^\circ \quad \widehat{A_1B_1} = \frac{2\pi}{3}$$



$$\frac{60}{360} = \frac{\widehat{\text{AB}} \text{ طول}}{2\pi \times 1} \Rightarrow \widehat{\text{AB}} \text{ طول} = \frac{\pi}{3}$$

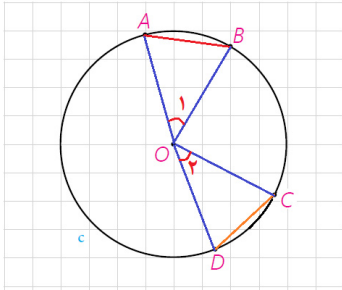
$$\frac{60}{360} = \frac{\widehat{A_1B_1} \text{ طول}}{2\pi \times 2} \Rightarrow \widehat{A_1B_1} \text{ طول} = \frac{2\pi}{3}$$

- ۳- ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با: $L = \frac{\pi R}{180} \alpha$ و مساحت قطاع برابر است با: $S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha$



طول کمان قطاع یک درجه $\frac{1}{360}$ محیط دایره است یعنی $\frac{2\pi r}{360}$. در نتیجه طول کمان نظیر قطاع α درجه $L = \frac{\pi r}{180} \alpha$ است

مساحت قطاع یک درجه $\frac{1}{360}$ مساحت دایره است یعنی $\frac{\pi r^2}{360}$. در نتیجه مساحت قطاع α درجه $A = \frac{\pi r^2}{360} \alpha$ است.



۱- فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایره $C(O, r)$ باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.

فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ حکم: $AB = CD$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB = CD$$

۲- فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

فرض: $AB = CD$ حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

۳- وتر AB و قطری از دایره که بر وتر AB عمود است مانند شکل مقابل داده شده‌اند. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

فرض: $CD \perp AB$ حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$, $AH = BH$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left\{ \begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{array} \right.$$

۴- این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ AH = BH \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{array} \right.$$

فرض: $AH = BH$ حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ و $CD \perp AB$

۵- حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

فرض: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ حکم: $AH = BH$ و $CD \perp AB$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array} \right.$$

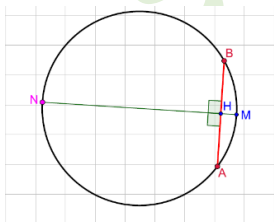
نتیجه: عمود منصف وتر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.

۶- اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر

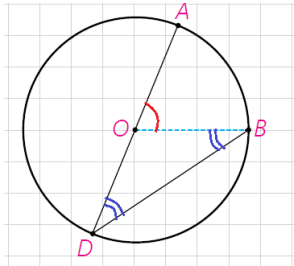
عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟

اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را به هم وصل کنیم

و از سمت H امتداد دهیم تا دایره را در نقطه N قطع کند. با توجه به ۴ و ۵ قطر MN عمود بر این وتر است.



فعالیت



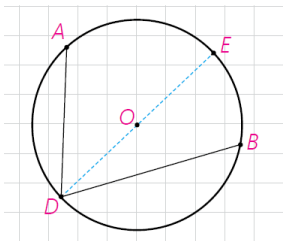
۱- در شکل مقابل یک زاویه محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

۲- اگر از B به O وصل کنیم، زاویه AOB یک زاویه خارجی برای مثلث متساوی الساقین OBD است.

$$\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \widehat{OBD} = 2\widehat{ODB}$$

و از آن نتیجه می‌شود:

$$\widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}.$$



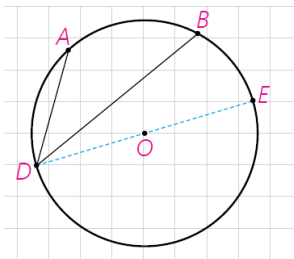
۲- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \widehat{EDB} = \frac{1}{2}\widehat{BE} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} + \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

۱- اگر قطر DE را رسم کنیم طبق قسمت ۱ داریم:

۳- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.

۱- اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:

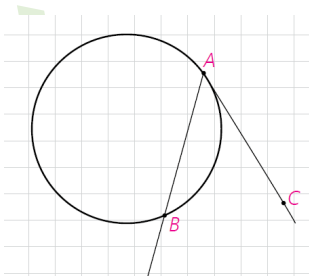


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \widehat{BDE} = \frac{1}{2}\widehat{BE} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} - \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

بنابراین:

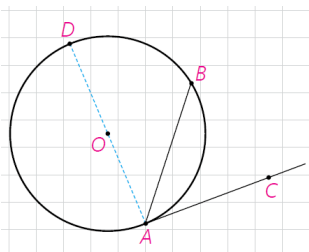
قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

زاویه ظلی



نوع دیگری از زاویه که در دایره مطرح است زاویه ظلی می‌باشد. زاویه ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتر از دایره باشد. در شکل مقابل $\widehat{BAC}$ یک زاویه ظلی است.

فعالیت



$$\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{AD} \quad \text{و بنابراین} \quad \widehat{DAC} = 90^\circ$$

ب) زاویه DAB یک زاویه محاطی است.

$$\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$$

بنابراین:

(پ) از (الف) و (ب) داریم:

$$\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{DA} - \widehat{DB})$$

و بنابراین

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

(ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.

(الف) $\widehat{DAC} = 90^\circ$ و بنابراین:

$$\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{AD}$$

(ب) زاویه $\widehat{DAB}$ یک زاویه محاطی است.

بنابراین:

$$\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$$

(پ) از (الف) و (ب) داریم:

$$\widehat{DAC} + \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{DA} + \widehat{DB})$$

و بنابراین

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

بنابراین:

قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با ... نصف ... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

کاردکلاس

۱- در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.

(الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
این دو زاویه بنا بر قضیه خطوط موازی با هم برابر هستند.

(ب) کمان‌های $\widehat{BD}$ و $\widehat{AC}$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو کمان روبه‌رو به زوایای محاطی برابر هستند، پس بایکدیگر برابرند.

۲- در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند.

(الف) وترهای EF و GH و پاره‌خط EH را رسم کنید.

(ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

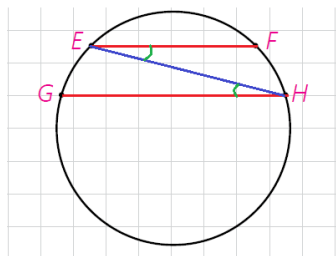
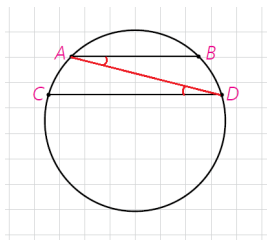
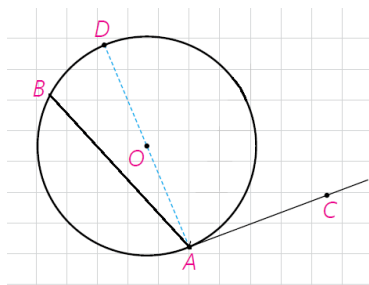
$$\widehat{EG} = \widehat{FH} \Rightarrow \frac{\widehat{EG}}{2} = \frac{\widehat{FH}}{2} \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \widehat{EHG} = \widehat{FEH}$$

(پ) خطوط EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم موازی هستند بنا بر عکس قضیه خطوط موازی

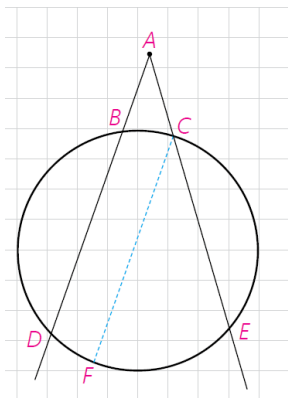
نتیجه

دو وتر از یک دایره موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.



تاکنون زاویه‌هایی که رأس آنها بر روی دایره باشد را بررسی کردیم و رابطه اندازه این زاویه‌ها با اندازه کمان‌های ایجاد شده توسط آنها را مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند می‌پردازیم.

فعالیت



۱- فرض کنید رأس زاویه DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده باشد و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویه موردنظر مشخص شده باشند.

– از نقطه C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$$

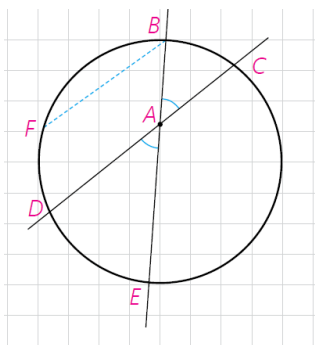
$CF \parallel AD$ و $\widehat{DAE} = \widehat{FCE}$ مورب بنا بر قضیه خطوط موازی

زاویه $\widehat{FCE}$ محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $\widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE}$.

باتوجه به شکل $\widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$

بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می‌دانیم $\widehat{BC} = \widehat{DF}$

پس داریم: $\widehat{DAE} = \widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$



۲- رأس زاویه DAE مانند شکل مقابل در درون دایره می‌باشد و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.

– از نقطه B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$

$BF \parallel DC$ و $\widehat{DAE} = \widehat{FBE}$ مورب بنا بر قضیه خطوط موازی

زاویه $\widehat{FBE}$ محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $\widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE}$.

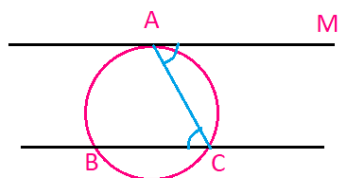
باتوجه به شکل: $\widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE})$

بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می‌دانیم: $\widehat{BC} = \widehat{DF}$

پس داریم: $\widehat{DAE} = \widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$

۱- در شکل‌های زیر ثابت کنید :

راهنمایی: از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



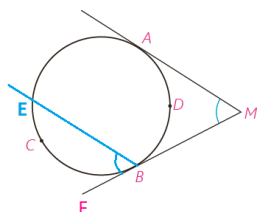
ثابت می شود که کمان های محصور بین یک مماس و وتر موازی در یک دایره باهم برابرند.

در شکل مقابل بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{MAC} = \widehat{BCA}$:

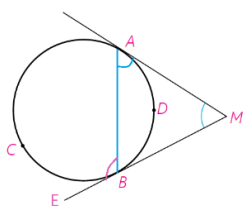
$$\left. \begin{array}{l} \text{ظلی} \quad \widehat{MAC} = \frac{1}{2} \widehat{AC} \\ \text{محاطی} \quad \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \end{array} \right\} \xrightarrow{\widehat{MAC} = \widehat{ACB}} \frac{1}{2} \widehat{AC} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \quad (\text{الف})$$

راه اول: بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{AMB} = \widehat{EBF}$



$$\widehat{AMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AE}}{2} \xrightarrow{\widehat{AE} = \widehat{ADB}} \widehat{AMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

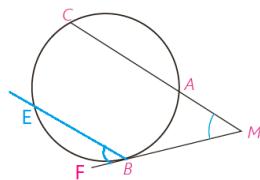


راه دوم: از نقطه ی A به B وصل می کنیم. در مثلث $\widehat{AMB}$ زاویه $\widehat{EBA}$ خارجی است پس:

$$\widehat{EBA} = \widehat{MAB} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \widehat{EBA} - \widehat{MAB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} - \frac{1}{2} \widehat{ADB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{(\widehat{ACB} - \widehat{ADB})}{2}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \quad (\text{ب})$$

راه اول: بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{CMB} = \widehat{EBF}$



$$\widehat{CMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{CE}}{2} \xrightarrow{\widehat{CE} = \widehat{AB}} \widehat{CMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

راه دوم: از نقطه ی A به B وصل می کنیم. در مثلث $\widehat{AMB}$ زاویه $\widehat{BAC}$ خارجی است پس:

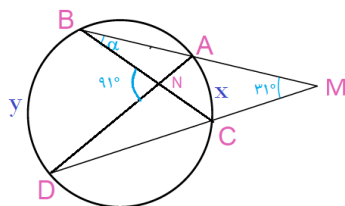
$$\widehat{BAC} = \widehat{MBA} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \widehat{BAC} - \widehat{MBA} \Rightarrow \hat{M} = \frac{1}{2} \widehat{BC} - \frac{1}{2} \widehat{AB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{(\widehat{BC} - \widehat{AB})}{2}$$

۲- در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

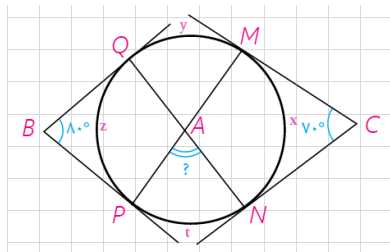
$$\hat{M} = \frac{y-x}{2} \Rightarrow 2 \times 31^\circ = y-x$$

$$\hat{N} = \frac{y+x}{2} \Rightarrow 2 \times 91^\circ = y+x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-x=62^\circ \\ y+x=182^\circ \end{cases} \Rightarrow 2y=244^\circ \Rightarrow y=122^\circ \Rightarrow x=60^\circ$$



۳- در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

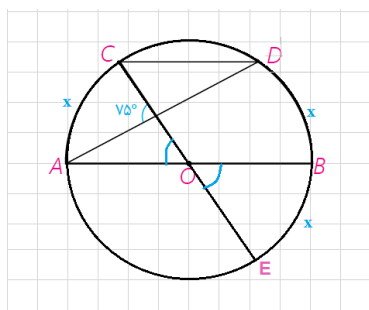


$$70^\circ = \frac{(y+z+t)-x}{2} \Rightarrow 140^\circ = (y+z+t)-x$$

$$180^\circ = \frac{(y+x+t)-z}{2} \Rightarrow 180^\circ = (y+x+t)-z$$

$$\begin{cases} 140^\circ = y+z+t-x \\ 160^\circ = y+x+t-z \end{cases} \Rightarrow 300^\circ = 2(y+t) \Rightarrow y+t = 150^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{y+t}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$



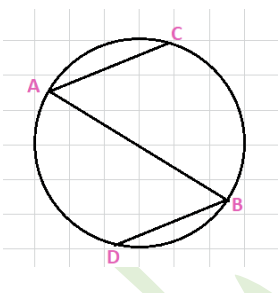
۴- در شکل، O مرکز نیم دایره است و $CD \parallel AB$ اندازه کمان CD را به دست آورید.

$$75^\circ = \frac{(x+x)+x}{2} \Rightarrow 150^\circ = 3x \Rightarrow x = 50^\circ$$

$$\widehat{CD} = 180^\circ - 2x \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

۵- در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.

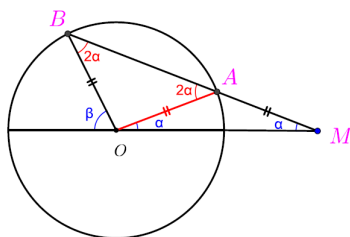
ثابت کنید: $AC = BD$



$$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 180^\circ$$

$$\widehat{ACB} - \widehat{BC} = \widehat{ADB} - \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow AC = BD$$



۶- دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم

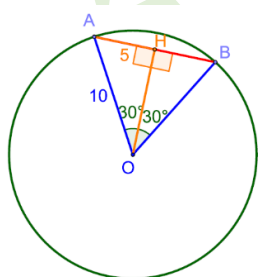
کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ ؛ نشان دهید: $\beta = 3\alpha$

با توجه به فرض مسئله، مثلث‌های OAB و OAM متساوی الساقین هستند.

$$\text{در مثلث OBM داریم: } \beta = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

۷- در دایره $C(O,R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست

آورید.



می‌دانیم که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله ی وتر از مرکز باید

نقطه ی O بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر

وتر را نصف می‌کند بنا بر این $AH = 5$ پس در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} \Rightarrow OH = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

۸- در دایره $C(O, R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$
 (OH) و (OH') فاصله O از دو وتر AB و CD هستند.
 راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیه فیثاغورس استفاده کنید.

فرض: $AB > CD$ حکم: $OH < OH'$

$$OB = OC = R, \quad BH = \frac{AB}{2}, \quad CH = \frac{CD}{2} \quad (1)$$

$$\triangle OBH : H = 90^\circ \Rightarrow BH^2 = R^2 - OH^2$$

$$\triangle OCH' : H' = 90^\circ \Rightarrow CH'^2 = R^2 - OH'^2$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \xrightarrow{(1)} BH > CH' \Rightarrow BH^2 > CH'^2$$

$$\Rightarrow R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \xrightarrow{\times(-1)} OH^2 < OH'^2 \xrightarrow{\frac{OH^2 > 0}{OH'^2 > 0}} OH < OH'$$

فرض: $OH < OH'$ حکم: $AB > CD$

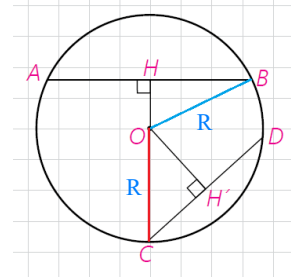
$$OB = OC = R, \quad 2BH = AB, \quad 2CH = CD \quad (1)$$

$$\triangle OBH : H = 90^\circ \Rightarrow OH^2 = R^2 - BH^2$$

$$\triangle OCH' : H' = 90^\circ \Rightarrow OH'^2 = R^2 - CH'^2$$

$$OH < OH' \Rightarrow R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2$$

$$\Rightarrow -BH^2 < -CH'^2 \xrightarrow{\times(-1)} BH^2 > CH'^2 \xrightarrow{\frac{BH^2 > 0}{CH'^2 > 0}} BH > CH' \xrightarrow{(1)} AB > CD$$



درس دوم

رابطه های طولی در دایره

اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی نباشند، یکدیگر را برون یا روی یا درون دایره قطع می کنند. در هر حالت به بررسی روابط بین اندازه پاره خط های حاصل می پردازیم.

فعالیت

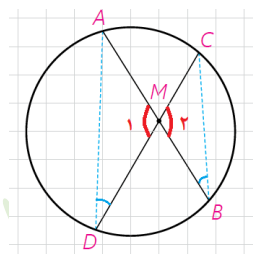
۱- دو وتر AB و CD در نقطه M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده اند.

الف) از A به D و از B به C وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه اند.

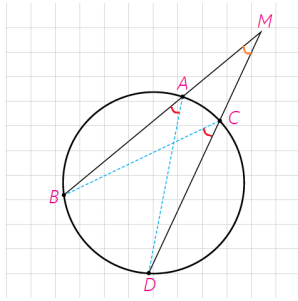
این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM} \quad \text{ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم:}$$

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM \quad \text{و در نتیجه:}$$



$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{D} = \hat{B} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD \cong \triangle MBC$$



۲- دو وتر AB و CD در نقطه M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.
الف) نقطه A را به D و نقطه C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MCB باهم متشابه‌اند.

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD \cong \triangle MCB$$

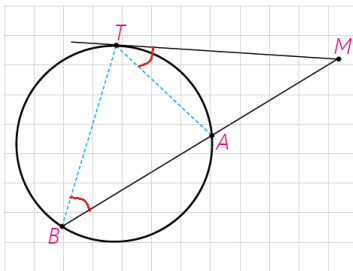
ب) با توجه به تشابه فوق داریم: $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$

۲ و در نتیجه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

نتیجه ۲۹۱

هرگاه وترهای AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

۳- فرض کنیم از نقطه M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم.



الف) T را به A و B وصل نمایید و مشخص کنید چرا $\hat{MTA} = \hat{TBM}$ ؟

$$\left. \begin{array}{l} \hat{MTA} = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ ظلی} \\ \hat{TBM} = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ محاطی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{MTA} = \hat{TBM}$$

ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص کنید و با توجه به این تشابه رابطه زیر را کامل نمایید.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{MTA} = \hat{TBM} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAT \cong \triangle MTB$$

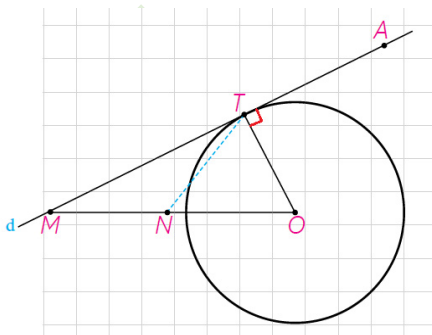
$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

و در نتیجه: $MT^2 = MA \cdot MB$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

اگر خط d در نقطه T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دو طرف نقطه T باشند، هرکدام از پاره‌های MT و AT بر دایره مماس‌اند.

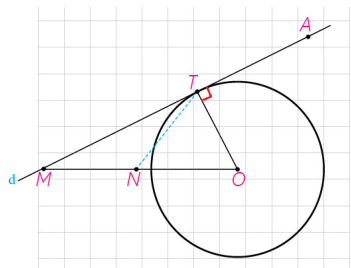
اگر O مرکز دایره باشد، $\triangle OMT$ در رأس T قائم‌الزاویه است. چرا؟



در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

با توجه به کادر فوق چون طبق فرض خط d در نقطه T بر دایره مماس است پس $OT \perp d$ در نتیجه مثلث OMT در رأس T قائم الزویه است.

اگر N وسط پاره خط OM باشد در نتیجه TN میانه ی مثلث قائم الزویه OMT است. «در هر مثلث قائم الزویه اندازه میانه وارد بر وتر نصف اندازه وتر است.» (صفحه ۶۰ کتاب هندسه دهم). بنا براین $MN = NO = TN$.

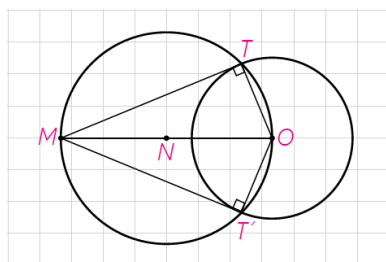


بنابراین دایره به مرکز N و قطر OM از نقطه T می گذرد.

از این ویژگی می توانیم در رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن استفاده کنیم.

اگر فاصله M تا O (مرکز دایره) d باشد، $MT = \sqrt{d^2 - R^2}$ چرا؟

$$\triangle MTO: \hat{T} = 90^\circ \Rightarrow MT^2 = OM^2 - OT^2 \Rightarrow MT = \sqrt{d^2 - R^2}$$



اکنون برای رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره، ابتدا دایره ای به قطر OM (مرکز O) می کشیم.

این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T' قطع می کند. خط های MT و MT' بر دایره مماس اند چرا؟

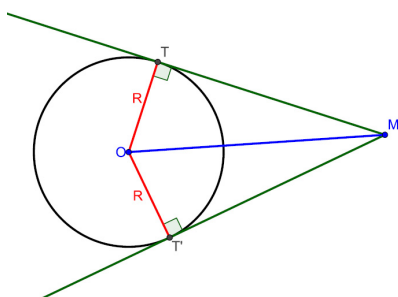
زاویه های $\hat{MTO}$ و $\hat{MT'O}$ محاطی روبه رو به قطر هستند بنا براین اندازه ی هر کدام

90° است. پس شعاع نقطه تماس بر پاره خط های MT و MT' عمود است.

در نتیجه MT و MT' بر دایره مماس هستند.

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

کادر کلاس



هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید:

الف) اندازه های دو مماس برابرند.

دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم هم نهشت

هستند. و بنا بر اجزای متناظر $MT = MT'$.

ب) نیم خط MO نیمساز زاویه $\angle TMT'$ است.

راه اول: دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم هم نهشت هستند. و بنا بر اجزای متناظر

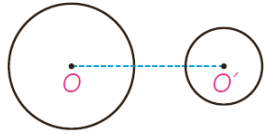
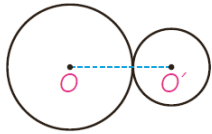
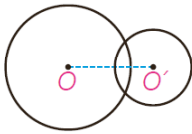
$$\hat{OMT} = \hat{OMT'}$$

راه دوم: فاصله نقطه O از دو ضلع زاویه $\angle TMT'$ به یک فاصله است پس بنا بر خاصیت نیمساز زاویه نقطه O روی نیمساز

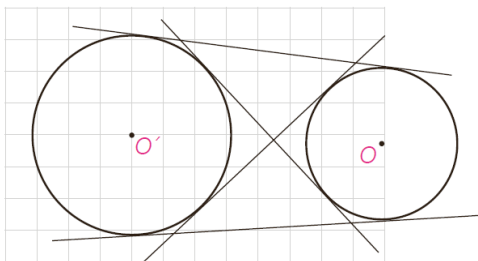
این زاویه است. یعنی نیم خط MO نیمساز زاویه $\angle TMT'$ است.

■ حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

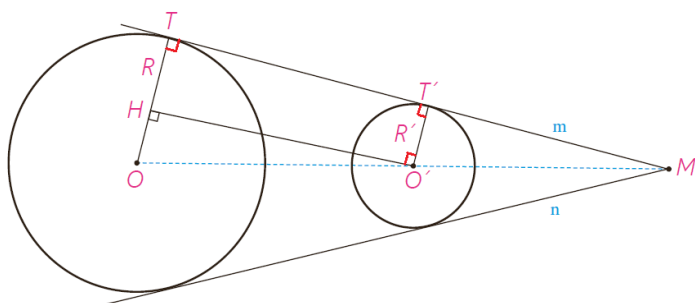
دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به صورت زیر است:

	$d > R + R'$	دو دایره برون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره‌های هم‌مرکز

هر خطی یا پاره‌خطی را که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره می‌نامند.



۱- فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و $O'T'$ رسم شده است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.



شعاع‌های OT و $O'T'$ بر خط m در نقاط T و T' عمودند. و چون $O'H$ موازی خط m است پس بنا بر قضیه خطوط موازی $\hat{T} = \hat{H} = 90^\circ$ و $\hat{T}' = \hat{O}' = 90^\circ$

بنا بر این چهار ضلعی $TT'O'H$ چهار زاویه قائمه دارد پس مستطیل است.

(ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$ ، تساوی زیر را توجیه کنید.
 $OO' = d$ و $OT = R$ و $O'T' = R'$ و با توجه به بند الف $O'H = TT'$

$$\begin{aligned} \Delta O'O'H: \hat{H} = 90^\circ &\Rightarrow O'H^2 + OH^2 = OO'^2 \Rightarrow O'H^2 = OO'^2 - OH^2 \\ &\Rightarrow O'H = \sqrt{d^2 - (OT - O'T')^2} \xrightarrow[OT=R, O'T'=R']{O'H=TT'} TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \end{aligned}$$

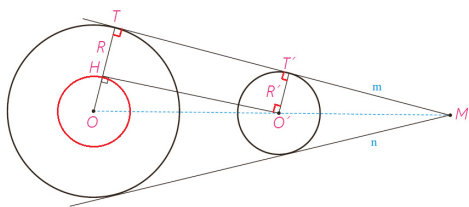
(پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگویید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع

باشند، نقطه تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

فرض کنیم این دو مماس مشترک در نقطه M یکدیگر را قطع کنند. با توجه به بند (ب) کار در کلاس قبل OM نیمساز زاویه M است. همچنین OM هم نیمساز زاویه M است و چون هر زاویه یک نیمساز دارد در نتیجه OM و OM بر هم منطبق هستند در نتیجه نقطه تقاطع مماس‌ها روی خط OO' قرار دارد.

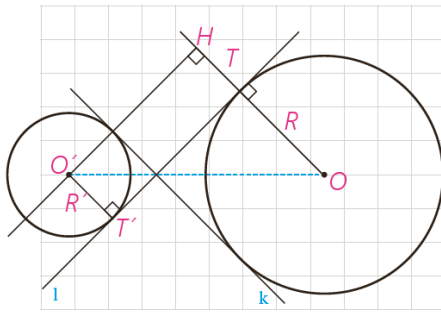
(ت) به مرکز O و به شعاع $R - R'$ دایره‌ای رسم کنید. پاره خط $O'H$ برای دایره رسم شده چگونه خطی است؟

پاره خط $O'H$ بر این دایره مماس است.



(ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد. از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو دایره معلوم است، می‌توان دایره مطرح شده در قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این صورت چگونه می‌توانید مماس TT' را رسم کنید؟

از نقطه O به H وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره (C) را در نقطه T قطع کند. سپس از این نقطه خطی موازی $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط در نقطه T' بر دایره (C) مماس می‌شود.

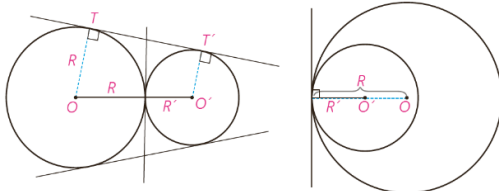


۲- دو مماس مشترک l و k نیز بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده است
مرکزهای دو دایره در دوطرف مماس مشترک اند. با به کار بردن قضیه فیثاغورس در $\triangle O'OH$ مانند قبلی نشان دهید:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

با توجه به شکل چهارضلعی $THO'T'$ مستطیل است پس $TT' = OH$. همچنین
و در نتیجه: $OH = R + R'$ و $TH = O'T' = R'$

$$\triangle O'OH: H = 90^\circ \Rightarrow O'H^2 = OO'^2 - OH^2 \xrightarrow[\substack{OH=R+R', OO'=d}]{TT'=O'H} TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$



مماس خارج اند؛
سه مماس مشترک دارند.
 $OO' = R + R'$

مماس داخل اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
 $OO' = |R - R'|$

۳- دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره در دوطرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می نامند.

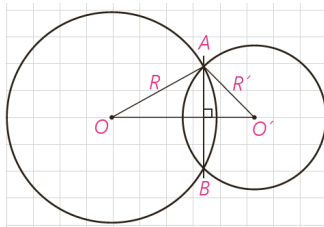
با استفاده از دستور محاسبه طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$

$$\begin{aligned} TT' &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \xrightarrow{d=R+R'} TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} \\ \Rightarrow TT' &= \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - (R^2 + R'^2 - 2RR')} = \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - R^2 - R'^2 + 2RR'} \\ \Rightarrow TT' &= \sqrt{4RR'} \Rightarrow TT' = 2\sqrt{RR'} \end{aligned}$$

۴- دو دایره متقاطع. دو دایره را که فقط دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع می نامند. در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.

$$\text{و } |R - R'| < OO' < R + R' \text{؛ چرا؟}$$



$$OO' < R + R' \quad (1)$$

با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AOO' داریم:

$$\left. \begin{aligned} R' < OO' + R &\Rightarrow -OO' < R - R' \\ R < OO' + R' &\Rightarrow R - R' < OO' \end{aligned} \right\} \Rightarrow -OO' < R - R' < OO' \Rightarrow |R - R'| < OO' \quad (2)$$

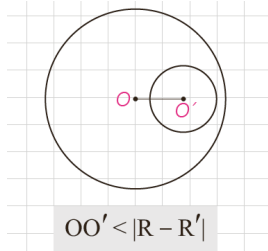
$$\xrightarrow{(1), (2)} |R - R'| < OO' < R + R'$$

پاره خط AB، که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع

است. چرا پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است؟

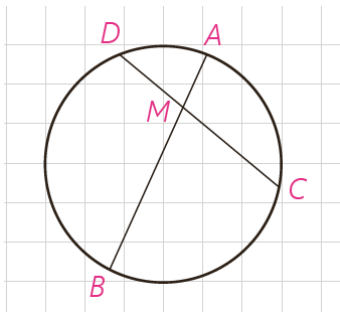
$OA = OB = R$ و $O'A = O'B = R'$ بنا بر خاصیت عمود منصف نقاط O و O' روی عمود منصف AB قرار دارد و چون

عمود منصف هر پاره خط یکتا است در نتیجه پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است.



$$OO' < |R - R'|$$

۵- دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل می نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها $OO' < |R - R'|$



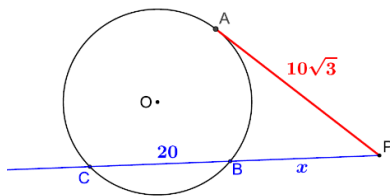
۱- در دایره $C(O, R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ ، آن گاه وتر CD و وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟

$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DM}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = 3 \Rightarrow MC = 6$$

$$DM \cdot MC = AM \cdot BM \xrightarrow{AM=x} 3 \times 6 = x(11-x) \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x-9)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, \quad x = 9 \text{ با توجه به شکل غ ق ق}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{2}{9}$$

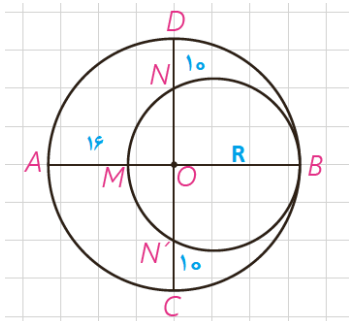


۲- از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول های PB و PC را به دست آورید.

$$PA^2 = PB \cdot PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(x+20) \Rightarrow x^2 + 20x - 300 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+30) = 0 \Rightarrow x = 10, \quad x = -30 \text{ غ ق ق}$$

$$\Rightarrow PB = 10, \quad PC = 30$$



۳- در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ تر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$ ، شعاع های دو دایره را پیدا کنید.

$$OB \cdot OM = ON \cdot ON' \Rightarrow R(R-16) = (R-10)(R-10)$$

$$\Rightarrow R^2 - 16R = R^2 - 20R + 100 \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

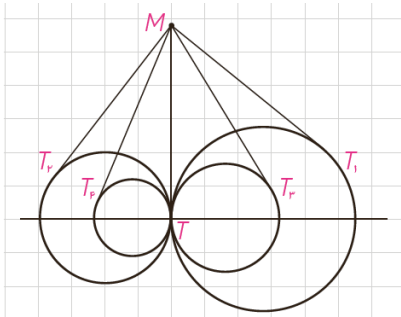
$$R' = \frac{MB}{2} \Rightarrow R' = \frac{2R-16}{2} \Rightarrow R' = \frac{50-16}{2} = 17$$

۴- مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T برهم مماس اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم؛ ثابت کنید

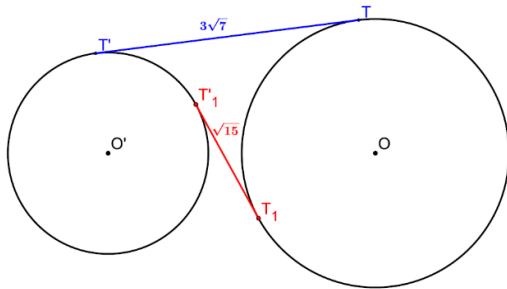
$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$

با توجه به کار در کلاس ص ۱۲ می دانیم که از هر نقطه خارج دایره طول مماس های رسم شده باهم برابرند. بنابراین داریم :

$$\left. \begin{array}{l} MT = MT_2 \\ MT = MT_4 \\ MT = MT_1 \\ MT = MT_3 \end{array} \right\} \Rightarrow MT = MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$$

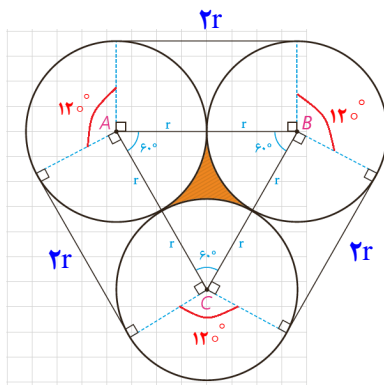


۵- طول شعاع‌های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المركزين آنها مساوی ۸ واحد است.



$$\begin{cases} TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 \\ TT'^2 = d^2 - (R + R')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 63 = 64 - (R - R')^2 \\ 15 = 64 - (R + R')^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = 1 \\ R + R' = 7 \end{cases} \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow R' = 3$$



۶- سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخ بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$ است. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4})$ محدود است.

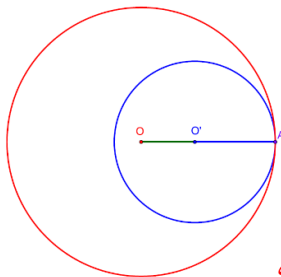
مجموع سه قطاع با زاویه 120° درجه تشکیل یک دایره کامل می دهد بنا براین داریم:

$$6r + 2\pi r = \text{محیط یک دایره} = 2\pi r + 2r + 2r + 2r \quad \text{طول نخ}$$

مجموع سه قطاع با زاویه 60° درجه تشکیل یک نیم دایره می دهد بنا بر این داریم:

مساحت نیم دایره - مساحت مثلث ABC = مساحت ناحیه هاشور خورده

$$\text{مساحت ناحیه هاشور خورده} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{4}r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$$



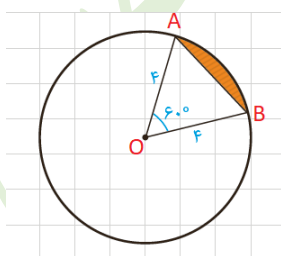
۷- طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتی مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.

با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه:

$$\text{مساحت ناحیه محدود بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 16$$

$$\text{OO}' = R - R' = 2 \rightarrow 2(R + R') = 16 \Rightarrow R + R' = 8$$

$$\begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 2 \end{cases} \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5, R' = 3$$



۸- مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

مثلث OAB متساوی الساقین است که $\hat{O} = 60^\circ$ پس این مثلث متساوی الاضلاع است.

مساحت مثلث OAB - مساحت قطاع 60° درجه = مساحت قسمت رنگی (A)

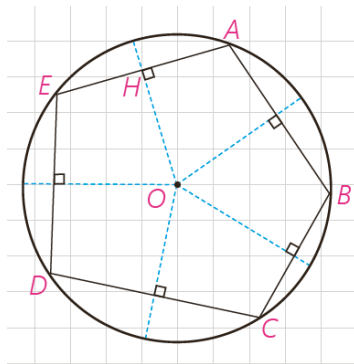
$$A = \frac{\pi r^2}{360} \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2 \Rightarrow A = \frac{16\pi}{360} \times 60 - 4\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

چند ضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را دایره محیطی آن چند ضلعی می‌نامیم.

به‌طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.

می‌دانیم برای اینکه دایره‌ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمود منصف پاره خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن است؛ بنابراین:



یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رأس باشند.

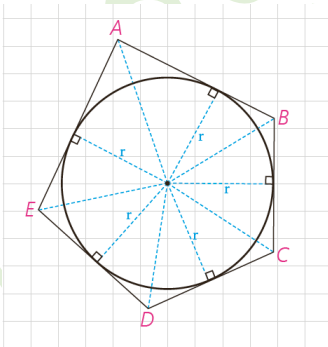
چرا؟ این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.

فرض: چند ضلعی محاطی است. **حکم:** عمود منصف‌های همه ی ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رسند.

باتوجه به تعریف چند ضلعی محاطی و فرض واضح است که فاصله ی همه ی رأس‌های چند ضلعی تا مرکز دایره به یک اندازه است (شعاع دایره) در نتیجه بنا بر خاصیت عمود منصف فاصله مرکز دایره از دوسر هر ضلع به یک فاصله (شعاع دایره) است، پس مرکز دایره روی عمود منصف این اضلاع قرار دارد. در نتیجه عمود منصف‌های همه ی ضلع‌های آن در یک نقطه (مرکز دایره) هم‌رسند.

فرض: عمود منصف‌های همه ی ضلع‌های چند ضلعی در یک نقطه هم‌رسند. **حکم:** چند ضلعی محاطی است.

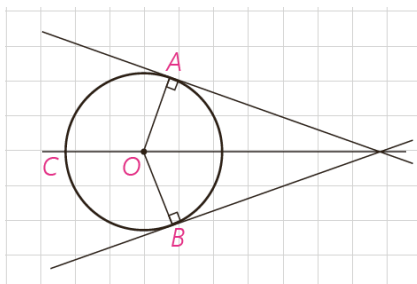
باتوجه به فرض و خاصیت عمود منصف همه ی رأس‌های چند ضلعی از نقطه ی هم‌رسی عمود منصف‌ها به یک فاصله اند و در نتیجه این نقاط بنا بر تعریف دایره، روی دایره‌ای به شعاع این فاصله ی ثابت قرار دارند و بنا بر تعریف چند ضلعی محاطی این چند ضلعی محاطی است.



چند ضلعی را محیطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را دایره محیطی این چند ضلعی می‌نامیم.

فعالیت

فرض کنید دایره C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.
(الف)



۱- پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کند، رسم کنید و آنها را OA و OB بنامید.

۲- پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی است؟

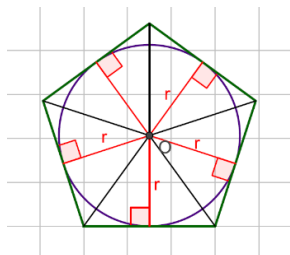
شعاع‌های دایره‌اند.

۳- فاصله نقطه O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

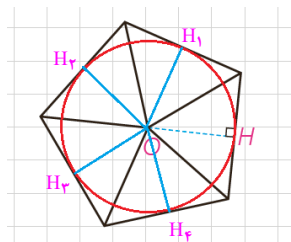
باهم برابرند. زیرا شعاع نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

۴- با توجه به (۲) و (۳) فاصله مرکز دایره از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و بنابراین نقطه O روی نیمساز زاویه است.

۵- فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی چند ضلعی است؟



بنا به تعریف چند ضلعی محاطی، اضلاع چند ضلعی بر دایره مماس هستند و می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس این شعاع‌ها همان فاصله‌ی مرکز دایره از اضلاع چند ضلعی هستند و همگی باهم برابرند. بنا بر خاصیت نیمساز مرکز این دایره روی نیمساز هر یک از زاویه‌های داخلی چند ضلعی است به عبارتی مرکز دایره محل برخورد نیمسازهای داخلی چند ضلعی است.



ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای زوایای داخلی آن در نقطه O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه نوع دایره‌ای است؟ چرا؟

نقطه O روی نیمساز زوایای داخلی است پس بنا بر خاصیت نیمسازها: $OH = OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$

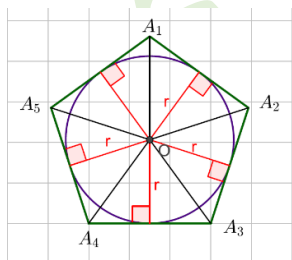
همچنین OH_1 و OH_2 و OH_3 و OH_4 همگی بر اضلاع عمود هستند. در نتیجه وقتی دایره‌ای به شعاع OH رسم می‌کنیم شعاع‌ها بر اضلاع عمود هستند پس اضلاع بر دایره در نقطه تماسشان عمودند یعنی دایره بر اضلاع چند ضلعی مماس است در نتیجه بنا به تعریف دایره محاطی است.

بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

کاردرکلاس

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر r باشد، نشان دهید $S = rp$.

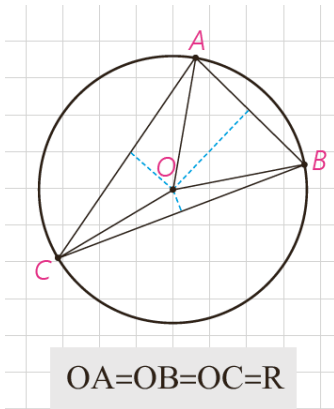
راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه، و باهم جمع کنید.



$$S = \frac{1}{2}r.A_1A_2 + \frac{1}{2}r.A_2A_3 + \frac{1}{2}r.A_3A_4 + \frac{1}{2}r.A_4A_5 + \dots + \frac{1}{2}r.A_{n-1}A_n$$

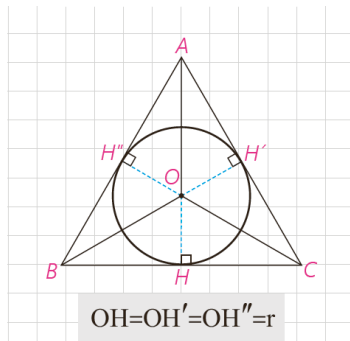
$$= \frac{1}{2}r(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n) = \frac{1}{2}r \times 2P \Rightarrow S = rp$$

■ دایره‌های محیطی و محاطی مثلث



قبلاً هم‌رسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین نقطه هم‌رسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.

همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث هم‌رس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه هم‌رسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است. بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز $S=pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.

اگر نیمساز زاویه A از $\triangle ABC$ را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است؛ چرا؟

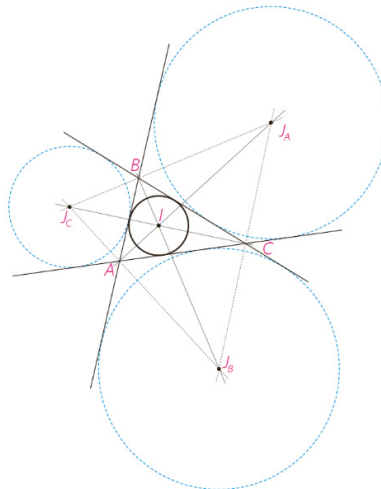
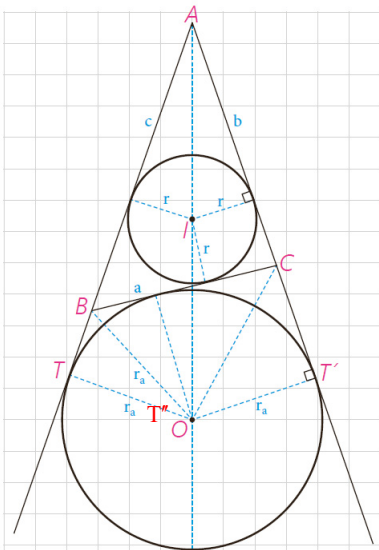
نقطه O روی نیمساز زاویه A است پس $OT = OT'$ (۱)

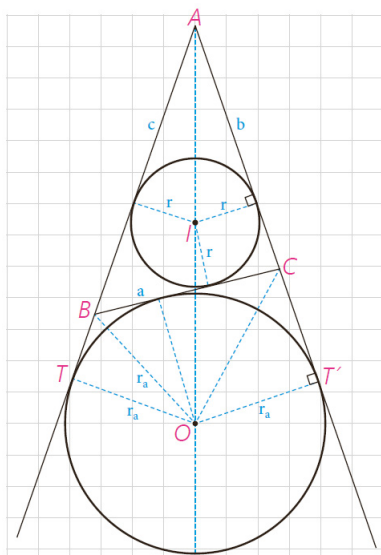
نقطه O روی نیمساز زاویه خارجی C است پس $OT'' = OT'$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $OT'' = OT$ پس نقطه O روی نیمساز زاویه خارجی B نیز هست. به عبارتی این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است.

بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.

شعاع این دایره را با r_a نشان می‌دهند؛ به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر نظیر دو رأس B و C وجود دارد.





اکنون در فعالیت زیر محاسبه شعاع دایره محاطی خارجی را بررسی می کنیم.

در شکل داریم: $S(ABC) = S(OAC) + S(OAB) - S(OBC)$ اگر مساحت

ΔABC را به S نشان دهیم، $S = \frac{1}{2} r_a (b + c - a)$. اگر محیط مثلث را با $2p$

نشان دهیم، داریم، $2p = a + b + c$ ؛ پس $2p - 2a = a + b + c - 2a = b + c - a$

در نتیجه $S = r_a(P - a)$ و بنابراین $r_a = \frac{S}{p - a}$ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

$$r_b = \frac{S}{p - b} \quad r_c = \frac{S}{p - c}$$

برخلاف مثلث، همه چند ضلعی های دیگر، لزوماً محاطی یا محیطی نیستند. در بخش

بعد به شرایط محاطی یا محیطی بودن یک چهار ضلعی می پردازیم.

■ چهار ضلعی های محاطی و محیطی

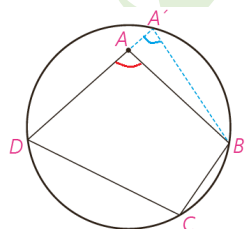
قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

اثبات

۱- فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد؛ مجموع اندازه های $\hat{A}$ ، $\hat{C}$ نصف مجموع اندازه های کمان های DCB و DAB است؛ اما مجموع اندازه های این دو کمان 180° است و در نتیجه مجموع اندازه های $\hat{A}$ ، $\hat{C}$ برابر 180° است. به همین ترتیب $\hat{B}$ ، $\hat{D}$ مکمل اند.

۲- فرض کنیم $\hat{A}$ ، $\hat{C}$ مکمل باشند. با برهان خلف ثابت می کنیم چهارضلعی ABCD محاطی است. از سه نقطه B، C و D همواره یک دایره می گذرد؛ چرا؟

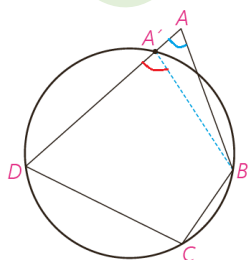
زیرا عمود منصف های اضلاع یک مثلث همسرند و مرکز دایره ی محیطی هر چندضلعی نقطه همرسی عمود منصف های اضلاع است.



اگر این دایره از A نگذرد، خط AD را در نقطه ای دیگری مانند A' قطع می کند که A' بین A و D یا A' بین D و A است. اکنون چهارضلعی A'BCD محاطی است؛ پس $\hat{C}$ و $\widehat{BAD}$ مکمل اند؛ در نتیجه باید $\hat{A}$ و $\widehat{BAD}$ هم اندازه باشند و این ممکن نیست؛ چرا؟

زیرا در هر مثلث هر زاویه خارجی از زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگ تر است.

در نتیجه A' همان A است.



قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

اساس اثبات بر این است که اگر از نقطه‌ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم دو پاره خط مماس هم اندازه‌اند.

اثبات

۱- اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد،

$$AB + CD = AM + MB + PC + PD = AQ + BN + CN + DQ = AQ + DQ + BN + CN = AD + BC$$

عکس این قضیه نیز با برهان خلف ثابت می‌شود.

۲- فرض کنید: $AB + CD = BC + AD$.

نیمسازهای دوزاویه B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، چرا نقطه I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است؟ ($IM = IN = IP$)

نقطه I روی نیمساز زاویه B است پس $IM = IN$ (۱)

نقطه I روی نیمساز زاویه C است پس $IP = IN$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $IP = IN = IM$ پس نقطه I از سه ضلع CD، BC و AB به یک فاصله است.

چرا دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است؟

زیرا این شعاع‌ها در نقاط اشتراک با دایره بر آن عمود هستند.

حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.

اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین P و E واقع می‌شود.

پس، $AB + EC = AE + BC$ ؛ (چرا؟)

چهار ضلعی ABCE محیطی است پس بنا بر بند (۱) همین قضیه نتیجه می‌گیریم: $AB + CE = AE + BC$

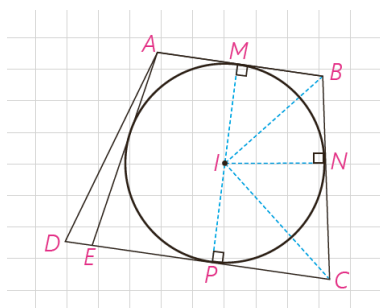
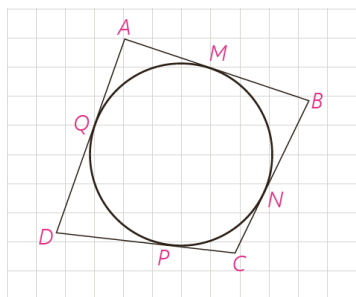
از این رابطه با استفاده از رابطه فرض چگونه نتیجه می‌گیرید: $AD = DE + AE$ ؟

$$\left. \begin{array}{l} AB + CD = AD + BC \\ AB + CE = AE + BC \end{array} \right\} \Rightarrow CD - CE = AD - AE \Rightarrow CD - CE + AE = AD \Rightarrow DE + AE = AD$$

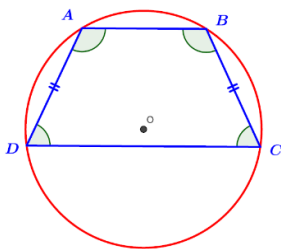
این رابطه امکان ندارد؛ (چرا؟)

بنا بر نامساوی مثلثی در مثلث ADE داریم: $DE + AE > AD$ پس رابطه‌ی فوق امکان ندارد؛ مگر این که E همان D باشد.

پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.



با توجه به این قضیه‌ها بررسی کنید که چهار ضلعی‌های دوزنقه، کایت، متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع کدام محاطی، و کدام محیطی است. دوزنقه متساوی الساقین چگونه؟



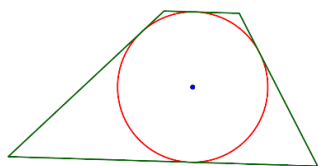
دوزنقه در حالت کلی محاطی نیست زیرا زوایای مقابل آن مکمل نیستند.

اما اگر دوزنقه متساوی الساقین باشد داریم:

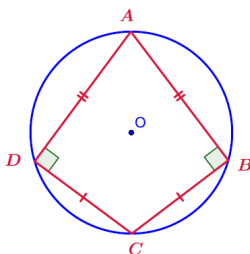
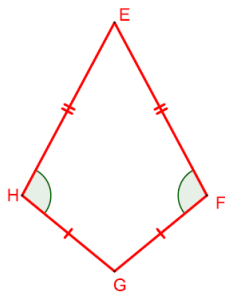
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C} = \hat{D}} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A} = \hat{B}} \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{دوزنقه } ABCD \text{ محاطی است}$$

یک دوزنقه در حالت کلی محیطی نیست اما می‌تواند محیطی باشد به شرط آن که نیمسازهای داخلی هم‌مس باشند.

مانند شکل مقابل:



یک کایت در حالت کلی محاطی نیست ولی اگر دو زاویه مقابل آن قائمه باشند می‌تواند محاطی باشد.

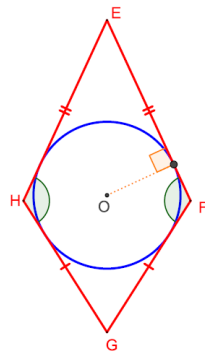


$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \xrightarrow{\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

پس بنا بر قضیه کایت ABCD محاطی است.

یک کایت حتماً محیطی است زیرا مجموع اضلاع مقابل با هم برابرند.

$$\left. \begin{array}{l} EF = EH \\ GH = GF \end{array} \right\} \Rightarrow EF + GH = EH + GF$$



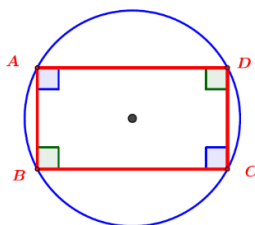
یک متوازی‌الاضلاع در حالت کلی محاطی نیست؛ زیرا:

زاویه‌های مقابل نمی‌توانند مساوی 180° باشند.

$$\hat{A} + \hat{C} < 180^\circ, \hat{B} + \hat{D} > 180^\circ$$

یک متوازی‌الاضلاع در حالت کلی محیطی نیست؛ زیرا اضلاع مقابل دو به دو برابرند و مجموع آن‌ها با هم برابر نیست.

با توجه به شکل فوق: $AB + DC < AD + BC$.



یک مستطیل محاطی است؛ زیرا مجموع زاویه‌های مقابل همیشه برابر با 180° است.

با ادامه این روند داریم :

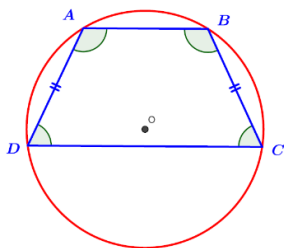
$OA=OB=OC=OD=\dots\dots$ و $OH=ON=OM=\dots\dots$ بنابراین، O از همه

رأس‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.



تمرین



۱- ثابت کنید یک دوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

فرض : دوزنقه متساوی الساقین است. **حکم :** دوزنقه محاطی است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{دوزنقه } ABCD \text{ محاطی است}$$

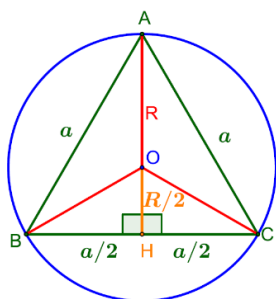
فرض : دوزنقه محاطی است. **حکم :** دوزنقه متساوی الساقین است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow \hat{D} = \hat{C} \xrightarrow{\text{ق زاویه های مکمل}} \hat{A} = \hat{B}$$

در این دوزنقه زاویه های مجاور به ساق برابرند در نتیجه دوزنقه متساوی الساقین است .

۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R

محاط شده باشد.



مرکز دایره ی محیطی نقطه O محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی الاضلاع است نقطه O محل برخورد میانه هاهم هست. بنا براین :

راه اول :

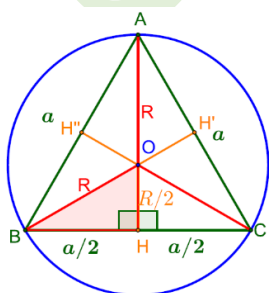
$$AB = BC = AC = a, \quad BH = CH = \frac{a}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} OH = \frac{OA}{2} \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \Rightarrow AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R \\ \Delta ACH : H = 90^\circ \Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{2}R \Rightarrow a = \frac{3R}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = R\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(R\sqrt{3})^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

راه دوم: باتوجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث همنهشت ساخته شده است . این مثلث های به حالت (ض ز ض)

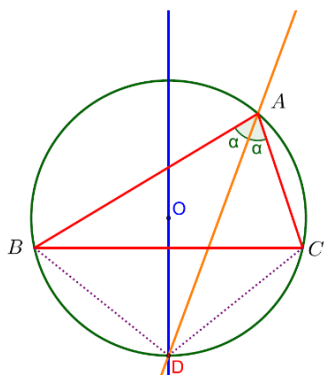
همنهشت هستند.



$$\Delta OBH : H = 90^\circ \Rightarrow BH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = 6S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC} = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{R}{2} \times \frac{R}{2}\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.

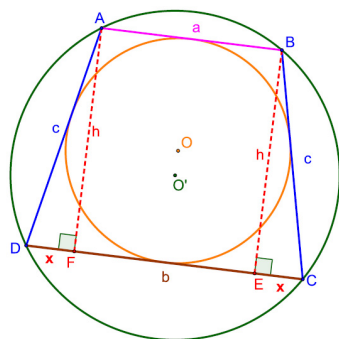


فرض کنیم نیمساز زاویه BAC دایره محیطی را در نقطه D قطع کند:

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \xrightarrow{\text{محاطی}} \widehat{BD} = \widehat{CD} \xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}} BD = CD$$

فاصله نقطه D از دو نقطه B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمود منصف نقطه D روی عمود منصف پاره خط BC نیز قرار دارد.

۴- یک دوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.



چون دوزنقه $ABCD$ محاطی است پس متساوی الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع دیگر برابر است. در نتیجه: $2c = a + b$ و مثلث ADF قائم الزویه است.

$$2c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}, \quad b = 2x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) \times h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab}$$

۵- اگر r_a, r_b, r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی

داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$S = rp \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$$

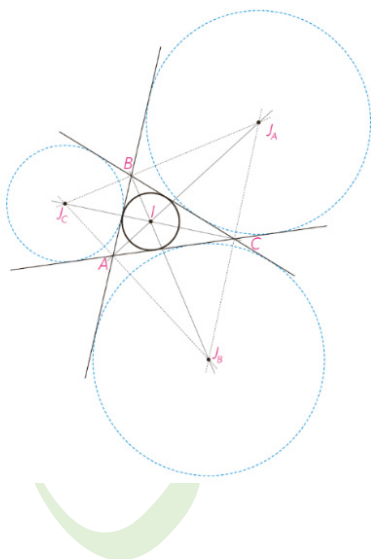
$$r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p - (a+b+c)}{S} = \frac{3p - 2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$



به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \\ S &= \frac{1}{2} bh_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b} \Rightarrow \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \\ S &= \frac{1}{2} ch_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

۶- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M و N، P باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند،

نشان دهید :

$$AM = AN = p - a$$

$$\left. \begin{aligned} AN &= c - BN \\ AM &= b - CM \end{aligned} \right\} \Rightarrow AM + AN = b + c - (BN + CM)$$

$$\xrightarrow[CM=CP, BN=BP]{AM=AN} 2AM = b + c - \underbrace{(BP + CP)}_a = b + c - a$$

$$2AM = 2p - 2a \Rightarrow AM = AN = p - a$$

$$BN = BP = p - b$$

$$\left. \begin{aligned} BN &= c - AN \\ BP &= a - CP \end{aligned} \right\} \Rightarrow BN + BP = a + c - (AN + CP)$$

$$\xrightarrow[AN=AM, CP=CM]{BP=BN} 2BN = a + c - \underbrace{(AM + CM)}_b = a + c - b$$

$$2BN = 2p - 2b \Rightarrow BN = BP = p - b$$

$$CM = CP = p - c$$

$$\left. \begin{aligned} CM &= b - AM \\ CP &= a - BP \end{aligned} \right\} \Rightarrow CM + CP = b + a - (AM + BP)$$

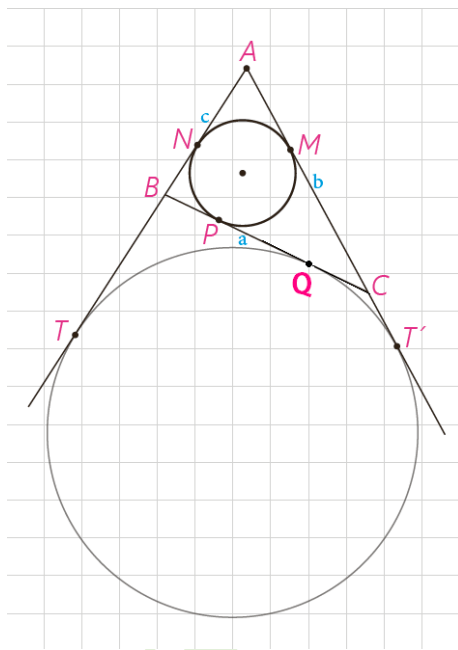
$$\xrightarrow[AN=AM, BP=BN]{CM=CP} 2CM = b + a - \underbrace{(AN + BN)}_c = b + a - c$$

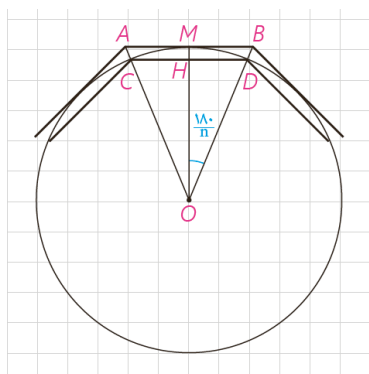
$$2CM = 2p - 2c \Rightarrow CM = CP = p - c$$

$$AT = AT' = p$$

$$AT + AT' = c + BT + b + CT' \xrightarrow[BT=BQ, CT'=CQ]{AT=AT'} 2AT = c + b + \underbrace{BQ + CQ}_a = c + b + a = 2p$$

$$\Rightarrow 2AT = 2p \Rightarrow AT = AT' = p$$





۷- یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = 2r \tan \frac{18^\circ}{n}$ و $CD = 2r \sin \frac{18^\circ}{n}$.

$$\triangle OHD: \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{OD=r} \sin \frac{18^\circ}{n} = \frac{HD}{r} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin \frac{18^\circ}{n} = \frac{2HD}{r}$$

$$\xrightarrow{2HD=CD} CD = 2r \sin \frac{18^\circ}{n}$$

$$\triangle OMB: \hat{M} = 90^\circ \xrightarrow{OM=r} \tan \frac{18^\circ}{n} = \frac{MB}{r} \xrightarrow{\times 2} 2 \tan \frac{18^\circ}{n} = \frac{2MB}{r}$$

$$\xrightarrow{2MB=AB} AB = 2r \tan \frac{18^\circ}{n}$$

۸- شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی.

مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است. بنا بر این زاویه‌های خارجی

60° است. با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60^\circ \text{ و در نتیجه مثلث } MNP \text{ متساوی الساقین است.}$$

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

اگر قطرهای شش ضلعی منتظم را رسم کنیم آن را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم

می‌کنیم و در مثلث MNP ، ۹ مثلث همنهشت ایجاد می‌شود.

$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{MNP}} = \frac{6S_{MAB}}{9S_{MAB}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر

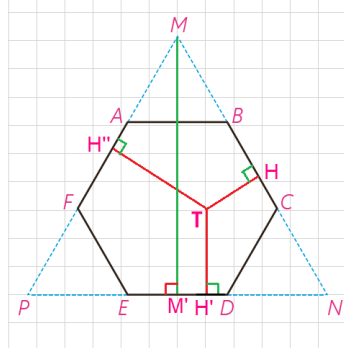
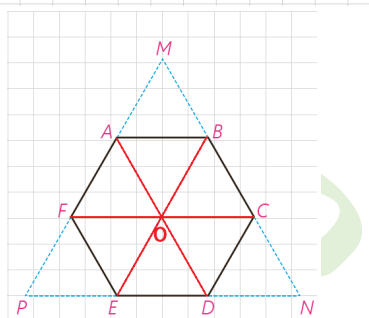
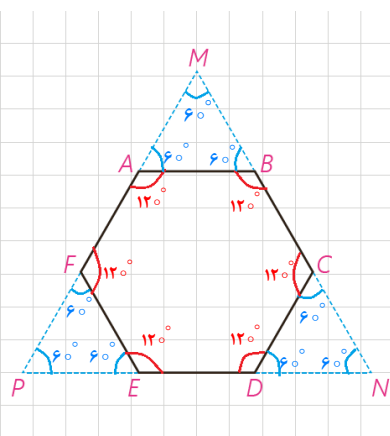
ED ، BC و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های

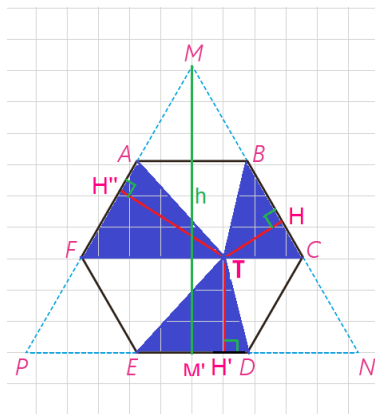
این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با

طول ارتفاع مثلث برابر است:

$$TH + TH' + TH'' = MM'$$





ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

$$S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{3} AF \cdot TH'' + \frac{1}{3} DE \cdot TH' + \frac{1}{3} BC \cdot TH$$

$$\xrightarrow{AF=ED=BC=a} S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{3} a (\underbrace{TH'' + TH' + TH}_h) = \frac{1}{3} ah$$

$$\Rightarrow S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{3} ah$$

$$S_{\triangle MNP} = \frac{1}{3} MN \cdot h \xrightarrow{MN=3a} S_{\triangle MNP} = \frac{3}{3} a \cdot h$$

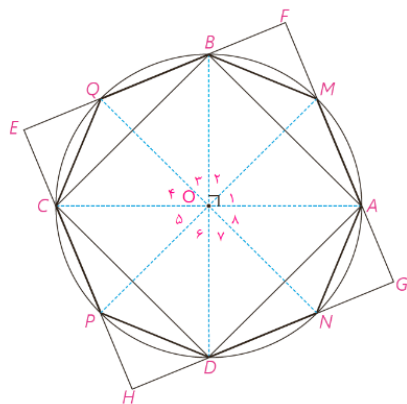
$$\Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{\frac{1}{3} ah}{\frac{3}{3} a \cdot h} \Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{1}{3}$$

مساحت مثل‌های آبی رنگ $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث MNP است و مساحت شش ضلعی $\frac{2}{3}$ مساحت مثلث MNP مساحت مثلث

های سفید و آبی برابر با مساحت شش ضلعی است پس مساحت مثلث‌های سفید هم برابر با $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ است بنا براین

مساحت مثلث‌های آبی با مساحت مثلث‌های سفید برابر است.

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$



۹- دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی

ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره

را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.

در چهارضلعی ABCD قطر همدیگر را نصف می‌کنند و باهم برابرند پس مستطیل

است و چون قطر‌ها برهم عمودند نتیجه می‌گیریم که مربع است.

عمود منصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس:

$$O_1 = O_2 = O_3 = O_4 = O_5 = O_6 = O_7 = O_8 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} = \widehat{BQ} = \widehat{QC} = \widehat{CP} = \widehat{PD} = \widehat{DN} = \widehat{NA}$$

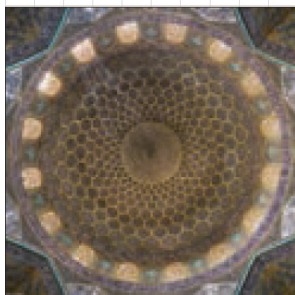
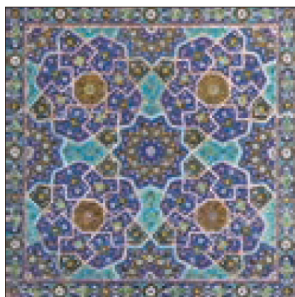
$$\Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$$

تبدیل‌های هندسی و کاربردها



عکس: محمدرضا دوسری گنجی

■ تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم‌نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیرالملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.



تبدیل‌های هندسی

در زندگی روزمره و بسیاری از پدیده‌های اطرافمان نظیر طراحی پارچه، نقش فرش، کاشی کاری، گچ‌بری و... شکل‌های مختلف، طبق الگویی خاص تکرار می‌شود. در این فصل وضعیت‌های مختلفی را که هر شکل مشخص در اثر حرکت مجموعه نقاطش در صفحه پیدا می‌کند، مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

این حرکت‌ها می‌تواند دارای ویژگی‌های خاص قابل تعریف باشد؛ حرکتی که سال‌های قبل با نمونه‌هایی از آن آشنا شده‌اید و با توجه به نوع این ویژگی‌ها، آنها را انتقال، بازتاب (تقارن محوری) یا دوران نامیده‌اید. انتقال، بازتاب و دوران را تبدیل‌های هندسی می‌نامیم.

تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب می‌تواند **موقعیت**^۱ (جایگاه شکل در صفحه) یا **اندازه**^۲ شکل را تغییر دهد.
تبدیل‌یافته یک شکل را، **تصویر** آن می‌نامیم.

در سال‌های گذشته با مفاهیم بازتاب، انتقال و دوران تا حدودی آشنا شدید. در این فعالیت، این تبدیل‌ها و برخی ویژگی‌های آنها را به‌طور شهودی مرور و یادآوری خواهیم کرد.

فعالیت

۱- به تصویر روبه‌رو دقت کنید.

اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافته چهارضلعی رنگ شده بدانیم:

الف) کدام چهارضلعی، انتقال یافته چهارضلعی رنگ شده است؟

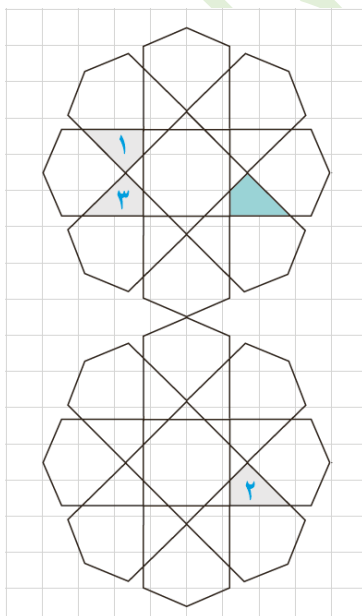
چهارضلعی ۲ انتقال یافته چهارضلعی رنگ شده است.

ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ شده است؟

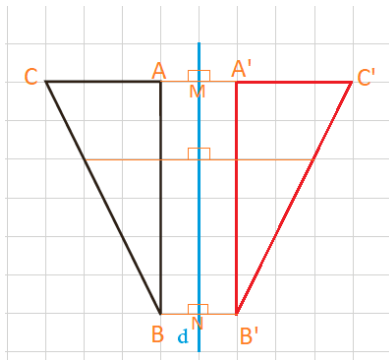
چهارضلعی ۳ بازتاب چهارضلعی رنگ شده است.

پ) کدام شکل، دوران یافته شکل رنگ شده است؟

چهارضلعی ۱ دوران یافته چهارضلعی رنگ شده است.



۲- الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.



(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟)

از هر رأس مثلث بر خط d عمودی رسم می‌کنیم و سپس به اندازه ی آن پاره خط امتداد می‌دهیم تا تصویرش به دست آید. ($AM = A'M$, $BN = B'N$, $CM = C'M$) سپس نقاط تصویر یعنی A' ، B' و C' را به هم وصل می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC است.

خط d عمود منصف پاره خطی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟ اندازه‌ها را چگونه؟

موقعیت شکل را تغییر می‌دهد اما اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

خیر شیب پاره خط BC با شیب پاره خط متناظرش $B'C'$ برابر نیست.

ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

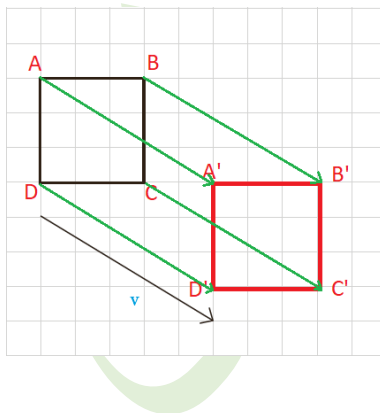
اگر خط مورد نظر موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد آنگاه شیب آن حفظ می‌شود

در شکل بالا همانطور که می‌بینیم پاره خط AC بخشی از خط عمود بر خط d است و تصویر آن نیز روی همان خط عمود قرار خواهد گرفت و به همین دلیل شیب پاره خط $A'C'$ با شیب پاره خط AC برابر است.

اگر خط مورد نظر موازی محور بازتاب باشد تصویرش هم با آن موازی است پس هم شیب خواهند شد.

۳- الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید

که چگونه این کار را انجام می‌دهید).



با توجه به بردار v باید رأس‌های مربع را ۵ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین انتقال بدهیم تا نقاط تصویر به دست آیند. واضح است که باتوجه به شکل بردارها یی که هر نقطه را به تصویرش برده است با بردار v برابر هستند. سپس نقاط تصویر را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم. مربع $A'B'C'D'$ انتقال یافته ی مربع $ABCD$ تحت بردار v است. در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، نسبت به هم

چه وضعیتی دارند؟

پاره خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند باهم موازی هستند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چگونه؟

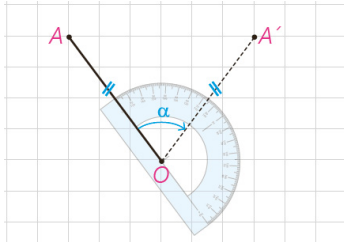
این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی‌کند ولی اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویرش برابر است.

ت) آیا در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می شود؟

در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می شود.



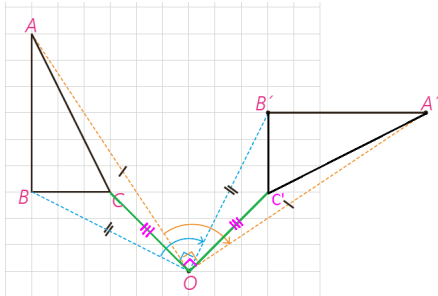
۴- در سال های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α ، کافی است هر نقطه از شکل، مثل نقطه A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره خطی به اندازه OA جدا کنیم تا نقطه A' به دست آید.

می خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O و 90° درجه در جهت

حرکت عقربه های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B

را دوران داده ایم.

الف) به همین ترتیب تصویر نقطه C را پیدا، و شکل را کامل کنید.



ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می کند؟ اندازه ها را چطور؟

این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی کند ولی اندازه ها را حفظ می کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب پاره خط اولیه با شیب پاره خط تصویر آن برابر است؟

در این تبدیل شیب پاره خط اولیه با شیب پاره خط تصویر آن برابر نیست.

ت) آیا می توانید زاویه دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را

حفظ کند؟

اگر زاویه دوران 0° ، 180° و یا 360° درجه انتخاب شود دوران تحت آن، شیب خط را حفظ می کند.

به طور شهودی می توان دید که بازتاب، انتقال و دوران، می توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه پاره خطها و زاویه ها را تغییر نمی دهند.

در ادامه این فصل با تبدیلی آشنا خواهید شد که در آن بر خلاف سه تبدیل صفحه

قبل، اندازه زاویه ها حفظ می شود ولی اندازه پاره خطها تغییر می کند. این تبدیل را تجانس می نامیم.

حال که به طور شهودی، برخی ویژگی های تبدیل های مختلف را مرور کردیم در ادامه

با دقت بیشتری به تعریف تبدیل، معرفی، ویژگی ها و کاربردهای آن خواهیم پرداخت.

تعریف: تبدیل T در صفحه P ، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P ، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطه A' از صفحه P ، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحه P است.
اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می‌نویسیم:

$$T: P \rightarrow P$$

$$T(A) = A'$$

پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که بازتاب، انتقال و دوران طول پاره خط را حفظ می‌کنند؛ یعنی اندازه پاره خطی مثل AB در شکل اولیه با اندازه پاره خط $A'B'$ در تصویر آن برابر است. این ویژگی را اصطلاحاً طولپایی یا ایزومتري می‌نامیم.

تعریف: تبدیل‌هایی که طول پاره خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتري) نامیده می‌شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ ، آن‌گاه داریم: $AB = A'B'$

پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که در تبدیل‌هایی که مرور شد، اندازه زاویه حفظ می‌شود. در این فعالیت با استدلال دقیق‌تری این ادعا را اثبات می‌کنیم.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می‌کند.
فرض کنید T تبدیلی طولپاست.
و داریم:

$$T(A) = A'$$

$$T(B) = B'$$

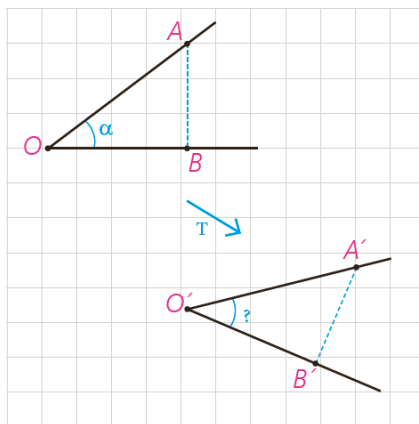
$$T(O) = O' \text{ و } \widehat{AOB} = \alpha$$

دلیل همنهشتی دو مثلث OAB و $O'A'B'$ را بنویسید و از آنجا برابری زاویه‌های

AOB و $A'O'B'$ را نتیجه بگیرید.

چون این تبدیل طولپا است پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ OA = O'A' \\ OB = O'B' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} = \alpha$$



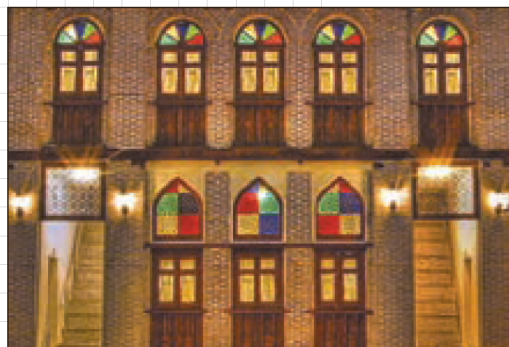
بنابراین می توان نتیجه گرفت :

قضیه: در هر تبدیل طولیا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است.

در تبدیل های مطرح شده در این کتاب، می توان ثابت کرد که تبدیل یافته هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل یافته یک خط، کافی است تبدیل یافته دو نقطه دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم.

حال با استدلال دقیق تری بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را بررسی خواهیم کرد.

■ بازتاب



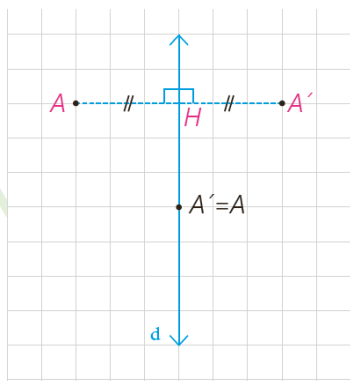
همان طور که پیش از این اشاره شد برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می دهیم تا A' به دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می نامیم و می نویسیم :

$$S'(A) = A'$$

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.

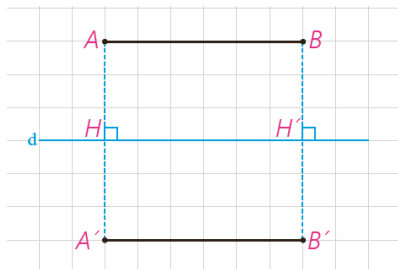
خط d، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می شود.

اگر نقطه ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می شود؛ به عبارتی A' همان A است.



تعریف: در هر تبدیل، نقطه ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می شود، نقطه ثابت تبدیل می نامند.

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.



می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیل طولیا است. حالت‌های مختلف یک پاره‌خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازه پاره‌خط با اندازه تصویر آن برابر است.

الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است. بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم. چرا $A'B'$ با خطوط d و AB موازی است؟

می‌دانیم مستطیل چهار ضلعی است که همه زاویه‌های آن قائمه باشد.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel d, AH \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ AB \parallel d, BH' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{B} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow ABH'H \text{ مستطیل است}$$

در هر مستطیل اضلاع مقابل با هم برابرند پس:

$$\left. \begin{array}{l} AH = BH' \Rightarrow 2AH = 2BH' \xrightarrow{AH=AH', BH'=BH'} AA' = BB' \\ AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow ABB'A' \text{ متوازی الاضلاع است}$$

در نتیجه: AB' موازی AB است.

$$\left. \begin{array}{l} A'B' \parallel AB \\ AB \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow A'B' \parallel d$$

از طرفی متوازی الاضلاع $ABB'A'$ زاویه قائمه دارد:

پس چهارضلعی $ABB'A'$ یک ... **مستطیل** ... است و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که اضلاع روبه‌رو، دو به دو هم‌اندازه‌اند؛ یعنی: $AB = A'B'$.

ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط داده شده روی خط بازتاب باشد.

(اگر هر دو نقطه ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)

خوب در این حالت بازتاب پاره خط MA بر روی خط و بر روی خودش منطبق است.

$$S(M) = M, S(A) = A' \Rightarrow MA = MA'$$

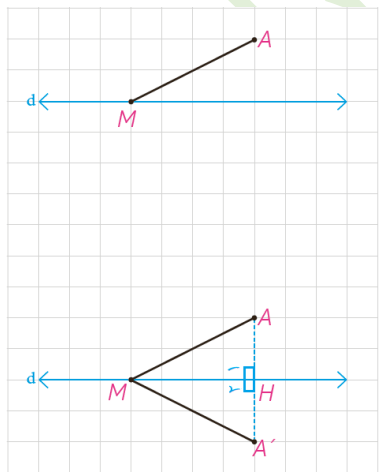
بازتاب A نسبت به خط d ، نقطه A' و بازتاب M ، خود M است.

به عبارتی: $S(M) = M$ و $S(A) = A'$

آیا می‌توانید به کمک هم نهستی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA = MA'$ ارائه

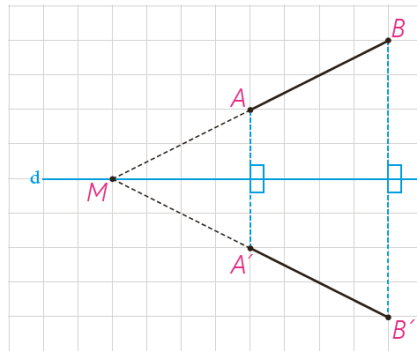
کنید؟

$$\left. \begin{array}{l} AH = A'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ MH = MH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle MAH \cong \triangle MA'H \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} MA = MA', \widehat{AMH} = \widehat{A'MH}$$



آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره خط کمک بگیرید.)

خط d عمود منصف پاره خط AA' است؛ بنا براین هر نقطه مانند M روی خط d از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله است. یعنی: $MA = MA'$



(پ) در حالتی که پاره خط AB با خط بازتاب d ، نه موازی و نه متقاطع باشد، پاره خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطه M قطع کند. نقطه B' بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا، و پاره خط MB' را رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط MB' واقع می‌شود؛ چرا؟

با توجه به قسمت (ب) می‌دانیم که $MB = MB'$ پس مثلث متساوی الساقین است و چون خط d عمود منصف BB' است با توجه به قضایای متساوی الساقین d نیمساز زاویه BMB' نیز هست. بنا براین $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

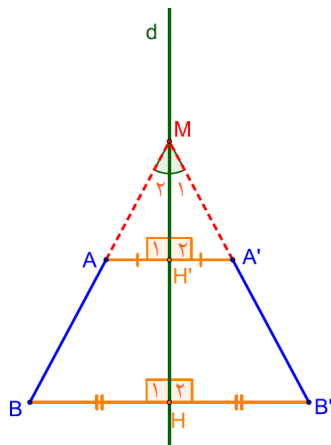
از نقطه A موازی پاره خط BB' خطی رسم می‌کنیم تا MB' را در نقطه A' قطع کند. حالا باید ثابت کنیم که A' تصویر نقطه A نسبت به خط بازتاب d است یعنی:

$$AH' = A'H', \quad H' = H'_\perp = 90^\circ$$

راه اول: در مثلث MAA' پاره خط MH' هم نیمساز است و هم ارتفاع پس مثلث

متساوی الساقین است. و در نتیجه MH' میانه نیز هست پس: $AH' = A'H'$

راه دوم:



$$AA' \parallel BB', \quad d \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} H = H' = 90^\circ$$

$$\Rightarrow H'_1 = H'_2 = 90^\circ$$

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

$$MH' = MH$$

$$\left. \begin{array}{l} H'_1 = H'_2 = 90^\circ \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ MH' = MH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر (ز ض ز)}} \triangle MAH' \cong \triangle MA'H' \xrightarrow{\text{نظیر}} AH' = A'H'$$

بنا براین: $AH' = A'H', \quad H'_1 = H'_2 = 90^\circ$ و حکم ثابت شد.

راه دیگر برای پاسخ به (چرا):

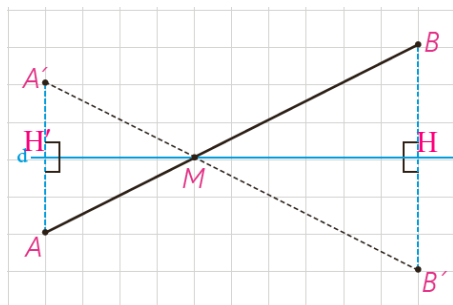
H وسط BB' و H' وسط AA' است بنا برتعریف بازتاب نقاط H و H' روی خط d یعنی خط بازتاب هستند. با توجه به بند

(ب) خط d نیمساز زاویه های BMB' و AMA' است.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AMH'} = \widehat{BMH} \\ \widehat{A'MH'} = \widehat{AMH} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A'MH'} = \widehat{BMH} \quad \left. \begin{array}{l} \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'} \\ \widehat{B'MH} = \widehat{BMH} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'}$$

یک ضلع (MH و MH') و رأس این دو زاویه برهم منطبق است پس اضلاع دیگر هم یعنی MA' و MB' بر هم منطبق هستند.

حال داریم :



$$\left. \begin{array}{l} AB = MB - \mathbf{MA} \\ A'B' = \mathbf{MB'} - \mathbf{MA'} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$$

با توجه به قسمت ب $MA = \mathbf{MA'}$ و $MB = \mathbf{MB'}$

ت) در حالتی که پاره خط AB خط بازتاب را در نقطه ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می کنیم و آن را نقطه A' می نامیم.

پاره خط MA' را رسم می کنیم و امتداد می دهیم و ادعا می کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟

H وسط BB' و H' وسط AA' است بنا بر تعریف بازتاب نقاط H و H' روی خط d یعنی خط بازتاب هستند. با توجه به بند

ب) خط d نیمساز زاویه های BMB' و AMA' است.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AMH'} = \widehat{BMH} \\ \widehat{A'MH'} = \widehat{AMH'} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A'MH'} = \widehat{BMH} \quad \left. \begin{array}{l} \widehat{B'MH} = \widehat{BMH} \\ \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'}$$

یک ضلع (MH) و رأس این دو زاویه برهم منطبق است پس اضلاع دیگر هم یعنی MA' و MB' بر هم منطبق هستند.

حال داریم :

$$\left. \begin{array}{l} AB = AM + \mathbf{MB} \\ A'B' = \mathbf{A'M} + \mathbf{B'M} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{A'B'}$$

با توجه به قسمت ب $AM = \mathbf{A'M}$ و $MB = \mathbf{MB'}$

نتیجه این مراحل را می توان در قالب این قضیه بیان کرد :

قضیه: در هر بازتاب، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می دهد که بازتاب، تبدیل طولها است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

فعالیت

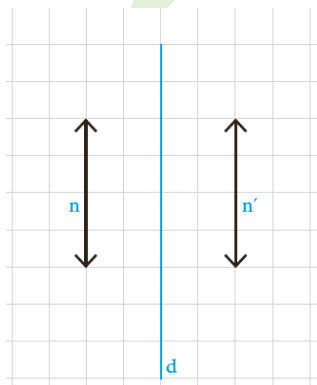
می خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می کند.

مسئله را برای دو حالت کلی در نظر می گیریم : وقتی خط داده شده با خط بازتاب

موازی باشد و وقتی با آن موازی نباشد.

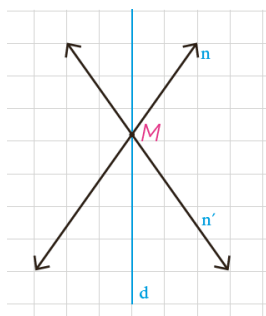
الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n'

می نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟



خط n موازی خط بازتاب d است. دونقطه دلخواه مانند A و B را روی n انتخاب می کنیم. بنا بر قسمت (الف) فعالیت قبل می دانیم که تصویر پاره خط AB نسبت به خط بازتاب d یعنی پاره خط $A'B'$ با پاره خط AB و خط d موازی است از طرفی چون خط n' تصویر خط n است پس حتما نقاط A' و B' نیز روی خط n' قرار دارند در نتیجه خط n' موازی n و d است.

وقتی دو خط موازی باشند در صورت وجود شیب، شیب ها با هم برابرند پس شیب حفظ می شود و وقتی که شیب برای یکی از آن ها تعریف نشود برای دیگری نیز تعریف نمی شود. پس در این حالت بازتاب شیب خط را حفظ می کند.



ب) اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد، خط های d ، n و n' در نقطه ای مثل M متقاطع می شوند؛ پس n و n' موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را **حفظ نمی کند**... بنابراین؛

در حالت کلی، بازتاب شیب خط را **حفظ نمی کند**..

دیدیم که طولیها اندازه زاویه را هم حفظ می کنند. بنابراین به طور کلی هر چندضلعی و تصویر آن تحت تأثیر یک طولی از جمله بازتاب با هم همنهشت هستند. در ادامه به کمک ویژگی های انتقال و دوران ثابت می کنیم که این دو تبدیل نیز طولیها هستند.

کاردکلاس

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :

الف) وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به خط d ، کدام نقطه است؟ A ... چرا؟

چون خط d عمود منصف پاره خط AA' است بنا براین: $AA' \perp d$ ، $A'H = AH$ پس اگر از A' بر خط d عمود کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم نقطه A به دست می آید.

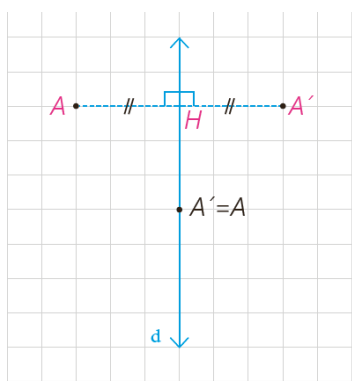
ب) قرینه قرینه هر نقطه چیست؟ **خود آن نقطه است.**

در واقع: $A \dots A \dots S(A) = S(A) = S(A) = \dots A$ و به زبان ساده تر $A' = A$

پ) در هر بازتاب تبدیل یافته یک مثلث، یک **مثلث** است که با مثلث اولیه **همنهشت**... است.

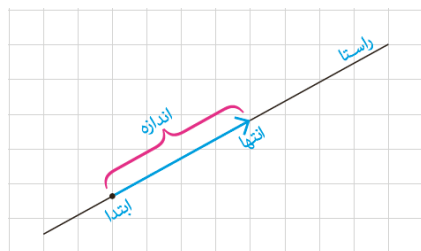
ت) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب **موازی** باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می کند.

ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافته تمام نقاط روی خط، **روی خط** d ... است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب **بیشمار**... است.



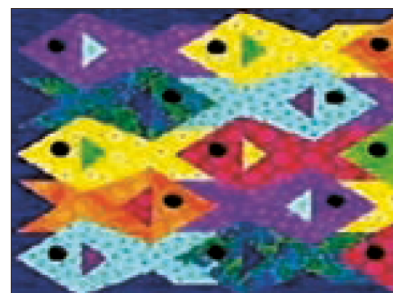
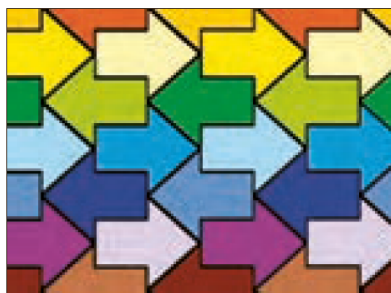
انتقال

یادآوری

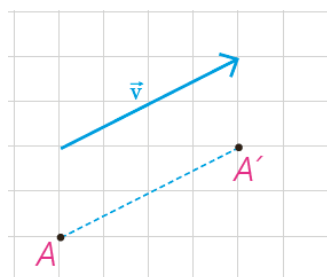


۱- در شکل مقابل یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.

۲- دو بردار، که هم اندازه، هم راستا و هم جهت باشند، دو بردار برابر هستند.



در سال‌های گذشته دیدید که برای انتقال دادن یک شکل، کافی است تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم؛ یعنی اگر نقطه A' تصویر نقطه A باشد، آن گاه $\vec{AA'} = \vec{v}$



تعریف: انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\vec{AA'} = \vec{v}$

فعالیت

۱- می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولپاست.

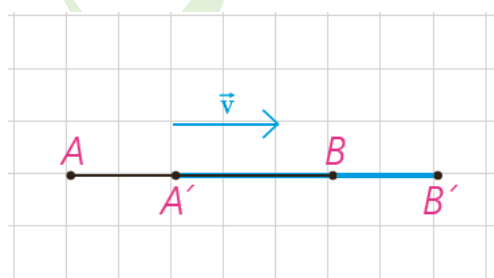
الف) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد، تبدیل یافته AB را با بردار $\vec{v}$ رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید: $AB = A'B'$.

راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

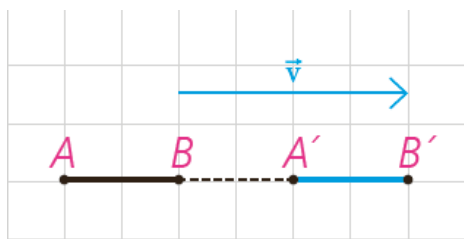
A' تصویر A است پس بنا به تعریف انتقال $\vec{AA'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط AA' مساوی طول بردار $\vec{v}$ و با آن موازی است.
 B' تصویر B است پس بنا به تعریف انتقال $\vec{BB'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط BB' مساوی طول بردار $\vec{v}$ و با آن موازی است.
 در نتیجه AA' موازی و مساوی BB' است و بنا بر راهنمایی داده شده نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است پس $AB = A'B'$.

ب) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید: $AB = A'B'$.

(۱)



$$\left. \begin{aligned} AB &= AA' + A'B \\ A'B' &= A'B + BB' \\ AA' &= BB' \text{ (طبق تعریف انتقال)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$



$$\left. \begin{aligned} AB &= AA' - BA' \\ A'B' &= BB' - BA' \\ AA' &= BB' \text{ (طبق تعریف انتقال)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

تذکره: در حالتی که طول بردار v با پاره خط AB برابر است به کمک هر یک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

قضیه: در هر انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولها است و برای هر دو نقطه

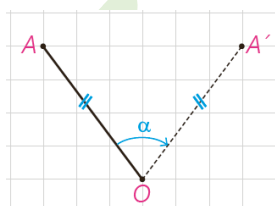
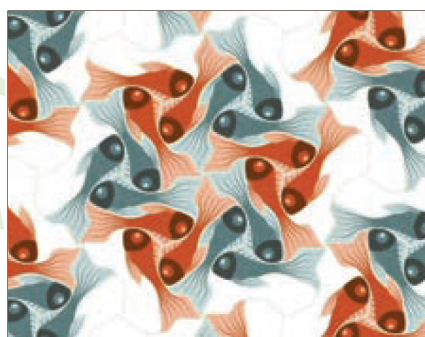
A و B از صفحه P که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

۲- در هر یک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

در حالت (الف) نتیجه گرفتیم که چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی الاضلاع است پس $AB \parallel A'B'$ در نتیجه شیب خط‌ها یکی است.

در حالت (ب) و (پ) هر پاره خط و تصویرش بر روی یک خط قرار دارند به عبارتی نقاط A, B, B', B هم خط هستند. پس شیب آن‌ها هم برابر است.

دوران

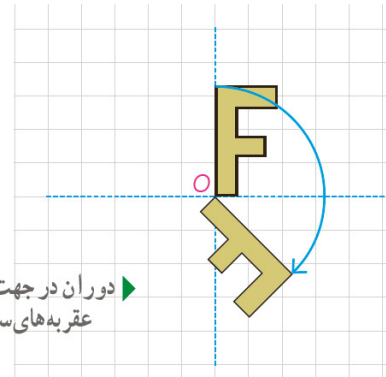
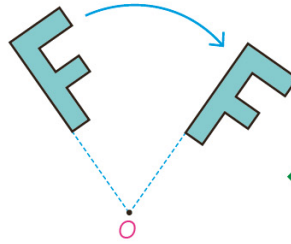
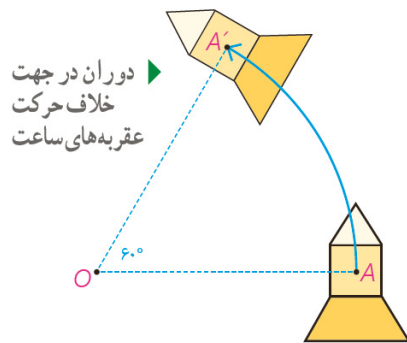


دیدیم که برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α ، هر نقطه از شکل، مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می‌کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم کرده، و روی ضلع دیگر این زاویه، پاره خطی به اندازه OA جدا می‌کنیم تا A' به دست آید.

بدین ترتیب:

تعریف: دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم:

$$OA = OA' \text{ و } \widehat{AOA'} = \alpha$$



می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیل طولپاست.

برای دوران دادن هر پاره خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A' و B' حاصل شود. پاره خط $A'B'$ را رسم می‌کنیم.

مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم:

الف) مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران زاویه $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد.

با توجه به شکل $O_1 + O_2 = O_3 + O_4 = \alpha$

پس می‌توان مدعی شد که $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$

به کمک همنهشتی دو مثلث OAB و $OA'B'$ نشان دهید AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

با توجه به تعریف دوران $\left\{ \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \xrightarrow{\text{ض ض ض}} AB = A'B'$

ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره خط AB واقع نباشد ولی زاویه دوران

از زاویه $\widehat{AOB}$ کمتر باشد، باز هم تساوی $AB = A'B'$ برقرار است.

تذکره: در حالتی که $\widehat{AOB}$ با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق

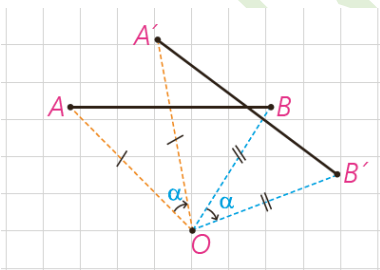
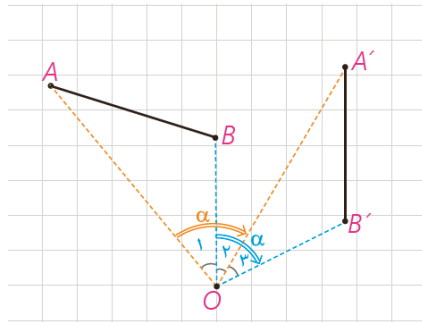
می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.

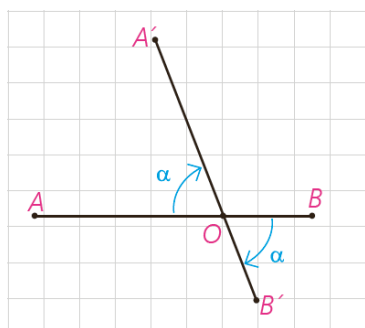
با توجه به شکل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AOB} = \alpha + \widehat{A'OB} \\ \widehat{A'OB'} = \alpha + \widehat{A'OB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$

در نتیجه:

با توجه به تعریف دوران $\left\{ \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \xrightarrow{\text{ض ض ض}} AB = A'B'$

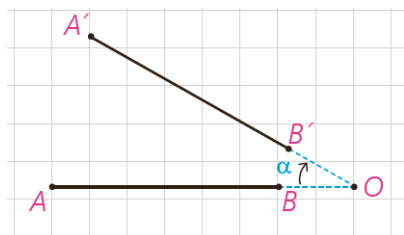




پ) اگر نقطه O روی پاره خط AB باشد :

$$\left. \begin{aligned} AB &= AO + OB \\ A'B' &= A'O + OB' \\ AO &= A'O \text{ و } OB = OB' \text{ طبق تعریف دوران} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطه O روی امتداد پاره خط AB باشد، حکم برقرار است.



$$\left. \begin{aligned} AB &= AO - OB \\ A'B' &= A'O - OB' \\ AO &= A'O \text{ و } OB = OB' \text{ طبق تعریف دوران} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین :

قضیه: در هر دوران، اندازه هر پاره خط و تصویر آن با هم برابرند.

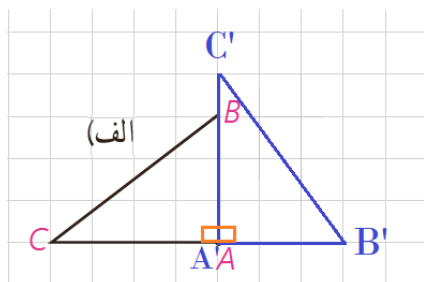
به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیل طولها است و برای هر دو نقطه A

و B از صفحه P که $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

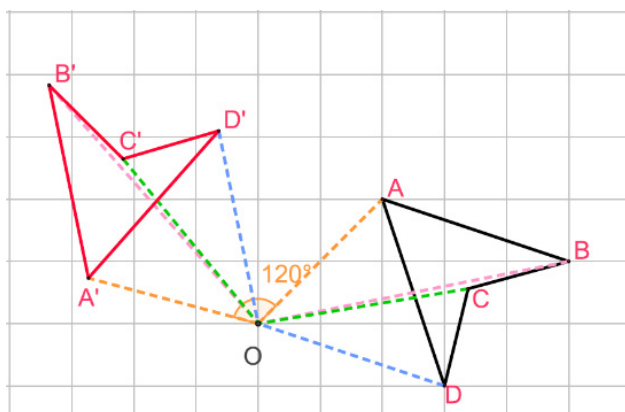
کاردرکلاس

دوران یافته هر شکل را رسم کنید.

الف) دوران به مرکز A و با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

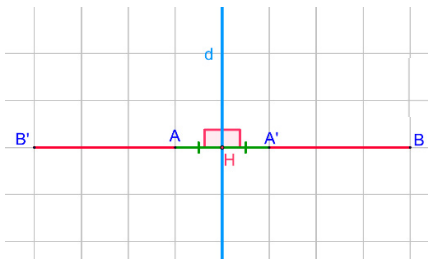


ب) دوران به مرکز O و با زاویه 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت



۱- در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید

که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم اندازه‌اند.



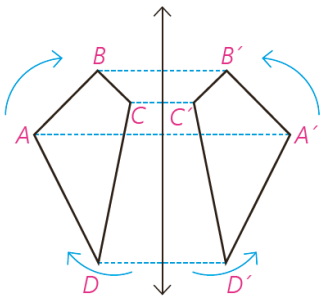
بنابر تعریف بازتاب $B'H = BH \Rightarrow B'A + AH = BA' + A'H \xrightarrow{AH=A'H} B'A = BA'$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AA' + A'B \\ A'B' = AA' + B'A \\ B'A = BA' \end{array} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

۲- در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی $ABCD$

تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B ، C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟

جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. خیر نمی‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند.



۳- در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2

رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA'' = 2m$

$$AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A'' \xrightarrow{AH=HA', A'H'=H'A''} AA'' = 2HA' + 2A'H' \\ \Rightarrow AA'' = 2(\underbrace{HA' + A'H'}_m) \Rightarrow AA'' = 2m$$

ب) اندازه BB'' و CC'' چقدر است؟

بنابر اثبات قسمت الف به روش مشابه نتیجه می‌گیریم که: $BB'' = CC'' = 2m$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

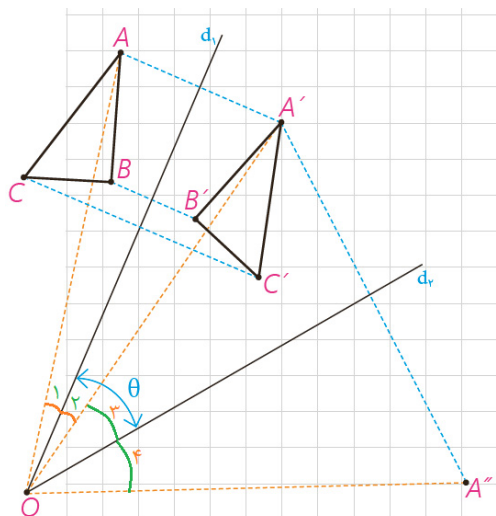
با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازه آن دو برابر فاصله y بین دو خط بازتاب d_1 و d_2 یعنی $2m$ و راستای آن عمود بر این

دو خط است، می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتابی که محورهای بازتاب موازی یکدیگر هستند یک انتقال است.

۴- در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = 2\theta$



خط d_1 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه AOA' است یعنی: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

خط d_2 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه $A'OA''$ است یعنی: $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

$$\widehat{AOA''} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 \xrightarrow[\hat{O}_2 = \hat{O}_3]{\hat{O}_1 = \hat{O}_2} \widehat{AOA''} = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3$$

$$\Rightarrow \widehat{AOA''} = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) \Rightarrow \widehat{AOA''} = 2\theta$$

ب) اندازه $\widehat{BOB''}$ و $\widehat{COC''}$ چقدر است؟

بنا بر اثبات الف به روش مشابه: $\widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = 2\theta$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه

نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با دورانی به مرکز O نقطه‌ی برخورد دو خط بازتاب d_1 و d_2 و زاویه‌ای به اندازه‌ی دو برابر زاویه بین دو خط (2θ) می‌توان

مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.

■ تجانس



در شکل‌های متشابه دیدید که طول پاره‌خط‌ها الزاماً با هم یکسان نیستند؛ اما با یک نسبت، اندازه همه پاره‌خط‌ها بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شوند. ساده‌ترین تبدیل از این نوع را تجانس می‌نامیم. در تجانس ابعاد شکل با نسبت $k \neq 0$ ، آن را نسبت تجانس (مقیاس) می‌نامیم، بزرگ یا کوچک می‌شود.

تعریف دقیق‌تر تجانس بدین شکل است:

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(الف) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند.

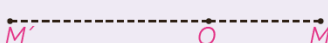
(ب) $OM' = |k|.OM$

– اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

$k = 2$  $OM' = 2 OM$ **مثال:**

$k = \frac{1}{2}$  $OM' = \frac{1}{2} OM$

– اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

$k = -2$  $OM' = 2 OM$ **مثال:**

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k ، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM ، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM' = k.OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطه M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطه O بین نقاط M و M' باشد و $OM' = |k|.OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k و نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

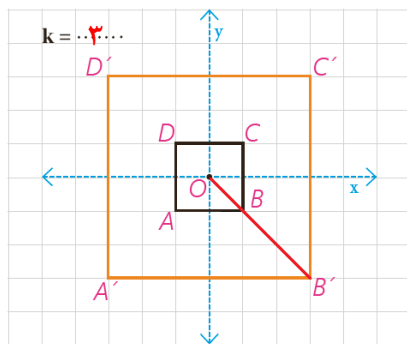
اگر در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k باشد آنگاه:

$$k > 0 \Rightarrow OM' = k.OM \xrightarrow{\times \frac{1}{k}} \frac{1}{k}.OM' = OM$$

$$k < 0 \Rightarrow OM' = |k|.OM \xrightarrow{\times \frac{1}{|k|}} \frac{1}{|k|}.OM' = OM$$

بنابراین نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است.

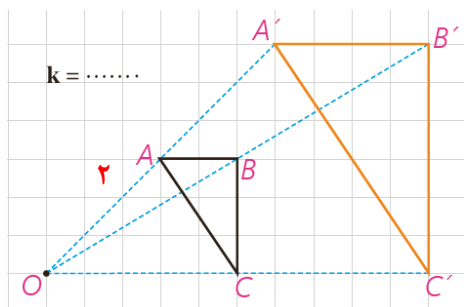
فعالیت



۱- این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.

(الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

با توجه به تعریف تجانس نقاط B و B' در یک طرف O قرار دارند پس $k > 0$



در نتیجه: $OB' = k \cdot OB \Rightarrow k = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = 3$

$OC' = k \cdot OC \Rightarrow k = \frac{OC'}{OC} \Rightarrow k = \frac{10}{5} \Rightarrow k = 2$

(ب) آیا تجانس طولی است؟ چرا؟

خیر زیرا اندازه پاره خط ها حفظ نمی شود.

(پ) در این شکل ها، طول هر پاره خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید. به چه

نتیجه ای می توان رسید؟

در مربع: $A'B' = 3AB$, $B'C' = 3BC$, $C'D' = 3CD$, $D'A' = 3DA$
طول تصویر هر پاره خط ۳ برابر شده و درواقع این عدد همان نسبت تجانس است.
همچنین محیط شکل نیز ۳ برابر می شود.

$A'B' = 3AB$, $B'C' = 3BC$

در مثلث: $AC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $A'C' = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow A'C' = 2AC$

طول تصویر هر پاره خط ۲ برابر شده و درواقع این عدد همان نسبت تجانس است.
همچنین محیط شکل نیز ۲ برابر می شود.

(ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

در مثلث: $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4 \times 6}{\frac{1}{2} \times 2 \times 3} = 4 = 2^2$

در مربع: $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{36}{4} = 9 = 3^2$

مساحت تصویر یک شکل نسبت به مساحت آن شکل برابر با توان دوم نسبت تجانس است.

۲- در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به عبارتی: $k > 1$.

حال مسئله را برای مقادیر مختلف k بررسی می کنیم.

الف) در هر حالت مراحل باقی مانده را کامل کنید.

k	$k = 1$	$0 < k < 1$	$-1 < k < 0$
مثال			
k	$k = -1$	$k < -1$	
مثال			

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت

را مشخص کنید :

طولپاست	اندازه زاویه حفظ می شود.	شیب خط حفظ می شود.	جهت شکل حفظ می شود.	مساحت شکل حفظ می شود.
$k > 1$	نادرست	درست	درست	نادرست
$k = 1$	درست	درست	درست	درست
$0 < k < 1$	نادرست	درست	درست	نادرست
$-1 < k < 0$	نادرست	درست	درست	نادرست
$k = -1$	درست	درست	درست	درست
$k < -1$	نادرست	درست	درست	نادرست

تجانس

پ) شرط اینکه تجانس طولیا باشد، این است که $k = 1$ یا $k = -1$ به عبارتی $|k| = 1$

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می کند، یعنی خطوط AA' ، BB'

و... نسبت به هم چه وضعی دارند؟

این خطوط در مرکز تجانس یعنی نقطه O هم‌رسند.

در تجانس به مرکز O و نسبت k :

اگر $k > 0$ تجانس را، **تجانس مستقیم** می‌نامیم.

اگر $k < 0$ تجانس را **تجانس معکوس** می‌نامیم.

اگر $|k| < 1$ تصویر شکل **کوچک‌تر** می‌شود و آن را **انقباض** می‌نامیم.

اگر **بزرگ‌تر** تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را **انبساط** می‌نامیم.

حال که به طور شهودی با تجانس و چگونگی عملکرد آن روی شکل‌های هندسی آشنا شدید با استدلال دقیق‌تری ثابت خواهیم کرد که تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط و اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

فعالیت

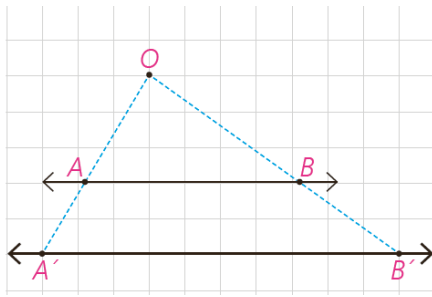
می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور،

تجانس D ، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم؛ دو حالت اتفاق می‌افتد :

الف) نقطه O روی خط AB است.

حل : در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B ،

روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.



ب) نقطه O غیر واقع بر خط AB است.

حل: در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم:

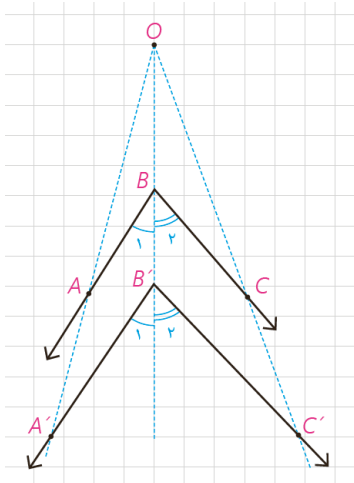
$$\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k.$$

بنا بر عکس قضیه تالس (چرا؟) $\Rightarrow AB \parallel A'B'$

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن باهم موازی اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین:

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می کند.

فعالیت



می خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازه زاویه را حفظ می کند.

تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه $\widehat{ABC}$ را در نظر می گیریم.

مجانس این زاویه، یعنی زاویه $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می کنیم.

به کمک قضیه قبل و شکل داده شده، ثابت کنید: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

با توجه به شکل و قضیه قبل داریم:

(۱) $\widehat{B}_1 = \widehat{B}'_1$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا بر قضیه خطوط موازی

(۲) $\widehat{B}_2 = \widehat{B}'_2$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا بر قضیه خطوط موازی

در نتیجه از جمع دو طرف رابطه ی (۱) و (۲) داریم: $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{B}'_1 + \widehat{B}'_2 \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

نتیجه این فعالیت را در قالب قضیه زیر مطرح می کنیم:

قضیه: تجانس، اندازه زاویه را حفظ می کند.

کاردکلاس

۱- الف) فرض کنید پاره خط $A'B'$ مجانس پاره خط AB در تجانس به مرکز

O و نسبت k باشد؛ نشان دهید: $\frac{A'B'}{AB} = |k|$

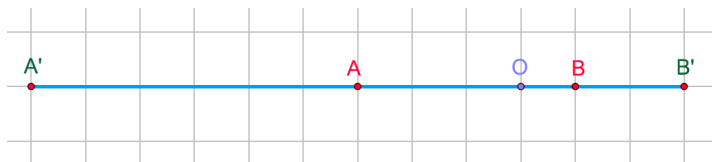
(۱) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه:

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{\frac{OA'}{OB'} = \frac{k.OA}{k.OB}} A'B' = |k|.OA + |k|.OB = |k|(\underbrace{OA + OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



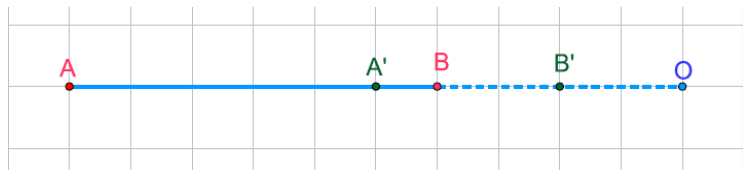
(۲) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{OA' = k.OA, OB' = k.OB} A'B' = k.OA + k.OB = k(\underbrace{OA + OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



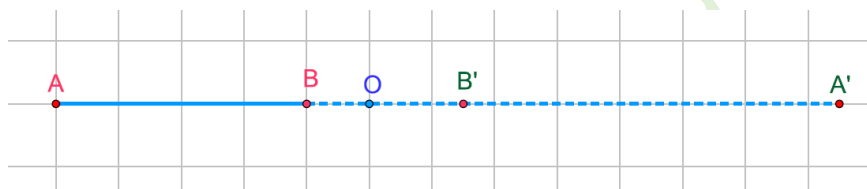
(۳) در این حالت نقطه O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{OA' = k.OA, OB' = k.OB} A'B' = k.OA - k.OB = k(\underbrace{OA - OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



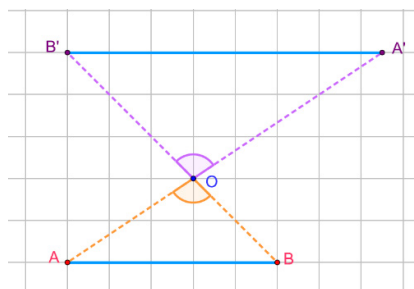
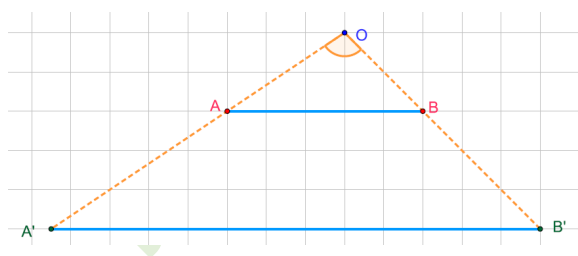
(۴) در این حالت نقطه O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{OA' = |k|.OA, OB' = |k|.OB} A'B' = |k|.OA - |k|.OB = |k|(\underbrace{OA - OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



(۵) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$\left. \begin{array}{l} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$



(۶) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$\left. \begin{array}{l} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث}} \triangle AOB \sim \triangle A'OB' \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k \\ \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB} \end{array} \right.$$

ب) اگر n ضلعی $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ مجانس n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو n ضلعی با هم متشابه اند.

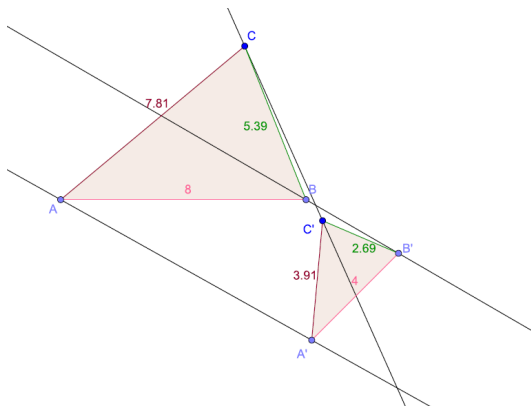
فرض کنیم $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ یک n ضلعی و نقطه ی O مرکز تجانس و k نسبت تجانس باشد

و چند ضلعی $A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$ مجانس آن باشد بنا بر تعریف تجانس داریم :

$$\left. \begin{aligned} OA'_1 &= |k| OA_1 \\ OA'_2 &= |k| OA_2 \\ OA'_3 &= |k| OA_3 \\ &\vdots \\ OA'_n &= |k| OA_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA'_1}{OA_1} = \frac{OA'_2}{OA_2} = \frac{OA'_3}{OA_3} = \dots = \frac{OA'_n}{OA_n} = |k|$$

پس چون اضلاع همه متناسب هستند بنا بر قضیه ۳ تشابه نتیجه می گیریم که این دو چند ضلعی متشابه اند.

۲- با توجه به ویژگی های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.



کافی است که دو شکل متشابه رسم کنیم که وقتی هر نقطه را به تصویرش وصل می کنیم و امتداد می دهیم همرس نشوند. به این ترتیب مرکز تجانس وجود نخواهد داشت و در این صورت تجانسی هم در کار نیست.

در شکل مقابل مثلث های ABC و $A'B'C'$ متشابه اند اما متجانس نیستند

فعالیت

پیش از این دیدیم که اگر نقطه ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A) = A' = A$ ؛ این نقاط را نقاط **ثابت** **تبدیل**... نامیدیم. اما برخی از تبدیل ها، هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می کند؛ چنین تبدیل هایی را تبدیل همانی می نامیم.

تعریف: تبدیل T را **تبدیل همانی** گوییم، هر گاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$.

معمولاً تبدیل های همانی را با I نمایش می دهند؛ پس $I(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A ، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

انتقال زمانی همانی است که بردار انتقال برابر با بردار صفر باشد.

دوران زمانی تبدیل همانی است که زاویه دوران صفر درجه یا ۳۶۰ درجه باشد.

تجانس زمانی تبدیل همانی است که در آن $k=1$.

ب) آیا تبدیل همانی طولیاست؟

بله تبدیل همانی یک تبدیل طولی است زیرا هر نقطه را به خود آن نقطه تصویر می‌کند.

اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند و تحت یک تبدیل همانی بخواهیم تصویر آن‌ها را بیابیم داریم:

$$T(A) = A, T(B) = B \Rightarrow AB = AB$$

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل

داشت؟

۱- انتقال غیرهمانی:

خیر نمی‌توان نقاط ثابت داشت یا به عبارتی هر نقطه باید تحت یک بردار غیر صفر در صفحه بلغزد و نمی‌تواند بر روی خودش بلغزد.

۲- دوران غیرهمانی:

اگر نقطه‌ی مورد نظر روی مرکز دوران باشد تحت هر دورانی ثابت می‌ماند. پس مرکز دوران نقطه‌ی ثابت تبدیل است.

۳- تجانس غیرهمانی:

اگر نقطه مورد نظر روی مرکز تجانس باشد تصویرش روی خودش قرار می‌گیرد. پس مرکز تجانس نقطه‌ی ثابت تبدیل است.

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

طول پاره خط را حفظ می کند.	اندازه زاویه را حفظ می کند.	شیب خط را حفظ می کند.	جهت شکل را حفظ می کند.	مساحت شکل را حفظ می کند.	
درست	درست	نادرست	نادرست	درست	بازتاب
درست	درست	درست	درست	درست	انتقال
درست	درست	نادرست	درست	درست	دوران
نادرست	درست	درست	درست	نادرست	تجانس



تمرین

۱- در تجانسی با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می کند.

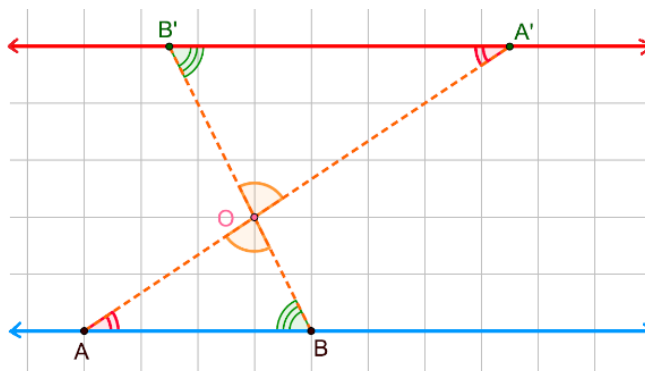
(۱) درحالتی که نقطه O روی خط AB قرار دارد و $k < 0$ بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس های نقاط A و B

روی خط AB واقع می شوند؛ بنا براین A'B' بر AB واقع است و شیب تغییر نمی کند.

(۲) در حالتی که نقطه O روی خط AB قرار ندارد و $k < 0$ در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب ، مجانس های

نقاط A و B باشند ، طبق تعریف داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \left\{ \begin{array}{l} \text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث} \\ \triangle AOB \sim \triangle A'OB' \Rightarrow \widehat{OB'A'} = \widehat{OBA}, \widehat{OA'B'} = \widehat{OAB} \\ \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB} \end{array} \right.$$



پس بنا برعکس قضیه خطوط موازی خط AB موازی خط A'B' است . و شیب خط ها در صورت وجود باهم برابر است.

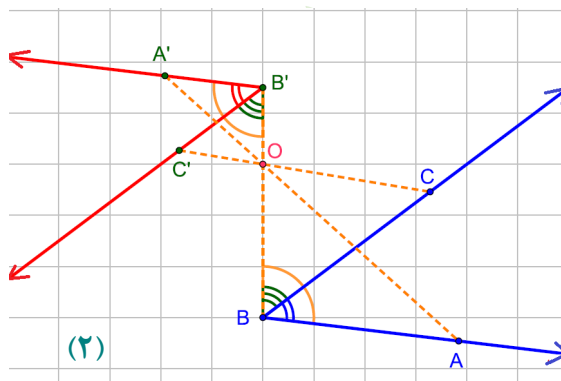
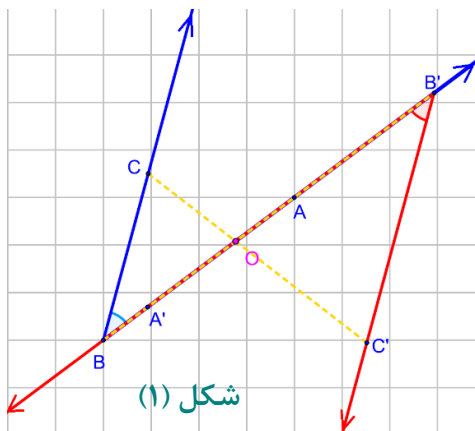
ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می کند.

زاویه $\widehat{ABC}$ را در صفحه در نظر می گیریم :

(۱) اگر نقطه O روی رأس زاویه یعنی نقطه B باشد آنگاه مجانس زاویه یعنی $\widehat{A'BC'}$ روی خود $\widehat{ABC}$ منطبق می شود. پس اندازه ی آن حفظ می شود.

(۲) اگر نقطه O روی یکی از اضلاع باشد مانند شکل (۱) آنگاه با توجه به قضیه، تجانس شیب خط را حفظ می کند پس:

$$BC \parallel B'C', BB' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$



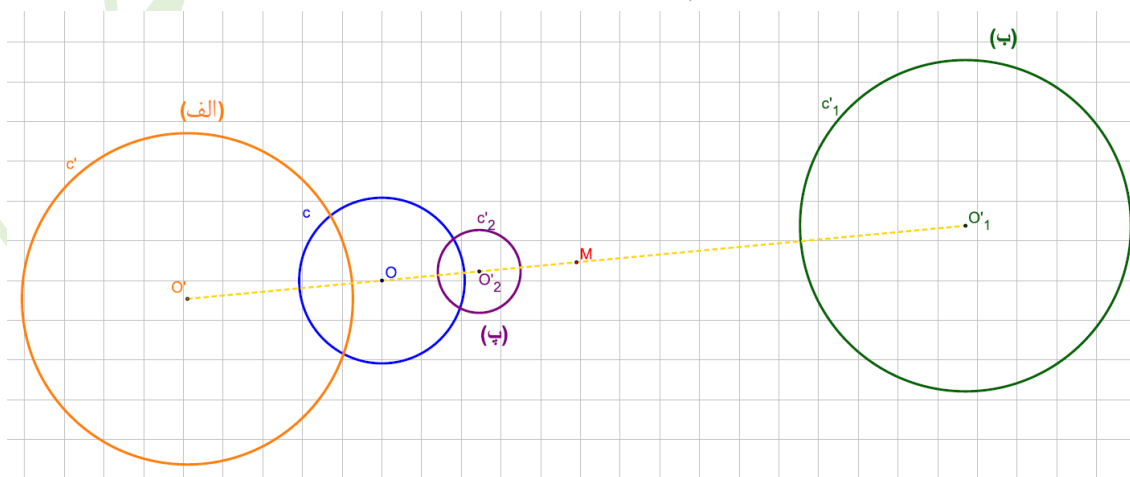
(۳) اگر نقطه O نه روی اضلاع و نه روی رأس زاویه باشد مانند شکل (۲) با توجه به بند قبلی، تجانس شیب خط را حفظ می کند پس :

$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel B'C', BB' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{CBB'} = \widehat{C'B'B} \\ AB \parallel A'B', BB' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABB'} = \widehat{A'B'B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABB'} - \widehat{CBB'} = \widehat{A'B'B} - \widehat{C'B'B} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

۲- دایره $C(O, R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را

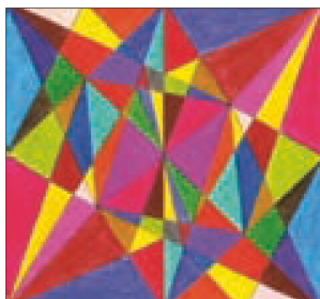
نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید.

الف) $k=2$ ب) $k=-2$ پ) $k=\frac{1}{2}$





تصاویر زیر، نمونه‌هایی از نقاشی‌های دانش‌آموزان است که استفاده از بازتاب در آن نقشی عمده دارد.



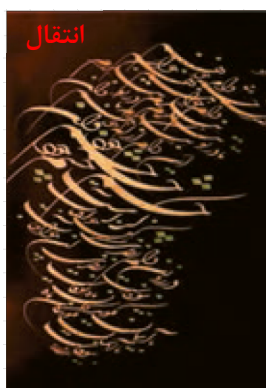
درس دوم

کاربرد تبدیل‌ها

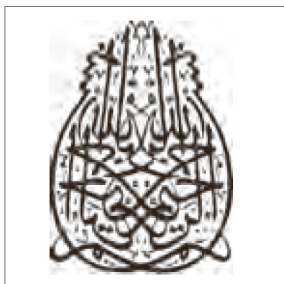
تبدیل‌های هندسی شامل بازتاب، انتقال، دوران و تجانس به طور مستقیم و غیر مستقیم در زندگی واقعی کاربرد دارد؛ برای مثال در سال‌های گذشته با کاربرد برخی تبدیل‌ها در کاشی‌کاری آشنا شدید. آیا می‌توانید با تأمل در محیط اطراف خود به نمونه‌هایی اشاره کنید که تبدیل‌های هندسی در آن به کار رفته‌اند؟

نقش قالی، خطاطی، کاغذ دیواری و

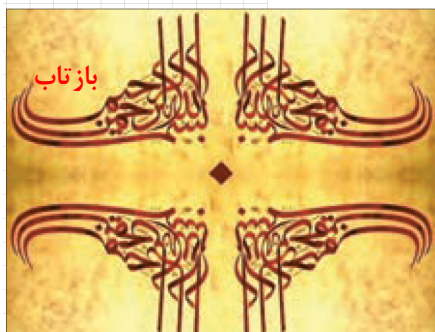
به این تصاویر دقت کنید. کدام یک از تبدیل‌های هندسی بر زیبایی خوشنویسی‌های زیر افزوده است؟



بازتاب



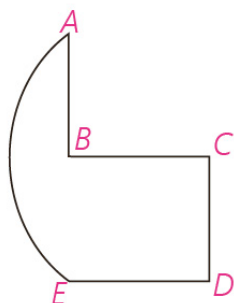
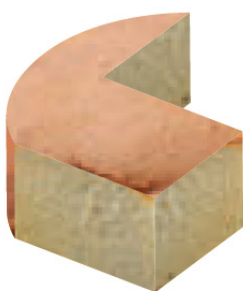
دوران



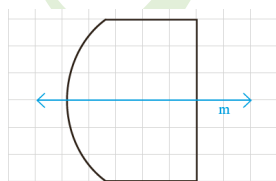
■ کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

بازتاب علاوه بر شاخه‌های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و ... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی‌های بازتاب همان ویژگی‌های آینه تخت است. کاربردهای دیگری از بازتاب را در ادامه خواهیم دید.

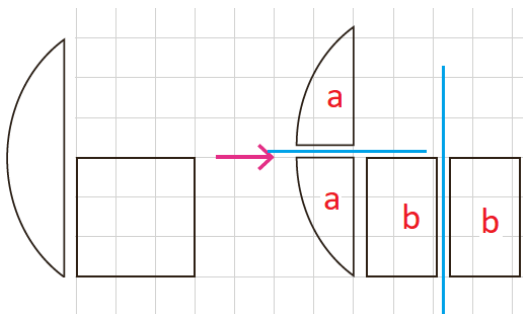
۱- می‌خواهیم کیک به شکل زیر را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع BCDE و کمان AE از یک دایره تشکیل شده است به طوری که A و B و E روی یک خط هستند.



اگر نمای بالای کیک به شکل روبه‌رو بود، تقسیم آن کار ساده‌ای بود؛ چرا که می‌توانستیم از روی خط بازتاب m کیک را برش بزنیم و آن را به دو نیمه مساوی تقسیم کنیم.

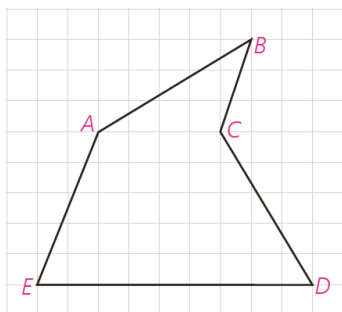


این شکل، راه ساده‌ای برای برش زدن کیک و تقسیم آن به دو سهم برابر ارائه می‌کند. توضیح دهید که بازتاب به حل این مسئله چه کمکی کرده است.



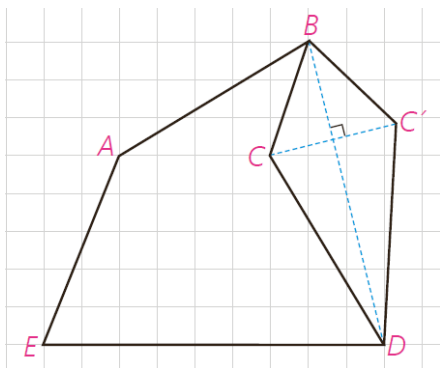
شکل های **a** نسبت به محور بازتاب قرینه اند پس با هم اندازه اند.
همچنین شکل های **b** هم نسبت به محور بازتاب خود قرینه اند و در نتیجه هم اندازه اند حالا به ره نفر یک شکل **a** و یک شکل **b** می دهیم.

۲- یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل هم پیرامونی یا هم محیطی معروف است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم.



برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده ایم. حال می خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازه حصارکشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.

به کمک تصویر روبه‌رو توضیح دهید که این عمل را چگونه می‌توان انجام داد.



در شکل از نقطه **B** به **D** وصل می کنیم. سپس آن را به عنوان محور بازتاب در نظر می‌گیریم. و تصویر نقاط **B**، **C** و **D** را نسبت به این محور به دست می‌آوریم. واضح است که تصویر نقاط **B** و **D** روی خودشان منطبق است ولی تصویر نقطه **C** نقطه **C'** است.

چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC'DE یکی است؟

با توجه به این که بازتاب یک تبدیل طولپا است پس داریم:

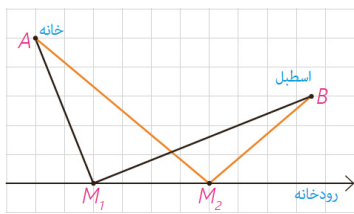
$$BC = BC', CD = C'D$$

$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA \xrightarrow{BC=BC', CD=C'D} P_{ABCDE} = AB + BC + C'D + DE + EA \\ \Rightarrow P_{ABCDE} = P_{ABC'DE}$$

■ مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

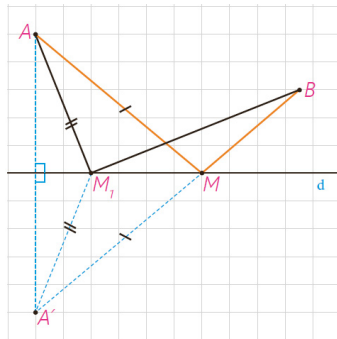
الف) هرون، ریاضی‌دانی است که به او دایرةالمعارف ریاضی و فیزیک لقب داده‌اند. او که در فاصله زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می‌کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد.

او با این مسئله روبه‌رو شده بود که :



«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبه مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل^۱ ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»

مسئله، پیدا کردن نقطه M روی خط d است به گونه‌ای که AM+MB کمترین مقدار ممکن باشد.



هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A' نامید. خط فرضی A'B خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و AM+MB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

با هم دلیل ادعای هرون را بررسی می‌کنیم :

۱- برای هر نقطه دلخواه دیگری نظیر M1 داریم M1A = M1A' (و به همین ترتیب

چرا؟) (AM=A'M

زیرا با توجه به تعریف بازتاب خط d عمود منصف پاره خط AA' است و نقاط M و M1 روی این خط هستند. بنا بر

خاصیت عمود منصف $AM = A'M$ و $AM_1 = A'M_1$.

۲- در مثلث A'M1B داریم $A'M_1 + M_1B > A'B$ ؛ چرا؟

بنابر قضیه نامساوی مثلثی، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است.

از تساوی $A'B = A'M + MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.

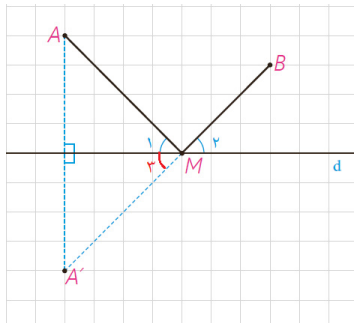
$$\left. \begin{array}{l} A'B = A'M + MB \xrightarrow{A'M=AM} A'B = AM + MB \\ A'B < A'M_1 + M_1B \end{array} \right\} \Rightarrow AM + MB < A'M_1 + M_1B$$

و چون نقطه M1 دلخواه بود پس ادعای هرون ثابت می‌شود.

سؤال: در همین مسئله فرض کنید که d یک آینه تخت و A یک نقطه نورانی

است. نشان دهید بازتاب شعاع نوری AM از نقطه B می‌گذرد (به عبارتی نشان دهید که

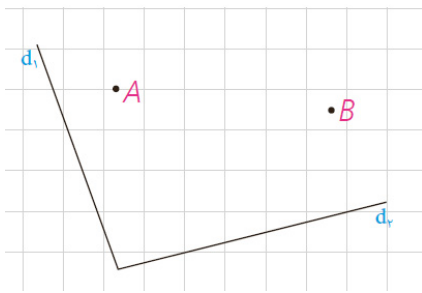
$$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}.$$



نقطه M روی عمود منصف AA' است بنا براین $MA = MA'$ پس مثلث MAA'

متساوی الساقین است در نتیجه خط d نیمساز زاویه AMA' است.

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = M_3 \\ M_3 = M_2 \text{ متقابل به رأس} \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 = M_2$$

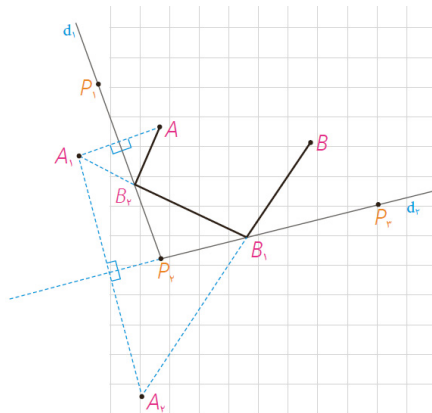


ب) دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض اند. چگونه می‌توان با طی کوتاه‌ترین مسیر از نقطه A آغاز به حرکت کرد و پس از برخورد با دو خط d_1 و d_2 از نقطه B گذشت؟

حل :

برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر به روش زیر عمل می‌کنیم :

قرینه A را نسبت به خط d_1 ، نقطه A_1 و قرینه A_1 را نسبت به خط d_2 ، نقطه A_2 می‌نامیم.



از A_2 به B وصل می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با d_2 ، B_2 می‌نامیم.

به همین ترتیب از B_1 به A_1 وصل می‌کنیم و نقطه برخورد آن را با d_1 ، B_1 می‌نامیم. از A به B_2 وصل می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که مسیر مورد نظر AB_2B_1B است.

تذکر: این مسئله را فقط در حالتی مطرح می‌کنیم که A_1 و A هر دو در یک طرف خط P_2P_3 باشند و پاره‌خط‌های A_2B و P_2P_3 متقاطع باشند.

کافی است نشان دهیم این مسیر از تمام مسیرهای دیگر کوتاه‌تر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که طول این مسیر با طول پاره خط A_2B برابر است.

(۱)

$$\left. \begin{array}{l} A_1B_2 = AB_2 \Rightarrow AB_2 + B_2B_1 = A_1B_1 \\ A_1B_1 = A_2B_1 \Rightarrow A_2B_1 + B_1B = A_1B \end{array} \right\} \Rightarrow AB_2 + B_2B_1 + B_1B = A_1B$$

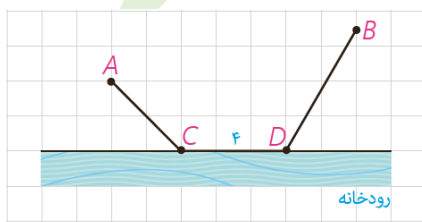
(۲) حال مسیر دلخواه دیگری مانند $AMNB$ را در نظر می‌گیریم؛ داریم :

$$AM = A_1M \Rightarrow AM + MN = A_1N$$

$$A_1N = A_2N \Rightarrow \underbrace{AM + MN + NB}_{A_1N} = A_2N + NB$$

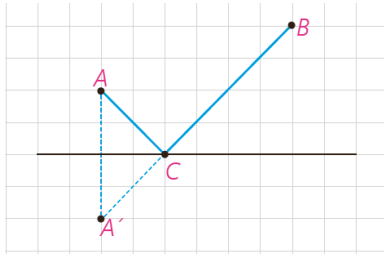
حال با توجه به مثلث BNA_2 داریم :

طول مسیر اول $\square$ طول مسیر دوم



پ) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع اند. می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟

حل: مسئله را در چند مرحله حل می کنیم.



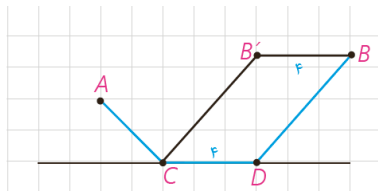
۱- اگر جاده ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر $CD=0$ ، این

مسئله به کدام یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده اید؟

مسئله هرون مردی که از رودخانه می خواهد آب بردارد و به اسطبل بیرد.

۲- با توجه به شرایط مسئله، مسیر موردنظر، باید مسیری به شکل مسیر ACDB

باشد؛ اما:



(چرا؟) طول مسیر $ACDB$ = طول مسیر $ACB'B$

در واقع نقطه ی C تحت بردار انتقالی به طول ۴ به D منتقل شده و نقطه B' نیز تحت

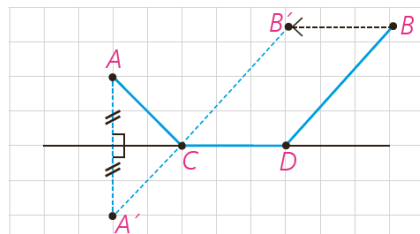
همان بردار به B منتقل شده است بنا براین با توجه به خواص تبدیل انتقال چهارضلعی

$CDBB'$ متوازی الاضلاع است. پس

$$\text{مسیر } ACDB = AC + CD + DB \xrightarrow{CD=B'D, CB'=DB} ACDB = AC + CB' + B'B = \text{مسیر } ACB'B$$

$$\text{طول مسیر } ACDB = \text{طول مسیر } ACB' + 4$$

بنابراین:



۳- پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر ممکن به شکل $ACDB$ مسیر را

به گونه ای انتخاب کنیم که طول ACB' کوتاه ترین طول ممکن باشد.

۴- به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه رو توضیح دهید که رسم کوتاه ترین مسیر

$ACDB$ چگونه است.

ابتدا نقطه B را تحت بردار انتقالی به طول ۴ و موازی رودخانه و در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می دهیم؛ حالا مسئله

شبیه مسئله ی اسطبل می شود. بازتاب نقطه A را نسبت به خط کنار رودخانه به دست می آوریم یعنی نقطه A' سپس از

A' به B' وصل می کنیم نقطه C به دست می آید. از نقطه C موازی رودخانه به سمت شهر B و به طول ۴ متر حرکت

می کنیم تا نقطه D به دست آید. به این ترتیب کوتاه ترین مسیر رسم می شود.

کاردرکلاس

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم

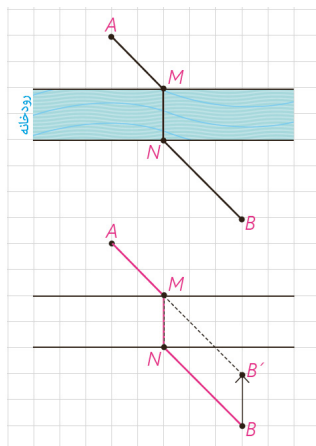
به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در

نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

راهنمایی: به کمک فعالیت قبل و با توجه به تصویر داده شده، طریقه رسم مسیر

$AMNB$ را شرح دهید و مشخص کنید چرا این مسیر، کوتاه ترین مسیر ممکن

است.



نقطه B را تحت برداری مساوی و عمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطه B' انتقال

می دهیم. سپس از B' به A وصل می کنیم. تا نقطه M به دست آید از نقطه M بر رودخانه عمود می کنیم تا نقطه N به

دست آید. به این ترتیب محل احداث پل MN به دست می آید به طوری که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر است. مشابه

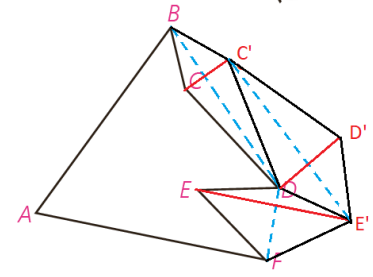
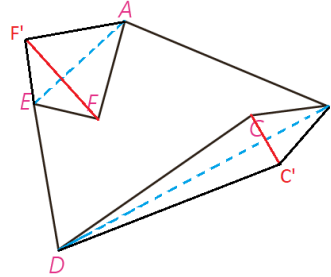
مسئله ی قسمت (پ) می دانیم که مسیر $AMB'B$ کوتاه ترین است پس:

$$\text{مسیر } AMB'B = AM + MB' + BB' \xrightarrow{MB'=NB} \text{مسیر } AMB'B = AM + NB + MN = \text{مسیر } AMNB$$

۱- دور زمین‌هایی مطابق شکل حصار کشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

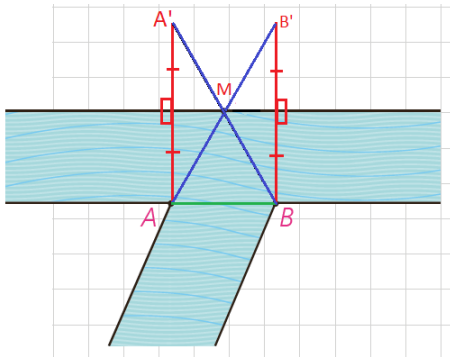
(ب)

(الف)



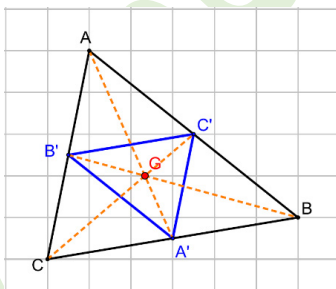
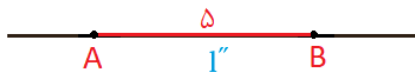
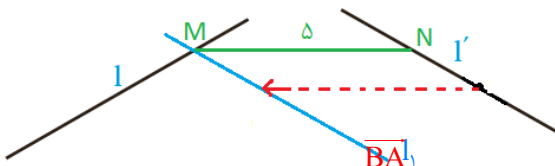
۲- می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

با توجه به شکل واضح است که عرض رودخانه در طول مسیر ثابت در نظر گرفته شده است. پس یا از نقطه B یا از A روش هرون را برای پیدا کردن نقطه M اجرا می‌کنیم.



۳- سه خط دو به دو ناموازی 1 و 1' و 1'' در صفحه مفروض‌اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی 1 و 1'، و موازی 1'' باشد.

ابتدا روی خط 1' پاره خط دلخواه AB به طول ۵ سانتی‌متر را مشخص می‌کنیم. خط 1' را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ انتقال می‌دهیم تا خط 1 به دست آید این خط 1 را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. از نقطه M موازی خط 1' خطی رسم می‌کنیم تا خط 1' را در نقطه N قطع کند. پاره خط MN جواب مسئله است.



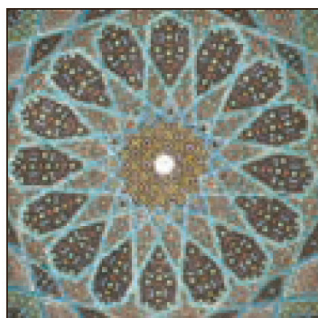
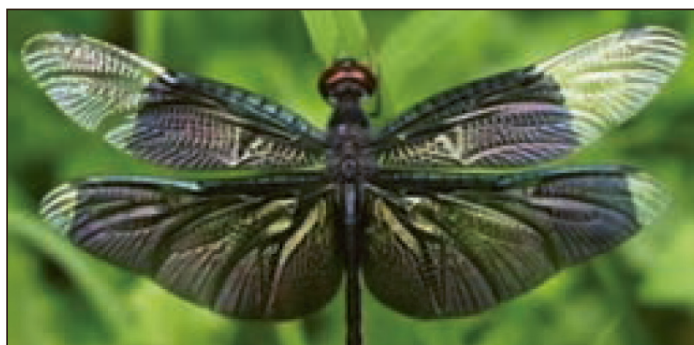
۴- فرض کنید محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{1}{4}$ باشد. الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟ A' وسط BC، B' وسط AC و C' وسط AB قرار دارند.

باتوجه به خاصیت مرکز ثقل می‌دانیم که $GA' = \frac{1}{4}GA$ همچنین نقطه G بین A و A' و پس نقطه A' مجانس نقطه A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{1}{4}$ است. همین مطلب در مورد نقاط B' و C' نیز صدق می‌کند.

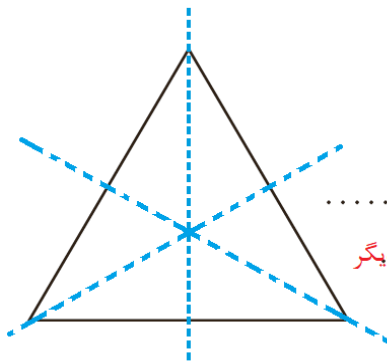
(ب) مساحت مثلث A'B'C' چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث A'B'C'، $\frac{1}{16}$ مساحت مثلث ABC است.

تبدیل‌های تقارنی یک شکل هندسی



در بسیاری از مناظر طبیعی، گیاهان و جانوران، ساختار اتم‌ها، معماری، هنرهای مختلف دستی و نیز شکل‌های هندسی می‌توان نوعی نظم و تعادل مشاهده کرد. در این درس تبدیلهایی را مرور می‌کنیم که یک شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. چنین تبدیلهایی را تبدیلهای تقارنی آن شکل می‌نامیم. فعالیت صفحه بعد برای روشن‌تر شدن این موضوع، طراحی شده است.



مثلث متساوی الاضلاعی را در نظر بگیرید :

الف) بازتاب این مثلث نسبت به خط داده شده چگونه است؟... **خود مثلث است.**

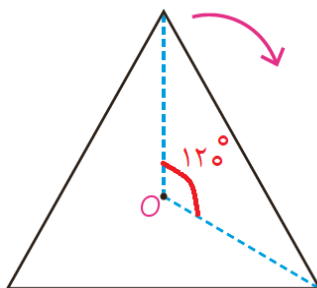
ب) آیا تحت این بازتاب تصویر هر نقطه از شکل لزوماً خود آن نقطه است؟... **خیر...**

پ) آیا تحت این بازتاب، تصویر هر نقطه از شکل، روی خود شکل است؟... **بله....**

ت) آیا خط بازتاب دیگری برای این مثلث سراغ دارید؟... **بله عمود منصف دو ضلع دیگر**

این مثلث چند خط بازتاب دارد؟... **سه تا..**

ث) آیا غیر از بازتاب، تبدیل دیگری سراغ دارید که هر نقطه از شکل را به نقطه‌ای از همان شکل ببرد؟... **بله دوران..**



برای مثال آیا با مرکز O (نقطه هم‌رسی نیمسازها) می‌توانید دوران‌هایی معرفی کنید

که شکل را بر خودش منطبق کند؟... **120° ...**

اگر $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ زاویه دوران باشد، چند دوران به مرکز O و زاویه α می‌توانید

مشخص کنید؟... **120° و 240° و 360°**

تعریف: اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل **تقارن بازتابی (خطی)**

دارد و اگر آن شکل تحت دورانی با زاویه $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ بر خودش منطبق شود، گوییم **تقارن**

دورانی (چرخشی) دارد.

همان‌گونه که در این فعالیت دیدید در مثلث متساوی الاضلاع، سه بازتاب و سه دوران متفاوت می‌توان معرفی کرد که نقاط این مثلث را به نقاطی از همین مثلث نظیر کند.

به عبارتی، تحت این تبدیلات تصویر این مثلث بر خودش منطبق می‌شود؛ چنین تبدیلهایی را تبدیلهای تقارنی این مثلث می‌نامیم. در این کتاب برای شناسایی تبدیلهای تقارنی یک شکل، شکل را تنها در یک جهت (خلاف یا موافق

جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم؛ با این تعریف، مثلث متساوی الاضلاع دارای ۶ تبدیل تقارنی است.

دقت کنید که دوران 360° ، تبدیل انتقال با بردار صفر و تبدیل تجانس با نسبت تجانس $k=1$ ، هر شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند که پیش از این، آنها را «تبدیلهای همانی» نامیدیم. بنابراین تمام تبدیلهای همانی فقط تبدیل تقارنی به شمار می‌رود.

تعریف: تبدیل طولپای T را **تبدیل تقارنی** شکل F می‌نامیم به شرط اینکه تبدیل یافته شکل F،

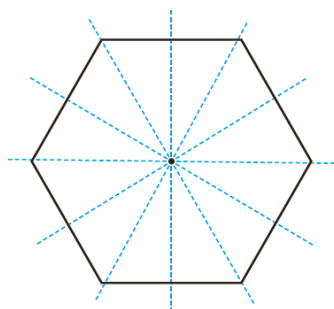
تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود؛ یعنی داشته باشیم: $T(F) = F$

تعریف: تقارن دورانی با زاویه 180° را **تقارن مرکزی** نیز می‌نامند.

در این حالت مرکز دوران را **مرکز تقارن** شکل می‌گویند.

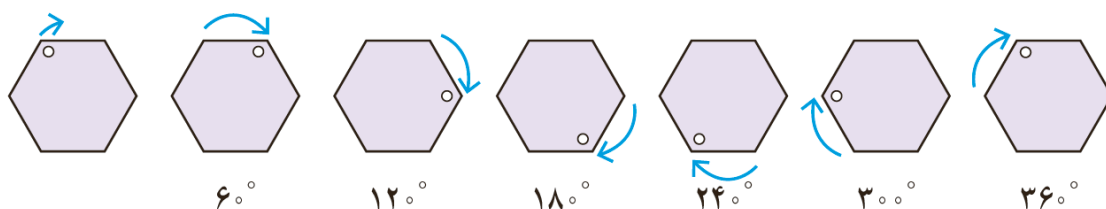
مثال

شش ضلعی منتظم، ۶ تقارن بازتابی و ۶ تقارن دورانی دارد.



تقارن‌های بازتابی :

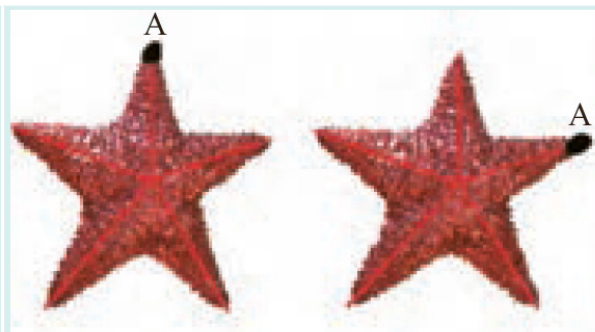
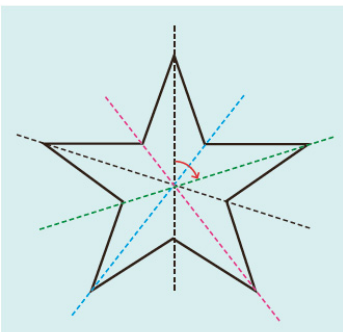
تقارن‌های دورانی :



همان‌طور که اشاره شد تقارن دورانی با زاویه 36° ، انتقال با بردار صفر و تجانس با نسبت تجانس $k=1$ تبدیل‌های

همانی هستند.

تبدیل‌های همانی را تقارن همانی نیز می‌نامند؛ با این تعریف، هر شکلی دارای تقارن همانی است.



تعداد کل تقارن‌ها

... تا ۱۰۰۰

تعداد تقارن‌های بازتابی

... تا ۵

تقارن‌های دورانی

 360° ، 288° ، 216° ، 144° ، 72°

تعداد تبدیل‌های تقارنی را در هر شکل مشخص کنید.

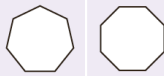
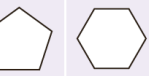
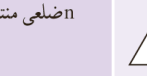
الف) پاره خط ب) خط پ) دایره

الف) پاره خط دو تقارن دورانی دارد که مرکز آن وسط پاره خط و زاویه‌های آن 180° و 360° است. و یک تقارن بازتابی دارد که عمود منصف پاره خط است.

ب) خط بی شمار تقارن دورانی و بی شمار تقارن بازتابی دارد.

پ) دایره بی شمار تقارن دورانی و بی شمار تقارن بازتابی دارد.

۱- الف) با تکمیل جدول زیر تعداد تبدیل‌های تقارنی n ضلعی منتظم را مشخص کنید.

n	...	$n=8$	$n=7$	$n=6$	$n=5$	$n=4$	$n=3$	n ضلعی منتظم
								
تعداد تقارن‌های بازتابی		تا ۸	تا ۷	تا ۶	تا ۵	تا ۴	تا ۳	
تعداد تقارن‌های دورانی		تا ۸	تا ۷	تا ۶	تا ۵	تا ۴	تا ۳	
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی		تا ۱۶	تا ۱۴	تا ۱۲	تا ۱۰	تا ۸	تا ۶	
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟		بله	خیر	بله	خیر	بله	خیر	

ب) n ضلعی منتظم در چه صورتی مرکز تقارن دارد؟

اگر n زوج باشد شکل مرکز تقارن دارد.

پ) الگویی برای پیدا کردن زاویه‌های دوران در تقارن‌های دورانی یک n ضلعی منتظم ارائه کنید.

$$\frac{360^\circ}{n}, (\frac{360^\circ}{n} \times 2), (\frac{360^\circ}{n} \times 3), \dots, (\frac{360^\circ}{n} \times n)$$

۲- تقارن‌های خطی و دورانی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مثلث متساوی‌الساقین و دوزنقه متساوی‌الساقین را

مشخص کنید و در جدولی بنویسید.

کدام یک از این شکل‌های هندسی، مرکز تقارن دارند؟

چند ضلعی	مستطیل	لوزی	مثلث متساوی‌الساقین	دوزنقه متساوی‌الساقین	متوازی‌الاضلاع
					
تعداد تقارن‌های بازتابی	تا ۲	تا ۲	یک	یک	ندارد
تعداد تقارن‌های دورانی	تا ۲	تا ۲	یک	یک	تا ۲
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی	تا ۴	تا ۴	تا ۲	تا ۲	تا ۲
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟	بله	بله	خیر	خیر	بله

محور بازتاب **مستطیل** عمود منصف‌های طول و عرض است و مرکز دوران محل برخورد عمود منصف‌ها (یا قطر ها) است.

محور بازتاب **لوزی** قطرهای آن و مرکز دوران محل برخورد قطر ها است.

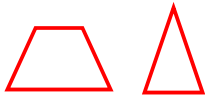
محور بازتاب **مثلث متساوی‌الساقین** عمود منصف قاعده است و مرکز دوران محل برخورد عمود منصف‌های سه ضلع است. زاویه دوران 360° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

محور بازتاب **دوزنقه متساوی‌الساقین** محل عمود منصف قاعده ها است و مرکز دوران محل برخورد قطر ها است.

زاویه دوران 360° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

مرکز دوران **متوازی‌الاضلاع** محل برخورد قطر های آن است.

۳- الف) شکلی رسم کنید که خط بازتاب داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد (یعنی تقارن خطی داشته باشد، اما تقارن دورانی غیرهمانی نداشته باشد).



مثلاً و دوزنقه متساوی الساقین خط بازتاب دارند، ولی تقارن دورانی غیرهمانی ندارند.

ب) شکلی رسم کنید که مرکز تقارن داشته باشد، ولی خط بازتاب نداشته باشد (یعنی تقارن دورانی غیرهمانی داشته باشد، اما تقارن خطی نداشته باشد).



متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد ولی خط بازتاب ندارد.

۴- نشان دهید اگر شکلی دو خط بازتاب عمود بر هم داشته باشد، محل تلاقی این دو خط، مرکز تقارن شکل است (در واقع هر شکل که دارای دو تقارن بازتابی باشد که دو خط بازتاب آن بر هم عمود باشند، دارای تقارن دورانی است).

d و d' دو خط بازتاب عمود بر هم هستند و نقطه A یک نقطه ی دلخواه از شکل است.

$$\left. \begin{array}{l} S(A) = A' \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ S(A') = A'' \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AOA''} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\underbrace{\hat{O}_2 + \hat{O}_3}_{90^\circ}) \Rightarrow \widehat{AOA''} = 180^\circ \quad (1)$$

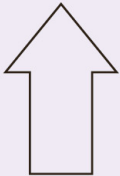
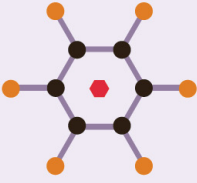
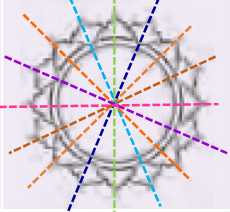
$$\left. \begin{array}{l} S(A) = A' \Rightarrow OA = OA' \\ S(A') = A'' \Rightarrow OA' = OA'' \end{array} \right\} \Rightarrow OA = OA'' \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که نقطه O مرکز دوران به زاویه 180° است.

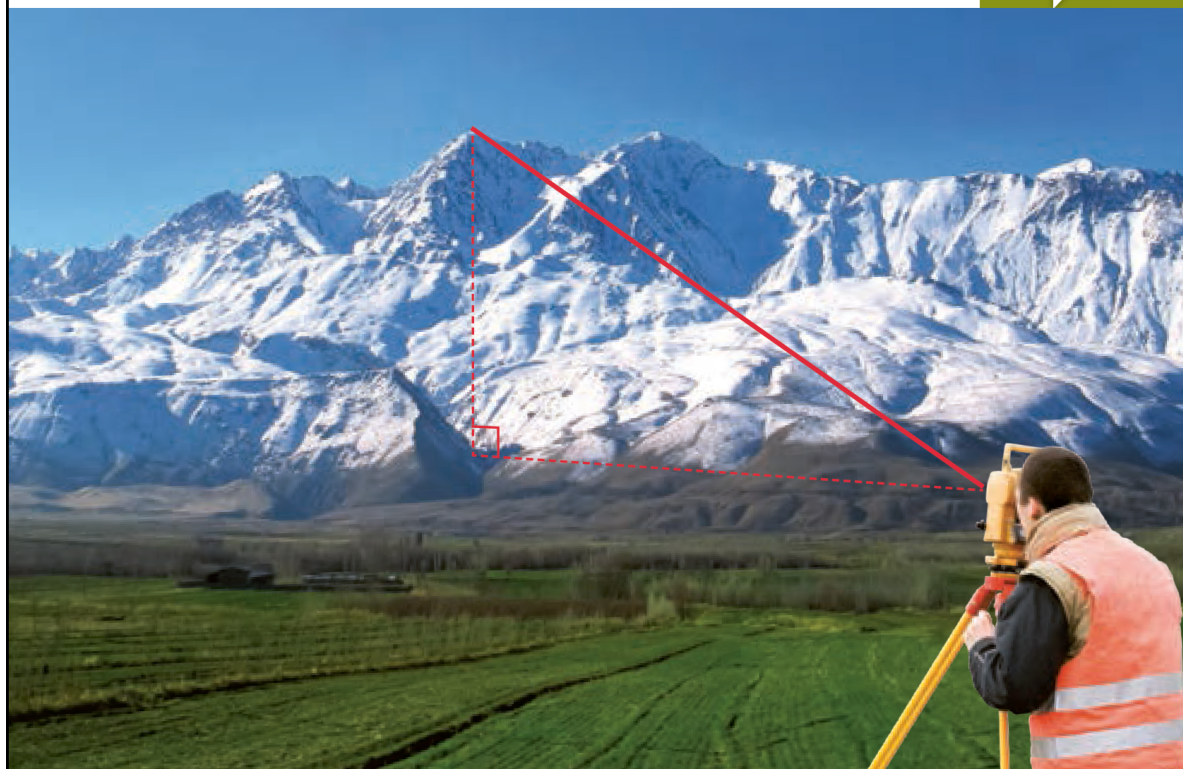
با توجه به جدول سؤال قبل مستطیل و لوزی همین خاصیت را دارند. اما سؤال این است که آیا اگر شکلی مرکز تقارن داشته باشد حتماً دو محور بازتاب عمود برهم دارد؟ پاسخ با یک مثال نقض داده می شود

متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد یعنی یک دوران با زاویه 180° اما محور بازتاب ندارد.

۵- جدول زیر را کامل کنید.

شکل					
تقارن بازتابی	یک	ندارد	۳ تا	۶ تا	۸ تا
تقارن دورانی	یک	یک	۳ تا	۶ تا	۸ تا
تعداد تبدیل های تقارنی	۲ تا	یک	۶ تا	۱۲ تا	۱۶ تا

روابط طولی در مثلث



عکس: فرهاد گویاوند

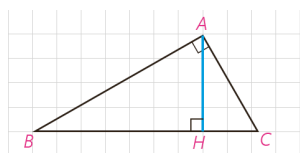


تنودولیت (زاویه‌یاب)
یکی از ابزارهای لازم
برای این‌گونه محاسبات
عملی است.

■ محاسبه فاصله‌های غیرقابل دسترس یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. از جمله آنها محاسبه ارتفاع کوه‌های بلند است. رشته‌کوه اشترانکوه که ارتفاع آن در برخی نقاط به بیش از ۴۰۰۰ متر می‌رسد در استان لرستان واقع است.

قضیه سینوس ها

یادآوری



منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم:

$$AB^2 = BC \cdot BH \quad ۱-$$

$$AC^2 = BC \cdot CH \quad ۲-$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع قائم واسطه هندسی وتر و تصویر آن ضلع بر وتر است.

$$AH^2 = BH \cdot CH \quad ۳-$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی قطعه‌های ایجاد شده روی وتر است.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad ۴-$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر برابر است. (قضیه فیثاغورس)

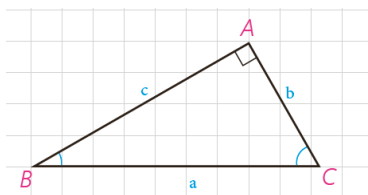
$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \quad ۵-$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصل ضرب اضلاع قائمه با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر وتر در وتر برابر است.

اینک به ادامه بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.

فعالیت ۱

در کتاب ریاضی ۱ (پایه دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویه ABC، جاهای خالی را پر کنید:



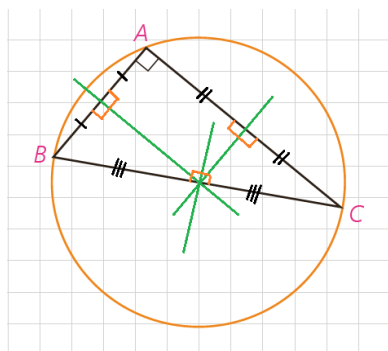
$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

$$\sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = 1 \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a$$

بنابراین داریم :
در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر است با اندازه وتر. مثلث..

۲ فعالیت



در کتاب هندسه ۱ دیدیم که عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایره محیطی مثلث است. دایره محیطی مثلث قائم الزاویه ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟

محل برخورد عمود منصف‌ها در هر مثلث قائم الزاویه وسط وتر است. پس مرکز این دایره وسط وتر است.

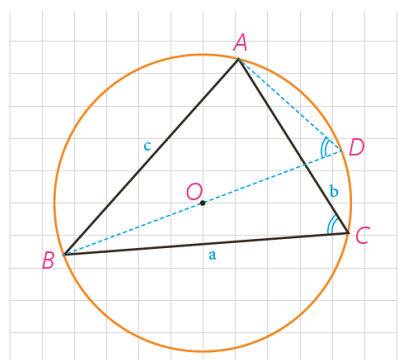
$\widehat{BAC} = 90^\circ$ یک زاویه محاطی است و اندازه کمان مقابل آن 180° یعنی وتر BC دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی قطر دایره است.
با توجه به نتیجه فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم :

در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه قطر..... قطر.. دایره محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

۳ فعالیت

مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) و دایره محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم.



قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم. ($BD = 2R$)

۱- زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟

این دو زاویه محاطی هستند و هر دو روبه‌رو به کمان $\widehat{AB}$ هستند پس هم اندازه‌اند.

اندازه آنها برابر است با نصف کمان $\widehat{AB}$.

۲- چرا مثلث ABD در رأس A قائم الزاویه است؟

زیرا زاویه A محاطی روبه‌رو به قطر دایره است. $\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{180^\circ}{2}$

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داریم :

$$\sin C = \sin D \text{ و } \sin D = \frac{c}{BD} \Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$

۴- به طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

۵- حال مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) را در نظر بگیرید. نقطه دلخواه A' روی کمان

BC را به B و C وصل می کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

این دو زاویه مکمل هم هستند.

راه اول: چهارضلعی $ABA'C$ محاطی است پس بنا بر قضیه زوایای مقابل مکمل هستند.

راه دوم:

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BAC}}{2} \\ \hat{A}' &= \frac{\widehat{BAC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$$

$\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ بنابراین $\hat{A}'$ زاویه ای حاده است.

با توجه به آنچه از مثلثات می دانید، جاهای خالی را پر کنید :

$$\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A'$$

در مثلث $A'BC$ ، طبق نتیجه قسمت (۳) می توانیم بنویسیم :

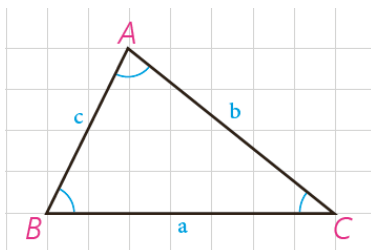
$$\frac{a}{\sin A'} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

طول قطر برابر با $2R$ است.

نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع.. به سینوس زاویه روبه رو به

آن برابر است با طول قطر دایره محیطی.. مثلث..



قضیه سینوس ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

مثال ۱: در مثلث ABC ، $BC=10\text{ cm}$ و $\hat{A}=12^\circ$ و $AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به دست آورید.

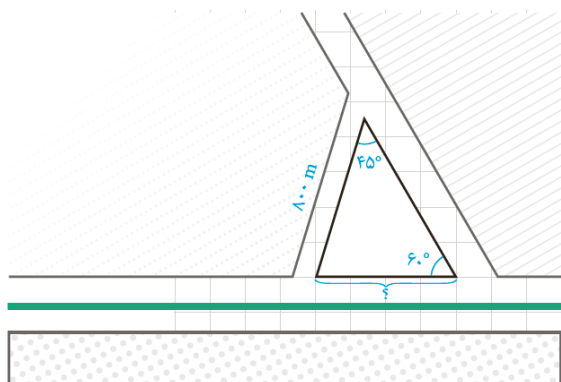
حل: به کمک قضیه سینوس ها می توان نوشت:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 12^\circ} = 2R \text{ و } \sin 12^\circ = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ و } R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

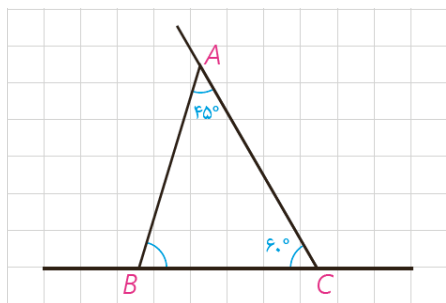
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin B = \frac{10\sqrt{6}}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B=45^\circ \text{ یا } 135^\circ \text{ و } \hat{A}=12^\circ \Rightarrow \hat{B}=45^\circ \Rightarrow \hat{C}=125^\circ$$



مثال ۲: از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویه 6° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول 80 m متر بنا کند تا با زاویه 45° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله ای از رأس زاویه 6° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه ای می سازد؟

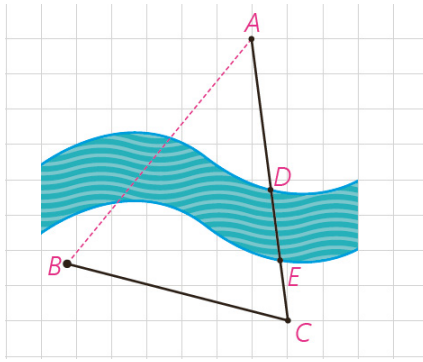
حل: با یک شکل مناسب مسئله را مدل سازی می کنیم. اولاً با توجه به مجموع اندازه های زوایای داخلی مثلث، روشن است که $\hat{B} = 180^\circ - (45^\circ + 6^\circ) = 75^\circ$ ؛ یعنی خیابان فرعی باید با زاویه 75° از بلوار جدا شود. ثانیاً به کمک قضیه سینوس ها در مثلث ABC داریم:



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{80}{\sin 6^\circ} = \frac{BC}{\sin 75^\circ} \Rightarrow BC = \frac{80 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{80\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{80\sqrt{6}}{3} \approx 653/2 \text{ m}$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی $653/2$ متر با زاویه 75° بنا کنیم.

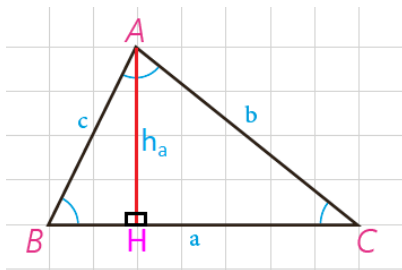


می‌خواهیم روی یک رودخانه عمیق بین دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به دست بیاوریم؛ اما امکان اندازه‌گیری مستقیم (به دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطه A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه یاب (تئودولیت) زاویه دید AC از نقطه B ($\hat{B}$) و زاویه دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه می‌گیریم. به صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می‌توان فاصله AB را به دست آورد:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}))} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(\hat{B} + \hat{C})}$$

اگر $BC = 3 \text{ km}$ و $\hat{B} = 7^\circ$ و $\hat{C} = 6^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به دست آورید.

$$AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(\hat{B} + \hat{C})} \Rightarrow AB = \frac{3 \times \sin 6^\circ}{\sin(7^\circ + 6^\circ)} \approx \frac{3 \times 0.104}{0.199} \approx 1.57$$



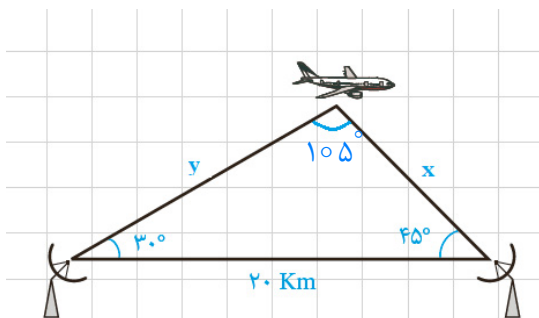
۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم:

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} bc \\ S &= \frac{1}{2} a h_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow bc = ah_a \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} (bc)^2 = (ah_a)^2 \Rightarrow b^2 c^2 = a^2 h_a^2$$

$$\Rightarrow b^2 c^2 = (b^2 + c^2) h_a^2 \Rightarrow b^2 c^2 = b^2 h_a^2 + c^2 h_a^2 \xrightarrow{+b^2 c^2 h_a^2} \frac{b^2 c^2}{b^2 c^2 h_a^2} = \frac{b^2 h_a^2}{b^2 c^2 h_a^2} + \frac{c^2 h_a^2}{b^2 c^2 h_a^2} \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

۲- دو ایستگاه رادار، که در فاصله 20° کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های 30° و 45° درجه رصد کرده‌اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.



$$\frac{20}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \begin{cases} \frac{20}{0.96} = \frac{x}{0.5} \Rightarrow x \approx 10.416 \\ \frac{20}{0.96} = \frac{y}{0.707} \Rightarrow y \approx 14.72 \end{cases}$$

قضیه کسینوس ها

می دانیم که در مثلث قائم الزویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$). با داشتن طول های دو ضلع ($AB=c$) و ($AC=b$) می توانیم اندازه وتر مثلث ($BC=a$) را بر حسب b و c به دست آوریم: $a^2 = b^2 + c^2$ حال می بینیم که اگر $\hat{A}$ مساوی 90° هم نباشد، می توانیم این کار را انجام دهیم.

۱ فعالیت

در مثلث ABC ($\hat{A} < 90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم کرده ایم. با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در مثلث های قائم الزویه، جاهای خالی را پر کنید:

$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \times \cos A \text{ و } CH = b - AH = b - c \cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \times \sin A$$

$$\triangle BHC : BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2$$

حال به کمک اتحاد های جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ، نشان دهید:

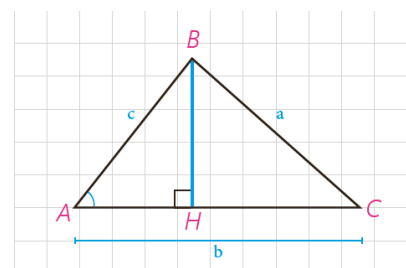
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 + c^2 \cos^2 A - 2bc \cos A$$

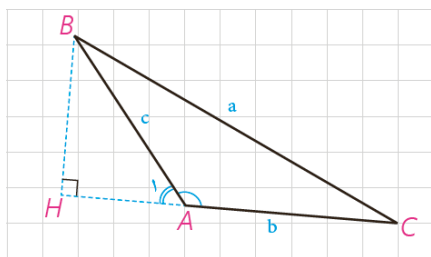
$$= b^2 + c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) - 2bc \cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



اکنون در مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.
 اگر $\hat{A}_1$ زاویه خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$ داریم:
 $\sin A_1 = \sin A$ و $\cos A_1 = -\cos A$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های
 مثلثاتی می‌توان نوشت:



$$\cos A_1 = \frac{AH}{c} \text{ و } \sin A_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow AH = \dots c \dots \times (-\cos A) \text{ و}$$

$$BH = \dots c \dots \times \sin A \text{ و } CH = b + AH = b - c \cos A$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (\dots c \sin A \dots)^2 + (\dots b - c \cos A \dots)^2$$

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 + c^2 \cos^2 A - 2bc \cos A$$

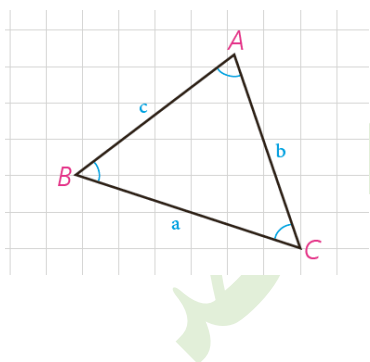
$$= b^2 + c^2 (\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}) - 2bc \cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

سؤال: در حالتی که زاویه A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$



قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

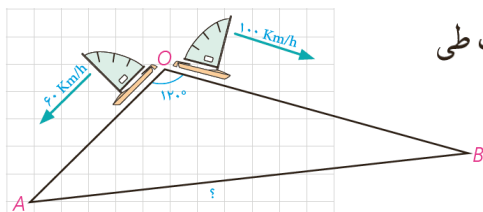
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

مثال: دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های 60 km/h

و 100 km/h و با زاویه 120° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

حل: با توجه به نقطه شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی

شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود:



$$OA = 60 \times \frac{\pi}{180} = 3^\circ \text{ و } OB = 100 \times \frac{\pi}{180} = 5^\circ$$

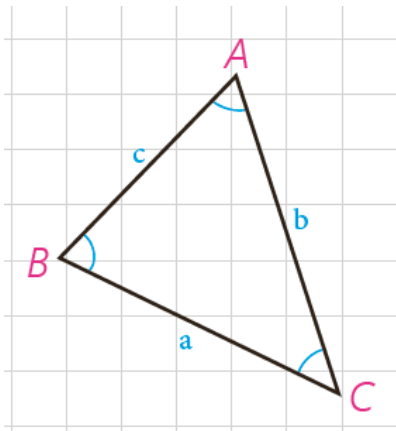
حال به کمک قضیه کسینوس ها می نویسیم :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 12^\circ \text{ و } \cos 12^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$AB^2 = 900 + 2500 - 2 \times 30 \times 50 \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900 \Rightarrow$$

$$AB = 70 \text{ km}$$

کاردرکلاس



در مثلث ABC، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 6^\circ$
۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس ها به دست آورید.

$$BC^2 = \dots AC^2 + \dots AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos A \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \dots + (2\sqrt{2})^2 \dots - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(2\sqrt{2}) \cos 6^\circ \Rightarrow$$

$$6 + 2 + 2\sqrt{12} + 8 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \frac{1}{2} = 16 + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{12} - 4 = 12$$

$$BC^2 = \dots 12 \dots \text{ و } BC = \dots 2\sqrt{3} \dots$$

۲- اندازه $\hat{C}$ را به کمک قضیه سینوس ها به دست آورید و از آنجا اندازه $\hat{B}$ را هم بیابید.

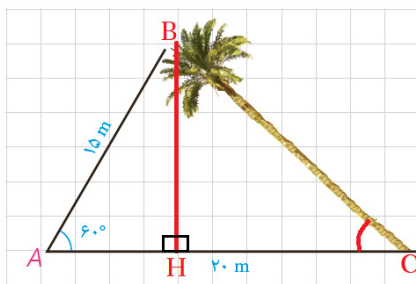
$$\frac{C}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 6^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ و } \hat{C} = 24^\circ$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 6^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \sin C = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 96^\circ$$



تمرین



۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه 6° دیده می شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است :

الف) طول درخت

$$a^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \times 20 \times 15 \times \cos 6^\circ = 400 + 225 - 300$$

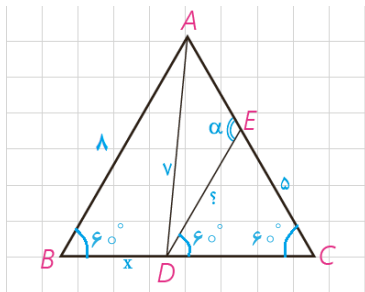
$$\Rightarrow a^2 = 325 \Rightarrow a = 5\sqrt{13}$$

ب) زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

$$\frac{5\sqrt{13}}{\sin 6^\circ} = \frac{15}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \approx 0.72 \Rightarrow \hat{C} \approx 46^\circ$$

پ) فاصله نوک درخت از زمین

$$\sin 6^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{15} \Rightarrow BH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$



۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ (CD > BD)، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟

$$7^2 = x^2 + 8^2 - 2 \times x \times 8 \times \sin 6^\circ \Rightarrow 49 = x^2 + 64 - 8x$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 3$$

$$\xrightarrow{BD < DC} BD = 3, DC = 5$$

$DC = CE = 5$ در نتیجه مثلث DCE متساوی الساقین است و چون یک زاویه 6° دارد پس متساوی‌الاضلاع است یعنی

$DE = 5$. در مثلث DCE زاویه α یک زاویه خارجی است پس: $\alpha = 6^\circ + 6^\circ \Rightarrow \alpha = 12^\circ$

۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت 6° کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 3° انحراف به راست با سرعت 4° کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد.

فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

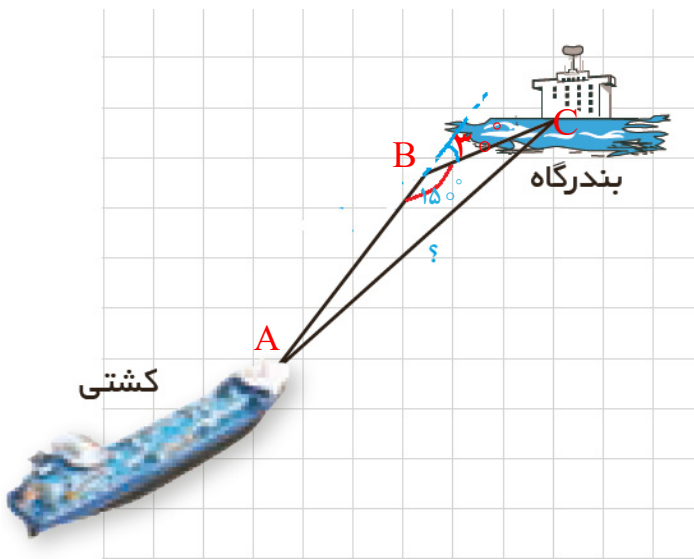
$$AB = 60 \times 1 = 60 \text{ km}, BC = 40 \times 0.5 = 20 \text{ km}$$

$$AC^2 = 60^2 + 20^2 - 2 \times 60 \times 20 \times \cos 15^\circ$$

$$= 3600 + 400 - 2 \times 1200 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4000 + 1200\sqrt{3} = 400(10 + 3\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow AC = 20\sqrt{10 + 3\sqrt{3}}$$



۴- در مثلث ABC، میانه AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه‌ها})$$

$$\triangle ACM: b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times m_a \times \cos \alpha$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\triangle ABM: c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - 2 \times \frac{c}{2} \times m_a \times \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} b^2 + c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - a \cdot AM \cdot \cos \alpha + \frac{a^2}{4} + AM^2 + a \cdot AM \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$$

در حالت خاص $AB = c = 4$ و $AC = b = 6$ و $BC = a = 8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.

$$AB = c = 4, \quad AC = b = 6, \quad BC = a = 8$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 \Rightarrow AM = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{2(16 + 36) - 64}{4} \Rightarrow AM = 10$$

۵- در مثلث ABC، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$

$$\triangle ABD: AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos \alpha$$

$$\xrightarrow{\times DC} AB^2 \cdot DC = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

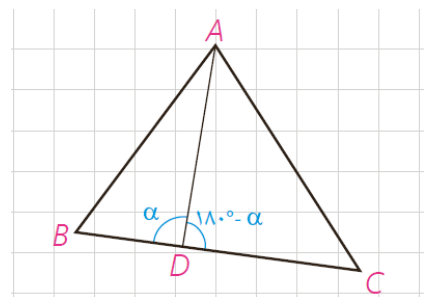
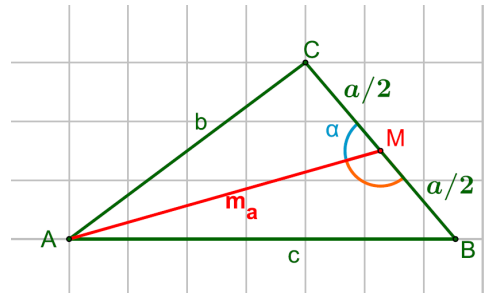
$$\triangle ACD: AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^2 \cdot DB = DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - \cancel{2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha} + DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + \cancel{2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 (\underbrace{DC + DB}_{BC}) + BD \cdot DC (\underbrace{DC + DB}_{BC})$$

$$\Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

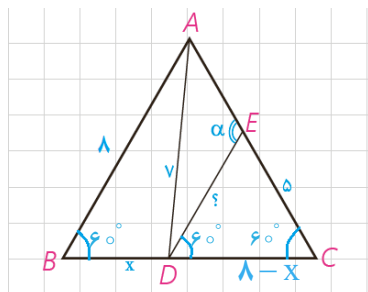


به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

$$DC = DB = \frac{a}{2}, AC = b, \Rightarrow AB = c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \times c^2 + \frac{a}{2} \times b^2 = AD^2 \times a + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times a \Rightarrow \frac{a}{2}(c^2 + b^2) = \frac{a}{2}(2AD^2 + \frac{a^2}{2})$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$$



۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.

$$AB = AC = BC = 8, AD = 7, DB = x, DC = x - 8, DB < DC$$

$$AB^2.DC + AC^2.DB = AD^2.BC + DB.DC.BC$$

$$\Rightarrow 64(8 - x) + 64x = 49 \times 8 + 8x(8 - x)$$

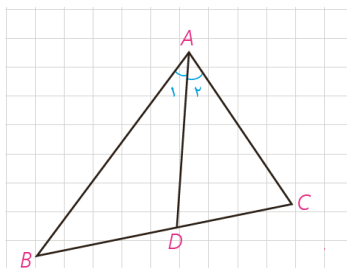
$$\Rightarrow 64 \times 8 - \cancel{64x} + \cancel{64x} = 49 \times 8 + 8x(8 - x)$$

$$\xrightarrow{\div 8} 64 = 49 + 8x - x^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, x = 5 \xrightarrow{DB < DC} x = DB = 3, DC = 5$$

قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی



قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

اثبات: مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.

الف) چرا $\widehat{A_1} = \widehat{E}$ و چرا $\widehat{A_2} = \widehat{C}$ ؟

$AD \parallel EC$, BE مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A_1} = \widehat{E}$

$AD \parallel EC$, AC مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A_2} = \widehat{C}$

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای درباره زوایای E و C می‌توان گرفت؟

با توجه به فرض می‌توان نتیجه گرفت که $\widehat{E} = \widehat{C}$.

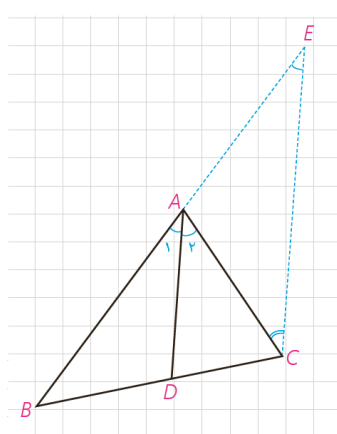
مثلث AEC چه نوع مثلی است؟

متساوی الساقین است. (اگر در یک مثلث دو زاویه برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.)

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر

است؟ با توجه به نتیجه قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

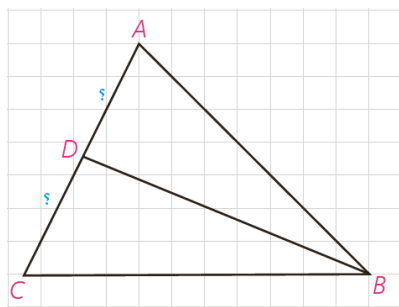
$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می‌توان طول‌های
قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند با داشتن طول‌های اضلاع مثلث،
محاسبه کرد:

مثال: در مثلث ABC ، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را
به دست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

حل:

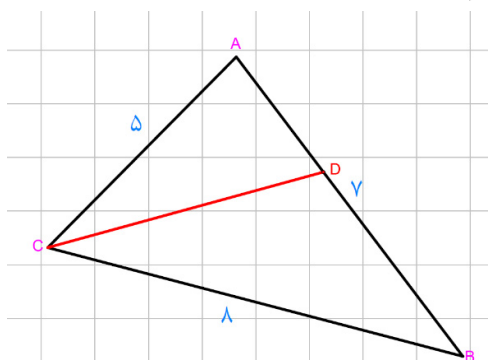


$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{5}{CD} = \frac{15}{8}$$

$$CD = \frac{8 \times 5}{15} = \frac{8}{3}, AD = AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به دست
آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.



$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{5+8}{8} = \frac{AD+BD}{BD} \Rightarrow \frac{13}{8} = \frac{7}{BD}$$

$$BD = \frac{8 \times 7}{13} = \frac{56}{13} \Rightarrow BD = 7 - \frac{56}{13} = \frac{35}{13}$$

۲- محاسبه طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)، یعنی
 AD ، امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل
می‌کنیم.

الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$ ؟

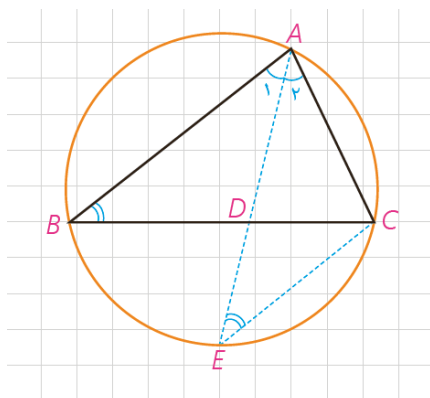
زیرا این دو زاویه هردو محاطی هستند و روبه‌رو به یک کمان (AC) هستند.

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{E} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ق اول تشابه}} \triangle ABD \sim \triangle AEC$$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BD}$$



ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

و چون $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (چرا؟)

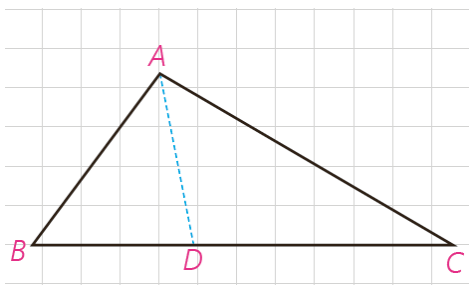
دو وتر AE و BC یکدیگر را در نقطه D درون دایره قطع کرده اند بنا بر قضیه داریم: $AD \cdot DE = DB \cdot DC$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC \quad \text{بنابراین:}$$

قضیه ۲: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

مثال: در مثلث ABC ، $AB=3$ ، $AC=5$ و $BC=7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.

حل: به کمک قضیه (۱) طول‌های BD و CD را به دست می‌آوریم:



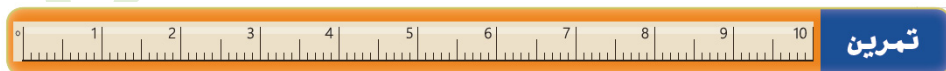
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD + CD}{CD} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{7}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow CD = \frac{35}{8}, \quad BD = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

حال با توجه به قضیه (۲) داریم:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3 \times 5 - \frac{35}{8} \times \frac{21}{8} = 15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$



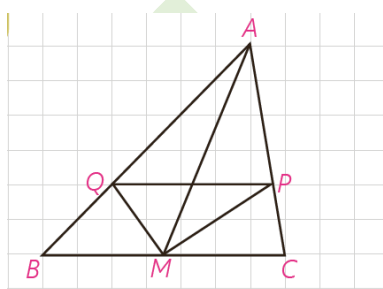
۱- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و

AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

در مثلث AMB پاره خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره خط

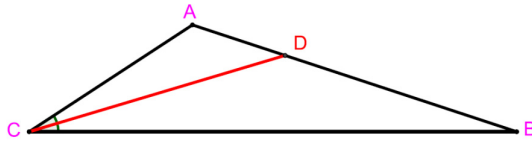
MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} &\xrightarrow{MB=MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB} \\ \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ \parallel BC$$



۲- در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=4$ و $BC=10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی

C را به دست آورید.



$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{10+4}{4} = \frac{BD+DA}{DA} \Rightarrow \frac{14}{4} = \frac{7}{DA}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{28}{14} = 2 \Rightarrow BD = 7 - 2 = 5$$

$$CD^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 30 \Rightarrow CD = \sqrt{30}$$

۳- با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویه $\hat{A}$

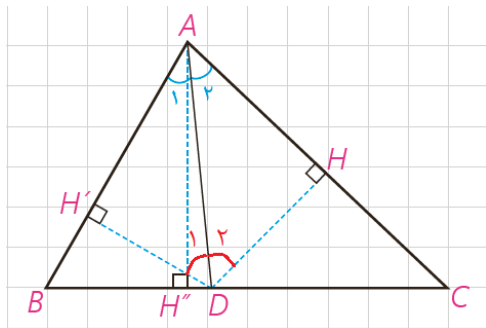
است، روش دیگری برای اثبات قضیه نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید :

الف) چرا $DH = DH'$ ؟

راه اول :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \hat{A}_2 + \hat{D}_2 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AD = AD \end{array} \right\} \rightarrow DH = DH'$$



راه دوم : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله

است. پس $DH = DH'$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} DH' \times AB}{\frac{1}{2} DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

(ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AH''}{\frac{1}{2} CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

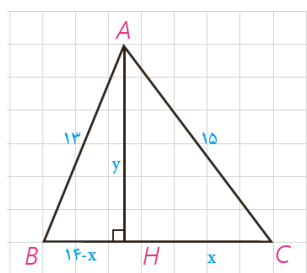
از مقایسه (۱) و (۲) نتیجه می شود : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

قضیه هرون (محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث)

با مسئله زیر در کتاب هندسه ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث های AHB و AHC اندازه های x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :

به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می کنیم :



$$\left. \begin{array}{l} CH^2 + AH^2 = AC^2 \\ BH^2 + AH^2 = AB^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 225 \\ (14-x)^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می کنیم که با حذف y^2 معادله ای بر حسب x به دست می آید :

$$x^2 - (14-x)^2 = 56 \Rightarrow x^2 - 196 - x^2 + 28x = 56$$

$$\Rightarrow x = 9, \quad y = 12, \quad S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = 84$$

اگر همین روش را در حالت کلی در مثلث ABC، که $BC=a$ ، $AB=c$ و $AC=b$ به کار ببریم، نتیجه می شود :

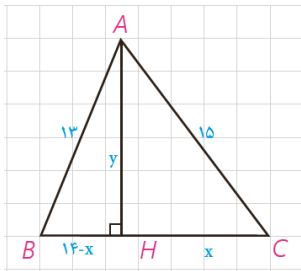
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (\text{دستور هرون})$$

که در این دستور $P = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می توانید در مجله ریاضی انتهای فصل ببینید.)

مثال: مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون

برابر است با:



$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$S = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 2^4} = 84$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \times 84}{14} = 12 \quad h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2 \times 84}{15} = \frac{56}{5}, \quad h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \times 84}{13} = \frac{168}{13}$$

کاردکلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید:

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$BD^2 = 60^2 + 80^2 = 3600 + 6400 = 10000 \Rightarrow BD = 100$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$S_{ABD} = \frac{60 \times 80}{2} = 2400 \quad \text{مساحت برابر است با نصف حاصلضرب اضلاع قائمه:}$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

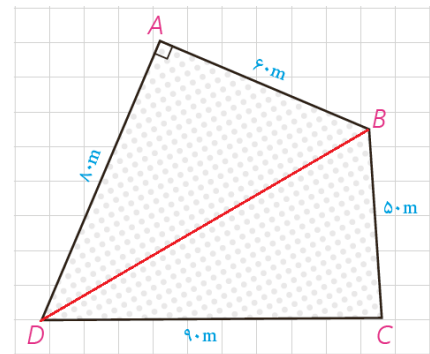
$$P = \frac{80 + 60 + 100}{2} = 120,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{120 \times (120 - 100) \times (120 - 60) \times (120 - 80)}$$

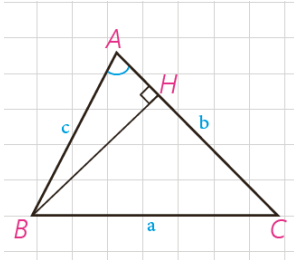
$$\Rightarrow S = \sqrt{120 \times 20 \times 60 \times 40} = \sqrt{36 \times 14 \times 10000} = 600\sqrt{14}$$

$$S = 2400 + 600\sqrt{14}$$



ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با:

فعالیت



می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به دست آوریم.

۱- در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin A$$

۲- مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$$

کاردرکلاس

۱- مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{.۵. + .۷. + .۳.}{۲} = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times (\frac{۱۵}{۲} - ۵) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۷) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۳)}$$

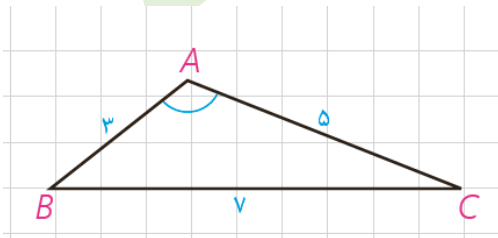
$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۹}{۲}} = \frac{۱۵}{۴} \sqrt{۳}$$

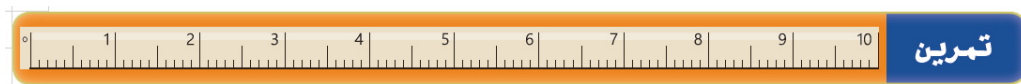
۲- مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ بنویسید.

$$S = \frac{1}{2} \times ۳ \times ۵ \times \sin A = \frac{۱۵}{۲} \sin A$$

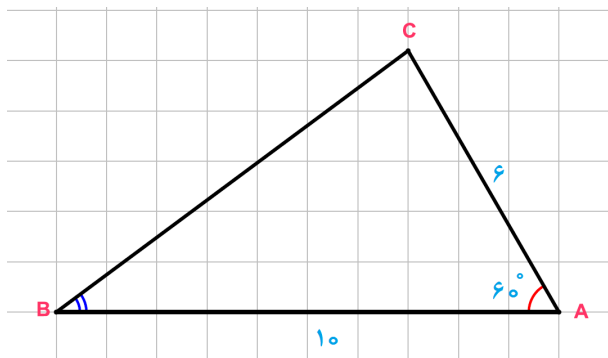
۳- از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه $\hat{A}$ را به دست آورید.

$$\frac{۱۵}{۲} \sin A = \frac{۱۵}{۴} \sqrt{۳} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$





تمرین



۱- در مثلث ABC، $AB=10$ ، $AC=6$ و $\hat{A}=60^\circ$.

الف) طول BC را به دست آورید.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{1}{2} = 76 \Rightarrow BC = 2\sqrt{19}$$

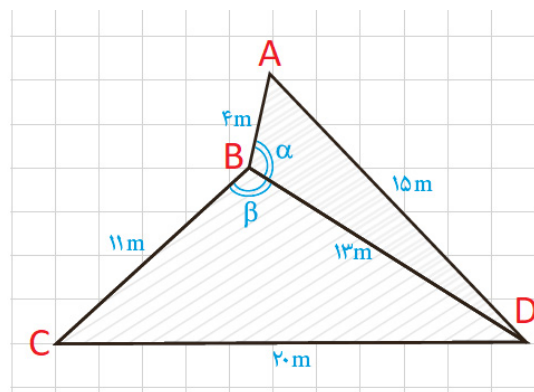
ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \frac{\sin B}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{19}} \Rightarrow \sin B = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{19}} \Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{57}}{38}$$

۲- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$P_{ABD} = \frac{4 + 13 + 15}{2} = 16 \text{ m}$$

$$P_{BCD} = \frac{11 + 13 + 20}{2} = 22 \text{ m}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24 \text{ m}^2$$

$$S_{BCD} = \sqrt{22 \times 11 \times 9 \times 2} = 66 \text{ m}^2$$

$$S_{ABCD} = 24 + 66 = 90 \text{ m}^2$$

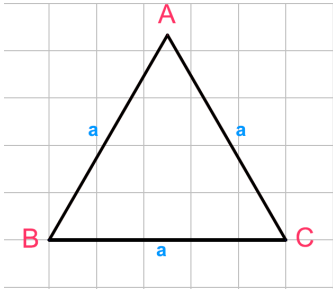
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.

$$(\alpha = \beta)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{ABD} &= \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin \alpha \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 4 \times 13 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13} \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin \beta \Rightarrow 66 = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{12}{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور

هرون به دست آورید.



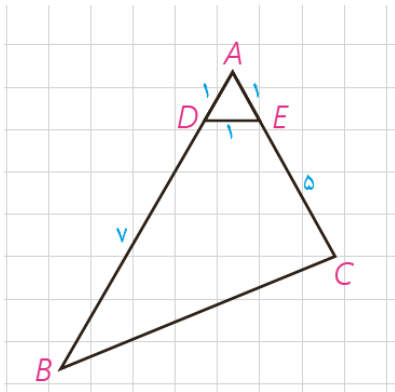
$$AB = AC = BC = a \Rightarrow P_{ABC} = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{3a}{2} - a\right)} = \sqrt{\frac{3a}{2} \times \left(\frac{a}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

۴- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی

DECB را بیابید.

با توجه به این که مثلث ADE متساوی الساقین است پس $\widehat{DAE} = 60^\circ$ در نتیجه :



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52 \Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

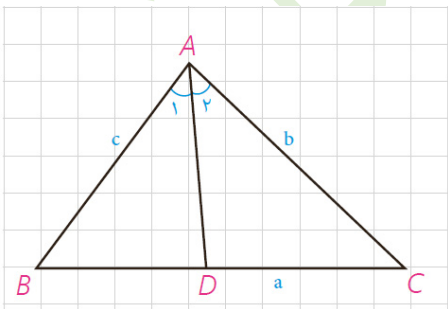
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4} \sqrt{3}$$

۵- در شکل، AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AC \times AD \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (AB + AC)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(AB + AC) \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \dots d_a \Rightarrow (d_a \text{ نیمساز رأس } A) = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

۶- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$P_{ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

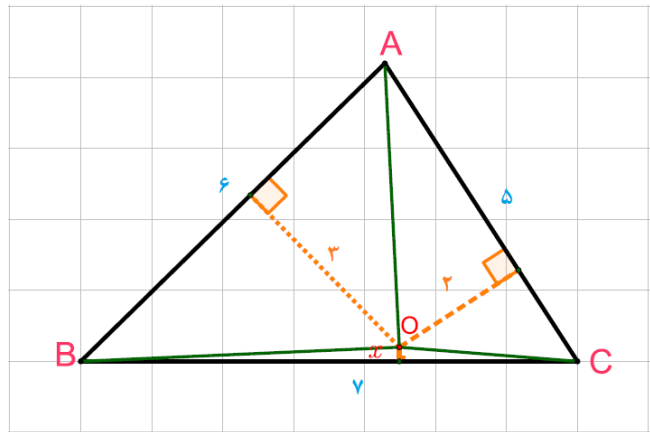
$$S_{ABC} = \sqrt{9 \times 2 \times 3 \times 4} = 6\sqrt{6}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \times 7 \times x = \frac{7}{2}x$$

$$6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2}x \Rightarrow 6\sqrt{6} - 14 = \frac{7}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) \approx 0.2$$



۷- در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی

ABCD را بیابید. راهنمایی: B را به D وصل کنید.

مثلث BCD متساوی الساقین است و با توجه به اندازه زاویه C، اندازه دو زاویه دیگر هر کدام 30° خواهد بود. در این مثلث

ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم الزویه CHD، $\widehat{CDH} = 30^\circ$ ، در نتیجه: $CH = \frac{7}{4}$

$$\left. \begin{aligned} S_{BCD} &= \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} \times BD = \frac{7}{8}BD \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 120^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{7}{8}BD = \frac{49\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

$$P_{ABD} = \frac{11+13+7\sqrt{3}}{2} = 12 + \frac{7}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3})(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 7\sqrt{3})(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 11)(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3} - 13)}$$

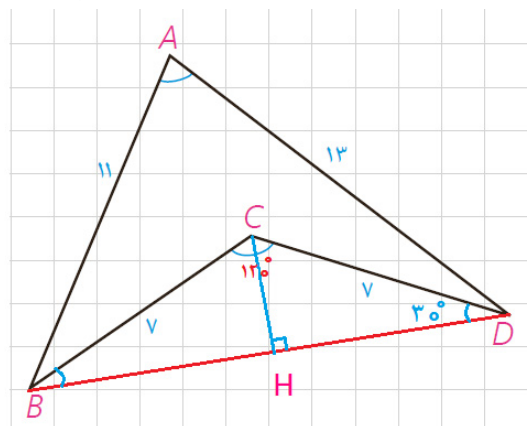
$$S_{ABD} = \sqrt{(12 + \frac{7}{2}\sqrt{3})(12 - \frac{7}{2}\sqrt{3})(\frac{7}{2}\sqrt{3} + 1)(\frac{7}{2}\sqrt{3} - 1)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{(144 - \frac{174}{4})(\frac{147}{4} - 1)} = \frac{143}{4}\sqrt{3} \quad (1)$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \sin A = \frac{143}{2} \sin A \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{143}{2} \sin A = \frac{143}{4}\sqrt{3} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{143}{4}\sqrt{3} - \frac{49}{4}\sqrt{3} = \frac{94}{4}\sqrt{3}$$

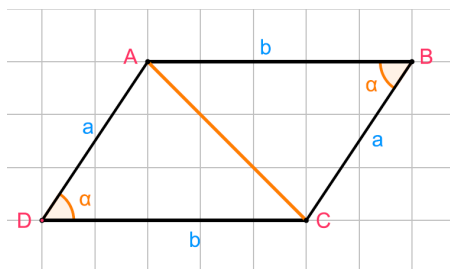


۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع

مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

با توجه به خواص متوازی الاضلاع داریم :

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \times \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \alpha \Rightarrow S_{ABCD} = a.b \sin \alpha$$



۹- به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \cos A < 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A < 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A > 0$$

$$\xrightarrow[-(b^2+c^2)]{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A > b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

$$\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos A > 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A > 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A < 0$$

$$\xrightarrow[-(b^2+c^2)]{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A < b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \cos A = 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A = 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A = 0$$

$$\xrightarrow[-(b^2+c^2)]{+(b^2+c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر

یک از مثلث های زیر تعیین کنید :

الف) $AB=10$, $AC=6$, $BC=9$

$$a=9, b=6, c=10$$

$$a^2=81, b^2+c^2=136 \Rightarrow a^2 < b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

ب) $AB=8$, $AC=4$, $BC=9$

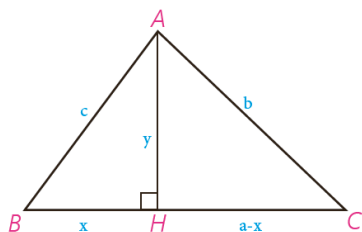
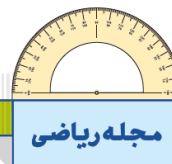
$$a=9, b=4, c=8$$

$$a^2=81, b^2+c^2=80 \Rightarrow a^2 > b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

پ) $AB=8$, $AC=15$, $BC=17$

$$a=17, b=15, c=8$$

$$a^2=289, b^2+c^2=289 \Rightarrow a^2 = b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$



اثبات دستور هرون (برای محاسبه مساحت مثلث)

در مثلث ABC، $AB=c$ و $AC=b$ و $AH=y$ و $BH=x$ و $BC=a$ و $CH=a-x$. با نوشتن قضیه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و ACH و تفاضل روابط به دست آمده خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ (a-x)^2 + y^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow b^2 - c^2 = (a-x)^2 - x^2 = a^2 + x^2 - 2ax - x^2 = a^2 - 2ax$$

$$a^2 - 2ax \Rightarrow x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}$$

با ساده کردن این عبارت جبری و تجزیه آن به کمک اتحادهای جبری نتیجه می‌شود:

$$y = AH = \sqrt{\frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}} = \frac{1}{2a} \sqrt{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}$$

$$= \frac{1}{2a} \sqrt{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]} =$$

$$\frac{1}{2a} \sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

حال با فرض $a+b+c=2p$ خواهیم داشت:

$$a+c-b=a+c+b-2b=2p-2b=2(p-b)$$

و به همین صورت:

$$b+c-a=2(p-a), \quad b+a-c=2(p-c)$$

و بنابراین:

$$AH = \frac{1}{2a} \sqrt{2p \times 2(p-a) \times 2(p-b) \times 2(p-c)} =$$

$$\frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = \frac{1}{2} AH \cdot a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$