باسمه تعالی

فهرست مطالب

حســـــاب

هندســـه

با سمه تعالی

با سلام

دانش آموز عزیز قبل از مطالعه این جزوه به چند نکته توجه نمایید.جزوه ای را که در مقابل دارید به منظور مطالعه برای آزمون های نمونه وتیز هوشان نوشته شده است. واینکه دانش اموزان در کلاس نیازی به نوشتن این نکات نداشته باشند تا دانش اموزان در کلاس فرصت بیشتری برای حل انواع مختلف سوالات داشته باشند. این جزوه بیشتر حاوی نکاتی است که در کتاب درسی شما از آنها نامی برده نشده ولی در آزمون های سالهای گذشته از آنها در سوالات استفاده شده است .بسیاری از فرمول هایی که در این جزوه آورده شده است بنده شخصا اعتقادی به آنها واینکه از آنها در آزمونها استفاده شود ندارم زیرا سوالات این گونه آزمونها باید قدرت خلاقیت وحل مساله را در دانش اموز بسنجند نه اینکه دانش آموز باحفظ چند فرمول به راحتی بتواند این گونه سوالات را حل کند ۰ بنابراین سعی کنید قدرت تفکر وحل مساله را درخود با حل سوالات مختلف به بالا ببرید .و بعد اینکه ابتدا تا می توانید کلیه مطالب کتاب درسی را بادقت فراوان مطالعه کنید زیرا اکثر این سوالات از همان مطالب کتاب گرفته شده اند.در پایان لازم است از زحمات دوست وهمکار بسیار بزرگوارم آقای «کهزاد رضایی »که زحمت بررسی مطالب این جزوه را کشیدند بسیار تشکر کنم.

اگر در یک تقسیم، مقسوم a،مقسوم علیه b ، خارج قسمت q و باقیمانده r باشد آنگاه داریم :

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} \text{.........} & q \\ r & \end{array}$$

رابطه های تقسیم(امتحان درست بودن تقسیم):

۱) در هر تقسیم باید باقیمانده از مقسوم علیه کوچک تر باشد. $r < b$

۲) در هر تقسیم باید حاصل ضرب مقسوم علیه در خارج قسمت به اضافه‌ی باقیمانده،برابر مقسوم شود. $(b\times q)+r=a$

بخشـــــــــپذیری:

هرگاه در یک تقسیم باقیمانده صفر شود می گوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخشپذیر است.

قواعد بخشپذیری بر اعداد :

۱-بخشپذیری بر صفر: هیچ عددی بر صفر بخشپذیر نیست .اما صفر بر همه‌ی اعداد (به جز صفر) بخشپذیر است.

۲- بخشپذیری بر ۱ : همه‌ی اعدادبر یک بخشپذیرند.

۳- بخشپذیری بر ۲ :اعدادی که یکانشان زوج باشد.

تذکر: بخشپذیری بر 2^n: عددی بر 2^n بخشپذیر است که n رقم سمت راست آن بر 2^n بخشپذیر باشد.

۴- بخشپذیری بر ۳ : اعدادی که جمع رقم هایشان بر ۳ بخشپذیر باشد.

۵- بخشپذیری بر ۴ :اعدادی که دو رقم سمت راست آنها صفر یا بر ۴ بخشپذیر باشد.

۶- بخشپذیری بر ۵ : اعدادی که رقم سمت راستشان صفر یا ۵ باشد.

تذکر: بخشپذیری بر 5^n: عددی بر 5^n بخشپذیر است که n رقم سمت راست آن بر 5^n بخشپذیر باشد.

۷- بخشپذیری بر ۶ : اعدادی که هم بر ۲ وهم بر ۳ بخشپذیر باشند.

۸- بخشپذیری بر ۷ : اعدادی که تفاضل دو برابر یکان آنها از بقیه‌ی رقمهایشان صفر یا بر ۷ بخشپذیر باشد.

روش دوم بر۷: برای اعداد با ارقام زیاد می توان از سمت راست رقم ها را سه تا سه تا جدا کرد سپس بین این سه تایی ها یک در میان جمع وتفریق گذاشت وسپس حاصل آن ها را به دست آورد اگر صفر یا مضربی از ۷ شد بر ۷ بخشپذیر می باشد.

۹- بخشپذیری بر ۸ : اعدادی که سه رقم سمت راستشان صفر یا بر ۸ بخشپذیر باشد.

۱۰- بخشپذیری بر ۹ :اعدادی که مجموع رقمهایشان بر ۹ بخشپذیر باشد.

۱۱- بخشپذیری بر ۱۰ : اعدادی که رقم یکانشان صفر باشد .یا هم بر ۲ وهم بر ۵ بخشپذیر باشند.

۱۲- بخشپذیری بر ۱۱ : اعدادی که اگی بین آنها یک در میان مثبت ومنفی قرار د هیم و سپس حاصل آنها را پیدا کنیم صفر یا بر ۱۱ بخشپذیز باشد.

۱۳- بخشپذیری بر ۱۲ : اعدادی که هم بر ۳و هم بر ۴ بخشپذیر باشند.

۱۴- بخشپذیری بر ۱۳ : اعدادی که مجموع ۴ برابر رقم یکانشان با بقیه ارقام بر ۱۳ بخشپذیر باشد.

روش دوم بر۱۳: برای اعداد با ارقام زیاد می توان از سمت راست رقم ها را سه تا سه تا جدا کرد سپس بین این سه تایی ها یک در میان جمع وتفریق گذاشت وسپس حاصل آن ها را به دست آورد اگر صفر یا مضربی از ۱۳ شد بر ۱۳ بخشپذیر می باشد.

۱۵- بخشپذیری بر ۱۴ : اعدادی که هم بر ۲و هم بر ۷ بخشپذیر باشند.

۱۶- بخشپذیری بر ۱۵ : اعدادی که هم بر ۳و هم بر ۵ بخشپذیر باشند.

۱۷- بخشپذیری بر ۲۱ : اعدادی که هم بر ۳و هم بر ۷ بخشپذیر باشند.

۱۸- بخشپذیری بر ۲۵ : اعدادی که دو رقم سمت راستشان صفر یا بر ۲۵ بخشپذیر باشد.

۱۹- بخشپذیری بر ۴۵: اعدادی که هم بر ۵و هم بر ۹ بخشپذیر باشند.

❋هرگاه a و b دو عدد طبیعی بر عددطبیعی c بخشپذیر باشند آنگاه مجموع ، اختلاف ، حاصل ضرب و a^n و b^n نیز بر عدد c بخشپذیر می شوند. ولی در مورد تقسیم همیشه اینگونه نیست.

مثال : *دو عدد ۳۶ و۱۲ هر دو بر ۴ بخشپذیرند در نتیجه: ۱۲+۳۶ و ۱۲-۳۶ و ۱۲×۳۶ نیز بر ۴ بخشپذیرند.*

باقیمـــــــــــــانده

۱- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ : برابر باقیمانده تقسیم یکانش بر ۲ است.

۲- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ : برابر باقیمانده تقسیم مجموع ارقامش بر ۳ می باشد.

۳- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴ : برابر باقیمانده تقسیم دو رقم سمت راست عدد بر ۴ می باشد.

۴- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۵ : برابر باقیمانده تقسیم یکان عدد بر ۵ می باشد.

۵- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۶ : برابر باقیمانده تقسیم مجموع رقم یکان عدد با ۴ برابر مجموع بقیه رقم های عدد می باشد.

۶- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۸ : برابر باقیمانده تقسیم سه رقم سمت راست عدد بر ۸ می باشد.

۷- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹ : برابر باقیمانده تقسیم مجموع ارقامش بر ۹ می باشد.

۸- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰ : برابر رقم یکانش است.

۹- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰۰ : برابر دو رقم سمت راستش است.

۱۰- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰۰۰ : برابر سه رقم سمت راستش است.

۱۱- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۱ : برابر مجموع ارقام مثبت ومنفی عدد به صورت یک درمیان بر ۱۱ است .

۱۲- باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲۵ : برابر باقیمانده تقسیم دو رقم سمت راست عدد بر ۲۵ است.

❋اگر مقسوم ومقسوم علیه تقسیمی در عددی غیر صفر، ضرب یا تقسیم شود .باقیمانده نیز در همان عدد ضرب یا تقسیم می شود ولی خارج قسمت تغییر نمی کند

مثال:

$$\begin{array}{r|l} ۳۵ & ۸ \\ \hline ۳۲ & ۴ \\ \hline ۳ & \end{array} \xrightarrow{\times ۳} \begin{array}{r|l} ۱۰۵ & ۲۴ \\ \hline ۹۶ & ۴ \\ \hline ۹ & \end{array}$$

❋ اگر مقسوم علیه تقسیمی ثابت باشد مقسوم به هر توانی برسد باقیمانده نیز به همان توان می رسد.

مثال: باقیمانده تقسیم عدد $۷۴۲^{۱۳۹۴}$ بر عدد ۳ چند است؟

$$\begin{array}{r|l} ۷۴۲ & ۳ \\ \hline ۱ & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|l} ۷۴۲^{۱۳۹۴} & ۳ \\ \hline ۱^{۱۳۹۴} & \end{array}$$

تذکر: در حل سوالات مربوط به باقی مانده تقسیم وقتی مقسوم علیه به توان میرسد بهتر است در صورت امکان توانی از مقسوم را انتخاب کنیم که باقیمانده آن بر مقسوم علیه $(۱),(۰),(-۱)$ باشد.

❋ اگر باقیمانده تقسیم a بر b برابر r باشد :

الف) باقیمانده تقسیم na بر b برابر باقیمانده تقسیم nr بر b است.

ب) باقیمانده تقسیم $a \pm c$ بر b برابر باقیمانده تقسیم $r \pm c$ بر b است.

مثال: *باقی مانده تقسیم عدد $۱۳ \times ۱۷^{۲۰} - ۷$ بر ۴ برابر است با:*

۱) صفر *۲) ۲* *۳) ۱* *۴) ۳*

حل: باقیمانده ۱۷ بر ۴ برابر ۱ می باشد پس باقیمانده $۱۷^{۲۰}$ بر ۴ نیز برابر $۱^{۲۰}$ میشود و باقیمانده ۱۳×۱۷^{۲۰} بر ۴ ، برابرباقیمانده تقسیم

۱۳×۱ بر ۴ می شود پس باقیمانده تقسیم $۱۳ \times ۱۷^{۲۰} - ۷$ بر ۴ ، برابر تقسیم $۱۳ \times ۱ - ۷ = ۶$ بر ۴ مشود یعنی عدد ۲

❋ برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم مجموع یا تفریق چند عدد بر n کافیست باقیمانده تقسیم هر کدام از آن اعداد را بر n به دست آورده وبا هم جمع یا تفریق کنیم .اگر حاصل از n بیشتر شد آن را دوباره بر n تقسیم کرده و باقیمانده را به دست می آوریم.

مثال: *باقیمانده تقسیم عبارت* **۲۰۰۵ +۲۰۰۴+ ۲۰۰۳+ ۲۰۰۲+ ۲۰۰۱** *بر* **۱۹۹۹** *چیست؟*

باقیمانده هر یک از اعداد بالا بر ۱۹۹۹ عبارت است از ۲و۳و۴و۵و۶ پس باقیمانده عبارت بالا بر۱۹۹۹ برابر است با: ۲+۳+۴+۵+۶=۲۰

❋ برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم حاصل ضرب چند عدد بر n کافیست باقیمانده تقسیم هر کدام از آن اعداد را بر n به دست آورده وبا هم ضرب کنیم .اگر حاصل از n بیشتر شد آن را دوباره بر n تقسیم کرده و باقیمانده را به دست می آوریم.

❋اگر در یک تقسیم مقسوم علیه برابر b و باقیمانده برابر r باشد حداکثر می توان $b - r - ۱$ واحد به مقسوم اضافه نمود تا خارج قسمت تغییر نکند.

مثال: *در یک تقسیم مقسوم علیه برابر۶۱ وباقیمانده ۲۳ می باشد بزرگ ترین عددی که می توانیم به مقسوم اضافه کنیم تا خارج قسمت تغییرنکندچه عددی است؟ بزرگترین عدد ۱-۲۳-۶۱=۳۷ می باشد. بنابراین مثلا اگر با توجه به صورت سوال ، مقسوم را ۱۴۵ بگیریم داریم:*

همانطور که در روبه رو می بینیم خارج قسمت تغییر نکرد وهمان ۲ باقی ماند.

$$۱۴۵ \div ۶۱:\ ۱۴۵ - ۱۲۲ = ۲۳,\ \text{خارج قسمت } ۲ \quad \xrightarrow{۱۴۵+۳۷=۱۸۲} \quad ۱۸۲ \div ۶۱:\ ۱۸۲ - ۱۲۲ = ۶۰,\ \text{خارج قسمت } ۲$$

❋اگر در یک تقسیم خارج قسمت برابر q و باقیمانده برابر r باشد حداکثر مقداری که می توان به مقسوم علیه اضافه نمود تا با ثابت ماندن مقسوم ،خارج قسمت تغییر نکند برابر خارج قسمت تقسیم باقیمانده اولیه بر خارج قسمت اولیه است یعنی: $\frac{r}{q}$

مثال: *در یک تقسیم باقیمانده ۱۷ وخارج قسمت ۵ می باشد حداکثر چند واحد واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند.*

حداکثر ۳ واحد یعنی $۳ \cong \frac{۱۷}{۵}$ *می توان به مقسوم علیه اضافه کرد.*

❋ اگر a,b,n اعداد طبیعی باشند و $a>b$ باشد در اینصورت همواره a^n-b^n بر $a-b$ بخشپذیر است

مثال: *عبارت* $۱۲^{۱۸}-۵^{۱۸}$ *همواره بر* $۱۲-۵=۷$ *بخشپذیر است.*

محاسبات عددی:

❋ترتیب انجام عملیات در ریاضی:

اول: پیدا کردن حاصل پرانتز(کروشه) آن هم از داخلی ترین پرانتز.

دوم: توان وجذر

سوم: ضرب وتقسیم (هر کدام سمت چپ دیگری بود اولویت با اوست.)

چهارم: جمع وتفریق:

مثال: *حاصل عبارت مقابل را پیدا کنید.*

$$۹-۵\Big[\underbrace{۷-\underbrace{۳\overbrace{\overbrace{(۸-۹)}^{۱}{}^{۱۲}}^{۱^{۱۲}=۱}}_{۳}}_{۴}\Big]^{۲}=۹-۵[۴]=۹-۲۰=-۱۱$$

فرمول های مهم برای محاسبات عددی

❋مجموع اعداد طبیعی : $۱+۲+۳+۴+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$

❋مجموع اعداد طبیعی زوج: $۲+۴+۶+۸+...+۲n=n(n+۱)$

❋مجموع اعداد طبیعی فرد: $۱+۳+۵+۷+...+(۲n-۱)=n^{۲}$

❋برای انجام محاسبات عددی می توان به جای عبارت های بالا به صورت کلی از مجموع سری اعداد منظم که با شروع از هر عددی میتوان از آن استفاده کرد.

❋سری اعداد منظم: یک تعداد از اعداد که فاصله‌ی هر دو عدد متوالی آنها ثابت باشد.

میانگین سری اعداد منظم:　$(\text{میانگین})M = (\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}) \div ۲$

تعداد اعداد سری اعداد منظم:　$(\text{تعداد})N = \dfrac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{\text{فاصله دو عدد متوالی}} + ۱$

مجموع اعداد سری منظم :　$S = M \times N = \text{تعداد} \times \text{میانگین}$

مثال: حاصل $۱۵۹ + ... + ۱۵ + ۱۱ + ۷ + ۳$ را به دست آورید.

$$M = \frac{۱۵۹ + ۳}{۲} = ۸۱ \qquad N = \frac{۱۵۹ - ۳}{۴} = \frac{۱۵۶}{۴} = ۷۸ \qquad S = M \times N = ۸۱ \times ۷۸ = ۶۳۱۸$$

❋مجموع مربعهای اعداد طبیعی:

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ... + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

❋مجموع مکعبهای اعداد طبیعی:

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ... + n^۳ = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

❋

$$۱ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + ... + n(n+۱) = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$$

❋

$$۱ \times ۱! + ۲ \times ۲! + ۳ \times ۳! + ... + n \times n! = (n+۱)! - n!$$

❋**اصل ضرب**: اگر عملی به m طریق و عمل دیگری به n طریق انجام شود.ان دو عمل با هم به $m \times n$ طریق انجام خواهند گرفت.(دو عمل باید متوالی ومستقل از هم باشند)

مثال: *برای رفتن از شهرکرد به اصفهان ۳ راه وبرای رفتن از اصفهان به قم نیز ۲ را ه وجود دارد برای رفتن از شهرکرد به قم چند راه وجود دارد؟*

$۳ \times ۲ = ۶$

❋**اصل جمع**: اگر عملی به m طریق و عمل دیگری به n طریق انجام شود به طوری که این دو عمل هم زمان نتوانند با هم انجام شوند.آنگاه اگر بخواهیم یکی از این اعمال را انجام دهیم. یکی از این اعمال به $m+n$ روش انجام می شود.

مثال :*یک گروه ۳۰ نفری را در نظر بگیرید اگر هر فرد این گروه بخواهد با افراد دیگر گروه دست دهد به* $۲۹+...+۴+۳+۲+۱$ *طریق انجام می گیرد.*

آمـــــــــار و میـــــا نگـــــین

❋میانگین یک سری از اعداد طبیعی که به ترتیب نوشته شده است برابر است با میانگین عدد اول وآخر.

مثال: *میانگین اعداد* ۸,۱۱,۱۴,۱۷,...,۹۸ *چند است؟*

$$\frac{۸+۹۸}{۲}=۵۳$$

❋در یک سری متوالی اگر تعداد اعداد فرد باشد میانگین کل اعداد برابر است با عدد وسطی ، و اگر تعداد اعداد زوج باشد میانگین برابر است با میانگین دو عددی که در وسط هستند.

❋اگر به تک تک داده ها مقداری دلخواه اضافه یا کم کنیم به میانگین نیز همان مقدار دلخواه اضافه یا کم می شود.

مثال: *اگر میانگین داده های* ۱,۲,۳,۴,...,۱۵ *برابر۸ باشد .به هر یک از داده ها ۱۰ واحد اضافه می کنیم میانگین جدید چند خواهد شد؟*

حل) به میانگین نیز ۱۰ واحد اضافه می شود و میانگین جدید برابر است با: $۸+۱۰=۱۸$

❋اگر تک تک داده ها را در عددی ضرب یا تقسیم کنیم میانگین نیز در همان عدد ضرب یا تقسیم می شود.

مثال: *اگر میانگین داده های* a,b,c,d,f *برابر ۲۳ باشد میانگین داده های* $۳a,۳b,۳c,۳d,۳f$ *چند می شود؟*

حل: *میانگین جدید* $۳\times۲۳=۶۹$

❋اگر میانگین کل داده ها را M و میانگین اعداد کنار گذاشته شده را A بنامیم آنگاه:

الف) اگر $A=M$ میانگین تغییر نمی کند

ب) اگر $A<M$ میانگین بیشتر می شود.

ج) اگر $A>M$ میانگین بیشتر می شود.

مثال: میانگین تعدادی عدد۲۲ می باشد اگر از این مجموعه اعداد ۱۷و۲۴و۲۵ را حذف کنیم میانگین بقیه اعداد چند می شود؟

۱)۱۹ ۲)۲۱ ۳) ۲۲ ۴) داده ها کافی نیست.

حل: میانگین تغییر نمی کند $\Leftarrow M=A \Leftarrow$ $A=(۱۷+۲۴+۲۵)\div ۳=۲۲$ و $M=۲۲$

اگر مجموع همه اختلاف های همه‌ی داده ها با میانگین را حساب کرده وبا هم جمع کنیم مجموعشان صفر خواهد شد.

مثال)اگر اختلاف میانگین با همه داده ها ی مقابل را حساب کنیم مجموع اختلاف ها چند می شود؟ ۱۲و۹و۳و۴و۱۰و۲۵

$$M=\frac{۲۵+۱۰+۴+۳+۹+۱۲}{۶}=\frac{۶۳}{۶}=۱۰/۵ \Rightarrow ۲۵-۱۰/۵, ۱۰-۱۰/۵, ۴-۱۰/۵, ۳-۱۰/۵, ۹-۱۰/۵, ۱۲-۱۰/۵ \Rightarrow$$

$$۱۴/۵, -۰/۵, -۶/۵, -۷/۵, -۱/۵, ۱/۵ \Rightarrow ۱۴/۵-۰/۵-۶/۵-۷/۵-۱/۵+۱/۵=۰$$

اعـــــــــداد اول

❋در جمع ، تفریق وضرب اعداد طبیعی همواره رابطه های زیر برقرار است.

زوج=زوج×زوج　　زوج=زوج+زوج

زوج=فرد×زوج　　فرد=فرد+زوج

فرد=فرد×فرد　　زوج=فرد+فرد

❋ اگر مجموع یا تفاضل دو عدد اول ، عددی فرد باشد. حتماً یکی از آن دو عدد ، ۲ می باشد.

مثال: *تفاضل مربعات دو عدد اول ۹۶۷۱۷ است مجموع مربع عدد کوچکتر و خود عدد بزرگتر کدام است؟(انرژی اتمی)*

۱) ۳۱۳　　۲) ۳۱۵　　۳) ۳۱۷　　۴) ۳۱۹

حل: چون جواب تفاضل عددی فرد شده پس یک عدد زوج وعدد دیگر فرد است و می دانیم تنها عدد اول زوج ۲ می باشدپس :

$$۹۶۷۱۷ + ۲^۲ = ۹۶۷۲۱ \Rightarrow \sqrt{۹۶۷۲۱} = ۳۱۱ \quad \text{عدد اول بزرگتر} \quad \Rightarrow \quad ۳۱۱ + ۲^۲ = ۳۱۵$$

❋ اگر حاصل ضرب دو عدد اول، عددی زوج باشد حتماً یکی از آن دو عدد ، ۲ می باشد.

مثال: *حاصل ضرب دو عدد اول برابر ۳۹۴ می باشد عدد بزرگتر را پیدا کنید.* $۳۹۴ \div ۲ = ۱۹۷$

❋ در الگوریتم غربال ، اولین مضرب هر عدد که برای اولین بارخط می خورد **مجذور(مربع)** آن عدد اول است.

مثال: *در الگوریتم غربال اعداد از ۱ تا ۱۰۰ اولین مضرب ۷ که برای بار اول خط می خورد کدام عدد است؟* $۷^۲ = ۴۹$

❋ در الگوریتم غربال اعداد از ۱ تا n همیشه **نصف** تعداد اعداد با عدد یک و مضربهای ۲ به جز خود۲ خط می خورند.(اگر n زوج باشد) و اگر n فرد باشد یک واحد از n کم می کنیم و سپس نصف می کنیم.)

مثال۱: در الگوریتم غربال اعداد از ۱تا ۱۵۹ ، هشتاد وسومین عددی که برای بار اول خط می خوردکدام است؟

حل) $(۱۵۹-۱)\div ۲ = ۷۹$ پس هفتاد ونه عدد با مضربهای ۲ وعدد ۱ خط می خورند حال باید مضربهای ۳ را پیدا کنیم .اولین مضرب ۳ که خط می خورد عدد۹ می باشد یعنی مضربهای فرد عدد ۳ می باشد که به ترتیب اعداد ... و ۲۷ و ۲۱ و ۱۵ و ۹ می باشند پس عدد ۲۷ پاسخ سوال است.

مثال ۲) در روش غربال برای پیدا کردن اعداد اول بین ۱تا۳۰۰ عدد ۵۵ چندمین عددی است که خط می خورد؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۲۰۲ ۳) ۲۰۳ ۴) ۲۰۱

حل) چون ۲۵=۵×۵ و ۳۵ =۷×۵ و ۵۵= ۱۱×۵ پس ۵۵ سومین مضرب ۵ می باشد که برای اولین بار خط می خورد . نصف تعداد اعداد با مضربهای ۲وعدد ۱ خط می خورند یعنی ۱۵۰ تا اکنون مضربهای فردعدد ۳ غیر از خودش را پیدا می کنیم که می شود $\frac{۲۹۷-۹}{۶}+۱=۴۹$ درنتیجه ۳+۴۹+۱۵۰=۲۰۲

یعنی ۵۵ دویست ودومین عددی است که خط می خورد.

❋ **در الگوریتم غربال اعداد از یک تا n مضرب های اعداد اولی که بعد از مجذورشان برای اولین بار خط می خورند از ضرب همان عدد اول در اعداد اول بعدیش به دست می آیند.(برای اعدد اول بزرگ تر از ۳)**

مثال: *برای عدد اول ۵ اولین عددی که برای اولین بار خط می خورد مجذور ۵ است.و اعداد بعدی عبارتند از:*

... و ۵×۱۳=۶۵ و ۵×۱۱ =۵۵ و ۵×۷ =۳۵

تعداد شمارنده های یک عدد

❋ **هر گاه تجزیه‌ی عدد A به عوامل اول به صورت : $A = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \times \ldots$ باشد آنگاه تعداد مقسوم علیه های مثبت A (شمارنده ها) از رابطه‌ی $T(A) = (a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times\ldots$ به دست می آید .(p_1 و p_2 و p_3 و... عامل های اول A هستند.)**

مثال: *تعداد شمارنده های عدد ۱۲۰ را پیدا کنید.*

$$۱۲۰ = ۲^۳ \times ۳ \times ۵$$

$$T(۱۲۰) = (۳+۱)(۱+۱)(۱+۱) = ۱۶$$

تذکر: تعداد کل مقسوم علیه های هر عدد ، ۲ برابر تعداد مقسوم علیه های مثبت آن عدد است.

❋ **تعداد مقسوم علیه های هر عدد برابر است با: تعداد عوامل مرکب + تعداد عوامل اول + ۱**

مثال: *تعداد مقسوم علیه های مرکب عدد ۱۲۰ را پیدا کنید.*

حل) مقسوم علیه های اول عدد ۱۲۰ همانطور که در مثال قبل می بینیم ۲ و ۳ و ۵ می باشند پس $۱+۳+X=۱۶ \Rightarrow X=۱۲$

تعداد شمارنده های فرد یک عدد: ابتدا عدد را تجزیه می کنیم سپس اگر در تجزیه عدد عامل ۲ داشته باشیم آن را کنار گذاشته و سپس به توان بقیه عامل ها یک واحد اضافه کرده وآنها را در هم ضرب می کنیم.

مثال: تعداد شمارنده های فرد عدد ۱۲۰ را حساب کنید.

حل) در تجزیه ۱۲۰ عامل های اول ۳و۵ را داریم که توان هر کدام ۱ می باشد بنابراین به توان هرکدام یک واحد اضافه کرده ودر هم ضرب می کنیم $(۱+۱)(۱+۱)=۴$ پس تعداد شمارنده های فرد ۱۲۰ برابر ۴تا می باشد.

تعداد شمارنده های زوج یک عدد: تعداد کل شمارنده های عدد را منهای تعداد شمارنده های زوج می کنیم.

مثال: در مورد عدد ۱۲۰در مثال بالا داریم: $T(۱۲۰)-۴=۱۶-۴=۱۲$

تعداد شمارنده های مربع کامل یک عدد: تعداد عامل های با توان زوج را با کمک اصل ضرب پیدا می کنیم.

مثال: تعداد شمارنده های زوج عدد ۱۶۲۰ را پیدا کنید . $۱۶۲۰=۲^{۲}\times ۳^{۴}\times ۵$

تعداد عامل های باتوان زوج ۲ عبارتنداز $(۲^{۰},۲^{۲})$ که ۲ تا می باشند و تعداد عامل های با توان زوج۳ عبارتند از $(۳^{۰},۳^{۲},۳^{۴})$ که ۳ تا می باشند وتعداد عاملهای با توان زوج ۵ عبارتند از $(۵^{۰})$ که یکی می باشدپس تعداد کل شمارنده های مربع کامل طبق اصل ضرب می شود

$$۲\times ۳\times ۱=۶$$

تعداد شمارنده های مکعب کامل یک عدد: تعداد عامل های با توان مضرب ۳ را به کمک اصل ضرب پیدا می کنیم

مثال: عدد $۲^{۷}\times ۳^{۱۰}\times ۵$ چند مقسوم علیه دارد که مکعب کامل باشند؟

حل) تعداد عامل های با توان مضرب ۳ عبارتند از $(۲^{۰},۲^{۳},۲^{۶})$ و $(۳^{۰},۳^{۳},۳^{۶},۳^{۹})$ و $(۵^{۰})$ که طبق اصل ضرب تعداد آنها می شود

$$۳\times ۴\times ۱=۱۲$$

تعداد شمارنده های مشترک چند عدد: ابتدا «ب م م» اعداد را محاسبه کرده و سپس تعداد شمارنده های «ب م م » را پیدا می کنیم.

مثال: تعداد شمارنده های مشترک دو عدد ۱۴۴ و ۸۴ چند تاست؟

$$\begin{matrix} ۱۴۴=۲^{۴}\times ۳^{۲} \\ ۸۴=۲^{۲}\times ۳\times ۷ \end{matrix} \Rightarrow (۱۴۴,۸۴)=۲^{۲}\times ۳=۱۲$$

پس تعداد شمارنده های ۱۲ همان تعداد شمارنده های مشترک دو عدد است.

تعداد اعداد طبیعی کوچکتر ومتباین با یک عدد

❋هر گاه تجزیه‌ی عدد A به عوامل اول به صورت : $A = p_۱^a \times p_۲^b \times p_۳^c \times ...$ باشد آنگاه تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از A که نسبت به A اول هم باشند از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$\varphi(A) = A \times \left(۱-\frac{۱}{P_۱}\right) \times \left(۱-\frac{۱}{P_۲}\right) \times \left(۱-\frac{۱}{P_۳}\right) \times ...$$

مثال: *تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۶۰۰ که نسبت به ۶۰۰ اول هستند چند تاست؟* $۶۰۰ = ۲^۳ \times ۳ \times ۵^۲$

$$۶۰۰ \times \left(۱-\frac{۱}{۲}\right) \times \left(۱-\frac{۱}{۳}\right) \times \left(۱-\frac{۱}{۵}\right) = ۶۰۰ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵} = ۱۶۰$$

❋ اگر n تعداد شمارنده های اول یک عدد باشد تعداد حالتهایی که می توان آن عدد را به شکل ضرب دو عدد متباین نوشت برابر است با : $۲^{n-۱}$

مثال: *تعداد حالت هایی که می توان عدد ۶۰۰ را به شکل ضرب دو عدد متباین نوشت چند تاست؟*

حل) تعداد شمارنده های اول عدد ۶۰۰ سه تا می باشرپس تعداد حالتها: $۲^{۳-۱} = ۴$ *است که به صورت زیر می باشد.*

۱) ۶۰۰×۱　　۲) ۷۵×۸　　۳) ۲۰۰×۳　　۴) ۲۵×۲۴

❋ حاصل ضرب مقسوم علیه های یک عدد(شمارنده ها) برابر است با همان **عدد به توان نصف تعداد مقسو علیه هایش** یعنی:

$$A^{\frac{T}{۲}}$$

مثال: *حاصل ضرب شمارنده های عدد ۱۲۰ چند تاست؟* $۱۲۰ = ۲^۳ \times ۳ \times ۵ \Rightarrow T(۱۲۰) = (۳+۱)(۱+۱)(۱+۱) = ۱۶$

پس حاصل ضرب شمارنده ها برابر می شود با: $۱۲۰^{\frac{۱۶}{۲}} = ۱۲۰^۸$

مجموع شمارنده های یک عدد

❋ هر گاه تجزیه‌ی عدد A به عوامل اول به صورت : $A = p_۱^a \times p_۲^b \times p_۳^c \times ...$ باشد آنگاه مجموع مقسوم علیه های عدد A از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$\text{مجموع شمارنده های A} = \frac{p_۱^{a+۱}-۱}{p_۱-۱} \times \frac{p_۲^{b+۱}-۱}{p_۲-۱} \times \frac{p_۳^{c+۱}-۱}{p_۳-۱} \times ...$$

ویا از رابطه‌ی زیر نیز می توان استفاده کرد.

$$\text{مجموع شمارنده های A} = \left(p_1^{0} + p_1^{1} + p_1^{2} + p_1^{3} + \dots + p_1^{a}\right)\left(p_2^{0} + p_2^{1} + p_2^{2} + p_2^{3} + \dots + p_2^{b}\right)\times \dots$$

مثال: *مجموع شمارنده های ۶۰۰ را پیداکنید.*

$$۶۰۰ = ۲^{۳} \times ۳ \times ۵^{۲}$$

$$\text{مجموع شمارنده های۶۰۰} = \left(۲^{0} + ۲^{۱} + ۲^{۲} + ۲^{۳}\right)\left(۳^{0} + ۳^{۱}\right)\left(۵^{0} + ۵^{۱} + ۵^{۲}\right) = ۱۵ \times ۴ \times ۳۱ = ۱۸۶۰$$

مجموع معکوس شمارنده های یک عدد : مجموع شمارنده های عدد را پیدا کرده وبر خود عدد تقسیم می کنیم.

مثال: *مجموع معکوس شمارنده های عدد ۶۰۰ را از مثال قبل پیدا کنید.*

$$\frac{۱۸۶۰}{۶۰۰} = ۳/۱$$

❋ **قضیه‌ی چبی شف** : برای محاسبه‌ی تعداد عوامل اول p در حاصل ضرب ۱ تا n (nفاکتوریل) کافیست عدد n را بر توان های p تقسیم کرده وخارج قسمت ها را جمع بزنیم.

مثال: *تعداد عوامل عدد ۷ در حاصل ضرب ۱ تا ۱۰۰ چند تاست؟*

قسمت صحیح

$$\left[\frac{۱۰۰}{۷^{۱}}\right] = ۱۴ \quad \text{و} \quad \left[\frac{۱۰۰}{۷^{۲}}\right] = ۲ \quad \Rightarrow ۱۴ + ۲ = ۱۶$$

علامت کروشه در اینجا به معنی خارج قسمت تقسیم به شکل عدد صحیح است .

❋ برای محاسبه‌ی **تعداد صفرهای سمت راست** عدد $n!$ (nفاکتوریل)کافیست عدد nرا بر توانهای ۵ تقسیم کنیم وخارج قسمت ها را جمع کنیم

مثال: *تعداد صفر های سمت راست حاصل ضرب اعداد از یک تا ۸۹ چند تاست؟*

$$\left[\frac{۱۸۹}{۵^{۱}}\right] = ۳۷ \quad \text{و} \quad \left[\frac{۱۸۹}{۵^{۲}}\right] = ۷ \quad \text{و} \quad \left[\frac{۱۸۹}{۵^{۳}}\right] = ۱ \quad \Rightarrow \quad ۳۷ + ۷ + ۱ = ۴۵ \quad \text{تعداد صفرها}$$

❋ برای به دست آوردن تعداد مضارب a کوچکتر از عدد n کافیست عدد n را بر عدد a تقسیم کنیم که خارج قسمت تقسیم، جواب سوال است.

مثال: تعداد مضارب ۷ کوچکتر از عدد ۱۰۰۰ چند تاست؟

$$\left[\frac{۱۰۰۰}{۷}\right]=۱۴۲$$

همه‌ی مضرب های مشترک چند عدد ، همان مضرب های «ک م م » آن اعداد است.

مثال: دو سری از اعداد داریم که هر کدام با نظم خاصی مرتب شده اندعدد ۵۱ اولین عدد مشترک دو لیست است عدد مشترک بعدی کدام است؟(انرژی اتمی)

۲۷ و۳۹ و۵۱ و۶۳ و۷۵ و . . .

-۱۲ و۹ و ۳۰ و۵۱ و۷۲ و . . .

حل) اعداد سری اول ۱۲تا ۱۲تا اضافه شده اند و اعداد لیست دوم ۲۱تا ۲۱تا اضافه شده اندپس :

ابتدا [۱۲,۲۱] را حساب می کنیم که برابر ۸۴ است حال چون اولین عدد مشترک ۵۱ می باشد. دومین عدد مشترک $۵۱+۱\times۸۴$ و سومین عدد مشترک $۵۱+۲\times۸۴$ وچهارمین عدد $۵۱+۳\times۸۴$ می شود.

«ب م م » هر دو عد متباین برابر ۱ و«ک م م » هر دو عدد متباین برابر حاصل ضرب آنهاست.

حاصل ضرب دو عدد برابر حاصل ضرب «ک م م » آن دوعدد در «ب م م » آنها می باشد یا

$$[a,b]=\frac{a\times b}{(a,b)}$$

مثال: «ب م م » دو عدد ۴ و «ک م م » دو عدد ۱۶۸ و یکی از اعداد ۲۴ می باشد عدد دیگر را پیدا کنید.

$$۱۶۸\times۴=۲۴\times x\Rightarrow x=\frac{۱۶۸\times۴}{۲۴}=۲۸$$

ویژ گی های «ب م م » و «ک م م » : اگر a,b,c,d,k اعدادی طبیعی باشند آنگاه:

$$[a,۱]=a \qquad (a,۱)=۱$$

$$[a,a]=a \qquad (a,a)=a$$

$$(a,b)=d\Rightarrow(a^k,b^k)=d^k \qquad (a,b)=d\Rightarrow(ka,kb)=kd$$

$$[a,b]=c\Rightarrow[a^k,b^k]=c^k \qquad [a,b]=c\Rightarrow[ka,kb]=kc$$

$$[a,b]=c\Rightarrow\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]=\frac{c}{k}\quad k\neq ۰ \qquad (a,b)=d\Rightarrow\left(\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right)=\frac{d}{k}\quad k\neq ۰$$

مجمـــــــــــــــــوعه ها

باز یا بسته بودن مجموعه نسبت به یک عمل:

می گوییم مجموعه‌ی A نسبت به یک عملی بسته است که به ازای هر عضو یا عضو هاییاز مجموعه A (حتی تکراری) حاصل نیز عضوی از مجموعه A شود در غیر اینصورت مجموعه A را نسبت به آن عمل باز می گوییم.

مثال: *مجموعه $\{-1,0,1\}$ نسبت به عمل جمع بسته است یا نه؟ خیر زیرا $-2=(-1)+-1$ و -2 عضو مجموعه نیست.*

مجموعه‌ی متناهی و نامتناهی: **مجموعه ای که اعضای آن با شمردن به پایان برسد مجموعه‌ی متناهی نامیده می شود .هر مجموعه که متناهی نباشد ،نامتناهی است.**

مثال : *مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰ متناهی و مجموعه کسرهای بین ۲و۳ نامتناهی است.*

دو مجموعه مساوی: **دو مجموعه که هر عضو اولی در دومی وهر عضو دومی در اولی باشد.**

مثال: *به ازای چه تعداد عدد صحیح x دو مجموعه $A=\{1,x,x^2\}$ و $B=\{y,y^2\}$ می توانند برابر باشند؟*

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ✓ ۴) ۳

$$y^2=1 \Rightarrow y=\pm1 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A=\{1\}, B=\{1\} \\ y=-1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow A=\{-1,1\}, B=\{-1,1\} \end{cases}$$

دو مجموعه جدا از هم: **دو مجموعه که هیچ عضو مشترکی نداشته باشند.**

مثال: *دو مجموعه‌ی اعداد زوج(E) و اعداد فرد(O)*

دو مجموعه هم ارز: **دو مجموعه A و B را دو مجموعه هم ارز می گویند در صورتیکه بین اعضای دو مجموعه حداقل یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد..**

مثال : *مجموعه اعداد طبیعی با هریک از مجموعه های اعداد طبیعی زوج واعداد طبیعی فرد و مجموعه اعداد صحیح واعداد حسابی و اعداد گویا هم ارز است.*

✵اگر عضو های مجموعه ای یک در میان مثبت ومنفی باشند در توصیف مجموعه با علائم ریاضی باید از ضریب $(-۱)^n$ یا $-(-۱)^n$ یا $(-۱)^{n+۱}$ که در آنها $n\in N$ یا $n\in W$ است استفاده کرد.

مثال: *نمایش ریاضی مجموعه* $A=\{-۱,۲,-۳,۴,-۵,۶,\ldots\}$ *در کدام گزینه به درستی نوشته شده است؟*

۱) $A=\{(-۱)\times n \mid n\in N\}$　　۲) $A=\{(-۱)^n \mid n\in N\}$

۳) $A=\{(-n)^n \mid n\in N\}$　　۴) $A=\{(-۱)^n\times n \mid n\in N\}$ ✓

✵اگر عضو های مجموعه ای دو تا در میان مثبت ومنفی باشند در توصیف مجموعه با علائم ریاضی باید از ضریب $(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$ یا $-(-۱)^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$ یا $-(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$ که در آنها $n\in N$ است استفاده کرد.

مثال: *نمایش ریاضی مجموعه* $\{-۱,-۴,+۹,+۱۶,-۲۵,-۳۶,\ldots\}$ *برابر است با:* $\left\{(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}}\times n^۲ \mid n\in N\right\}$

مجموعه مرجع: به مجموعه ای گفته می شود که همه عضو ها یا مجموعه های مورد بحث در آن مورد را شامل باشد و معمولا آن را با حرف U یا M نمایش می دهند

مجموعه متمم: اگر A زیر مجموعه ای از مجموعه مرجع باشد A' را متمم مجموعه A گوییمکه شامل عضو هایی از مجموعه مرجع است که در A نباشند.

زیر مجموعه: اگر $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,\ldots,a_n\}$ یک مجموعه باشد هر کدام از اعضای A می تواند در زیر مجموعه باشد یا نباشد یعنی برای هر عضو دو حالت داریم. پس طبق اصل ضرب برای یک مجموعه n عضوی داریم:

$$\overbrace{۲\times۲\times۲\times\ldots\times۲}^{n\ \text{بار}}=۲^n$$

عضو اول　　عضو n اُم

تعداد زیر مجموعه های دو عضوی :

فرض کنیم مجموعهی $B=\{\Delta,\Delta\}$ یک زیر مجموعهی دو عضوی دلخواه از مجموعهی n عضوی A باشد که دو خانه خالی داردکه حتماً باید پر شود.برای پر کردن کردن خانه اول به n حالت می توانیم ولی برای پر کردن خانه دوم دیگر از عضوی که در خانه اول قرار دادیم نمی توانیم استفاده کنیم پس به $n-۱$ حالت می توانیم این خانه را پر کنیم و در نتیجه در کل می توانیم این دو خانه را به $n\times(n-۱)$

روش پر کنیم ولی با توجه به اینکه جابجایی اعضا در مجموعه ها بی اثر است.پس مثلاً $\{a,b\}$ و $\{b,a\}$ یک زیر مجموعه حساب می شوند. بنا براین نصف حالتها حذف می شوند پس تعداد زیر مجموعه های دو عضوی برابر است با:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}$$

مثال: *تعداد زیر مجموعه های دو عضوی مجموعه $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ چند تاست؟*

روش اول $\frac{۵(۵-۱)}{۲}=۱۰$　　　*روش دوم* $\frac{۵!}{۲!(۵-۲)!}=\frac{۵!}{۲!\times ۳!}=\frac{۳!\times ۴\times ۵}{۲!\times ۳!}=۱۰$

تعداد زیر مجموعه های سه عضوی:

تعداد زیرمجموعه های سه عضوی نیز با روشی مانند روش بالا از فرمول زیر حساب می شود. $\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times ۲\times ۳}$

تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی را نیز می توان با یکی از فرمول های زیر به دلخواه نیز حساب کرد.

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)...(n-(k-۱))}{۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ...\times k}$$

ویا به کمک فاکتوریل از فرمول $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

مثال: *تعداد زیر مجموعه های ۷عضوی از یک مجموعه ۱۰ عضوی را پیدا کنید.*

روش اول $\frac{۱۰(۱۰-۱)(۱۰-۲)(۱۰-۳)\cdots(۱۰-۶)}{۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵\times ۶\times ۷}=۱۲۰$　　　*روش دوم با استفاده از فرمول فاکتوریل*

تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی با کمک مثلث خیام- پاسکال:

در این مثلث مجموع اعداد هرسطرتعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی را نشان می دهد.

و هر عدد روی ضلع پایین مثلث مربوط به هر سطر تعداد زیر مجموعه های k عضوی از آن مجموعه n عضوی را نمایش می دهد.

سطرصفرم　۱　$n=۰$

سطر یکم　۱　۱　$۱+۱=۲:n=۱$

سطر دوم　۱　۲　۱　$۱+۲+۱=۴:n=۲$

م　سطرسو　۱　۳　۳　۱　$۱+۳+۳+۱=۸:n=۳$

سطر چهارم　۱　۴　۶　۴　۱

۱　۵　۱۰　۱۰　۵　۱

۱　۶　۱۵　۲۰　۱۵　۶　۱

سطر پنجم

سطرششم　　　$۱+۶+۱۵+۲۰+۱۵+۶+۱=۶۴ : n=۶$

تعداد زیر مجموعه های شش عضوی | تعداد زیر مجموعه های پنج عضوی | تعداد زیر مجموعه های چهار عضوی | تعداد زیر مجموعه های سه عضوی | تعداد زیر مجموعه های دو عضوی | تعداد زیر مجموعه های یک عضوی | تعداد زیر مجموعه های صفر عضوی

طرز نوشتن زیر مجموعه های یک مجموعه که عضوهای آنها دارای شرط باشند.

مجموعه $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند زیر مجموعه دارد که شامل a باشد ولی e در آنها نباشد.

حل:عضو a در تمام زیر مجموعه ها باید باشد پس فقط یک حالت دارد ولی برای بقیه اعضا دو حالت وجود دارد (بودن یا نبودن)بنابراین :

عضوها :　$a \quad b \quad c \quad d \quad e$

حالتها :　$۱\times ۲\times ۲\times ۲\times ۱ = ۲^{۳} = ۸$

✵ پس تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی که p تا از اعضای آن در زیر مجموعه باشند و q تا از اعضای آن در زیر مجموعه نباشند برابر است با:　$۲^{n-(p+q)}$

مثال: *چند زیر مجموعه ۳ عضوی از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۱۵\}$ وجود دارد که عدد ۱۰ حتما عضو آن بوده و ۲و۳ عضو آن نباشند؟*

عضو های ۲و۳ و۱۰ را حذف می کنیم وتعداد زیر مجموعه های ۲عضوی یک مجموعه ۱۲ عضوی را پیدا می کنیم و سپس عضو ۱۰ را به همه آنها اضافه می کنیم داریم:

$$\frac{۱۲!}{۲!\times(۱۲-۲)!}=\frac{۱۱\times۱۲}{۲}=۶۶$$

مثال: *مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ چند زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی دارد که جمع عضو های آن برابر ۱۵ وعدد ۴ عضو آنها باشد؟*

$۱۵-۴=۱۱ \Rightarrow$ *مجموع دو عضوی که ۱۱ می شود را پیدا می کنیم* $\Rightarrow (۱۰,۱),(۹,۲),(۸,۳)(۵,۶)$

با توجه به توضیح بالا دو عضو ۷و۴ نمی توانند جز زیر مجموعه ها باشند زیرا عضو سوم نیز ۴ می شود که تکراری است.پس تعداد زیر مجموعه ها ۳ تا می شود.

✵تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی و یا زوج عضوی یک مجموعه برابر است با:　$۲^{n-۱}$

مثال: *تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی یک مجموعه‌ی ۹ عضوی کدام است؟*

۱) ۳۱۰　　۲) ۲۴۶　　۳) ۲۵۶　　۴) ۲۱۰　　حل) $۲^{۹-۱}=۲^{۸}=۲۵۶$

در بین تمام زیر مجموعه های یک مجموعه، هر عضو در نیمی از آنها تکرار می شود.

مثال: A یک مجموعه ۶ عضوی است که جمع عضو های ان ۴۰ است همه‌ی زیر مجموعه های A (که عضو تکراری در ان نباشد) را در نظر بگیرید وحاصل اعضای هر کدام را روی تخته سیاه یادداشت کنید جمع اعداد یادداشت شده چند خواهد شد؟

۱) ۱۱۰۰　　۲) ۱۲۸۰　　۳) ۲۵۶۰　　۴) ۳۱۰۰

حل) طبق نکته بالا چون هر عضو در نیمی از زیر مجموعه ها تکرار می شود و چون تعداد زیر مجموعه ها۶۴ تا می شود پس هر عضو در نصف آنها یعنی ۳۲ بار تکرار می شود و چون مجموع عضوها ۴۰ می باشد پس $۱۲۸۰ = ۴۰ \times ۳۲$ مجموع اعداد یادداشت شده می شود.

اگر یک عضو به اعضای مجموعه ای اضافه شود تعداد زیر مجموعه های آن ۲ برابر می شود.

مثال: به عضو های مجموعه ای ۴۰ عضوی، چند عضو جدید اضافه کنیم تا تعداد زیر مجموعه های آن ۸ برابر شود؟

۱) ۸　　۲) ۴　　۳) ۳ ✓　　۴) ۲

مثال) اگر به عضو های مجموعه A، ۲عضو اضافه شوربه تعداد زیر مجموعه هایش ۱۹۲ واحد اضافه می شود تعداد عضو های مجموعه A کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۶　　۳) ۸　　۴) ۱۰

$$۲^{n+۲} = ۲^{n} + ۱۹۲ \Rightarrow ۲^{n+۲} - ۲^{n} \overset{\text{فاکتور}}{=} ۱۹۲ \Rightarrow ۲^{n}\left(۲^{۲}-۱\right) = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^{n} \times ۳ = ۱۹۲ \Rightarrow ۲^{n} = \frac{۱۹۲}{۳} = ۶۴ = ۲^{۶} \Rightarrow n = ۶$$

اگر یک عضو از اعضای مجموعه ای کم شود تعداد زیر مجموعه های آن نصف می شود

زیر مجموعه های محض یک مجموعه: تمام زیر مجموعه های یک مجموعه به جز خودش.

تعداد زیر مجموعه های محض برابر است با: $۲^{n} - ۱$

مثال: تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه ۷ عضوی چند تاست؟ $۲^{۷} - ۱ = ۱۲۷$

مجموعه توان یک مجموعه: مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه های یک مجموعه را مجموعه توان آن مجموعه می گویند وآن را با (نام مجموعه) P نمایش می دهند.

مثال) اگر $A = \{b, \{b\}\}$ باشد $P(A)$ کدام است؟

۱) $\{\{b\}, \{\{b\}\}, \phi\}$　　۲) $\{b, \{b\}, \phi, A\}$　　۳) $\{\{b\}, \{\{b\}\}, \phi, A\}$ ✓　　۴) $\{\{b\}, \{\{b\}\}, \{\phi\}, A\}$

تعداد عضوهای مجموعه توان مجموعه A یعنی $P(A)$ برابر است با: $۲^{n(A)}$

مثال: اگر $A=\{\phi,\{\phi\}\}$ باشد $P(P(A))$ چند عضو دارد؟

۱)صفر ۲) $۲^{۲}$ ۳) $\left(۲^{۲}\right)^{۲}$ ۴) $\left(\left(۲^{۲}\right)^{۲}\right)^{۲}$

مجموعه A دارای دو عضو است پس $P(A)$ دارای $۲^{۲}$ یعنی ۴ عضو است و $P(P(A))$ دارای $۲^{۴}$ یعنی ۱۶ عضو است.

❋**تعداد زیر مجموعه هایی که در رابطه‌ی $B\subseteq X\subseteq A$ صدق می کنند از رابطه‌ی $۲^{n(A)-n(B)}$ به دست می آید.**

مثال: چند مجموعه مانند X می توان نوشت که رابطه‌ی $\{۲,۴,۶,۸\}\subseteq X\subseteq\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ برای آن برقرار باشد؟

تعداد مجموعه ها $X=۲^{۱۰-۴}=۲^{۶}=۶۴$

❋**اشتراک** تمام زیر مجموعه های یک مجموعه ،مجموعه **تهی** میشود.

❋**اجتماع** تمام زیر مجموعه های یک مجموعه ، **خود مجموعه** می شود.

اصل شمول: تعداد عضو هایی که حداقل به یکی از مجموعه ها(دوتا،سه تاو . . .)تعلق دارند.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

مثال) از ۸۰ نفر کل دانشجویان یک دانشکده ، ۵۰ نفر در درس فیزیک و۶۰ نفر در درس شیمی ثبت نام کرده اند. اگر ۸ نفر در هیچ یک از این دو درس ثبت نام نکرده باشند چه تعداد از دانشجویان در هر دو درس ثبت نام کرده اند؟

$$n(A\cup B)=۸۰-۸=۷۲$$

$$\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۷۲=۵۰+۶۰-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۳۸$$

احتمـــــــــــــــــــال

فضای نمونه ای: مجموعه همه‌ی حالت های ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه ای می نامیم وآن را با S نمایش می دهیم.

پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را پیشامد می گوییم.

❋اگر سکه ای را n بار بیندازیم یا nسکه را یک بار بیندازیم تعداد کل حالت های ممکن $n(S)=۲^n$ می شود.

❋اگر تاسی را n بار بیندازیم یا nتاس را یک بار بیندازیم تعداد کل حالت های ممکن $n(S)=۶^n$ می شود.

مثال: اگر سه تاس را باهم بیندازیم کل حالت های ممکن $۶^۳ = ۲۱۶$ حالت می شود.

همواره: $۰ \le P(A) \le ۱$

❋اگر $P(A)=۰$ می گوییم پیشامد A نشدنی یا غیر ممکن است.

❋اگر $P(A)=۱$ می گوییم پیشامد A حتمی است.

پیشامد متمم : اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد پیشامد B را متمم پیشامد A می گوییم مشروط بر آنکه $(A \cup B)=S$ باشد و در این مورد همواره داریم : $P(A)+P(B)=۱ \Rightarrow P(A)=۱-P(B)$

مثال: *دو تاس را با هم انداخته ایم احتمال این که مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۱باشند را به دست آورید.*

بهتر است که احتمال این که مجموع اعداد رو شده ۱۱ یا ۱۲ باشند را حساب کنیم واز عدد ۱ کنیم:

حالت هایی که مجموع ۱۱و۱۲ است $(۶,۶),(۶,۵),(۵,۶) \Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow P(B)=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$

❋هرگاه بین حالات مختلف یک پیشامد «**یا**» بیاید طبق اصل جمع تعداد آنها را با هم جمع می کنیم.

مثال: *یک تاس را می اندازیم احتمال این که عدد ۲ یا ۵ بیایدچند است؟.*

احتمال آمدن عدد۲ $P(A)=\frac{۱}{۶}$ *و احتمال آمدن عدد۵* $P(B)=\frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\frac{۲}{۶}$

❋واگر «**و**» بیاید طبق اصل ضرب آنها را در هم ضرب می کنیم.

مثال: *یک تاس ویک سکه را با هم می اندازیم احتمال این که تاس عدد ۵ و سکه رو بیاید.*

احتمال ۵آمدن تاس $P(A)=\frac{۱}{۶}$ *و احتمال رو آمدن سکه* $P(B)=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲}$

❋همچنین در سوالاتی که «**حداقل** » یا « **حداکثر**» را خواسته باشند تعداد پیشامد ها را با هم جمع می کنیم.

مثال: *۴ سکه را با هم پرتاب می کنیم احتمال اینکه حداقل یک سکه رو بیایدکدام است؟*

۱) $\frac{۱۲}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۴}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

کل حالتها برابر $۲^۴ = ۱۶$ حالت می شود وچون فقط یک حالت داریم که هردو پشت بیاید و در بقیه حالتها حداقل یکی رو خواهد آمد پس ۱۵ حالت خواهیم داشت بنا براین جواب $\frac{۱۵}{۱۶}$ است.

✵در برداشتن تصادفی r شیئ از میان n شیئ تعداد کل پیشامد های ممکن از را بطه‌ی زیر به دست می آید. $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: ۹ عدد گوی یکسان با شماره های ۱تا۹ در داخل ظرفی قرار دارند.به طور تصادفی ۲ گوی از ظرف بیرون می آوریم احتمال آنکه شماره هر دو گوی عدد زوج باشدکدام است؟ ۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

حل) تعداد حالت های انتخاب ۲ گوی از بین ۴گوی (زوج) $(n=۴\ ,r=۲)$

$$n(A)=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{۴!}{۲!(۴-۲)!}=\frac{۲!\times۳\times۴}{۲!\times۲!}=۶$$

تعداد حالتهای انتخاب ۲ گوی از بین ۹ گوی

$$n(S)=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{۹!}{۲!(۹-۲)!}=\frac{۷!\times۸\times۹}{۲!\times۷!}=۳۶$$

در نتیجه داریم :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

اعـــــــداد گـــــــویا

مقایسه کسرها:

۱- یکی کردن مخرج ها(مخرج مشترک گرفتن)(کسری بزرگ تر می شود که صورتش بزرگتر باشد.)

۲- یکی کردن صورتها (ک.م.م.) صورت ها را پیدا می کنیم.(کسری بزرگ تر می شود که مخرجش کوچک تر باشد.)

۳-طرفین وسطین کردن دو کسر به شرط آنکه حاصل ضرب طرفین(صورت کسر اول ومخرج کسر دوم) را در زیر کسر سمت چپ بنویسیم.

۴- تقسیم صورت بر مخرج کسر وپیدا کردن مقدار تقریبی آنها

مثال: *دو کسر* $\frac{3}{7}$ *و* $\frac{5}{4}$ *را مقایسه کنید.(با ۴ روش بالا)*

۱) $\frac{5}{4},\frac{3}{7}\Rightarrow\frac{35}{28}>\frac{12}{28}$　　۲) $\frac{5}{4},\frac{3}{7}\Rightarrow\frac{15}{12}>\frac{15}{35}$　　۳) $\frac{5}{4},\frac{3}{7}\Rightarrow$ $5\times7>4\times3$　　۴) $\frac{5}{4}=0/8,\frac{3}{7}=0/42\Rightarrow\frac{5}{4}>\frac{3}{7}$

✵در کسرهایی که صورت یک واحد از مخرج کمتر است با بزرگ شدن اعداد حاصل کسر نیز بزرگ شده وبه عدد یک نزدیکتر می شود.

مثال: *از اعداد* $\frac{67}{68},\frac{18}{19},\frac{9}{10},\frac{3}{4}$ *عدد* $\frac{67}{68}$ *به یک نزدیک تر است.*

✵اگر به صورت ومخرج کسری کوچک تر از واحد مقدار مثبتی را اضافه کنیم مقدار کسر بزرگتر می شود.

مثال: *از بین اعداد گویای* $A=\frac{12345678}{87654321}$ *و* $B=\frac{12345679}{87654322}$ *کدام بزرگتر است؟*

حل) چون به صورت ومخرج کسر A که کوچک تر از واحد است یک واحد اضافه شده کسر B بزرگتر از A است.

✵اگر به صورت ومخرج کسری بزرگ تر از واحد مقدار مثبتی را اضافه کنیم مقدار کسر کوچکتر می شود.

❋اگر کسری بین صفر ویک باشد معکوس آن حتما از یک بزرگ تر است واگر کسری بزرگتر از یک باشد حتما معکوس آن بین صفر ویک است.

❋مجموع هر عدد گویای مثبت با معکوسش همواره بزرگتر یا مساوی ۲ می شود.　　$a+\frac{۱}{a}\geq ۲$　یا　$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲$

❋مجموع هر عدد گویای منفی با معکوسش همواره کوچکتر یا مساوی ۲- می شود.　　$a+\frac{۱}{a}\leq -۲$　یا　$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -۲$

مثال: *حاصل عبارت* $M=\left[۱+\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۵}+\frac{۶}{۷}+...+\frac{۱۰۰}{۱۰۱}\right]+\left[۱+\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۴}+...+\frac{۱۰۱}{۱۰۰}\right]$ *کدام است؟*

۱) $M\leq ۱۰۰$　　۲) $M=۱۰۰$　　۳) $M<۱۰۰$　　۴) $M>۱۰۰$

حل) چون هر عدد داخل کروشه ی اول معکوسش داخل کروشه‌ی دوم قرار دارد پس طبق نکته بالا حاصل جمع هر دو عدد از ۲ بزرگتر می شود وچون داخل هر کروشه ۵۱ عدد وجود دارد پس ۵۱ جفت عدد داریم : $M=۵۱\times ۲>۱۰۰$

بین هر دوعدد دلخواه حقیقی، بی شمار عدد گویا وبی شمار عدد گنگ وجود دارد.

روشهای نوشتن کسرهای بین دو کسر:

۱- یکی کردن مخرج ها

تذکر: در این حالت اگر صورت دو کسر اعداد متوالی شد آنها را در عددی که یکی بیشتر از تعداد کسر های خواسته شده است ضرب می کنیم.

مثال: *سه کسر بین* $\frac{۳}{۵}$ *و* $\frac{۴}{۷}$ *بنویسید.*　　$\frac{۲۱}{۳۵}=\frac{۳}{۵}$ *و* $\frac{۲۰}{۳۵}=\frac{۴}{۷}$ *چون ۲۰ و۲۱ متوالی هستند باید صورت ومخرج را در یکی بیشتر از تعداد خواسته شده یعنی ۴ ضرب می کنیم*

$$\frac{۸۰}{۱۴۰}<\frac{۸۱}{۱۴۰}<\frac{۸۲}{۱۴۰}<\frac{۸۳}{۱۴۰}<\frac{۸۴}{۱۴۰}$$

تذکر مهم: اگر بین دو کسر ، کسری با مخرج عددی خاص بخواهند باید «ک م م » آن عدد خاص را با مخرج های دو کسر پیدا کرده و سپس کسر خواسته شده را بنویسیم:

مثال: کسری بین $\frac{۱}{۱۵}$ *و* $\frac{۱}{۱۴}$ *پیدا کنید که مخرج آن ۸۸ باشد.*

$$[۱۴,۱۵,۸۸]=۹۲۴۰\Rightarrow \frac{۱}{۱۵}=\frac{\cancel{۶۱۶}^{\,۵/۸}}{\cancel{۹۲۴۰}_{\,۸۸}}<\frac{۶}{۸۸}<\frac{\cancel{۶۶۰}^{\,۶/۲}}{\cancel{۹۲۴۰}_{\,۸۸}}$$

۲-نوشتن کسری که صورتش حاصل جمع صورت های دو کسر و مخرجش حاصل جمع مخرج های دو کسر باشد.

مثال: *سه کسر بین* $\frac{۳}{۵}$ *و* $\frac{۴}{۷}$ *بنویسید.*

$$\frac{۷}{۱۲}<\frac{۷+۳}{۱۲+۵}=\frac{۱۰}{۱۷}<\frac{۳}{۵}\quad و\quad \frac{۴}{۷}<\frac{۴+۷}{۷+۱۲}=\frac{۱۱}{۱۹}<\frac{۷}{۱۲}\quad و\quad \frac{۴}{۷}<\frac{۴+۳}{۷+۵}=\frac{۷}{۱۲}<\frac{۳}{۵}$$

۳-پیدا کردن میانگین دو کسر:

نکته: در روش پیدا کردن میانگین دوکسر جواب به دست آمده **دقیقاً وسط** دو کسر قرار می گیرد.

مثال: *کسری بین $\frac{۷}{۱۲}$ و $\frac{۸}{۱۳}$ پیدا کنید. میانگین دو کسر را پیدا می کنیم*

$$\left(\frac{۷}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\right)\div ۲=\left(\frac{۹۱+۹۶}{۱۵۶}\right)\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱۸۷}{۱۵۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱۸۷}{۳۱۲}$$

۴-پیدا کردن مقدار تقریبی هر کسر با تقسیم صورت بر مخرج ونوشتن اعداد بین این دو مقدار

مثال: *کسری بین $\frac{۷}{۱۲}$ و $\frac{۸}{۱۳}$ پیدا کنید.*

$$\frac{۷}{۱۲}=۰/۵۰<۰/۵۱,۰/۵۲,۰/۵۳,...,۰/۶۰<\frac{۸}{۱۳}=۰/۶۱$$

کسر تحویل ناپذیر(ساده نشدنی): کسری که صورت ومخرج آن ساده نشوند(یا «ب م م» صورت ومخرج ۱ باشند)

انواع اعداد اعشاری:

۱- تحقیقی (مختوم):کسر تحویل ناپذیری(بعد از ساده شدن) که مخرج آن فقط عامل های اول ۲ یا ۵ داشته باشد.

مثال: $\frac{۲۱}{۱۵}=\frac{۳\times۷}{۳\times۵}=\frac{۷}{۵}=۰/۱۴$ یا $\frac{۲۵۲}{۳۶۰}=\frac{۲^۲\times۳^۲\times۷}{۲^۳\times۳^۲\times۵}=\frac{۷}{۲\times۵}=۰/۷$

۲- متناوب ساده: کسر تحویل ناپذیری (بعد از ساده شدن)که مخرج آن عامل های اول ۲ یا ۵ نداشته باشد.

مثال: $\frac{۲۴}{۷۲۸}=\frac{۲^۳\times۳}{۲^۳\times۷\times۱۳}=\frac{۳}{۹۱}=۰/۰۳۰۳۰۳...=۰/\overline{۰۳}$

۳- متناوب مرکب: کسر تحویل ناپذیری(بعد از ساده شدن) که مخرج آن علاوه بر عامل های اول ۲ یا ۵ ،عامل اول دیگری هم داشته باشد.

مثال: $\frac{۴۷۲}{۹۰۰}=\frac{۲^۳\times۵۹}{۲^۲\times۵^۲\times۳^۲}=\frac{۱۱۸}{۲۲۵}=۰/۵۲\overline{۴}$

۴- نامختوم: اعداد اعشاری که مختوم نباشند و رقم های اعشارشان تناوب هم نداشته باشند. مثل: ...۲/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱

پیدا کردن کسرهای مولد عدد اعشاری متناوب ساده :

عدد اعشاری را مساوی x فرض کرده وطرفین تساوی حاصل را با توجه به این که دوره گردش یک رقمی، دو رقمی،سه رقمی و... باشد به ترتیب در ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ ویا... ضرب می کنیم سپس طرفین دو معادله حاصل را از هم کم می کنیم تا معادله جدیدی فاقد اعداد متناوب ساخته شود.جواب این معادله، کسر مولد آن عدد اعشاری است.

مثال :*کسر مولد عدد $۰/\overline{۲۷}$ را به دست اورید.*

$$x=۰/\overline{۲۷},\quad ۱۰۰x=۲۷/\overline{۲۷} \Rightarrow ۱۰۰x-x=۲۷/\overline{۲۷}-۰/\overline{۲۷}=۲۷\Rightarrow ۹۹x=۲۷\Rightarrow x=\frac{۲۷}{۹۹}=\frac{۳}{۱۱}$$

راه حل تستی:

اگر عدد اعشاری عدد صحیح دارد آن را می نویسیم سپس ارقام دوره گردش را در صورت نوشته ودر مخرج به تعداد ارقام دوره گردش ۹ می گذاریم.

مثال: $۴/\overline{۳۷}=۴\frac{۳۷}{۹۹}=\frac{۴۳۳}{۹۹}$ $\qquad$ $۰/\overline{۲۹۵}=\frac{۲۹۵}{۹۹۹}$

پیدا کردن کسرهای مولد عدد اعشاری متناوب مرکب :

عدد اعشاری را مساوی x فرض کرده وطرفین تساوی حاصل را با در نظر گرفتن ارقامی که بعد از ممیز تکرار نمی شوند(دوره غیر گردش) در اعداد ۱۰یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ و... ضرب می کنیم تا عدد اعشاری متناوب مرکب به عدد اعشاری متناوب ساده تبدیل شود و سپس مانند تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به نماد متعارفی عمل می کنیم.

مثال: *کسر مولد عدد $۰/۴۶\overline{۸}$ را به دست آورید.*

$$x=۰/۴۶\overline{۸} \Rightarrow \begin{matrix} ۱۰۰x=۴۶/\overline{۸} \\ ۱۰۰۰x=۴۶۸/\overline{۸}\end{matrix} \Rightarrow ۱۰۰۰x-۱۰۰x=۴۶۸/\overline{۸}-۴۶/\overline{۸}\Rightarrow ۹۰۰x=۴۲۲\Rightarrow x=\frac{۴۲۲}{۹۰۰}=\frac{۲۱۱}{۴۵۰}$$

راه حل تستی:

در صورت تمام ارقام بعد از ممیز را منهای ارقام اعشاری غیر گردش می کنیم ودر مخرج به تعداد ارقام دوره گردش ۹ و به تعداد ارقام غیر گردش صفر قرار می دهیم.

مثال: $۷/۱\overline{۲۳}=۷\frac{۱۲۳-۱}{۹۹۰}=۷\frac{۱۲۲}{۹۹۰}=\frac{۷۰۵۲}{۹۹۰}$ $\qquad$ $۰/۱۵\overline{۳}=\frac{۱۵۳-۱۵}{۹۰۰}=\frac{۱۳۸}{۹۰۰}$

تذکر مهم: برای به دست آوردن حاصل جمع یا ضرب یا تفریق اعداد اعشاری متناوب باید ابتدا کسر مولد آنها را به دست آوریم وپس از پیدا کردن حاصل کسرها دوباره آن را به اعشاری متناوب تبدیل کنیم.

مثال) *آیا می توان گفت حاصل* $۰/\overline{۵}+۰/\overline{۷}=۰/\overline{۱۲}$ ؟ *خیر زیرا:*

$$۰/\overline{۵}+۰/\overline{۷}=\frac{۵}{۹}+\frac{۷}{۹}=\frac{۱۲}{۹}=\frac{۴}{۳}=۱/\overline{۳}$$

مثال: به ازای چند مقدار طبیعی n بسط اعشاری کوچک تر از واحد $\frac{۵n}{۱۲۶}$ *متناوب مرکب است؟*

حل) باید $۵n < ۱۲۶ \Rightarrow n < ۲۵/۲ \Rightarrow n = ۱,۲,۳,۴,...,۲۵$ و n های صورت در مخرج نیز نباشند . $۱۲۶ = ۲\times ۳^{۲} \times ۷$

کسرهای تلسکوپی

اگر در مخرج کسری دو عدد در هم ضرب شوند ودر صورت آن کسر:

الف) تفاضل دو عدد مخرج باشد می توان آن کسر را به شکل تفاضل دو کسر با صورت ۱ نوشت　$\dfrac{b-a}{a\times b} = \dfrac{۱}{a} - \dfrac{۱}{b}$

مثال) $\dfrac{۲}{۳\times ۵} + \dfrac{۲}{۵\times ۷} + \dfrac{۲}{۷\times ۹} + ... + \dfrac{۲}{۲۹\times ۳۱} = \dfrac{۱}{۳} - \dfrac{۱}{۵} + \dfrac{۱}{۵} - \dfrac{۱}{۷} + ... + \dfrac{۱}{۲۹} - \dfrac{۱}{۳۷} = \dfrac{۱}{۳} - \dfrac{۱}{۳۷} = \dfrac{۳۷-۳}{۱۱۱} = \dfrac{۳۴}{۱۱۱}$

تذکر: در کسرهای تلسکوپی که در صورت آنها عددی غیر از تفاضل دو عدد مخرج وجود دارد می توان آن عبارت را به تلسکوپی تبدیل کرده وحاصل را در کسر $\dfrac{\text{عدد صورت}}{\text{اختلاف دو عدد مخرج}}$ ضرب کرد.

$$\frac{۲}{۵\times ۸} + \frac{۲}{۸\times ۱۱} + \frac{۲}{۱۱\times ۱۴} + ... + \frac{۲}{۲۹\times ۳۲} = \left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۳۲}\right)\times \frac{۲}{۳} = \left(\frac{۳۲}{۱۶۰} - \frac{۵}{۱۶۰}\right)\times \frac{۲}{۳} = \frac{۲۷}{۱۶۰}\times \frac{۲}{۳} = \frac{۹}{۸۰}$$

ب) مجموع دو عدد مخرج باشد می توان آن کسر را به شکل مجموع دو کسر با صورت ۱ نوشت.　$\dfrac{a+b}{a\times b} = \dfrac{۱}{a} + \dfrac{۱}{b}$

کسرهای مسلسل:

برای محاسبه کسر های مسلسل از آخرین کسر شروع به حل می کنیم

مثال)حاصل کسر مقابل را پیدا کنید.

$$۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۲}}} = ۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{\frac{۳}{۲}}} = ۲ + \cfrac{۱}{۱ + \frac{۲}{۳}} = ۲ + \cfrac{۱}{\frac{۵}{۳}} = ۲ + \frac{۳}{۵} = \frac{۱۳}{۵}$$

کسرهای مسلسل نامتناهی :

برای پیدا کردن این گونه کسرها ابتدا کل عبارت را برابر A قرار می دهیم سپس آن قسمت از عبارت را نیز که مانند کل عبارت می باشد برابر A قرار داده وسپس به کمک معادله ویا تجزیه با استفاده از اتحادها (خصو صا اتحادجمله مشترک) مقدار A را به دست می آوریم.

مثال: حاصل $\cfrac{۹}{۶-\cfrac{۹}{۶-\cfrac{۹}{۶-\cfrac{۹}{\ddots}}}}-۶$ را پیدا کنید.

حل) کل عبارت را برابر A می گیریم داریم:

$$A=۶-\cfrac{۹}{\underbrace{۶-\cfrac{۹}{۶-\cfrac{۹}{۶-\cfrac{۹}{\ddots}}}}_{A}}\Rightarrow A=۶-\frac{۹}{A}\Rightarrow A^{۲}=۶A-۹\Rightarrow A^{۲}-۶A+۹=۰\Rightarrow (A-۳)(A-۳)=۰\Rightarrow A=۳$$

✵ **اگر x عددی دلخواه و غیر صفر باشد همواره داریم :** $\dfrac{۱}{۱+x}+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{x}}=۱$

مثال) حاصل عبارت $\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۴+\cfrac{۱}{\dots+\cfrac{۱}{۱۹۹۱}}}}}+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۴+\cfrac{۱}{\dots+\cfrac{۱}{۱۹۹۱}}}}}}$ برابر است با:

حل) در کسر اول عدد ۲ را به صورت ۱+۱ می نویسیم داریم:

$$\cfrac{۱}{۱+\underbrace{۱+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۴+\cfrac{۱}{\dots+\cfrac{۱}{۱۹۹۱}}}}}_{A}}+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\underbrace{۱+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۴+\cfrac{۱}{\dots+\cfrac{۱}{۱۹۹۱}}}}}_{A}}}=\frac{۱}{۱+A}+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{A}}=۱$$

قدر مطلـــــــق

قدر مطلق هر عبارت ویا هر عدد همواره مقداری مثبت یا صفر(نامنفی) است.

نکته: $|x|-|y|\le|x\pm y|\le|x|+|y|$

مثال: اگر $|x|+|y|=۷$ باشد آنگاه بیشترین مقدار $|x+y|$ برابر ۷ و کمترین مقدار $|x+y|$ برابر صفر می شود.

نکته : مجموع هر عدد با قدر مطلقش همواره مقداری نامنفی است.یعنی: $a+|a|\geq 0$

نکته: در مورد ضرب وتقسیم عبارت های قدر مطلق دار نیز رابطه های زیر برقرار است.

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|} \qquad |xy|=|x||y|$$

نکته: $\sqrt{x^{2}}=|x|$

مثال: حاصل عبارت مقابل را پیدا کنید.

$$\sqrt{\left(\sqrt{11}-11\right)^{2}}=\left|\sqrt{11}-11\right|=-\left(\sqrt{11}-11\right)=11-\sqrt{11}$$

معادلات قدر مطلق دار: اگر a عدد حقیقی نامنفی باشد آنگاه همواره داریم: $|x|=a\Rightarrow x=\pm a$

مثال: تعداد جوابهای معادله $\left|1+|x+2|\right|=7$ برابر است با:

۱) ۱　　　　۲) ۲　　　　۳) ۳　　　　۴) جواب ندارد.

$$\left|1+|x+2|\right|=7\Rightarrow 1+|x+2|=\pm 7\Rightarrow\begin{cases}1+|x+2|=7\Rightarrow |x+2|=6\Rightarrow x+2=\pm 6\Rightarrow x=4,x=-8\\ 1+|x+2|=-7\Rightarrow |x+2|=-8\end{cases}$$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی x از a را با نماد $|x-a|$ نمایش می دهیم.

مثال: *فاصله‌ی نقطه‌ی x از -3 برابر ۴ می باشد x را پیدا کنید.*

$$|x-(-3)|=4\Rightarrow |x+3|=4\Rightarrow |x+3|=\pm 4\Rightarrow x=1,x=-7$$

اگر a عدد حقیقی نامنفی باشد آنگاه همواره داریم: $|x|\leq a\Rightarrow -a\leq x\leq a$

مثال: در عبارت $|x-۲| \leq ۵$ حدود x را مشخص کنید.

$$|x-۲| \leq ۵ \Rightarrow -۵ \leq x-۲ \leq ۵ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۷$$

تناسب معکوس

در تناسب معکوس بر خلاف تناسب مستقیم با افزایش یک کمیت ، کمیت دگر به همان نسبت کاهش می یابد

❋برای حل تناسب معکوس کمیت های هم جنس را زیر هم می نویسیم اما به جای طرفین وسطین کردن به صورت مستقیم کمیت ها را در هم ضرب می کنیم.

❋نکته‌ی مهم : در تاسب معکوس ومرکب معمولا کنندگان کار، با زمان(ساعت وروز و...) رابطه‌ی معکوس دارند.

مثال: ۸ کارگر کاری را در ۱۴ روز انجام می دهند اگر نصف این کارگران همین کار را انجام می دادند کار چند روزه تمام می شد.

$$\begin{array}{ccc} ۸ & \text{———} & ۱۴ \\ ۴ & \text{———} & x \end{array} \qquad x = \frac{۸ \times ۱۴}{۴} = ۲۸$$

تناسب معکوس شکسته: تناسب معکوسی که از جایی به بعد شرایط مساله تغییر می کند.

مثال: ۸ کارگر ساختمانی را ۲۳ روزه رنگ می کنند پس از ۳ روز ۲ نفر به آنها اضافه شدند بقیه کار چند روزه تمام می شود؟

$۲۳-۳=۲۰$ روز باقیمانده

$$\begin{array}{ccc} ۸ & \text{———} & ۲۰ \\ ۱۰ & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{۸ \times ۲۰}{۱۰} = ۱۶$$

تناسب مرکب: تناسبی که در آن بیش از دو کمیت وجود داشته باشد. برای حل مسائل این نوع تناسب وضعیت هر ستون را با ستون بعدی آن از نظر مستقیم یا معکوس بودن جنس کمیت آنها می سنجیم وآن را با خط مستقیم برای معکوس بودن وخط مورب برای مستقیم بودن جنس کمیتها مشخص می کنیم وبا حرکت بر روی این خطوط کمیت ها را در هم ضرب کرده ومقدار مجهول را مشخص می کنیم.

مثال: ۱۴ کارگر با روزی ۶ ساعت کاری را ۲۰ روزه تمام می کنند اگر ۲۱ کارگر بخواهندهمان کار را در ۳۰ روز تمام کنند باید روزی چند ساعت کار کنند.

$$\begin{array}{ccccc} ۱۴ & \text{———} & ۶ & \text{———} & ۲۰ \\ ۲۱ & \text{———} & x & \text{———} & ۳۰ \end{array} \qquad x = \frac{۱۴ \times ۶ \times ۲۰}{۲۱ \times ۳۰} = \frac{۸}{۳} = ۲\frac{۲}{۳}$$

مثال: محمود ومسعود با هم کاری را در ۱۸ ساعت و مسعود به تنهایی کار را در ۲۴ ساعت انجام می دهد محمود به تنهایی کار را در چند ساعت انجام می دهد؟

حل)با توجه به صورت سوال مسعود در یک ساعت $\frac{۱}{۲۴}$ از کار را و دونفری با هم در یک ساعت $\frac{۱}{۱۸}$ از کار را انجام می دهند پس داریم:

$$\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۱۸}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۴-۳}{۷۲}=\frac{۱}{۷۲}\Rightarrow x=۷۲$$

تـــــــــــــــــــــوان

❋ هر عدد به توان صفر برسد حاصل یک می شود.

❋ هر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل مثبت خواهد شد.

❋ هرگاه عددی بین صفر ویک باشد وبه توان برسد هرچه توان بزرگتر باشد عدد کوچکتر خواهد شد.

مثال) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

❋ هر عدد به **توان منفی** برابر است با **معکوس** آن عدد به توان مثبت.

مثال: $3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{7}\right)^{-9} = \left(\frac{7}{2}\right)^9$

مثال: *حاصل عبارت* $\frac{0/125^{-9} \times 128^{-10}}{32^{-13} \times 0/25^{-11}}$ *برابر است با:*

$$\frac{0/125^{-9} \times 128^{-10}}{32^{-13} \times 0/25^{-11}} = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^{-9} \times \left(2^7\right)^{-10}}{\left(2^5\right)^{-13} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-11}} = \frac{\left(2^{-3}\right)^{-9} \times 2^{-70}}{2^{-65} \times \left(2^{-2}\right)^{-11}} = \frac{2^{27} \times 2^{-70}}{2^{-65} \times 2^{22}} = \frac{2^{-43}}{2^{-43}} = 1$$

❋برای پیدا کردن حاصل جمع اعداد تواندار،اگر پایه ها و توانها مساوی بودند می توان آنها را به حاصل ضرب تبدیل کرد وجواب را به صورت یک عدد تواندار نوشت .اما اگر همه‌ی پایه ها وتوانها با هم برابر نبودند به شرط آنکه قسمت های مشترک (پایه مشترک با کوچک ترین توان)داشته باشند از فاکتورگیری می توان استفاده کرد.

مثال: *حاصل عبارت های زیررا به صورت عدد توانداربنویسید.*

الف) $4^9 + 4^9 + 4^9 + 4^9 = 4 \times 4^9 = 4^{10}$

ب) $12 \times 2^9 + 10 \times 2^{10} + 12 \times 2^8 - 24 \times 2^7 - 2^{14} = 2^7\left(12 \times 2^2 + 10 \times 2^3 + 12 \times 2^1 - 24 - 2^7\right) =$
$2^7\left(48 + 80 + 24 - 24 - 128\right) = 0$

برای ساده کردن کسرهایی که صورت ومخرج آنها از جمع اعداد توان‌دار تشکیل شده اند از پایه مشترک با کوچک ترین توان (صورت جدا و مخرج هم جدا) فاکتور گرفته وسپس ساده می کنیم.

مثال: *حاصل عبارت* $\dfrac{7^{2014}+7^{2013}+7^{2012}+\dots+7^{1014}}{7^{1393}+7^{1392}+7^{1391}+\dots+7^{393}}$ *به صورت عدد توان‌دار برابر است با:*

حل)

$$\frac{7^{1014}\cancel{\left(7^{1000}+7^{999}+7^{998}+\dots+1\right)}}{7^{393}\cancel{\left(7^{1000}+7^{999}+7^{998}+\dots+1\right)}}=7^{621}$$

برای پیدا کردن مجموع چند عبارت توان‌دار با پایه های مساوی که توانهای آنها اعداد متوالی باشند می توان کل عبارت را برابر یک حرف انگلیسی قرار داد و سپس دو طرف تساوی را در پایه مشترک آنها ضرب کرد وسپس این دو تساوی را از هم کم نمود و حاصل را پیدا کرد.

ویا از فرمول مقابل کمک می گیریم:

$$1+a+a^2+a^3+a^4+\dots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

مثال: *حاصل عبارت* $5^4+5^5+5^6+\dots+5^{97}$ *را به دست آورید.*

$$\left.\begin{array}{l}A=5^4+5^5+5^6+\dots+5^{97}\\ 5A=5^5+5^6+5^7+\dots+5^{98}\end{array}\right\}\Rightarrow 5A-A=5^5+5^6+5^7+\dots+5^{98}-5^4-5^5-5^6-\dots-5^{97}=5^{98}-5^4$$

$$\Rightarrow 4A=5^{98}-5^4\Rightarrow A=\frac{5^{98}-5^4}{4}$$

مجموع هر دنباله‌ی هندسی نامتناهی که هرجمله از ضرب عدد ثابت q که $0<q<1$ ویا $-1<q<0$ می باشد از فرمول زیر به دست می آید.

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

(a_1اولین جمله‌ی دنباله است.)

مثال: *حاصل عبارت* $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots$ *برابر است با:*

حل)از فرمول بالا : $a_1=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

روش دوم : با ضرب دو طرف تساوی در ۲ وسپس کم کردن دو طرف نیز می توان حاصل را پیدا کرد .(مانند مثال قبل)

✵ در یک کسر که بین اعداد آن عمل ضرب وجود دارد می توانیم اعدادی را از صورت به مخرج ویا از مخرج به صورت ببریم به شرطی که توان آنها را قرینه کنیم.

مثال : حاصل عبارت $\frac{x^{-4}y^{-3}}{y^{-4}x^{-4}} \div \frac{\left(x^{-2}y^{-1}\right)^3}{\left(\frac{x}{y}\right)^4}$ برابر است با

$$\frac{x^{-4}y^{-3}}{y^{-4}x^{-4}} \div \frac{\left(x^{-2}y^{-1}\right)^3}{\left(\frac{x}{y}\right)^4}=\frac{x^{-4}y^{-3}}{y^{-4}x^{-4}}\times\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^4}{\left(x^{-2}y^{-1}\right)^3}=\frac{x^4y^4}{x^4y^3}\times\frac{\frac{x^4}{y^4}}{x^{-6}y^{-3}}=\frac{x^4y^4x^4}{x^4y^3x^{-6}y^{-3}y^4}=$$

$$\frac{x^8\cancel{y^4}}{x^{-2}\cancel{y^4}}=x^8x^2=x^{10}$$

✵عدد به توان کسر: هر عدد به توان کسر برابر رادیکالی است که مخرج کسرفرجه رادیکال و صورت کسر توان آن عدد خواهد بود.(به شرط آنکه آن رادیکال تعریف شده باسد.) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

مثال: $5^{\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{5^2}$

✵ اگر پایه یک عدد تواندار عددی منفی باشد و توان آن کسری باشدکه مخرجش زوج باشد عدد حقیقی نخواهد بود.

مثال: $(-3)^{\frac{5}{8}}=\sqrt[8]{(-3)^5}$

✵ معادله‌ی توانی : معادله‌ای که مجهول آن در توانش باشد. برای حل معادله‌ی توانی کارهای زیر را انجام می دهیم.

ابتدا در دو طرف تساوی پایه ها را برابر می کنیم وسپس توانها را مساوی قرار می دهیم و معادله را حل می کنیم در بعضی از مسائل باید از فاکتور گیری نیز استفاده کنیم.

تذکر مهم: اگر پایه ها را نتوان مساوی قرار داد ،آنگاه توانها را مساوی **صفر** قرار می دهیم وحل می کنیم.

مثال:در معادله‌ی $2^{6x+3} \times 4^{3x+6} = 8^{4x+15}$ مقدار x کدام است؟

۱) $\frac{-10}{8}$　　۲) $\frac{-4}{5}$　　۳) بی شمار جواب دارد　　۴) جواب ندارد.

$$2^{6x+3} \times 4^{3x+6} = 8^{4x+15} \Rightarrow 2^{6x+3} \times \left(2^{2}\right)^{3x+6} = \left(2^{3}\right)^{4x+15} \Rightarrow 2^{6x+3} \times 2^{6x+12} = 2^{12x+45} \Rightarrow$$

$$2^{12x+15} = 2^{12x+45} \Rightarrow 12x+15 = 12x+45 \Rightarrow 15 = 45$$

این غیر ممکن است ومعادله جواب ندارد

مثال) در عبارت $5^{y+3} = 3^{2x-y+1}$ مقادیر x, y را پیدا کنید.

حل) چون پایه ها را نمی توان مساوی کرد پس توانها را برابر صفر قرار می دهیم در نتیجه:

$$\begin{cases} y+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3 \\ 2x-(-3)+1=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

مثال) معادله توانی $6^{x-1} + 6^{x} = 252$ را حل کنید.

$$6^{x-1} + 6^{x} = 252 \Rightarrow 6^{x-1}(1+6) = 252 \Rightarrow 6^{x-1}(7) = 252 \Rightarrow 6^{x-1} = 252 \div 7 = 36 = 6^{2} \Rightarrow x-1 = 2 \Rightarrow x = 3$$

❋ مقایسه‌ی اعداد تواندار:

۱- مساوی کردن پایه ها با استفاده از **تجزیه** و سپس انجام عمل مقایسه.

مثال:کدامیک از اعداد زیر از بقیه کوچک تر است؟

الف) 18×3^{8} ✓　　ب) 8×64^{3}　　ج) 2048×9^{5}　　د) 50×625^{2}

$$18 \times 3^{8} \Rightarrow 2 \times 3^{2} \times 3^{8} = 2 \times 3^{10}$$

$$8 \times 64^{3} = 2^{3} \times \left(2^{6}\right)^{3} = 2^{3} \times 2^{18} = 2 \times 2^{20} = 2 \times 4^{10}$$

$$2048 \times 9^{5} = 2^{11} \times 3^{10} = 2 \times 2^{10} \times 3^{10} = 2 \times 6^{10}$$

$$2 \times 5^{2} \times \left(5^{4}\right)^{2} = 2 \times 5^{10}$$

۲- مساوی کردن توانها با استفاده از **«ب.م.م»** توانها ،که توان را بر «ب.م.م» تقسیم می کنیم وجواب را داخل پرانتز به عنوان توان می نویسیم و «ب.م.م» را به عنوان بیرونی ترین توان می نویسیم.

تذکر مهم: در مورد اعداد بین صفر ویک هر چقدر توان بزرگتر باشد عدد کوچکتر است. ودر مورد اعداد منفی اگر توان زوج باشد هر چقدر هم کوچکتر باشد از توان فرد بزرگ تر می شود.

مثال: کدامیک از اعدادمقابل از بقیه بزرگ ترند؟　　۱) $۲^{۱۰۷}$　　۲) $۳^{۸۴}$　　۳) $۵^{۶۴}$　　۴) $۷^{۴۲}$

حل) «ب م م »اعداد ۱۰۵ و ۸۴ و ۶۳ و ۴۲را پیدا می کنیم که عدد ۲۱ می شود و آن را به عنوان بیرونی ترین توان می نویسیم داریم:

$$۲^{۱۰۷} = ۲^{۲} \times ۲^{۱۰۵} = ۴ \times \left(۲^{۵}\right)^{۲۱} = ۴ \times ۳۲^{۲۱} \qquad ۳^{۸۴} = \left(۳^{۴}\right)^{۲۱} = ۸۱^{۲۱}$$

$$۵^{۶۴} = ۵ \times ۵^{۶۳} = ۵ \times \left(۵^{۳}\right)^{۲۱} = ۵ \times ۱۲۵^{۲۱} \qquad ۷^{۴۲} = \left(۷^{۲}\right)^{۲۱} = ۴۹^{۲۱}$$

۳- برای مقایسه مجموع یا ضرب چند عبارت تواندار بعضی مواقع می توان از رابطه‌ی $۲^{n} > n^{۲}$ با شرط: $n \geq ۵, n \in N$ یا از رابطه‌ی $۴^{n} > n^{۴}$ می توان استفاده کرد.

مثال: اگر دو عدد $A = ۱^{۲} + ۲^{۲} + ۳^{۲} + \ldots + ۱۰^{۲}$ و $B = ۲^{۱} + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \ldots + ۲^{۱۰}$ را باهم مقایسه کنیم کدام گزینه درست است؟

۱) A　　۲) B　　۳) $A = B$　　۴)قابل محاسبه نیست

حل) طبق رابطه های بالا می دانیم $۲^{۱۰} > ۱۰^{۲}$ و $۲^{۹} > ۹^{۲}$ و $۲^{۸} > ۸^{۲}$ و . . . و $۲^{۵} > ۵^{۲}$ بقیه توانها به جز $۲^{۳} < ۳^{۲}$ یا مساویند یا مثل موارد قبلی بزرگترند پس در نتیجه B بزرگتر است.

❋ **عدد مربع کامل** : هرگاه در تجزیه‌ی یک عدد به عوامل اول ، توان عاملها عددی زوج باشد آن عدد مربع کامل است.

مثال: کوچک ترین عدد طبیعی که وقتی آن را در عدد $۳^{۱۱} \times ۲^{۵} \times ۷^{۴}$ ضرب کنیم مربع کامل شود؟

حل باید توانهای عامل ها زوج شود پس در ۳×۲ باید ضرب کنیم.

❋ **عدد مکعب کامل**: هرگاه در تجزیه‌ی یک عدد به عوامل اول ، توان عاملها مضرب ۳ باشد آن عدد مکعب کامل است.

مثال: عدد $۷^{۳} \times ۵^{۶}$ یک عدد مکعب کامل است.

تذکر مهم: عدد یک، هم مربـــــع کامل است و هم مکعـــــب کامل.

❋اعدادی که **مربع کاملند** همیشه تعداد شمارنده هایشان عددی **فـــــــــرد** است.

❋ اعدادی که **مربع کاملند** رقم یکانشان، هیچ گاه ۲ یا ۳یا۷و یا ۸ نمی شود.

❋حاصل ضرب هیچ دو عدد طبیعی متوالی مجذور کامل نیست.

❋ اولین عدد **مربع کامل** بعد از عدد مربع کامل n عدد $(\sqrt{n}+۱)^۲$ می باشد که برابر است با : $(\sqrt{n}+۱)^۲ = n+۲\sqrt{n}+۱$

مثال: *اولین عدد مربع کامل بعد از $۹^{۱۹}$ چه عددی است؟*

$$\left(\sqrt{۹^{۱۹}}+۱\right)^۲ = \left(۳^{۱۹}+۱\right)^۲ = \left(۳^{۱۹}\right)^۲ + ۲\left(۳^{۱۹}\right)+۱$$

❋ kاُمین عدد مربع کامل بعد از عدد مربع کامل n ، عدد $(\sqrt{n}+k)^۲$ می باشد که برابر است با :

$$(\sqrt{n}+k)^۲ = n+۲k\sqrt{n}+k^۲$$

مثال: *هفتمین عدد مربع کامل بعد از $۹^{۱۹}$ چه عددی است؟*

$$\left(\sqrt{۹^{۱۹}}+۷\right)^۲ = \left(۳^{۱۹}+۷\right)^۲ = \left(۳^{۱۹}\right)^۲ + ۱۴\left(۳^{۱۹}\right)+ ۴۹$$

❋ برای پیدا کردن اعداد مربع کامل در بین یک **سری از اعداد منظم** باید اولین عددی که مربع کامل است و آخرین عددی که مربع کامل است را پیدا کرده و با توان ۲ بنویسیم و سپس این دو عدد را (بدون توان ۲)از هم کم کرده و به اضافه یک کنیم.

تذکر: برای پیدا کردن تعداد اعداد مکعب کامل باید اولین عدد مکعب کامل وآخرین عدد مکعب کامل را پیدا کرده و آنها را با توان ۳ بنویسیم وسپس مثل بالا عمل کنیم.

مثال: *در بین اعداد $۴^۵, ۴^۵+۱, ۴^۵+۲, ۴^۵+۳, \dots, ۹^۵$ چند عدد مربع کامل وجود دارد؟*

حل) اولین عدد مربع کامل عدد $۴^۵$ است که با توان ۲ به صورت $(۲^۲)^۵ = (۲^۵)^۲ = ۳۲^۲$ نوشته می شود و آخرین عدد مربع کامل نیز $۹^۵$ می باشد که با توان ۲ به صورت $(۳^۲)^۵ = (۳^۵)^۲ = ۲۴۳^۲$ نوشته می شود بنابراین تعداد اعداد مربع کامل در این مجموعه برابر است با:

$$۲۴۳-۳۲+۱=۲۱۲$$

مثال) چند عدد از اعداد از ۱ تا $۱۳۹۲^{۱۳۹۲}$ هم مربع کامل وهم مکعب کاملند؟

حل) باید اعداد با توان ۶ را پیدا کنیم. این اعداد عبارتند از $۱^۶, ۲^۶, ۳^۶, ۴^۶, \dots, \left(۱۳۹۲^{۲۳۲}\right)^۶$ که تعداد این اعداد عبارتند از:

$$\left(۱۳۹۲^{۲۳۲}\right)-۱+۱ = ۱۳۹۲^{۲۳۲}$$

❋اگر n عددی **زوج** باشد عدد n^n مربع کامل است و اگر n **فرد** باشد عدد n^n به شرطی مربع کامل می شود که عدد n مربع کامل باشد.

مثال: *اعداد* $2^2, 4^4, 6^6, 8^8, ...$ *و* $1^1, 9^9, 25^{25}, 49^{49}, ...$ *مربع کاملند.*

مثال) به ازای چند عدد طبیعی n *و* $1 \le n \le 200$ *عدد* n^n *مربع کامل است؟*　۱) ۷　۲) ۱۰۰　۳) ۱۰۷ ✓　۴) ۱۱۴

رقم یکــــــان اعداد توانــــــــدار:

❋ برای تعیین رقم یکان اعداد تواندار ی که یکان آنها رقم های ۲و۳و۷و۸ می باشد توان عدد را بر ۴ تقسیم می کنیم و سپس یکان عدد را به توان باقیمانده این تقسیم می رسانیم .

تذکر مهم:اگر باقیمانده صفر شود رقم یکان برابر است با یکان عدد به توان ۴

مثال:*رقم یکان حاصل عبارت* $1348^{248} + 1387^{125} + 1393^{514} + 1392^{43}$ *چه عددی است؟*

حل) رقم یکان تک تک اعداد را پیدا کرده و با هم جمع می کنیم.

۲۴۸ ÷ ۴ = ۶۲ ، باقیمانده ۰　　۱۲۵ ÷ ۴ = ۳۱ ، باقیمانده ۱　　۵۱۴ ÷ ۴ = ۱۲۸ ، باقیمانده ۲　　۴۳ ÷ ۴ = ۱۰ ، باقیمانده ۳

$8^4 = 4096 \Rightarrow 6$ *یکان*　　$7^1 = 7$ *یکان*　　$3^2 = 9$ *یکان*　　$2^3 = 8$ *یکان*

پس یکان حاصل برابر است با:　$8 + 9 + 7 + 6 = 30$ *یعنی صفر می شود.*

❋ برای تعیین رقم یکان اعداد تواندار ی که یکان آنها رقم های ۴ویا ۹ باشد.با توجه به زوج وفرد بودن توانشان مشخص می کنیم.یعنی اگر توان عدد فرد بود یکان عدد همان رقم ۴ ویا ۹ می شود ولی اگر توان زوج بود ویکان رقم ۴ بود یکان حاصل ،عدد ۶ می شود واگر یکان عدد رقم ۹ بود یکان حاصل ،عدد ۱ خواهد شد.

مثال: *رقم یکان حاصل عبارت* $1999^{282} + 1394^{741}$ *چه عددی می شود؟*

حل) چون ۷۴۱ عددی فرد است یکان 1394^{741} *رقم ۴ می شود و چون ۲۸۲ زوج است یکان* 1999^{282} *رقم ۱ می شود ودر نتیجه رقم یکان حاصل* $1 + 4 = 5$ *می شود.*

❋ اگر یکان عددی یکی از رقم های ۰، ۱، ۵ یا ۶ باشد و به توان برسد یکان آن **خــــــودش** می شود.

❋تعداد صفرهای سمت راست عددتوانادار:

ابتدا عدد را به عامل های اول تجزیه می کنیم وسپس در صورت داشتن عامل های ۲و۵ (چون ۲×۵ برابر ۱۰ میشود یعنی یک صفر تولید می کند)توانهای ۲و ۵ را مشخص می کنیم آنکه کمتر بود تعداد صفرهای سمت راست عدد را مشخص می کند.

مثال: *حاصل ضرب* $55^7 \times 15^6 \times 28^5$ *به چند صفر ختم می شود؟ ۱۰ صفر زیرا:*

$$(2^2\times 7)^5 \times (3\times 5)^6 \times (11\times 5)^7 = 2^{10}\times 7^5 \times 3^6 \times 5^6 \times 11^7 \times 5^7 = 2^{10}\times 5^{10}\times 5^3 \times 7^5 \times 3^6 \times 11^7 = 10^{10}\times ...$$

❋تعداد رقمهای یک عدد:

با استفاده از روش های زیر می توان تعداد رقمهای حاصل ضرب اعداد ویا اعداد تواندار را پیدا کرد.

روش اول: مانند نکته قبل ابتدا تعداد صفرهای سمت راست عدد را مشخص می کنیم سپس عاملهای باقیمانده وبقیه توانها را نیز جداگانه حساب می کنیم ودر آخر تعداد رقمهای حاصل را با تعداد صفرهای سمت راست عدد جمع می زنیم.

مثال: *تعداد ارقام حاصل ضرب* $4^{52}\times 5^{104}$ *برابر است با:*

$$5^{104}\times 4^{52} = 5^{104}\times (2^2)^{52} = 5^{104}\times 2^{104} = 10^{104} = 1\overbrace{000...0}^{104} \Rightarrow 1+104=105 \quad \text{رقم}$$

روش دوم: اگر عددی بین 10^n و 10^{n+1} قرار داشته باشد.آنگاه آن عدد $n+1$ رقمی است.

مثال: اگر بدانیم 3^{40} بین دو عدد 10^{20} و 10^{19} قرار دارد می توانیم نتیجه بگیریم که 3^{40} یک عدد ۲۰ رقمی است.

روش سوم: اگر بتوانیم عدد تواندار داده شده را به صورت توانی از عدد ۲ بنویسیم آنگاه می توانیم 2^{10} را تقریباً 1000 درنظربگیریم وتعداد رقمهای عدد را محاسبه کنیم.

مثال : اگر مقدارعدد 2^{40} را محاسبه کنیم چند رقمی می شود؟

$$2^{40} = (2^{10})^4 \approx (1000)^4 = (10^3)^4 = 10^{12} = 1000000000000 \Rightarrow \text{۱۳ رقمی است}$$

روش چهارم: اگرتعداد رقمهای حاصل ضرب دوعدد صحیح را خواسته باشند می توان ابتدا آنها را به صورت نماد علمی نوشت و سپس دو عدد را را تا یک رقم اعشار درهم ضرب کرد ودر آخر تعداد رقم های این حاصل ضرب را با توانهای عدد ۱۰ با هم جمع کرد.

مثال: حاصل عبارت مقابل چند رقمی می‌شود؟ $932569842 \times 98678278 = 9/3\times 10^8 \times 9/8\times 10^7 = 91/14\times 10^{15}$

۱۳تاصفر

پس $\overbrace{۹۱۱۴\,۰۰۰...۰} = ۹۱۱۴ \times ۱۰^{۱۳} = ۹۱/۱۴ \times ۱۰^{۱۵}$ بنابراین حاصل ۱۷ رقمی می شود.

❋مجموع رقمهای یک عدد تواندار:

مانند نکته‌ی قبل عمل کرده تعداد رقمهارا مشخص می کنیم ودر آخرمجموع رقمها را به دست می آوریم.

مثال: *مجموع ارقام حاصل ضرب* $۵^{۱۰۴} \times ۴^{۵۲}$ *برابر است با:*

$$۵^{۱۰۴} \times ۴^{۵۲} = ۵^{۱۰۴} \times \left(۲^{۲}\right)^{۵۲} = ۵^{۱۰۴} \times ۲^{۱۰۴} = ۱۰^{۱۰۴} = ۱۰۰۰...۰ \Rightarrow ۱+۰+۰+۰+...+۰ = ۱$$

❋ اگر عددی بخواهد مضربی از ۱۰ باشد اولا باید عملهای ۲و ۵ را با هم داشته باشد و ثانیا توانهای این دو عامل (۲و۵)صفر یا کسری ویا منفی نباشند.

مثال: *به ازای چند مقدار صحیح* n *عدد* $۴^{n+۳} \times ۲۵^{۲-n}$ *مضرب ۱۰ می باشد؟ ۴ مقدار صحیح*

$$۴^{n+۳} \times ۲۵^{۲-n} = \left(۲^{۲}\right)^{n+۳} \times \left(۵^{۲}\right)^{۲-n} = ۲^{۲n+۶} \times ۵^{۴-۲n} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲n+۶>۰ \Rightarrow ۲n>-۶ \Rightarrow n>-۳ \\ ۴-۲n>۰ \Rightarrow ۴>۲n \Rightarrow n<۲ \end{array}\right\} \Rightarrow -۳<n<۲$$

❋اگر دو عدد به صورت $x \times a^{b}$ و $y \times a^{b}$ داشته باشیم و بخواهیم عددی بین آنها پیدا کنیم کافیست عددی طبیعی بین x و y پیدا کنیم ودر a^{b} ضرب کنیم.(یعنی باید قسمت تواندار هر دوعدد را به صورتی بنویسیم که پایه هایشان باهم وتوان های آنها با هم برابر باشد.)

مثال: *کدام گزینه بین* $۷^{۱۸}$ *و* $۷^{۱۹}$ *قرار دارد وبر ۸ بفشپزیر است؟*

۱) $۷^{۱۷}+۷^{۱۸}$ ۲) $۷^{۱۸}+۷^{۱۸}$ ۳) ۶۴×۷^{۱۷} ۴) ۵۶×۷^{۱۷}

حل) با بررسی گزینه هاداریم: $۷^{۱۷}+۷^{۱۸} = ۷^{۱۷}(۱+۷) = ۷^{۱۷} \times ۸$

بر ۸ بفشپزیر نیست $۷^{۱۸}+۷^{۱۸} = ۷^{۱۸}(۱+۱) = ۷^{۱۸} \times ۲$ بین $۷^{۱۸}$و $۷^{۱۹}$ نیست $۶۴ \times ۷^{۱۷} = ۸^{۲} \times ۷^{۱۷} > ۷^{۱۹}$

بین $۷^{۱۸}$و $۷^{۱۹}$ نیست $۵۶ \times ۷^{۱۷} = ۸ \times ۷ \times ۷^{۱۷} = ۸ \times ۷^{۱۸}$

مثال) کدام یک از اعداد زیر بین $۳^{۱۹}$ و $۳^{۲۰}$ قرار ندارد؟

۱) ۷×۳^{۱۸} ۲) ۱۱۱×۳^{۱۵} ۳) $\frac{۲}{۵} \times ۳^{۲۰}$ ۴) ۲۷×۳^{۱۶}

❋اگر کاغذی را nبار وفقط به صورت افقی یا فقط به صورت عمودی تا بزنیم تعداد خطوط ایجاد شده روی آن $۲^n - ۱$ می باشد.

❋اگر هر دو کار بالا را باهم انجام دهیم یعنی مثلا m بار افقی و nبار عمودی تا بزنیم تعداد خطوط ایجاد شده برابر است با:

$$(۲^m - ۱) + (۲^n - ۱)$$

مثال) اگر کاغذی را ۷ بار به صورت افقی و ۲ بار به صورت عمودی تا بزنیم تعداد خطوط ایجاد شده روی آن چند تاست؟

$$(۲^m - ۱) + (۲^n - ۱) = ۲^۷ - ۱ + ۲^۲ - ۱ = ۱۲۸ - ۱ + ۴ - ۱ = ۱۳۰$$

جـــــذر و ریشـــــه

❋هر عدد **حقیقی مثبت** دارای **دو ریشه‌ی** nاُم زوج می باشد.(به جز صفر که فقط یک ریشه‌ی زوج دارد.)

❋هر عدد حقیقی دارای یک ریشه nاُم فرد است.

❋اگر n زوج باشد ریشه‌ی n اُم a^n برابر $|a|$می شود. $\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad (a \in E)$

❋ریشه های اعداد بین صفر ویک،بزرگتر از خود آن اعداد وریشه های اعداد بزرگتر از یک، کوچکتر از خود آن اعداد هستند.

❋اعداد منفی ریشه‌ی زوج ندارند. مثلا $\sqrt{-۶}$ و $\sqrt[۴]{-۲۰}$ و $\sqrt[n]{-۱}$ ریشه ندارند

❋برای **جذر گرفتن** از اعداد تواندار دو روش وجود دارد:

۱- پایه را تغییر نداده وتوان را نصف کنیم.

مثال: *حاصل* $\sqrt{۴^{-۴۰}}$ *برابر است با:* ۱) $۴^{-۲۰}$ ۲) $۴^{-۴۰}$ ۳) $۴^{-۱۰}$ ۴) $-۴^{۲۰}$

توان را نصف می کنیم. $\sqrt{۴^{-۴۰}} = ۴^{-۴۰ \div ۲} = ۴^{-۲۰}$

۲- توان را تغییر نداده واز پایه اش جذر بگیریم.

مثال)جذر عدد۴ عدد ۲ می شود پس: $\sqrt{۴^{-۴۰}} = ۲^{-۴۰}$

❋برای به دست آوردن حاصل عبارت هایی که شامل چند رادیکال تو درتو باشند باید از داخلی ترین رادیکال شروع کنیم.

مثال: *مقدار عبارت* $\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2003\times 2005}}}}$ *برابر است با : (مسابقات جهانی ریاضی)*

۱) ۲۰۰۰　　۲)۲۰۰۱　　۳)۲۰۰۲　　۴)۲۰۰۳　　۵) ۲۰۰۴

حل)

$$\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2003\times 2005}}}}=\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+(2004-1)(2004+1)}}}}=$$

$$\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+(2004)^2-1}}}}=\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+(2003-1)(2003+1)}}}=$$

$$\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2003^2-1}}}=\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\times 2003}}=\sqrt{1+2000\sqrt{1+(2002-1)(2002+1)}}=$$

$$\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001^2-1}}=\sqrt{1+2000\times 2001}=\sqrt{2001^2}=2001$$

❋جمع وتفریق رادیکال ها را به شرطی می توان انجام داد که فرجه وعبارت زیر رادیکالها با هم برابر باشد.(مانند عبارت های جبری می گوییم با هم متشابه باشند.)

مثال) $5\sqrt[3]{7}-2\sqrt[3]{7}=3\sqrt[3]{7}$

❋قبل از جمع وتفریق رادیکال ها ابتدا در صورت امکان عدد زیر رادیکال را تجزیه یا به ضرب تبدیل کرده آن را ساده وسپس عبارت های متشابه را با هم جمع ویا تفریق می کنیم.

مثال:*مقدار عبارت* $\sqrt{20}+3\sqrt{125}-2\sqrt{5}-\sqrt{45}$ *برابر است با:*

۱) $10\sqrt{5}$　　۲) $12\sqrt{5}$　　۳) $-12\sqrt{3}$　　۴) $-10\sqrt{2}$

$$\sqrt{20}+3\sqrt{125}-2\sqrt{5}-\sqrt{45}=\sqrt{4\times 5}+3\sqrt{25\times 5}-2\sqrt{5}-\sqrt{9\times 5}=2\sqrt{5}+15\sqrt{5}-2\sqrt{5}-3\sqrt{5}=12\sqrt{5}$$

❋برای پیدا کردن رادیکال های تو درتو به شکل مقابل داریم: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[m\times n\times p]{a}$

❋هرگاه بخواهیم ضریب یک رادیکال را به داخل رادیکال ببریم باید ضریب را به توان فرجه رسانده ودر عبارت زیر رادیکال ضرب کنیم.

تذکر مهم:در این حالت دقت کنید که علامت حاصل تغییر نکند.

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^{n}b}$$

مثال: حاصل $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ چه عددی می شود؟

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3}}=\sqrt[3]{\sqrt{4^{2}\times 3}}=\sqrt[6]{48}$$

٭عبارت های رادیکالی نامتناهی : برای پیدا کردن حاصل عبارت های رادیکالی نامتناهی از روش A استفاده می کنیم به این صورت که کل عبارت را مساوی A قرار داده وسپس دو طرف را به توان فرجه می رسانیم و سپس آن قسمتی از عبارت را که شبیه کل عبارت است دوباره برابر A قرار داده و با کمک معادله مقدار A را حساب می کنیم.

مثال: حاصل عبارت $2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}}$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{3}$　　۲) 6　　۳) $2\sqrt{6}$　　۴) $6\sqrt{2}$

$$A=2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}}\Rightarrow A^{2}=4\left(3+\underbrace{2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{\dots}}}}}_{A}\right)=12+4A\Rightarrow A^{2}=12+4A$$

$$\Rightarrow A^{2}-4A-12=0\Rightarrow (A-6)(A+2)=0\Rightarrow A=6 \quad \text{یا} \quad A=-2 \ \text{غیر قابل قبول}$$

مثال : کدام رابطه در مورد عبارت $M=\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{\dots}}}}}}$ درست است؟(حل به عهده دانش آموز)

۱) $M^{2}=49M$　　۲) $M^{2}=7M$　　۳) $M^{2}=M$　　۴) $M^{2}=343M$

توان کسری :اگر $\sqrt[n]{a^{m}}$ در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده باشد می توان نوشت : $\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$

مثال: $(-216)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(-216)^{2}}=(-6)^{2}=36$

٭می توان **فرجه** را با **توان** عدد زیر رادیکال ساده کرد به شرط آنکه پس از ساده شدن ،حاصل عبارت تعریف شده باشد.(زیر رادیکال با فرجه زوج منفی نشود.) وعلامت عبارت زیر رادیکال حفظ شود وتغییر نکند.

$$\sqrt[n]{a^{m}}=\sqrt[kn]{a^{km}}$$

$$\sqrt[21]{2^{7}}=\sqrt[21\div 7]{2^{7\div 7}}=\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt{۸}\times\sqrt[۶]{۸}=\sqrt{۸}\times\sqrt[۶]{۲^{۳}}=\sqrt{۸}\times\sqrt[۶÷۳]{۲^{۳÷۳}}=\sqrt{۸}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۶}=۴$$

گویا کردن مخـــرج کسرها :

الف) مخرج کسر $\frac{B}{\sqrt[n]{a^m}}$ را به شرط آنکه $a\neq ۰$ و $m<n$ را با ضرب صورت ومخرج آن در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ به عددی گویا تبدیل کرد.

مثال: *حاصل* $\frac{۶}{۵\sqrt[۵]{۳^{۲}}}$ *برابر است با:*　۱) $\frac{۲}{۵}$　۲) $\frac{۲\sqrt{۳^{۳}}}{۵}$　۳) $\frac{۲}{۵}\times\sqrt[۵]{۲۷}$　۴) $۱۰\times\sqrt[۵]{۲۷}$

$$\frac{۶}{۵\sqrt[۵]{۳^{۲}}}=\frac{۶}{۵\sqrt[۵]{۳^{۲}}}\times\frac{\sqrt[۵]{۳^{۳}}}{\sqrt[۵]{۳^{۳}}}=\frac{۶\sqrt[۵]{۳^{۳}}}{۵\sqrt[۵]{۳^{۵}}}=\frac{۶\sqrt[۵]{۳^{۳}}}{۵\times۳}=\frac{۲\sqrt[۵]{۳^{۳}}}{۵}=\frac{۲}{۵}\sqrt[۵]{۲۷}$$

ب) برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها از **مجموع یا تفاضل** دو یا چند رادیکال تشکیل شده اند کافیست صورت ومخرج آن را در **مـــزدوج مخـــرج** ضرب کنیم.

مثال: معکوس کسر $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ *کدام گزینه است؟(تیزهوشان)*

۱) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$　۲) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$　۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}-۱}$　۴) $\frac{۱}{\sqrt{۵}+۱}$

$$\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{۲}{\sqrt{۵}+۱}\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{\sqrt{۵}-۱}=\frac{۲(\sqrt{۵}-۱)}{۵-۱}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

اعداد متوالی هر چقدر که بزرگتر شوند حاصل اختلاف جذر هایشان کمتر می شود.

مثال :　$\sqrt{۸}-\sqrt{۷}<\sqrt{۶}-\sqrt{۵}$

در عبارت های رادیکالی که در صورت ومخرج جمع یا تفریق رادیکالها قرار داردمی توان با فاکتور گیری آن را ساده کرد.

مثال) *حاصل عبارت* $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}+\sqrt{۸}+۲}{\sqrt{۳}+\sqrt{۶}+\sqrt{۱۲}+۳}$ *برابر است با:*

$$\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}+\sqrt{۸}+۲}{\sqrt{۳}+\sqrt{۶}+\sqrt{۱۲}+۳}=\frac{\sqrt{۲}\left(۱+\sqrt{۳}+\sqrt{۴}+\sqrt{۲}\right)}{\sqrt{۳}\left(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۴}+\sqrt{۳}\right)}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

رادیکـــال مـــــرکب خاص :

❋در رادیکال مرکب $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ با فرض آنکه $A^{۲}-B$ مربع کامل باشد وبا فرض $C=\sqrt{A^{۲}-B}$ داریم:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{۲}}$$

مثال : ساده شده رادیکال $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}$ برابر است با:

۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $-۲-\sqrt{۳}$ ۳) $۲-\sqrt{۳}$ ۴) $-۲+\sqrt{۳}$

حل) $B=۴۸ \Leftarrow \sqrt{۴۸}=\sqrt{۴^{۲}\times ۳}=۴\sqrt{۳}$ پس $۷^{۲}-۴۸=۱$ مربع کامل است در نتیجه $C=\sqrt{۱}=۱$ بنابراین داریم:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{۲}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{۲}}\Rightarrow\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۷+۱}{۲}}-\sqrt{\frac{۷-۱}{۲}}=\sqrt{۴}-\sqrt{۳}=۲-\sqrt{۳}$$

عبـــــــــارت های جبـــــــــری

یک جمله‌ای:ساده ترین نوع عبارت های جبری است که به صورت ضرب یک عدد حقیقی در توانهای صحیح ونامنفی از یک یا چند متغیر می باشد.

تذکر۱: حروف(متغیرها)اگر در توان ، در مخرج یا در قدر مطلق ویا در زیر رادیکال باشند ویا توان آنها منفی باشد. یک جمله ای نیستند.

تذکر۲: اعداد حقیقی یک جمله ای محسوب می شوند .مانند: 0 و $\sqrt{2}$ و $-\frac{3}{4}$ و π

جملات متشابه : جملاتی که قسمت حرفی وتوان حروف آنها با هم برابر باشد.

❋درجه یک چند جمله ای: در چند جمله ای ها درجه نسبت به یک متغیر عبارت است از بزرگ ترین توان آن متغیردر تمام جمله های آن چند جمله ای.

مثال: *درجه چند جمله ای* $x^{10} + (x^2 + x^5 + 7)^5 (x^4 + 3x^2 + 5x - x^3)^3$ *چقدر است؟*

۱) ۱۰	۲) ۱۷	۳) ۳۵	۴) ۳۷

حل) بزرگترین توان هر پرانتز را پیدا کرده و به توان بیرون پرانتز می رسانیم و چون بین دو پرانتز ضرب است توان آنها را جمع می کنیم.

$$(x^4)^3 \times (x^5)^5 = x^{12} \times x^{25} = x^{37}$$

❋**چند جمله ای متقارن**: چند جمله ای که با هر تبدیل چرخشی تغییر نکند.

مثال: *عبارت* $2x^3 + 2y^3 + 1$ *نسبت به* x *و* y *متقارن است.زیرا با جابجا کردن* x *و* y *عبارت تغییر نمی کند.*

$$2x^3 + 2y^3 + 1 \longrightarrow 2y^3 + 2x^3 + 1$$

❋**چند جمله ای همگن**:اگر همه‌ی جمله های یک چند جمله ای با یک دیگر هم درجه باشند به آن چند جمله ای همگن یا متجانس می گویند.

مثال: *درچند جمله ای* $7x^3y^4 + 2x^6y - 2y^7 + t^7$ *همه جمله ها دارای درجه ۷ هستند پس همگن است.*

چند جمله ای استاندارد: چند جمله ای که بر حسب توانهای نزولی متغیرمورد نظرش مرتب شده باشد.

در ضرب جملات جبری در هم می توان تعداد جملات هر پرانتز را پیدا کرد وسپس در هم ضرب نمودتا تعداد جملات حاصل جمع را مشخص کنیم.

هر گاه صورت کسری صفر باشد به شرط صفر نبودن مخرج،حاصل کسر همواره صفر است.

مثال: مقدار کسر مقابل به ازای $x=۱۳۹۴$ پیدا کنید

$$\frac{(۲۰۱۶-x)(۲۰۱۵-x)(۲۰۱۴-x)\ldots(۱۳۵۷-x)}{۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+۲۰۱۶^۲}=$$

$$\frac{(۲۰۱۶-x)(۲۰۱۵-x)(۲۰۱۴-x)\ldots(۱۳۵۷-x)}{۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+۲۰۱۶^۲}=\frac{(۲۰۱۶-۱۳۹۴)(۲۰۱۵-۱۳۹۴)\ldots\overbrace{(۱۳۹۴-۱۳۹۴)}^{\text{صفر}}\ldots(۱۳۵۷-۱۳۹۴)}{۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+۲۰۱۶^۲}=0$$

هرگاه مجموع دو یا چند **عبارت نامنفی** ، برابر صفر باشد **هر یک** از آن عبارت ها برابر **صفر** است.

مثال: *در صورتی که برانیم* $(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲=0$ *آنگاه حاصل* $\frac{a}{b+c}$ *چند است؟*

حل) چون حاصل جمع چند عبارت که هر کدام نامنفی هستند صفر شده است. تک تک عبارت ها باید صفر باشند پس

$$a-b=۰,b-c=۰,c-a=۰\Rightarrow a=b=c\Rightarrow\frac{a}{b+c}=\frac{a}{a+a}=\frac{a}{۲a}=\frac{۱}{۲}$$

هرگاه حاصل ضرب چند عبارت صفر باشد حداقل باید یکی از آن عبارت ها باید صفر باشد.

مثال:

$$(۳a-۶)(۲b+۴)=۰\Rightarrow\begin{array}{l}۳a-۶=۰\Rightarrow a=۲\\ ۲b+۴=۰\Rightarrow b=-۲\end{array}$$

اگر $n\in Z$ باشد به شرط تعریف شدن $(a-b)^{۲n}$ همواره داریم: $(a-b)^{۲n}=(b-a)^{۲n}$

یعنی هر عبارت وقرینه اش به توان عددی زوج با هم برابرند.

مثال) *حاصل* $(a-b)^{۲۰۰}-(b-a)^{۲۰۰}$ *برابر است با:*

۱) $۲a^{۲۰۰}-۲b^{۲۰۰}$ ۲) $b^{۲۰۰}-a^{۲۰۰}$ ۳)صفر ۴) $۲(a-b)^{۲}$

حل) با توجه به نکته بالا $(a-b)^{۲۰۰}=(b-a)^{۲۰۰}$ است پس در نتیجه حاصل برابر صفر می شود.

هرگاه مجموع دو عدد حقیقی مثبت مقدار ثابتی باشد بیشترین مقدار برای حاصل ضرب آنها در صورتی حاصل می شود که دو عدد باهم برابر باشند.در صورت متمایز بودن دوعدد بیشترین مقدار برای حاصل ضرب آنها در صورتی حاصل می شود که آن دو عدد کمترین اختلاف را داشته باشند.

مثال) اگر x,y,z اعداد طبیعی باشند و $x+y+z=۹$ باشد بیشترین مقدار عبارت xyz چند است؟

حل) اگر x,y,z اعداد متمایز نباشند بیشترین مقدار وقتی است که با هم برابر باشند یعنی $x=y=z=۳\Rightarrow xyz=۲۷$ ولی اگر متمایز باشند باید کمترین اختلاف را داشته باشند که سه عدد طبیعی متوالی می شوند در نتیجه $xyz=۲\times۳\times۴=۲۴$

مثال) فرض کنید x عددی حقیقی باشد در این صورت بزرگ ترین مقدارحقیقی که عبارت $\sqrt{۲۰۰۸-x}+\sqrt{x-۲۰۰۰}$ می تواند داشته باشد چقدر است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۵ ۵) ۴

$$A=\sqrt{۲۰۰۸-x}+\sqrt{x-۲۰۰۰}\Rightarrow A^{۲}=۲۰۰۸-x+x-۲۰۰۰+۲\sqrt{(۲۰۰۸-x)(x-۲۰۰۰)}=$$
$$۸+۲\sqrt{(۲۰۰۸-x)(x-۲۰۰۰)}\Rightarrow A=\sqrt{۸+۲(۲۰۰۸-x)(x-۲۰۰)}$$

اکنون به دلیل این که دو عدد $۲۰۰۸-x$ و $x-۲۰۰۰$ اعداد مثبت و مجموع آنها $۲۰۰۸-x+x-۲۰۰۰=۸$ پس بیشترین مقدار حاصل ضرب آنها وقتی است که هر کدام ۴ باشند پس بیشترین مقدار عبارت A برابر است با:

$$A=\sqrt{۸+۲\sqrt{(۲۰۰۸-x)(x-۲۰۰۰)}}=\sqrt{۸+۲\sqrt{۴\times۴}}=\sqrt{۸+۲\sqrt{۱۶}}=\sqrt{۸+۲\times۴}=\sqrt{۱۶}=۴$$

کمترین مقدار عبارت $ax^{۲}+bx+c$ که در آن $a>۰$ همواره به ازای $x=\frac{-b}{۲a}$ به دست می آید.

مثال) کمترین مقدار عبارت $x^{۲}+۱۰x+۳۲$ چند است؟

بیشترین مقدار عبارت $ax^{۲}+bx+c$ که در آن $a<۰$ همواره به ازای $x=\frac{-b}{۲a}$ به دست می آید.

برای به دست آوردن مجموع ضرایب در هر عبارت به جای هر یک از حروف عدد ۱ قرار می دهیم وحاصل را به دست می آوریم.

مثال :مجموع ضرایب بسط عبارت $\left(3x^2+x-3\right)^{90}$چند می شود؟

$$\left(3x^2+x-3\right)^{90}=1^{20}=1$$

معـــــادله

تعداد جوابهای معادله درجه یک:

هر معادله درجه یک به صورت $ax=b$ قابل نمایش دادن است که در این معادله سه حالت برای جواب ممکن است پیش بیاید.

حالت اول: اگر در $ax=b$ مقدار a غیر از صفر باشد معادله یک جواب دارد. مانند $3x=-12\Rightarrow x=\frac{-12}{4}=-3$

حالت دوم : اگر در $ax=b$ مجهول حذف شود یعنی $a=0,b\neq 0$ معادله غیر ممکن است وجواب ندارد.

مثال: $4x-2=5+4x\Rightarrow 4x-4x=5+2\Rightarrow 0=7\Rightarrow$ غیر ممکن $\Rightarrow$ جواب ندارد

حالت سوم: اگر در معادله $ax=b$ هر دو عدد a,b صفر باشند معادله مبهم است وبی شمار جواب دارد.

مثال: $5x-2=5x-2\Rightarrow 0=0\Rightarrow$ معادله بی شمار جواب دارد.

تذکر: هر گاه یک معادله را ساده کردید و به یک تساوی درست عددی مانند $2=2$ و $-6=-6$ و . . . رسیدید معادله شما بیشمار جواب دارد.

تذکر مهم : هر معادله می تواند حداکثر به تعداد درجه‌ی مجهول خود جواب داشته باشد. مثلا معادله درجه ۲ می تواند ۲ جواب داشته باشد.

معادله رادیکالی(اصم):

در این نوع معادلات مجهول زیر رادیکال قرار گرفته است برای حل این نوع معادلات بهتر است ابتدا کاری کنید که بخش رادیکالی در یک طرف تساوی وقسمت های دیگر در مقابل آن قرار گیرند سپس دو طرف تساوی را به توان ۲ (یا هر فرجه ای که رادیکال دارد.) برسانید تا رادیکال از بین برود.

مثال: معادله های زیر را حل کنید

الف) $\sqrt{-5x-9}-4=0$ ب) $\sqrt[3]{8-4x}=-2$ پ) $\sqrt{\sqrt{3x-9}+1}=4$

الف) $\sqrt{-5x-9}-4=0\Rightarrow\sqrt{-5x-9}=4\Rightarrow\left(\sqrt{-5x-9}\right)^2=4^2\Rightarrow -5x-9=16\Rightarrow -5x=25\Rightarrow x=\frac{25}{-5}=-5$

ب) $\sqrt[3]{8-4x}=-2\Rightarrow\left(\sqrt[3]{8-4x}\right)^3=(-2)^3\Rightarrow 8-4x=-8\Rightarrow -4x=-8-8=-16\Rightarrow x=\frac{-16}{-4}=4$

پ) $\sqrt{\sqrt{3x-9}+1}=4 \Rightarrow \sqrt[4]{3x-9}=3 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{3x-9}\right)^4=3^4 \Rightarrow 3x-9=81 \Rightarrow 3x=90 \Rightarrow x=\frac{90}{3}=30$

❋از مثلث خیام –پاسکال می توان برای پیدا کردن ضرایب عبارت $(a+b)^n$ می توان استفاده کرد به این صورت که اعداد سطر n ام این مثلث ضرایب جمله های این عبارت می شود وتوان a در اولین جمله n وتوان a در جمله های بعدی هربار یکی کم می شود و به توان b اضافه می شود تا در آخرین جمله که توان b به n می رسد.

$$
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}
$$

مثال)با کمک سطر پنجم حاصل $(a+b)^5$ را پیدا کنید. $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5a^4b+b^5$

❋در بسط دو جمله ای $(a+b)^n$ جمله هایی که از دو طرف به یک فاصله اند دارای ضریب برابر هستند.

اتحـــــــاد ها

اتحاد مربع دو جمله ای:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

مثال:اگر $a^2+b^2+5ab=0$ باشد حاصل $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ را حساب کنید.

حل) $a^2+b^2+5ab=0 \Rightarrow a^2+b^2=-5ab \Rightarrow \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2=\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2+b^2+2ab}=\frac{-5ab-2ab}{-5ab+2ab}=\frac{-7ab}{-3ab}=\frac{7}{3}$

نتایج اتحاد مربع دو جمله ای :

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$　　$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$　　$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

مثال: اگر $x-\frac{1}{x}=5$ باشد $3x^2+\frac{3}{x^2}$ چقدر است؟

حل) طبق نتیجه اتحاد $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ داریم :

$$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab \Rightarrow 3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=3\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2x\frac{1}{x}\right]=3\left(5^2+2\right)=3(27)=81$$

اتحاد مزدوج : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

مثال) حاصل عبارت $(2+\sqrt{3})^{25}(2-\sqrt{3})^{23}$ را به دست آورید.

$$(2-\sqrt{3})^{23}(2+\sqrt{3})^{25}=\left[(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\right]^{23}(2-\sqrt{3})^2=[4-3]^{23}\left(2-4\sqrt{3}+3\right)=1^{23}\left(5-4\sqrt{3}\right)=5-4\sqrt{3}$$

نکته : گاهی مواقع **حاصل ضرب چند پرانتز** با ضرب در یک پرانتز دیگر و تقسیم بر همان پرانتز تشکیل یک **اتحاد مزدوج** می دهد که با انجام این کار وتشکیل اتحاد مزدوج می توانیم حاصل عبارت را به صورت ساده تر بنویسیم.

مثال: اگر $a=\sqrt{2}+1$ و $b=\sqrt{2}$ حاصل عبارت $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8$ چقدر است؟

حل) چون $a-b=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1$ شده است ضرب عدد ۱ در هر عبارتی بی تاثیر است پس فقط کل عبارت را در $a-b$ ضرب می کنیم. داریم:

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8=(a^4-b^4)(a^4+b^4)+b^8=$$
$$(a^8-b^8)+b^8=a^8=(\sqrt{2}+1)^8$$

اتحاد مکعب دو جمله ای (چاق ولاغر) : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$　　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

تعمیم اتحاد چاق ولاغر:

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+b^{n-1})=a^n+b^n$$

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1})=a^n-b^n$$

اتحاد مکعب مجموع : $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 　　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

اتحاد فرعی مکعب دو جمله ای : $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$

مثال) اگر $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ باشد حاصل $x^3+\frac{1}{x^3}$ را حساب کنید.

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^3-3\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{125}{8}-\frac{15}{2}=\frac{65}{8}$$

تجــــــــــــزیه

تجزیه یک عبارت جبری ، یعنی تبدیل آن عبارت به ضرب دو یا چند عبارت جبری

مهمترین روش های تجزیه :

۱- فاکتور گیری　۲-استفاده از اتحادها　۳- دسته بندی　۴- افزودن وکاستن　۵- شکستن یک یا چند جمله عبارت جبری

۱- فاکتور گیری: در این روش «ب م م »ضرایب و حروف مشترک با کوچکترین توان را پیدا کرده ودر پشت پرانتز می‌نویسیم (فاکتور). سپس تک تک جملات عبارت را بر فاکتور تقسیم کرده وحاصل را داخل پرانتز می نویسیم.

مثال) *تجزیه کنید* $6ab^2c+2a^2bc=2abc(3b+a)$

مثال) اگر $a(c+d)+b(c+d)=42$ و $c+d=3$ باشد حاصل $a+b+c+d$ چند است؟

۱) ۱۴　　۲) ۵۶　　۳) ۱۷　　۴) ۳۹

$$a(c+d)+b(c+d)=42\Rightarrow (c+d)(a+b)=42\Rightarrow 3(a+b)=42\Rightarrow a+b=\frac{42}{3}=14\Rightarrow a+b+c+d=14+3=17$$

مثال) کدام عامل زیر در تجزیه عبارت $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$ وجود ندارد؟

۱) $a+c$　　۲) $a-c$　　۳) $b+c$　　۴) $a+b$

ابتدا دو پرانتز را در هم ضرب می کنیم وسپس فاکتورگیری می کنیم.

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=a^2b+abc+a^2c+b^2a+b^2c+bca+cab+c^2b+c^2a-abc=$$
$$(a^2b+b^2a)+(a^2c+abc)+(b^2c+abc)+(c^2a+c^2b)=ab(a+b)+ac(a+b)+bc(a+b)+c^2(a+b)=$$
$$(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=(a+b)[a(b+c)+c(b+c)]=(a+b)[(b+c)(a+c)]$$

---

۲ - تجزیه با استفاده از اتحادها:

الف) تجزیه با کمک اتحاد دو جمله ای: ۱- عبارت جبری شامل ۳ جمله باشد۲- دو جمله عبارت باید مربع کامل باشند۳- جمله سوم دو برابر جذر جملات جملات اول ودوم باشد.

مثال: عبارت x^4-18x^2+81 را تجزیه کنید.

$$x^4-18x^2+81=(x^2-9)^2$$

ب) تجزیه با کمک اتحاد مزدوج : ۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد . ۲- هر دو جمله مربع کامل باشند. ۳- عملیات بین دو جمله (−) باشد.

مثال: در تجزیه کامل $a-a^9$ تعداد کل عامل ها برابر است با:

۱) بیش از ۵ ۲) ۵ ✓ ۳) ۴ ۴) ۳

$$a^9-a=a(a^8-1)=a(a^4+1)(a^4-1)=a(a^4+1)(a^2+1)(a^2-1)=a(a^4+1)(a^2+1)(a+1)(a-1)$$

مثال: حاصل عبارت 45^8-9^4 بر کدام عدد بخشپذیر نیست؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۴

$$45^8-9^4=45^8-(3^2)^4=45^8-3^8=(45^4+3^4)(45^4-3^4)=(45^4+3^4)(45^2+3^2)(45^2-3^2)=$$
$$(45^4+3^4)(45^2+3^2)(45-3)(45+3)$$

با توجه به حاصل هر پرانتز در هیچ کدام عامل ۵ وجود ندارد پس عبارت بر ۵ بخشپذیر نیست.

پ) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک: ۱- عبارت جبری شامل سه جمله باشد.۲- یک جمله آن مربع کامل باشد۳- دو عدد بتوان یافت که حاصل جمع انها برابر ضریب متغیر بوده وحاصل ضرب آنها برابر جمله ی سوم (عدد ثابت) باشد

مثال: عبارت x^4-3x^2-4 بر کدام یک از عبارت های زیر بخشپذیر است؟

۱) $x^۲+۲$ ۲) $x+۱$ ۳) $x-۱$ ۴) $x+۲$

با کمک اتحاد جمله مشترک:
$$x^۴-۳x^۲-۴=(x^۲+۱)(x^۲-۴)=(x^۲+۱)(x-۲)(x+۲)$$

تذکر مهم: در صورتیکه در تجزیه با اتحاد جمله مشترک ضریب $x^۲$ مربع کامل نباشد از روشی به نام روش A (روش روسی) برای مربع کردن استفاده می کنیم. به صورت زیر:

۱- عبارت را برابر A قرار می دهیم ۲- دو طرف تساوی را در ضریب $x^۲$ ضرب می کنیم.۳- عبارت حاصل را به کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم ۴- هر یک از عامل های به دست آمده را در صورت امکان تجزیه می کنیم۵- طرفین تساوی را در عدد ضرب شده تقسیم می کنیم.

مثال: *عبارت* $۶x^۲+۷x+۲$ *را تجزیه کنید. حل)چون ضریب* $x^۲$ *مربع کامل نیست از روش* A *استفاده می کنیم داریم:*

$$A=۶x^۲+۷x+۲\Rightarrow ۶A=۳۶x^۲+۷(۶x)+۱۲\Rightarrow ۶A=(۶x+۳)(۶x+۴)\Rightarrow$$
$$۶A=۳(۲x+۱)۲(۳x+۲)\Rightarrow A=(۲x+۱)(۳x+۲)$$

❋ ت) تجزیه به کمک اتحاد چاق ولاغر: ۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد ۲- هر دو جمله مکعب کامل باشد.

مثال) *عبارت مقابل را تجزیه کنید.*
$$a^۶-۶۴=(a^۲-۴)(a^۴+۴a^۲+۱۶)$$

❋ث) تجزیه به کمک اتحاد مکعب دو جمله ای:

مثال: *عبارت مقابل را تجزیه کنید.*
$$۲۷x^۳-۵۴x^۲+۳۶x-۸=(۳x-۲)^۳$$

❋۳- تجزیه به کمک دسته بندی:

در بعضی از عبارات لازم است که جملات آن را به صورت چندین دسته مناسب در نظر گرفته وسپس با استفاده از روش فاکتور گیری یا اتحادهای جبری هر دسته ودر نهایت کل عبارت را تجزیه کنیم.

مثال: *عبارت* $۵a^۲+۵b^۲+۱۰ab+۳a+۳b$ *را تجزیه کنید.*

$$۵a^۲+۵b^۲+۱۰ab+۳a+۳b\Rightarrow(۵a^۲+۵b^۲+۱۰ab)+(۳a+۳b)=۵(a^۲+b^۲+۲ab)+۳(a+b)=$$
$$۵(a+b)^۲+۳(a+b)=(a+b)[۵(a+b)+۳]$$

۴- تجزیه با افزودن وکاستن:

در این روش جمله ای را به عبارت جبری اضافه واز آن کم می کنیم سپس با کمک اتحادها آن را تجزیه می کنیم.

مثال: *عبارت* $x^۴+۴$ *را تجزیه کنید.*

$$x^۴+۴=x^۴+۴+۴x^۲-۴x^۲=\left(x^۴+۴+۴x^۲\right)-۴x^۲=\left(x^۲+۲\right)^۲-۴x^۲=\left(x^۲+۲-۲x\right)\left(x^۲+۲+۲x\right)$$

۵- تجزیه به کمک شکستن برخی جملات:

در این روش بعضی از جملات را به صورت مجموع یا تفاضل دو جمله دیگر می نویسیم سپس به روش دسته بندی وفاکتور گیری و یا اتحادها عبارت جبری را تجزیه می کنیم.

مثال: عبارت $x^۴+x^۲+۱$ را تجزیه کنید.

حل) *به جای* $x^۲$ *عبارت* $۲x^۲-x^۲$ *را قرار می دهیم .*

$$x^۴+x^۲+۱=x^۴+۲x^۲-x^۲+۱=\left(x^۴+۲x^۲+۱\right)-x^۲=$$
$$\left(x^۲+۱\right)^۲-x^۲=\left[\left(x^۲+۱\right)-x\right]\left[\left(x^۲+۱\right)+x\right]$$

تذکر مهم : هر چند جمله ای بر عوامل خود درتجزیه آن بخشپذیر است.

نابرابریها و نامعادله

خاصیت نابرابریها:

۱- اگر به دو طرف یک نابرابری یک مقدار مساوی را اضافه و یا کم کنیم جهت نابرابری تغییر نمی کند.

$a>b\Rightarrow a-c>b-c$ $\qquad$ $a>b\Rightarrow a+c>b+c$

۲- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی **مثبت** ضرب یا تقسیم کنیم جهت نابرابری تغییر نمی کند.

$a>b\Rightarrow ac>bc$ و $c>۰$ $\qquad$ $a>b\Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ و $c>۰$

۳- اگر دو طرف یک نابرابری را در عددی **منفی** ضرب یا تقسیم کنیم جهت نابرابری **عوض می شود.**

$a>b\Rightarrow ac<bc$ و $c<۰$ $\qquad$ $a>b\Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ و $c<۰$

۴- اگر دو طرف یک نابرابری هم علامت باشند با **معکوس** کردن آنها جهت نابرابری **عوض می شود.**

$$a > b > ۰ \Rightarrow a > b \Rightarrow \frac{۱}{a} < \frac{۱}{b} \qquad a < b < ۰ \Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$$

۵- اگر دو طرف یک نابرابری هم علامت **نباشند** با معکوس کردن آنها جهت نابرابری **عوض نمی شود**.

$$a < ۰, b > ۰ \Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{۱}{a} < \frac{۱}{b}$$

مثال: $-۳ < ۰, ۲ > ۰ \Rightarrow -۳ < ۲ \Rightarrow -\frac{۱}{۳} < \frac{۱}{۲}$

۶- اگر دو طرف یک نابرابری به توان عددی **فرد** برسند جهت نامساوی تغییر نمی کند.

۷- اگر دو طرف یک نابرابری به توان عددی **زوج** برسند سه حالت وجود دارد:

الف) دو طرف **مثبت** باشند جهت **عوض** نمی شود.

ب) دو طرف **منفی** باشند جهت **عوض** می شود

ج) اگر یکی منفی ودیگری مثبت باشد **قدر مطلق** هر کدام بزرگتر بود موقع به توان زوج رساندن همان طرف بزرگتر می شود.

مثال) الف: $۴ > ۲ \Rightarrow ۴^۴ > ۲^۴$　　ب) $-۳ > -۵ \Rightarrow (-۳)^۴ < (-۵)^۴$

ج) چون $|-۷| > |۴|$　　$-۷ < ۴ \Rightarrow (-۷)^۲ > ۴^۲$

مسا له: *طول مستطیلی ۳ برابر عرض آن است اگر محیط این مستطیل از ۲۰ سانتیمتر بیشتر نباشد عرض مستطیل چه مقادیری را می تواند اختیار کند؟*

$$x = ۳y \Rightarrow \quad ۲(x+y) = ۲(۳y+y) = ۸y \quad \Rightarrow \text{محیط} < ۲۰ \Rightarrow ۸y < ۲۰ \Rightarrow y < \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$

و چون عرض نمی تواند مقادیر منفی اختیار کند پس $۰ < y \le ۲/۵$

مختصات ، بردار و معادلات خط

❋طول پاره خط AB : اگر $A=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ مختصات نقاط دو سر یک پاره خط باشند طول پاره خط AB به صورت زیر حساب می شود.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال: *دو نقطه* $A=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ *و* $B=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ *دو راس مجاور یک مربع هستند طول قطر مربع چقدر است؟*

حل)طول پاره خط AB برابر ضلع مربع است پس:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

حال به کمک رابطه فیثاغورس ضلع مربع را پیدا می کنیم.　　$\text{ضلع مربع}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$

❋**اگر مختصات دو سر یک پاره خط را m برابر کنیم($m>0$) طول پاره خط نیز m برابر می شود**

مثال) *اگر در مثال بالا مختصات نقاط A,B را ۳ برابر کنیم طول پاره خط AB چند می شود؟*

نقاط جدید $A'=\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$ *و* $B'=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ *خواهند شد پس داریم :*　　$\sqrt{(9-6)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

واین یعنی اندازه پاره خط $A'B'$ ، ۳ برابر AB می شود.

❋**مختصات وسط پاره خط**: اگر $A=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ مختصات نقاط دو سر یک پاره خط باشند مختصات نقطه‌ی M که نقطه‌ی وسط پاره خط است از فرمول مقابل به دست می آید.

$$M=\begin{bmatrix} \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ \dfrac{y_1+y_2}{2} \end{bmatrix}$$

❋مختصات نقطه M نقطه تلاقی میانه های مثلث (نقطه ثقل)به راس های $A=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}$ از فرمول های زیر به دست می آید.

$$x_M=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

❋**فاصله نقطه** $A=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ از مبدا مختصات برابر است با: $|AO|=\sqrt{x^2+y^2}$

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}$ از مبدا مختصات چقدراست؟ $|AO|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

قرینه‌ی نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{مبدا}}\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{محور } x \text{ ها(افقی)}}\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{نیمساز ربع اول وسوم}}\begin{bmatrix}y\\x\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{محور } y \text{ ها (عمودی)}}\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{نیمساز ربع دوم وچهارم}}\begin{bmatrix}-y\\-x\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{خط } x=m}\begin{bmatrix}2m-x\\y\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{نسبت به نقطه } \begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}2m-x\\2n-y\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{خط } y=n}\begin{bmatrix}x\\2n-y\end{bmatrix}$

مثال: دو نقطه $A=\begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}7\\-9\end{bmatrix}$ نسبت به کدام نقطه قرینه یکدیگرند؟

حل)نقطه مورد نظر باید در وسط پاره خط AB باشد بنابراین باید نقطه وسط پاره خط را پیدا کنیم.

$$\begin{bmatrix}\dfrac{7+(-3)}{2}\\[2mm]\dfrac{-9+5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$$

مثال) قرینه نقطه $A=\begin{bmatrix}-3\\-5\end{bmatrix}$ نسبت به نقطه $B=\begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix}$ پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix}2\times4-(-3)\\2\times(-7)-(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-9\end{bmatrix}$$

✱در هر **متوازی الاضلاع** (مستطیل ،لوزی،مربع) **مجموع مختصات** دو **راس مقابل** با مجموع مختصات دو راس دیگر **برابر** است.

$$D \text{ مختصات } + B \text{ مختصات } = C \text{ مختصات } + A \text{ مختصات }$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ سه راس متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند مختصات راس D کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$　　۲) $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۲ \end{bmatrix}$　　۳) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۶ \end{bmatrix}$　　۴) $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$

حل)
$$A + C = B + D \Rightarrow \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} + X \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

بـــــــــــردار

✱**اندازه بردار** $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ از رابطهی $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ به دست می آید.

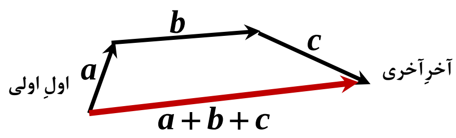
اندازه بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}$ را به دست آورید.　　$\sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$

بردار های مساوی: بردارهایی که هم جهت، هم اندازه و هم راستا (موازی) باشند.

روش های رسم بردار حاصل جمع ، برای چند بردار:

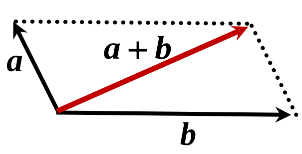
روش اول: روش مثلـــــــث : هر گاه ابتدای یک بردار انتهای بردار دیگر باشد.به عبارت دیگربردارها پشت سرهم (متوالی) باشند.

برای رسم بردار حاصل جمع ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می کنیم.(اولِ اولی را به آخرِ آخری وصل می کنیم.)

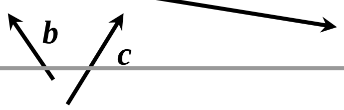


روش دوم : روش متوازی الاضـــــــلاع : هرگاه ابتدای دو بردار یکی باشد.(دو بردار از یک نقطه شروع شوند).

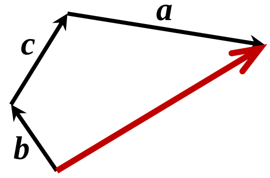
در این روش بردار حاصل جمع ، قطری از متوازی الاضلاع می شود که از ابتدای دو بردار رسم می شود.



تذکر مهم: اگر بردارها هیچ یک از شرایط گفته شده در روشهای بالا را نداشته باشند. با استفاده از **بردارهای مساوی و انتقال** می توان بردارها را به یکی از دو روش بالا تبدیل کرد و سپس بردار حاصل جمع را رسم کرد.



مثال: بردار حاصل جمع بردارهای مقابل را رسم کنید.



ابتدا یکی از بردارها رسم کرده و سپس با کمک روش مثلث بردارهایی مساوی با دو بردار و متوالی هم ،رسم می کنیم و درآخر بردار حاصل جمع را رسم میکنیم.

❋اگر طول وعرض برداری k برابر شوداندازه بردار نیز k برابر می شود که اگر k مثبت باشد بردار حاصل با بردار اولی موازی وهم جهت می شود ولی اگر k منفی باشد بردار حاصل با بردار اولی موازی ولی در خلاف جهت می شود.

مثال: *اگر $\vec{a}$ یک بردار دلخواه باشد بردار $۳\vec{a}$ برداری موازی و هم جهت با بردار $\vec{a}$ می باشد که اندازه آن ۳ برابر بردار $\vec{a}$ است. وبردار $-۵\vec{a}$ برداری است که موازی ودر خلاف جهت بردار $\vec{a}$ و اندازه آن ۵ برابر $\vec{a}$ می باشد*

❋ قرینه بردار: بردارهایی که در خلاف جهت هم، هم اندازه و هم راستا (موازی) باشند.

برای قرینه کردن یک بردار کافیست جهت آن را عوض کنیم .قرینه بردار $\vec{AB}$ را با $\vec{BA}$ و قرینه بردار $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نشان می دهیم .پس برای قرینه کردن مختصات بردار می توان طول وعرض آن را قرینه کرد یا جای ابتدا وانتهای آن را عوض نمود.

❋الف) بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ موازی محور x هاست اگر $y=0$ باشد و موازی محور y هاست اگر $x=0$ باشد.

❋ب) بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ موازی نیمساز ربع اول وسوم است اگر $x=y$ باشد. وموازی نیمساز ربع دوم وچهارم است اگر $x=-y$ باشد.

مثال) مقدار m را در بردار $\begin{bmatrix}۶m-۱۲\\۳۰-۲m\end{bmatrix}$ چنان تعیین کنید که:

الف) موازی محور طول ها باشد؛　　　ب) موازی نیمساز ربع دوم وچهارم باشد.

الف) $y=۰\Rightarrow ۳۰-۲m=۰\Rightarrow m=۱۵$

ب) $x=-y\Rightarrow ۶m-۱۲=-(۳۰-۲m)\Rightarrow ۶m-۱۲=-۳۰+۲m\Rightarrow ۶m-۲m=-۳۰+۱۲\Rightarrow ۴m=-۱۸\Rightarrow$

$m=\dfrac{-۱۸}{۴}=\dfrac{-۹}{۲}$

❋اگر طول وعرض برداری مساوی یا قرینه باشند زاویه ای که با جهت مثبت محور x ها می سازند برابر است با۴۵درجه یا ۱۳۵ درجه.

مثال: بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}۳\\-۳\end{bmatrix}$ چون طول وعرض آن قرینه هستند زاویه ۱۳۵ درجه می سازند و $\vec{a}=\begin{bmatrix}۴\\۴\end{bmatrix}$ چون طول وعرض با هم برابرند زاویه ۴۵درجه می سازند.

❋دو بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$ در صورتی بر هم عمودند که : $mx+ny=۰$ باشد. (یعنی مجموع حاصل ضرب طول ها با حاصل ضرب عرضهای آن دو بردار مساوی صفر شود.)

مثال: اگر دو بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}۳m-۵\\۴\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۲\\-m+۳\end{bmatrix}$ برهم عمود باشند مقدار m را پیدا کنید.

حل طبق نکته بالا داریم : $۲(۳m-۵)+۴(-m+۳)=۰ \Rightarrow ۶m-۱۰-۴m+۱۲=۰ \Rightarrow ۲m=-۲ \Rightarrow m=-۱$

❋دو بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$ در صورتی با هم موازیند که $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$ باشد.(یعنی نسبت طولهای دوبردار مساوی نسبت عرض های دو بردار باشد.)

مثال:

معادله خط

رابطه خطی : بعضی مواقع با متغیر هایی روبه رو می شویم که به یکدیگر وابسته اند و می بینیم که یکی از آنها با افزایش و یا کاهش دیگری با یک نسبت ثابت ومعین افزایش یا کاهش می یابد. اگر رابطه بین دو متغیر را با زبان ریاضی بیان کنیم ونمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کنیم و **نمودار آنها** به صورت یک **خط راست** درآید می گوییم رابطه بین آن دو متغیر یک رابطه خطی است. اگر یکی از متغیرها را x و دیگری را y بنامیم رابطه خطی بین این دو متغیر به صورت $y=ax+b$ $(a\neq ۰)$ نشان داده می شود.

❋ شرط آنکه نقطه ای روی یک خط باشد (یا خط از آن نقطه بگذرد)آنست که با جایگذاری طول نقطه به جای x و عرض نقطه به جای y در معادله خط تساوی برقرار شود.

مثال: آیا نقطه $A=\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}$ روی خط $۳x-۴y=۵$ قرار دارد؟

$۳x-۴y=۵ \Rightarrow ۳\times۵-۴\times(-۳)=۵ \Rightarrow ۱۵+۱۲\neq۵ \Rightarrow$ نقطه روی خط نیست

❋در معادله خط $y=ax$ ،شیب خط برابر a و عرض از مبدا صفر می باشد.

❋در معادله خط $y=ax+b$ شیب خط برابر a و عرض از مبدا b می باشد.

❋در معادله خطی $ax+by=c$ برای به دست آوردن شیب وعرض ازمبدا باید y را باضریب یک در یک طرف تساوی و دو جملهی شامل x و عدد ثابت را در طرف دیگر بنویسیم که در اینصورت :

$$ax+by=c \Rightarrow by=-ax+c \Rightarrow \frac{by}{b}=\frac{-ax}{b}+\frac{c}{b} \Rightarrow y=\underbrace{\frac{-a}{b}}_{\text{شیب}}x+\underbrace{\frac{c}{b}}_{\text{عرض از مبدا}}$$

❋دو خط وقتی با هم **موازیند** که شیب خط ها با هم **برابر** باشد.

❋دو خط وقتی بر هم **عمودند** که شیب آنها **قرینه و معکوس** یک دیگر باشد.(یا حاصل ضرب شیبها برابر ۱- باشد).

مثال: مقدار a برابر کدام گزینه باشد تا خط $(a-۲)x+۴y=۱۰$ برخط $۴x-۶y=۸$ عمود باشد.

۱) ۶　　۲) ۶-　　۳) ۸　　۴) ۸-

$$(a-۲)x+۴y=۱۰ \Rightarrow y=\frac{-(a-۲)}{۴}x+\frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{شیب}=\frac{-(a-۲)}{۴}$$

$$۴x-۶y=۸ \Rightarrow y=\frac{-۴}{-۶}x+\frac{۸}{-۶} \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۳} \Rightarrow \text{شیب}=\frac{۲}{۳}$$

اکنون باید حاصل ضرب شیبها برابر ۱- باشد $\frac{۲}{۳}\times\frac{-(a-۲)}{۴}=-۱ \Rightarrow \frac{-۲a+۴}{۱۲}=-۱ \Rightarrow -۲a+۴=-۱۲ \Rightarrow -۲a=-۱۶ \Rightarrow a=۸$

❋**شیب خطی** که از دو نقطه $A=\begin{bmatrix}x_۱\\y_۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x_۲\\y_۲\end{bmatrix}$ می گذرد برابر است با: $a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{\text{اختلاف عرضها}}{\text{اختلاف طولها}}$

❋سه نقطه‌ی A و B و C در صورتی **روی یک خط** قرار می گیرند که شیب خطی که از A و B می گذرد با شیب خطی که از A و C یا از C و B می گذرد برابر باشد.

مثال: سه نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۵\\۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\\frac{-۱}{۲}\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}k\\۰\end{bmatrix}$ مفروضند به ازای چه مقدار k حاصل عبارت $AC+BC$ کمترین مقدار را دارد؟

۱) $\frac{۵}{۴}$　　۲) $\frac{۳}{۴}$　　۳) ۱　　۴) ۲

حل) عبارت $AC+BC$ وقتی کمترین مقدار می شود که نقاط A و B و C روی یک خط راست باشند پس باید شیب خطی که از هر دو نقطه می گذرد مساوی هم باشد.

$$\text{شیب}\ AB=\text{شیب}\ AC \Rightarrow \frac{\frac{-۱}{۲}-۴}{\frac{۱}{۲}-۵}=\frac{۰-۴}{k-۵} \Rightarrow \frac{\frac{-۹}{۲}}{\frac{-۹}{۲}}=\frac{-۴}{k-۵} \Rightarrow ۱=\frac{-۴}{k-۵} \Rightarrow k-۵=-۴ \Rightarrow k=۱$$

✸**شیب مثبت** یک خط باعث می شود که خط با جهت مثبت محور x (سمت راست محور افقی)**زاویه تند** و **شیب منفی** باعث می شود که خط با جهت مثبت محور x **زاویه باز** بسازد.

✸معادله خطی که از نقطه $A=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ بگذرد و شیب آن a باشد از فرمول زیر به دست می آید.

$$y-y_1=a(x-x_1)$$

مثال: خطی از نقاط $A=\begin{bmatrix} ۳ \\ m \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} m \\ ۳ \end{bmatrix}$ گذشته ومحور عرضها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع نموده مقدار m چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۲- ۳) ۴- ۴) ۲

حل) چون صورت ومخرج قرینه‌ی هم هستن پس شیب برابر ۱- است $\frac{m-۳}{۳-m}=-۱$ = شیب AB پس معادله به صورت زیر است.

عرض از مبدا $۳+m$ می شود

$$y-y_1=a(x-x_1)\Rightarrow y-m=-۱(x-۳)\Rightarrow y-m=-۱x+۳\Rightarrow y=-۱x+۳+m\Rightarrow$$

حال باید این عرض مبدا با ۱ برابر باشد زیر خط محور عرضها را در نقطه ۱ قطع کرده است. $۳+m=۱\Rightarrow m=-۲$

✸سه خط زمانی با هم تشکیل مثلث می دهند که دو به دو با هم موازی نباشند یعنی شیب هیچ دو تایی از آنها برابر نباشد .

مثال) دو خط $y+۲x-۱=۰$ و $۲y-x+۵=۰$ با کدام یک از خط های زیر تشکیل یک مثلث می دهند؟

۱) $۳y+۷=-۶x$ ۲) $y=\frac{x}{۲}-۳$ ۳) $۲x-۹=۲y$ ۴) $x-۲y=۸$

حل) با توجه به نکته بالا شیب های دوخط در صورت مساله و خطهای موجود در گزینه ها را پیدا می کنیم شیب هر کدام از خط های موجود در گزینه هاکه با هیچ کدام از شیب های دو خط مساوی نشود همان گزینه جواب است.

✸هر خط راستی محورهای مختصات را در طول از مبدا و عرض از مبدا قطع می کند.برای پیدا کردن طول از مبدا در معادله خط به جای y عددصفر قرار داده ومقدار x را پیدا می کنیم و برای عرض ازمبدا در معادله خط به جای x عدد صفر قرار داده و مقدار y را پیدا می کنیم.

مثال : محل برخورد خط $۳y-۲x=۴$ را پیدا کنید.

محل برخورد خط با محور عرضها $y=\frac{۴}{۳}\Leftarrow ۳y=۴\Leftarrow ۳y-۲\times ۰=۴\Leftarrow ۳y-۲x=۴\Leftarrow$ به جای x صفر قرار می دهیم

محل برخورد خط با محورطولها $\Rightarrow 3y-2x=4 \Rightarrow 3\times 0-2x=4 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2}=2$ *به جای y صفر قرار می دهیم*

❋**معادله خطی که از نقاط** $A=\begin{bmatrix}p\\0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0\\q\end{bmatrix}$ می گذرد (یعنی طول از مبدا و عرض از مبدا آن معلوم است) برابر است با:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

مثال: *معادله خطی که از نقاط* $A=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ *و* $B=\begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix}$ *می گذرد را بنویسید.* $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{-5}=1$

خط $ax+by=c$ **موازی محور طول ها** (x ها) است اگر $a=0$ باشد.

خط $ax+by=c$ **موازی محور عرضها** (y ها)است اگر $b=0$ باشد.

خط $ax+by=c$ **از مبدا می گذرد** اگر $c=0$ باشد.

❋نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}$ نسبت به خط $ax+by+c=0$ (باید ضریب y یعنی b مثبت باشد.) سه حالت مختلف دارد که عبارتند از:

۱- نقطه‌ی A **بالای خط** قرار دارد. $am+bn+c>0 \Rightarrow$

۲- نقطه‌ی A **روی خط** قرار دارد. $am+bn+c=0 \Rightarrow$

۳- نقطه‌ی A **زیر خط** قرار دارد. $am+bn+c<0 \Rightarrow$

مثال: *نقطه* $A=\begin{bmatrix}35\\91\end{bmatrix}$ *نسبت به دو خط* $l: y=3x-21$ و $d: 11y-30x+39=0$ *چه موقعیتی دارد؟*

۱) بالای هر دو خط *۲) بالای l وپایین d* *۳) پایین l و بالای d* *۴) پایین هر دوخط*

$l: y=3x-21 \Rightarrow -3x+y+21=0 \Rightarrow -3\times 35+91+21=+7>0 \Rightarrow$ *بالای خط* l

$d: 11y-30x+39=0 \Rightarrow 11\times 91-30\times 35+39=-10<0 \Rightarrow$ *پایین خط* d

---

❋**شرط موازی بودن دو خط** $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ (یعنی اصلا جواب نداشته باشند) آنست که : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

❋**شرط منطبق شدن دو خط** $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ (یعنی بی شمار جواب داشته باشد)آنست که : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

شرط متقاطع بودن دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ (یعنی یک جواب داشته باشد) آنست که : $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

شرط عمود بودن دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ آنست که : $aa'+bb'=0$

مثال: دو خط $3x+2y+6=0$ و $2x-3y-6=0$ نسبت به هم چه وضعی دارند و به طور مشترک از کدام نواحی دستگاه مختصات می گذرند؟

۱) موازی–ناحیه او۲　　۲) عمود–ناحیه ۲و۳　　۳)موازی–ناحیه ۳و۴　　۴) عمود –ناحیه۳و۴

حل) چون در رابطه $aa'+bb'=0$ ضرایب صدق می کند داریم : $aa'+bb'=0 \Rightarrow 3\times2+2\times(-3)=0$ پس بر هم عمودند.

برای اینکه بفهمیم از کدام ناحیه به طور مشترک می گذرند باید شیب و عرض از مبدا خطها را پیدا کنیم که در نتیجه هر دو خط از ناحیه های سوم و چهارم می گذرند.

برای پیدا کردن قرینه‌ی هر خط نسبت به هرمورد(نیمساز ربع اول وسوم،نیمساز ربع دوم وچهارم،مبدا مختصات و . . .)ابتدا قرینه‌ی نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ را نسبت به آن مورد حساب کرده تا به نقطه‌ی $A'=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ برسیم .سپس در معادله خط به جای x و y مقادیر x' و y' را قرار می دهیم.

مثال : قرینه‌ی خط $x+2y=3$ را یک بار نسبت به مبدا مختصات و بار دیگر نسبت به نیمساز ربع دوم وچهارم حساب کنید.

چون قرینه نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نسبت به مبدا $\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$ می شود پس معادله قرینه خط نسبت به مبدا می شود: $x+2y=3 \Rightarrow -x-2y=3$

چون قرینه نقطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز ربع دوم وچهارم $\begin{bmatrix}-y\\-x\end{bmatrix}$ می شود پس معادله قرینه خط می شود: $-y-2x=3$

تذکر مهم : اگر **قرینه‌ی** شکلی را نسبت به خط یا نقطه ای به دست آوریم **مساحت ومحیط** شکل **تغییر نمی کند** .

مساحت مثلث محصور بین خط و محورهای مختصات برابر است با:

$$S=\frac{\left|\text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا}\right|}{2}$$

مثال: مساحت مثلثی که حاصل از برخورد خط $\frac{x}{1395}+\frac{y}{1394}=1$ با محور های مختصات صورت می گیرد چیست؟

چون طول از مبدا خط ۱۳۹۵ و عرض از مبدا خط ۱۳۹۴ است داریم $\frac{1395\times1394}{2}=$ $S=\frac{\left|\text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا}\right|}{2}$

مثال) چند خط از نقطه $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$ می گذرند وبا محورهای مختصات مثلثی به مساحت ۱۵ واحد می سازند؟

با توجه به صورت سوال، طول از مبدا خط یا خطوط برابر ۳- می باشد پس عرض مبدا خط یا خطوط را m می گیریم داریم:

$$S = \frac{\left| \text{طول از مبدا} \times \text{عرض از مبدا} \right|}{۲} \Rightarrow ۱۵ = \frac{|۳ \times m|}{۲} \Rightarrow |۳m| = ۳۰ \Rightarrow |m| = ۱۰ \Rightarrow m = \pm ۱۰$$

پس با توجه به پیدا شدن دو مقدار برای m دو خط می گذرد.

✸فاصله‌ی نقطه $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ از خط $ax + by + c = ۰$ برابر است با :

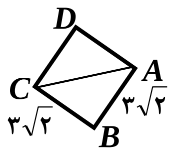
$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

مثال: یک ضلع مربعی بر خط $y = x + ۲$ واقع است. و $A = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ یک راس آن است که روی این خط نیست قطر مربع کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$		۲) ۶		۳) $۲\sqrt{۲}$		۴) ۴

حل) ابتدا فاصله نقطه A را از خط $y = x + ۲$ به دست می آوریم :

$$y = x + ۲ \Rightarrow y - x - ۲ = ۰$$



$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱ - ۳ - ۲|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{|-۶|}{\sqrt{۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = \frac{۶\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$$ ضلع مربع

پس ضلع مربع به کمک رابطه فیثاغورس برابر است با:

$$AC^۲ = (۳\sqrt{۲})^۲ + (۳\sqrt{۲})^۲ = ۱۸ + ۱۸ = ۳۶ \Rightarrow AC = \sqrt{۳۶} = ۶$$

✸ فاصله‌ی دو خط موازی $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ برابر است با :

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

مثال: فاصله دو خط موازی $۸x + ۶y + ۴ = ۰$ و $۴x + ۳y - ۱۹ = ۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۱}{۵}$		۲) $\frac{۵}{۲۱}$		۳) $\frac{۹۹}{۲۱}$		۴) $\frac{۲۱}{۹۹}$

حل) چون باید ضرایب x, y باید با هم برابر باشد ابتدا ضرایب معادله اول را بر ۲ تقسیم می کنیم:

$$۸x + ۶y + ۴ = ۰ \Rightarrow ۴x + ۳y + ۲ = ۰$$

اکنون داریم:
$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|۲-(-۱۹)|}{\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}}=\frac{۲+۱۹}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۲۱}{۵}$$

تذکر: البته می توان با پیدا کردن فاصله یک نقطه دلخواه از یکی از خط ها از خط دوم نیز سوال را حل کرد.

❋ اگر دو خط به معادله های $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ داشته باشیم خطی از مبدا مختصات کوتاه ترین فاصله را دارد که قدر مطلق عدد ثابت آن یعنی $|c|$ یا $|c'|$ صفر یا کوچک تر از بقیه باشد.(دقت کنید ضرایب x با هم و y باهم در دو معادله باید مساوی باشد.)

مثال: کدام خط زیر کمترین فاصله را از مبدا مختصات دارد؟

۱) $x+y-۲=۰$	۲) $x+y-\sqrt{۲}=۰$	۳) $x+y+\sqrt{۲}=۰$	۴) $x+y+۱=۰$

حل) خط گزینه ۱ زیرا قدر مطلق عدد ثابت آن یعنی $۲-$ از بقیه بزرگتر است.

❋دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ سه حالت مختلف می تواند داشته باشد:

۱- اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد دو خط **برهم منطبق** هستند و دستگاه **بی شمار جواب** دارد.

۲- اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد دو خط با هم **موازیند** و دستگاه **جواب ندارد.**

مثال) شرط آنکه دستگاه $\begin{cases} (۲a-۱)x+۳y-۲=۰ \\ ۵y-ax=۰ \end{cases}$ جواب نداشته باشد آنست که:

۱) $a=\frac{۱۳}{۵}$	۲) $۲a^{۲}-a+۱۵=۰$	۳) $۲a^{۲}-a+۱۵=۰$	۴) $a=\frac{۵}{۱۳}$

حل) طبق نکته بالا داریم :
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\Rightarrow\frac{۲a-۱}{-a}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow ۱۰a-۵=-۳a\Rightarrow ۱۳a=۵\Rightarrow a=\frac{۵}{۱۳}$$

۳- اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ باشد دو خط **متقاطعند** و دستگاه **یک جواب** دارد.

مثال: دستگاه $\begin{cases} ۳x+۲m=۷ \\ mx+۶y=۱۰ \end{cases}$ به ازای چه مقداری از m دارای جواب نیست؟

۱) $m=۳$	۲) $m=-۳$	۳) $m=\pm۳$	۴) $m=۶$

حل) دو خط باید موازی باشند در نتیجه داریم:
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\Rightarrow \frac{3}{m}=\frac{2m}{6}\Rightarrow 2m^2=18\Rightarrow m^2=9\Rightarrow m=\pm 3$$

مثال: اگر دستگاه $\begin{cases}2x+5y=12\\ 2mx+3ny=x+2y+6\end{cases}$ دارای بی شمار جواب باشد مقدار $n-m$ چقدر است؟

حل) چون دستگاه بی شمار جدول دارد داریم

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\Rightarrow \frac{2}{2m-1}=\frac{5}{3n-2}=\frac{12}{6}=2\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{2m-1}=2\Rightarrow 4m-2=2\Rightarrow 4m=4\Rightarrow m=1\\ \dfrac{5}{3n-2}=2\Rightarrow 6n-4=5\Rightarrow 6n=9\Rightarrow n=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$$n-m=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

✱اگر در یک دستگاه نسبت ها برابر باشند همه را مساوی k فرض کرده و همه مجهول ها را برحسب k به دست آورده و در رابطه‌ی داده شده جایگذاری می کنیم تا مقدار k به دست آید سپس مجهو لات را به دست می آوریم.

مثال: دستگاه مقابل را حل کنید.
$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}\\ x-2y+z=30\end{cases}$$

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}=k\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{5}=k\Rightarrow x+1=5k\Rightarrow x=5k-1 \quad (1)\\ \dfrac{y}{3}=k\Rightarrow y=3k \quad (2)\\ \dfrac{z-1}{2}=k\Rightarrow z-1=2k\Rightarrow z=2k+1 \quad (3)\end{cases}$$

$$x-2y+z=30\Rightarrow 5k-1-2\times 3k+2k+1=30\Rightarrow 5k-6k+2k=30\Rightarrow k=30$$

اکنون مقدار k در معادلات او۲و۳ قرار داده ومقدار x,y,z به دست می آوریم

$x=5k-1=5\times 30-1=149$ و $y=3k=3\times 30=90$ و $z=2\times 30+1=61$

تذکر مهم : در بعضی از مسائل می توان از مجهول معاون (کمکی)نیز استفاده کرد.

مثال: دستگاه مقابل را حل کنید.
$$\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=4\\ \dfrac{14}{x}-\dfrac{3}{y}=2\end{cases}$$

حل: در این دستگاه $\frac{1}{x}$ را مساوی A و $\frac{1}{y}$ را مساوی B می گیریم و سپس دستگاه جدید را حل می کنیم

$$\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{5}{y}=4\\ \frac{14}{x}-\frac{3}{y}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6A+5B=4\\ 14A-3B=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}18A+15B=12\\ 70A-15B=10\end{cases}$$

$$88A=22\Rightarrow A=\frac{22}{88}=\frac{1}{4}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=4$$

$$18\times\frac{1}{4}+15B=12\Rightarrow 15B=12-\frac{18}{4}=\frac{48-18}{4}=\frac{30}{4}\Rightarrow B=\frac{30}{4}\div 15=\frac{30}{4}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{2}=\frac{1}{y}\Rightarrow y=2$$

مساله: در یک امتحان تستی با ۲۰ سوال هرجواب صحیح ۷نمره مثبت و هر جواب غلط ۲ نمره منفی دارد(به سوالهای بدون جواب هیچ نمره ای تعلق نمی گیرد)اگر نمره‌ی دانش آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش آموز به چند سوال جواب نداده است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۳

تعداد سوال های بدون جواب $=z$ تعداد جواب های غلط $=y$ تعداد جوابهای صحیح $=x$

$$\begin{cases}7x-2y=87\\ x+y+z=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-2y=87\\ -7x-7y-7z=-140\end{cases}$$

$$-9y-7z=-53\Rightarrow 9y+7z=53$$

در بین گزینه ها تنها مقداری که به جای z می توان قرار داد فقط گزینه ۱ می باشد پس $z=5$ وداریم:

$$9y+7\times 5=53\Rightarrow 9y=53-35=18\Rightarrow y=2$$

عبارت های گـــــــــــویا

عبارت گویا: عبارتی است که درآن، عبارت صورت ومخرج ،چند جمله ای می باشندومخرج صفر نباشد.

مثال: عبارت های $\frac{3x-1}{7x^2+4x+1}$ و $\frac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{5}}$ گویا هستند. اما عبارت های $\frac{3\sqrt{x}+1}{4x^2+1}$ و $\frac{\sqrt{x^2}+1}{x}$ گویا نیستند.

تذکر: عبارت های $\sqrt[3]{x^3}$ و $|x-x|$ و $\frac{1}{\frac{1}{x}}$ گویا نیستند اما اگر در سوال گفته باشد آیا بعد از ساده شدن گویا هستند؟ جواب بله خواهد بود.

نکته: برای پیدا کردن مجموعه مقادیری که به ازای آنها برای متغیر عبارت داده شده،عبارت تعریف شده باشد((دامنه تعریف)) باید اگر عبارت کسری بود مخرج عبارت صفر نباشد و همچنین اگر عبارت رادیکالی با فرجه زوج بود زیر رادیکال منفی نباشد.

مثال: عبارت $\frac{x-1}{x^2-1}$ *به ازای چه مقادیری از متغیر* x *تعریف شده است؟*

حل) مخرج باید صفر نشود. $x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{matrix} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{matrix}$

پس عبارت به ازای تمام اعداد حقیقی به جز ۱و ۱- تعریف شده است. یعنی: $R-\{1,-1\}$

مثال: عبارت $\frac{x+3}{\sqrt{x-2}}$ *به ازای چه مقادیری از متغیر* x *تعریف شده است؟*

حل) مخرج باید صفر نشود ومنفی نیز نشود زیرا رادیکال با فرجه زوج است. $x-2>0 \Rightarrow x>2$ *یعنی با ازای تمام اعداد حقیقی بزرگتر از۲ تعریف شده است.*

تذکر۱: عبارت های گویایی هم هستند که هیچگاه مخرج آنها صفر نمی شود بنابراین دامنه تعریف این عبارت ها اعداد حقیقی می باشد.

مثال: عبارت گویای $\frac{5x}{x^2+1}$ *مخرجش هیچ گاه صفر نمی شود زیرا مخرج آن همیشه مثبت است پس به ازای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است.*

تذکر۲: تا قبل از تعیین دامنه اجازه ساده کردن عبارت جبری را نداریم.

نکته: هر گاه یک عبارت از مجموع یا تفاضل چند عبارت گویا تشکیل شده باشد طوری که دامنه تعریف آنها به صورت بازه باشد برای تعیین دامنه تعریف کل عبارت باید اشتراک آن بازه ها را حساب کنیم.

مثال:

نکته: برای ساده کردن عبارت های گویا ابتدا صورت ومخرج آن را تا حد امکان تجزیه کرده سپس عامل های مشترک را با یکدیگر ساده می کنیم.

مثال: عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{4x^2+6x+9}{8x^3-27}=\frac{4x^2+6x+9}{(2x-3)(4x^2+6x+9)}=\frac{1}{2x-3}$

ب) $\frac{۹x^{۲}+x-۳x^{۳}-۳}{۳x^{۲}-۱}=\frac{(۹x^{۲}-۳x^{۳})+(x-۳)}{۳x^{۲}-۱}=\frac{۳x^{۲}(۳-x)+(x-۳)}{۳x^{۲}-۱}=\frac{(۳-x)(۳x^{۲}-۱)}{۳x^{۲}-۱}=۳-x$

نکته: در جمع وتفریق عبارت های گویا، پس از تجزیه مخرج ها ،بین آنها «ک م م » گرفته و پس از هم مخرج کردن کسرها، و تغییر صورتها آنها را با هم جمع یا تفریق می کنیم.

مثال: ساده سده عبارت $\frac{۱-x}{x^{۲}+x-۲}+\frac{x+۴}{x^{۲}+۲x-۸}$ کدام است؟

الف) $\frac{۴}{x^{۲}-۴}$　　ب) $\frac{-۴}{x^{۲}-۴}$　　ج) $\frac{۲x}{x^{۲}-۴}$　　د) $\frac{-۲x}{x^{۲}-۴}$

حل)

$$\frac{x+۴}{x^{۲}+۲x-۸}+\frac{۱-x}{x^{۲}+x-۲}=\frac{x+۴}{(x+۴)(x-۲)}+\frac{۱-x}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{۱}{x-۲}-\frac{۱}{x+۲}=\frac{(x+۲)-(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۴}{x^{۲}-۴}$$

نکته برای به دست آوردن ضرایب مجهول در عبارت های گویا ،ابتدا با مخرج مشترک گیری ،مخرج دو طرف را با یکدیگر برابر کرده سپس صورتها را با یکدیگر هم ارز قرار می دهیم.(یعنی ضرایب x را با هم وضرایب $x^{۲}$ را نیز باهم ومقادیر ثابت را نیز باهم مساوی قرار می دهیم.)

مثال: اگر $\frac{۳x}{x^{۲}-۴}=\frac{B}{x^{۲}-۴}+\frac{A}{x-۲}$ باشد آنگاه مقدار B کدام است؟ $x\neq\pm۲$

۱) -۶　　۲) ۴　　۳) ۶　　۴) -۴

حل)

$$\frac{A}{x-۲}+\frac{B}{x^{۲}-۴}=\frac{۳x}{x^{۲}-۴}\Rightarrow\frac{A(x+۲)+B}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{Ax+۲A+B}{x^{۲}-۴}=\frac{۳x}{x^{۲}-۴}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A=۳\\ ۲A+B=۰\Rightarrow ۲\times۳+B=۰\Rightarrow B=-۶\end{cases}$$

مثال: اگر $\frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)}=\frac{C}{x+۲}+\frac{B}{x+۱}+\frac{A}{x}$ آنگاه $A+B+C$ کدام است؟ $(x\neq ۰,-۱,-۲)$

۱)صفر ✓　　۲)۱　　۳) ۲　　۴)۳

نکته: تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای به یکی از دو روش زیر انجام می شود.

روش اول: از عامل مشترک صورت فاکتور گرفته و سپس با مخرج ساده کنیم.

روش دوم: از قانون تفکیک کردن (جدا سازی) در کسرها استفاده کنیم.

مثال: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\frac{3a^2b^6-18ab^5-24a^2b^2}{3ab^2}=\frac{3a^2b^6}{3ab^2}-\frac{18ab^5}{3ab^2}-\frac{24a^2b^2}{3ab^2}=ab^4-6b^3-8a$$

نکته: برای ضرب عبارت های گویای کسری هر عبارت را تا حد امکان تجزیه و ساده می کنیم و سپس صورت را در صورت ومخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

مثال: حاصل عبارت $\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}\times\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\times\frac{x^2-9}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) $\frac{x+2}{x-2}$　　۲) $\frac{x-2}{x+2}$　　۳) $\frac{x+1}{x-1}$　　۴) $\frac{x-1}{x+1}$

حل) $\frac{x^2-9}{x^2-4}\times\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\times\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+2)}\times\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}\times\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}=\frac{x-1}{x+1}$

نکته: در تقسیم عبارت های گویا عبارت سمت چپ را در معکوس عبارت سمت راست ضرب می کنیم وسپس عبارت ها را تاحد امکان تجزیه کرده وساده می کنیم ودر آخر صورت را در صورت ومخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

نکته: در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای ، تقسیم را تا جایی ادامه می دهیم که درجه باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

مثال:

نکته: هرگاه **مقدار عددی مقسوم** را به ازای **ریشه‌ی مقسوم علیه** محاسبه کنیم **باقیمانده تقسیم** را به دست آورده ایم.

مثال: اگر عبارت x^3+5x^2+x+a بر $x+1$ بخشپذیر باشدمقدار a کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۴-　　۴) ۳-

حل) ابتدا ریشه مقسوم علیه را پیدا می کنیم $x+1=0\Rightarrow x=-1$ حال مقدار عبارت مقسوم باید به ازای $x=-1$ برابر با باقیمانده یعنی صفر باشد.پس داریم:

$$x^3+5x^2+x+a=(-1)^3+5(-1)^2+(-1)+a=0\Rightarrow a=-3$$

نکته:

۱- عبارت x^n-y^n **همواره** بر $x-y$ بخشپذیر است.

۲- عبارت x^n-y^n فقط وقتی بر $x+y$ بخشپذیر است که n **عددی زوج** باشد.

۳- عبارت $x^n + y^n$ فقط وقتی بر $x+y$ بخشپذیر است که n **عددی فرد** باشد.

نکته:

برای تعیین مقدار های یک متغیر در یک عبارت گویا به شرط آنکه آن که آن عبارت مقدارش عددی صحیح شود می توان با استفاده از اتحادها ، فاکتورگیری و یا شکستن جملات آن عبارت را به مقدارهای صحیح تبدیل کرد ودر پایان روی کسری که می ماند برحسب شمارنده های صورت کسرکه باید در مخرج باشند بحث کرد .

و یا به جای استفاده از اتحادها و فاکتورگیری و ....صورت را مستقیما بر مخرج را تقسیم کرد اگر باقیمانده صفر شد به ازای تمام مقادیر متغیر آن عبارت گویا عدد صحیح می شود.

ولی اگر باقیمانده صفر نشد باید حاصل تقسیم باقیمانده بر مقسوم علیه عددی صحیح شود. وبرای این کار باید مخرج برابر شمارنده های صورت شود.

مثال: به ازای چند مقدار طبیعی y حاصل عبارت $\frac{۵y^۲+۱۸}{y}$ مقداری صحیح است؟

۱) هیچ مقدار ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) بی شمار

حل) عبارت را به صورت $\frac{۱۸}{y}+\frac{۵y^۲}{y}$ می نویسیم .چون در عبارت اول یعنی $\frac{۵y^۲}{y}$ صورت بر مخرج بخشپذیر است .در عبارت دوم

نیز باید صورت بر مخرج بخشپذیر باشد و برای درست بودن این مطلب مخرج کسر یعنی y برابر با شمارنده های ۱۸ شود.۱و۲و۳و۶و۹و۱۸

پس تعداد مقدارهای y برابر با ۶ تا می شود.

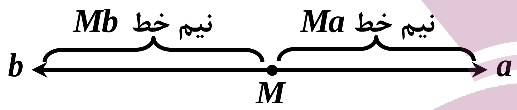
هندســــــــه

مفاهیم اولیه

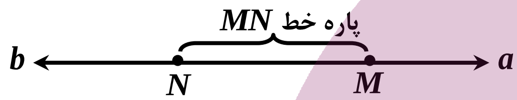
نام گذاری نقطه:نقطه را با یک حرف از حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری می کنیم .از برخورد هر دو خط یک نقطه به وجود می آید.

نامگذاری خط: خط را با دو حرف کوچک که در دوسر خط قرار می دهیم ویا با یک حرف کوچک نامگذاری می کنیم.

نامگذاری نیم خط:اگر یک نقطه روی یک خط قرار دهیم آن را به دو نیم خط تبدیل می کند که آن را با دو حرف که اولی بزرگ ودومی کوچک است نامگذاری می کنیم.



نامگذاری پاره خط:قسمتی از خط است که بین دو نقطه قرار می گیرد بنا براین آن را با دو حرف بزرگ نامگذاری می کنیم.



تعداد پاره خط ها ونیم خط ها:

اگر روی یک خط راست تعدادی نقطه متمایز(n نقطه) قرار دهیم تعداد نیم خط ها وتعداد پاره خط ها برابر است با:

چون با قرار دادن هر نقطه روی یک خط ، دو نیم خط به وجود می آید پس تعداد نیم خط ها برابر است با :

تعداد نیم خط = ۲ × تعداد نقاط = $۲n$

روش اول) چون نقطه اول با بقیه نقاط $n-۱$ پاره خط درست می کند ونقطه دوم با بقیه نقاط(غیر از نقطه اول) $n-۲$ پاره خط درست می کند و نقطه سوم با بقیه نقاط $n-۳$ پاره خط درست می کندو . . . که حاصل جمع اعداد ۱تا $n-۱$ می باشد پس داریم:

تعداد پاره خط ها $= (n-۱)+(n-۲)+(n-۳)+...+۲+۱ = \dfrac{n(n-۱)}{۲} = \dfrac{(\text{تعداد نقاط} -۱) \times \text{تعداد نقاط}}{۲}$

روش دوم با کمک اصل ضرب) چون برای هر پاره خط به دو نقطه نیاز داریم بنابراین برای انتخاب نقطه اول از بین n نقطه n حالت وجود خواهد داشت و برای انتخاب نقطه دوم $n-۱$ حالت وجود دارد پس طبق اصل ضرب برای انتخاب این دو نقطه $n(n-۱)$ حالت خواهیم داشت و چون با این روش هر دو نقطه را دو بار حساب می کنیم پس حاصل را تقسیم بر ۲ می کنیم وداریم:

تعداد پاره خط ها $= \dfrac{n(n-۱)}{۲}$

مثال: *اگر ۱۰ نقطه روی یک خط قرار دهیم چند نیم خط و چند پاره خط به وجود می آید؟*

تعداد نیم خط = ۲ × تعداد نقاط = $۲n = ۲\times ۱۰ = ۲۰$

تعداد پاره خط ها $= \dfrac{(\text{تعداد نقاط} -۱) \times \text{تعداد نقاط}}{۲} = \dfrac{۱۰\times(۱۰-۱)}{۲} = ۴۵$

مثال) چند نقطه روی یک خط قرار دهیم تا :

الف) تعداد نیم خط ها و پاره خط ها با هم برابر شود؟

ب) تا تعداد پاره خط ها دو برابر نیم خط ها شود؟

تعداد نقاط برخورد چند خط: اگر n خط در صفحه همدیگر را قطع کنند حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ نقطه برخورد خواهند داشت.(برای پیدا کردن این فرمول شبیه روش دوم پیدا کردن تعداد پاره خط ها که در چند سطر بالاتر گفتیم عمل می کنیم.)

مساله : با n نقطه که هیچ سه تای انها روی یک خط راست نیستند چند مثلث می توان مشخص کرد؟

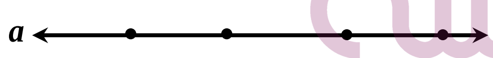
حل) برای هر مثلث سه نقطه لازم داریم با این تعداد اتنخاب های موجود از بین n نقطه به صورت زیر است:

برای انتخاب نقطه اول مثلث n حالت و برای انتخاب نقطه دوم $(n-1)$ حالت و برای انتخاب نقطه سوم $(n-2)$ حالت وجود دارد پس طبق اصل ضرب برای انتخاب هر ۳نقطه با هم $n(n-1)(n-2)$ حالت وجود خواهد داشت و چون برای هر ۳ نقطه ۶ مثلث تکراری وجود خواهد داشت پس باید تقسیم بر ۶ شود یعنی داریم:

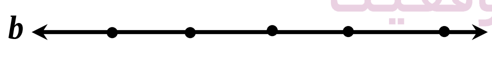
$$\text{تعداد مثلث ها} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

نکته مهم: اگر تعدادی نقطه روی یک خط و تعدادی نقطه دیگر روی خط دومی باشند وبخواهیم تعداد مثلث ها یی را که با این نقاط می توان مشخص کرد حساب کنیم .ابتدا باید تعداد پاره خط هایی را که روی هر خط وجود دارد مشخص کنیم و سپس تعداد پاره خط هایی که روی هر خط وجود دارد را در تعداد نقاطی که روی خط دیگر وجود دارد ضرب کنیم ودر آخر آنها را با هم جمع کنیم .

مثال) *تعداد مثلث هایی که با نقاط روی خط های زیر می توان مشخص کرد را مشخص کنید*



$$a \text{ تعداد پاره خط های روی خط } = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$$



$$b \text{ تعداد پاره خط های روی خط } = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{5\times 4}{2} = 10$$

$$\text{تعداد مثلث ها} = 4\times 10 + 5\times 6 = 70$$

نکته : با n خط یک صفحه را حداکثر به $\frac{n(n+1)}{2}+1$ قسمت می توان تقسیم کرد.

مثال) *به کمک ۴ خط یک صفحه را حداکثر به چند ناحیه می توان تقسیم کرد؟*

۱) ۸　　۲) ۱۱　　۳) ۹　　۴) ۱۰

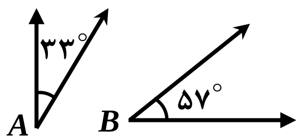
زاویـــــــــه

انواع زاویه :

۱- زاویه تند (حاده) ۲- زاویه راست (قائمه) ۳- زاویه باز(منفرجه)

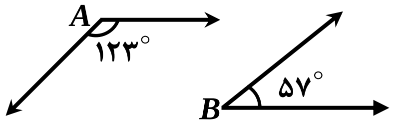
انواع دو زاویه :

۱- دو زاویه متمم: دو زاویه که مجموع اندازه آنها ۹۰ درجه باشد.



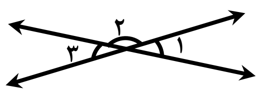
$\hat{A}+\hat{B}=۳۳+۵۷=۹۰$

۲- دو زاویه مکمل : دو زاویه که مجموع اندازه آنها ۱۸۰ درجه باشد.



$\hat{A}+\hat{B}=۱۲۳+۵۷=۱۸۰$

۳-دو زاویه متقابل به راس : دو زاویه که دارای یک راس و اضلاع آنها در امتداد هم باشد.

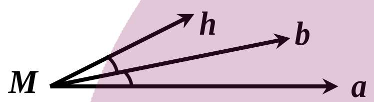


تذکر: دو زاویه متقابل به راس همیشه با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{۱}+\hat{۲}=۱۸۰^\circ\\ \hat{۲}+\hat{۳}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{۱}+\hat{۲}=\hat{۲}+\hat{۳}\Rightarrow \hat{۱}=\hat{۳}$$

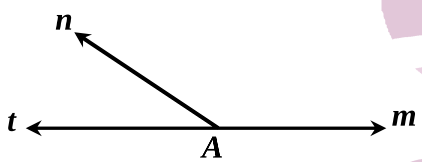
۴- دو زاویه مجاور: دو زاویه که در یک راس و یک ضلع مشترک بوده وضلع مشترک بین دو ضلع دیگر قرار داشته باشد.

دو زاویه $h\hat{M}b$ و $b\hat{M}a$ مجاورند.



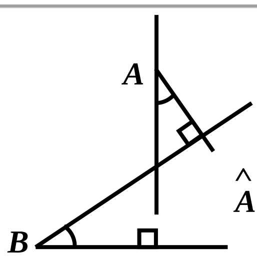
۵- دو زاویه مجانب : دو زاویه که **مجاور** بوده و مجموعشان ۱۸۰ درجه شود.

تذکر: هر دو زاویه مجانب ، مکمل هستند ولی هر دو زاویه دلخواه مکمل ، مجانب نیستند.

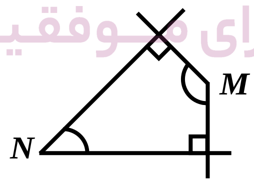


نکته: هر گاه دو ضلع از زاویه ای بر دو ضلع از زاویه‌ی دیگر **عمود** باشند

آن دو زاویه یا با هم برابرند ویا با هم مکملند.



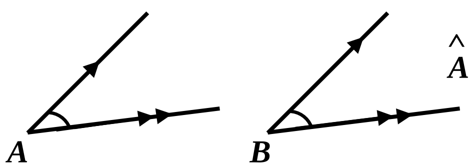
$\hat{A}=\hat{B}$



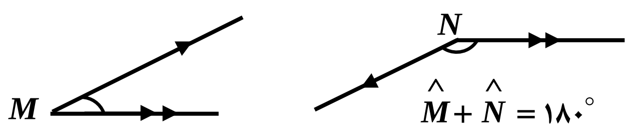
$\hat{M}+\hat{N}=۱۸۰^\circ$

نکته: هرگاه دو ضلع از زاویه ای با دو ضلع از زاویه‌ی دیگر **موازی** باشند

آن دو زاویه یا با هم مساویند و یا با هم مکملند.



$\hat{A}=\hat{B}$



اگر از یک نقطه n نیم خط رسم کنیم تعداد زاویه های محدب پدید آمده برابر است با: $\dfrac{n(n-۱)}{۲}$

زاویه بین عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار ساعت:

۱- عقربه دقیقه شمار در هر دقیقه ۶ درجه نسبت به وضعیت قبلی خود جابجا می شود. ۶ = ۶۰ ÷ ۳۶۰

۲- عقربه ساعت شمار در هر دقیقه ۰/۵ درجه نسبت به وضعیت قبلی خود جابجا می شود. ۰/۵ = ۶۰ ÷ ۳۰ ⇐ ۳۰ = ۱۲ ÷ ۳۶۰

۳- اختلاف زاویه بین عقربه دقیقه شمار وساعت شماردر هر دقیقه ۵/۵ درجه است.

۴- در ساعت $(h : m')$ زاویه بین عقربه ساعت شمار ودقیقه شمار از فرمول $|30h - 5/5m|$ به دست می آید.

۵- در صورتیکه این زاویه از ۱۸۰ درجه بیشتر شد آن را از ۳۶۰ درجه کم می کنیم.

۶- در هر ۱۲ ساعت دو عقربه ۱۱ بار روی هم منطبق می شوند.

۷- زمان بین دو انطباق متوالی ۶۵ دقیقه و۲۷ ثانیه است.

انواع استـــــــــدلال

۱-شهودی ۲- تمثیلی ۳- استقرائی ۴- استنتاجی ۵- مثال نقض

استدلال شهودی : استدلال شهودی مبتنی بردرک شهودی است .وبه نوعی درک بدون استدلال است وبه وسیله ی حواس پنج گانه انجام می شود

استدلال تمثیلی : تایید صحت یک اصل ، موضوع یایک خبری بااستفاده ازمثال

به عبارت دیگر: یافتن نوعی تشابه بین مفاهیم گوناگون وارائه تناسب موضوعات جهت نشان دادن نتایج

به طورکلی منظورازاستدلال تمثیلی یعنی اثبات یک حکم بااستفاده ازمثال ومشابه سازی موضوع

استدلال استقرائی : روش نتیجه گیری کلی برمبنای مجموعه ی محدودی ازمشاهدات است ودراستدلال استقرایی ازجزء به کل می رسیم.به عبارت دیگر: دراستدلال استقرائی ، بااستفاده ازانجام آزمایش ومشاهده ی تعدادمحدودی ازمشاهدات ، نتیجه گیری کلی می کنیم .

هراستدلالی که برپایه تجربه باشد استقرائی است.

استقراء ریاضی یک نمونه ازاستدلال استقرائی است نه همه ی آن.

دانشمندان علوم تجربی به روش استقراء نتیجه گیری می نمودند یعنی چندبارآزمایش می نمودندوپس ازبررسی آن رابه عنوان نتیجه کلی عنوان می نمودند.

استدلال استقرائی درصورتی عمومیت دارد وقابل استناد است که نمونه ای نادرست برای آن یافت نشود.

دراستدلال استقرائی ازیک حکم جزئی یک نتیجه ی کلی می گیریم ودرواقع ازجزء به کل می رسیم.

استدلال استنتاجی : روش نتیجه گیری بااستفاده ازحقایقی است که درستی آن هاراقبلا پذیرفته ایم.

بهترین ومحکم ترین روش استدلال ، استدلال استنتاجی است .

دراثبات ارائه شده بااستدلال استنتاجی مثالی وجودندارد که نقض کننده موضوع باشد.

مثال نقض: مثال زدن برای رد کردن یک حکم ریاضی است.

انواع چند ضلعی:

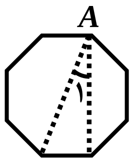
۱) **چند ضلعی محدب:** چند ضلعی که اندازه هر زاویه آن از ۱۸۰ درجه کمتر باشد. یا پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه آن را به هم وصل می کند کاملاًداخل چند ضلعی قرار گیرد.

چند ضلعی منتظم : چند ضلعی که همه اضلاعش با هم برابر باشند و همه زاویه هایش نیز با هم برابر باشند.

مثال: **مثلث متساوی الاضلاع** سه ضلعی منتظم و **مربع** چهار ضلعی منتظم است.

نکته: اندازه هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر است با : $\dfrac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$

نکته: اندازه هر زاویه خارجی n ضلعی منتظم برابر است با : $\dfrac{۳۶۰}{n}$

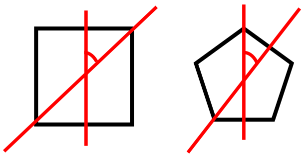


نکته: هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم با هر زاویه خارجی آن **مکمل** می شود.

نکته: اندازه زاویه بین دو قطر متوالی رسم شده از یک راس n ضلعی منتظم برابر است با: $\dfrac{۱۸۰}{n}$

مثال) در ۸ ضلعی منتظم مقابل زاویه بین دوقطر متوالی رسم شده ازراس A چند درجه است؟

حل) $\hat{A}_۱ = \dfrac{۱۸۰}{۸} = ۲۲/۵^\circ$



نکته: اندازه زاویه‌ی بین دو محور تقارن متوالی از یک چند ضلعی منتظم برابر است با : $\dfrac{۱۸۰}{n}$

۲- چند ضلعی مقعر: چند ضلعی که حداقل یک زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه داشته باشد.و یا پاره خطی که هر دو نقطه دلخواه آن را به هم وصل می کند کامل داخل چند ضلعی قرار نگیرد.

مجموع زاویه های داخلی هر چند ضلعی برابر است با : $(n-۲)\times ۱۸۰ = $ ۱۸۰ × (۲-تعداد اضلاع)

مثال: مجموع زوایای داخلی یک چند ضلعی به جز یکی از آنها ۲۷۵۰ درجه است اندازه زاویه حذف شده کدام است؟

۱) ۱۳۰　　۲) ۵۰　　۳) ۱۲۰　　۴) ۹۰

حل) چون مجموع زاویه های داخلی هر nضلعی باید مضربی از ۱۸۰ باشد با تقسیم ۲۷۵۰ بر ۱۸۰ و یافتن مکمل باقی مانده آن زاویه مورد نظر به دست میآید. و چون باقیمانده تقسیم $۲۷۵۰ \div ۱۸۰$ برابر ۵۰ می شود پس $۱۸۰-۵۰=۱۳۰$(زاویه حذف شده)

زاویه خارجی چند ضلعی محدب : زاویه ایست که از امتداد یک ضلع با ضلع دیگر به دست می آید .

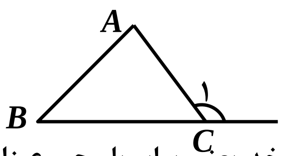
مجموع هر زاویه داخلی چند ضلعی با زاویه خارجی مجاورش ۱۸۰ درجه می شود.

مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب دلخواه ۳۶۰ درجه می شود.

مثال: اندازه یک زاویه داخلی در nضلعی منتظمی ۶ برابر یک زاویه خارجی آن است این شکل چند ضلعی است؟

۱) ۸　　۲) ۱۰　　۳) ۱۴　　۴) ۱۵

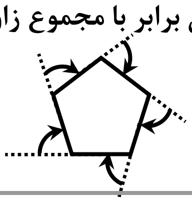
$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n} = ۶\times\frac{۳۶۰}{n} \Rightarrow (n-۲)\times ۱۸۰ = ۶\times ۳۶۰ \Rightarrow ۱۸۰n - ۳۶۰ = ۲۱۶۰ \Rightarrow ۱۸۰n = ۲۱۶۰+۳۶۰ = ۲۵۲۰ \Rightarrow$$
$$n = \frac{۲۵۲۰}{۱۸۰} = ۱۴$$



نکته: در هر مثلث اندازه هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش برابر است.

$$\hat{C}_۱ = \hat{A} + \hat{B}$$

هر متحرکی که **محیط** یک چند ضلعی محدب را طی کند(یک دور کامل بزند) به اندازه ۳۶۰ درجه می چرخد یعنی برابر با مجموع زاویه های خارجی چند ضلعی محدب.



نکته: از هر راس یک n ضلعی محدب $n-۳$ قطر می گذرد بنابراین تعداد کل قطرهای یک n ضلعی محدب برابر است با:
$$\frac{n(n-۳)}{۲}$$

مثال: تعداد قطر های یک چند ضلعی محدب ۲۰ تا است.از هر راس این چند ضلعی چند تا قطر می گذرد؟

نکته: بیشترین تعداد **زاویه قائمه** در یک nضلعی که بیشتر از ۴ ضلع داشته باشد فقط ۳تا می تواند باشد زیرا در غیر اینصورت مجموع زاویه های خارجی آن بیشتر از ۳۶۰ درجه می شود.

نکته مهم : هر n ضلعی محدب حداکثر **سه زاویه حاده (تند)** می تواند داشته باشد.

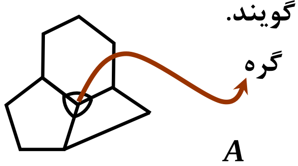
مثال: در یک ۱۳۹۳ ضلعی محدب حداکثر چند زاویه داخلی تند می تواند وجود داشته باشد؟

۱) ۱۳۹۲   ۲) ۸۵   ۳) ۳   ۴)۱۳

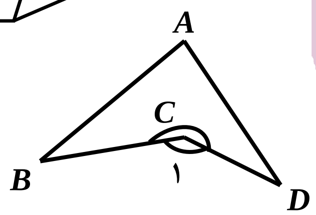
حل) حداکثر ۳ تا

کا شیکاری: قرار دادن چند ضلعیها در کنار هم طوری که روی هم نیفتند وفضای خالی نیز بین آنها نباشد را کاشیکاری می گویند.

گره :به رأسی که در آن مجموع زاویه های چند ضلعیهادر موقع کاشیکاری ۳۶۰ درجه می شود گره می گویند.



نکته: در هر چهار ضلعی مقعر مانند $ABCD$داریم : $\hat{C}_۱ = \hat{A}+\hat{B}+\hat{D}$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}+\hat{C}_۱ = ۳۶۰ \\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = ۳۶۰\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}+\hat{C}_۱ = \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{A}+\hat{B}+\hat{D}$$

تبدیل های هندسی

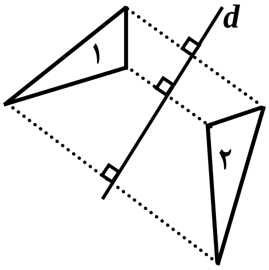
۱- انتقال: هرگاه شکلی را فقط با جابجا کردن وبدون تغییر جهت بتوان از نقطه ای در صفحه به نقطه‌ای دیگر در صفحه برد می گوییم انتقال انجام داده ایم.

۲- تقارن: هرگاه شکلی را حول خطی تا بزنیم طوری که آن شکل روی شکل دیگر **منطبق** شود می گوییم تبدیل تقارن انجام داده ایم.

۳- دوران: هرگاه شکلی را حول نقطه‌ای طوری بچرخانیم که آن شکل بر شکل دیگری **منطبق** شود می گوییم تبدیل دوران انجام داده ایم.

دو شکل هم نهشت(مساوی) : هرگاه بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال، تقارن ،د وران)در صفحه، **بر شکل دیگر منطبق کنیم می گوییم این دو شکل با هم ،هم نهشت یا مساویند.**

در دو شکل هندسی هم نهشت اجزای متناظر(زاویه ها و ضلع ها) دو به دو با هم برابرند.



محور تقارن: خطی است که قرینه‌ی هر نقطه شکل نسبت به آن نقطه دیگری از شکل است.
ویا خطی است که اگر شکل را روی آن تا بزنیم تمام نقاط شکل روی همدیگر قرا گیرند.

تذکر: برای پیدا کردن قرینه‌ی یک شکل نسبت به یک خط باید ازنقاط آن شکل بر خط **عمود** کرده وسپس به همان اندازه امتداد دهیم.

در شکل مقابل روش انجام این کار را برای پیدا کردن قرینه مثلث ۱می بینید.

نکته:

۱- بعضی از شکلها محورتقارن ندارند مانند متوازی الاضلاع ،ذوزنقه قائم الزاویه

۲- بعضی از شکلها یک محور تقارن دارند مانند مثلث متساوی الساقین ، ذوزنقه متساوی الساقین.

۳- بعضی از شکلها چندین محور تقارن دارند.مانند مثلث متساوی الاضلاع(۳محور)، مربع(۴محور) ،

مرکز تقارن : نقطه ای است که قرینه هر نقطه شکل نسبت به آن، نقطه‌ی دیگری از شکل می شود. یا نقطه ای است که اگر شکل را ۱۸۰ درجه حول آن دوران دهیم شکل برخودش منطبق شود.

نکته : بعضی از شکلها مرکز تقارن ندارند مانند مثلث ، ذوزنقه

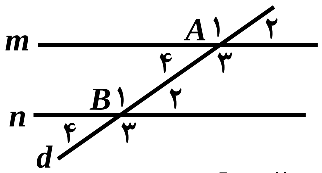
نکته: هر شکلی که **دو محور تقارن عمود برهم** داشته باشد حتما مرکز تقارن دارد.

نکته: هر nضلعی منتظم n **محور تقارن** دارد

نکته: هر nضلعی منتظم به شرط آنکه n **زوج** باشد **مرکز تقارن** دارد.

خط های موازی ومورب

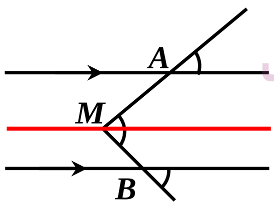
قضیه خطوط موازی ومورب: هرگاه دو خط موازی را خطی قطع کند ۸ زاویه به وجود می آید که چهار تای آنها تند و با هم مساوی و چهارتای آنها باز و با هم مساویند.



$d, m \parallel n \Rightarrow$ مورب $\hat{A}_1 = \hat{A}_3 = \hat{B}_1 = \hat{B}_3$

$\hat{A}_2 = \hat{A}_4 = \hat{B}_2 = \hat{B}_4$

نکته مهم: هر **دو زاویه تند وباز** تشکیل شده در خط های موازی ومورب با هم **مکملند**.



نکته: در شکل مقابل همواره داریم: $\hat{M} = \hat{A} + \hat{B}$

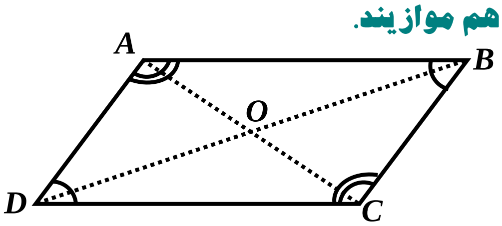
اثبات: از نقطه M خطی موازی با دو خط موازی دیگر رسم می کنیم و از قضیه خطوط موازی ومورب کمک می گیریم.

نکته:*۱- فاصله‌ی دوخط موازی همواره ثابت است . ۲-دو خط عمود بریک خط ، با هم موازیند.*

چهار ضلعی ها

الف) متوازی الاضلاع: چهار ضلعی است که اضلاع رو به روی آن دو به دو با هم موازیند.

خاصیت های متوازی الاضلاع:



۱-زاویه های روبه رو دو به دو با هم برابرند. $\hat{A} = \hat{C}$ و $\hat{B} = \hat{D}$

۲-اضلاع رو به رو با هم برابرند. $AB = DC$ و $AD = BC$

۳- دو زاویه مجاور هر ضلع مکمل یکدیگرند. $\hat{A}+\hat{B}=180$ و $\hat{B}+\hat{C}=180$ و $\hat{C}+\hat{D}=180$ و $\hat{D}+\hat{A}=180$

۴- قطرها همدیگر را نصف می کنند. $AO=OC$ و $BO=DO$

نکته مهم: در هر متوازی الاضلاع(مربع مستطیل ولوزی) مجموع مربعهای چهار ضلع با مجموع مربع های دو قطر برابر است. یعنی:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$$

مستطیل : متوازی الاضلاعی که همه زاویه هایش با هم برابرند(قائمه اند)

خاصیت های مستطیل :

چون مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خاصیت های متوازی الاضلاع را دارد وعلاوه برآن خاصیت زیر را نیز دارد.

۱- در هر مستطیل دو قط با هم برابرند.

لوزی: متوازی الاضلاعی که چهار ضلع آن با هم برابرند.

خاصیت های لوزی:

چون لوزی نوعی متوازی الاضلاع است پس تمام خاصیت های متوازی الاضلاع را دارد وعلاوه برآن خاصیتهای زیر را نیز دارد.

۱-درلوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند.

۲-در لوزی قطرها نیمساز زوایای مقابلشان هستند.

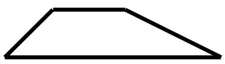
۳- درلوزی هر قطر محور تقارن آن است.

مربع: متوازی الاضلاعی که ۴ ضلع برابر و۴ زاویه قائمه دارد.

خاصیت های مربع:

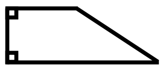
چون مربع نوعی متوازی الاضلاع ،مستطیل و لوزی است تمام خاصیت های آنها رانیز دارد.

ذوزنقه: چهار ضلعی که فقط دو ضلع آن با هم موازیند. به دو ضلع موازی آن قاعده کوچک وقاعده بزرگ می گوییم وبه دو ضلع دیگر آن ساق می گوییم.



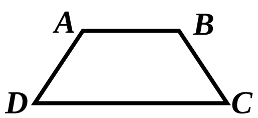
سه نوع ذوزنقه داریم: ۱- ذوزنقه مختلف الاضلاع که ساق هایش با هم برابر نیستند.

۲- ذوزنقه قائم الزاویه که یکی از ساق هایش بر دو قاعده عمود است.



۳- ذوزنقه متساوی الساقین که دو ساقش با هم برابرند.

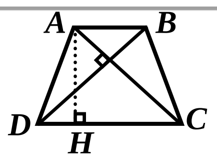
خاصیت های ذوزنقه:



۱- در هر ذوزنقه دو زاویه مجاور هر ساق (دقت کنید فقط مجاورهرساق) مکمل یکدیگرند.

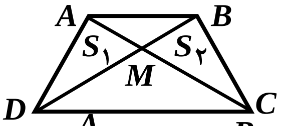
$\hat{B}+\hat{C}=180$ $\hat{A}+\hat{D}=180$

نکته: در ذوزنقه های متساوی الساقین و قائم الزاویه اگر قطرها برهم عمود باشند آنگاه:



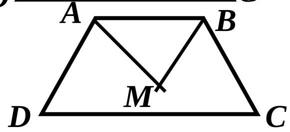
مجذور ارتفاع ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب دو قاعده . $AC\perp BD \Rightarrow AH^2=AB\times CD$

نکته: در هر ذوزنقه مساحت دو مثلثی که بین ساقها ودو قطر ذوزنقه تشکیل می شود با هم برابر ند.



$$S_{\overset{\triangle}{ADM}} = S_{\overset{\triangle}{BMC}}$$

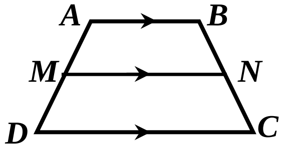
نکته: در هر ذوزنقه دلخواه زاویه بین نیمسازهای دو زاویه A و B از رابطه زیر به دست می آید.



$$\hat{M} = \frac{\hat{D}+\hat{C}}{۲}$$

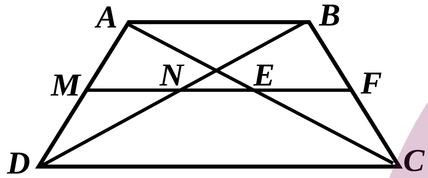
نکته : (قضیه میان خط) اگر وسط دو ساق ذوزنقه‌ای را به هم وصل کنیم پاره خط ایجاد شده موازی با دو قاعده ذوزنقه و برابر با نصف مجموع اندازه های آن دو است.

$$MN = \frac{AB+DC}{۲}$$



مثال:

نکته: اگر در یک ذوزنقه دو قطر و پاره خطی را که وسط دو ساق را به هم وصل می کند رسم کنیم داریم:

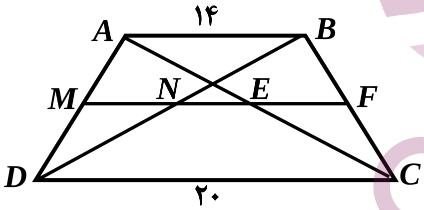


$$MF = \frac{AB+DC}{۲} \quad \text{و} \quad AB \parallel MF \parallel DC$$

$$BN = ND \quad \text{و} \quad AE = EC$$

$$MN = FE = \frac{۱}{۲}AB \quad \text{و} \quad NE = \frac{DC-AB}{۲}$$

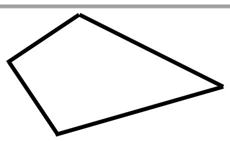
مثال: در ذوزنقه مقابل از وسط ساق های ذوزنقه MF راموازی قاعده ذوزنقه رسم می کنیم اندازه NE چقدر است؟



۱) ۵　　۲) ۴　　۳) ۳/۵　　۴) ۳

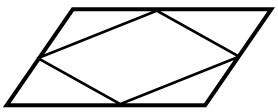
$$NE = \frac{DC-AB}{۲} = \frac{۲۰-۱۴}{۲} = ۳$$

کایت(شبه لوزی): به چهار ضلعی گفته می شود که دو ضلع مجاورش با هم و دو ضلع مجاوردیگرش نیز با هم مساوی باشند. در هر کایت قطرها برهم عمودند وفقط یکی عمود منصف دیگری است.

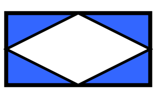


وصل کردن وسط اضلاع چهارضلعی ها

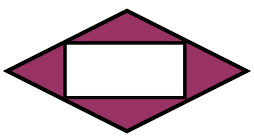
۱- اگر وسط های اضلاع یک متوازی الاضلاع را به طور متوالی به هم وصل کنیم دوباره یک **متوازی الاضلاع** پدید می آید.



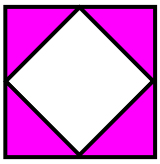
۲- اگر وسط های اضلاع یک مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم یک **لوزی** پدید می آید.



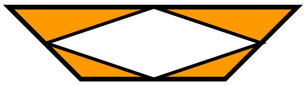
۳- اگر وسط های اضلاع یک لوزی را به طور متوالی به هم وصل کنیم



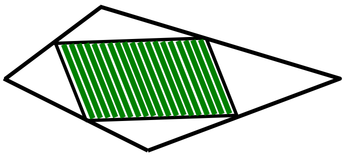
یک **مستطیل** پدید می آید.



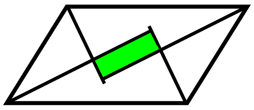
۴-اگر وسط های اضلاع یک مربع را به طور متوالی به هم وصل کنیم
یک مربع پدید می آید.



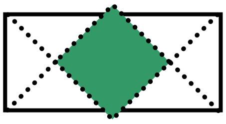
۵- اگر وسطهای اضلاع یک ذوزنقه متساوی الساقین را به هم وصل کنیم
یک لوزی پدید می آید.



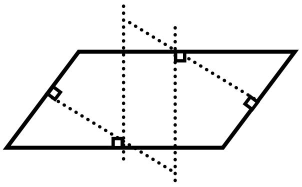
۶- اگر وسطهای اضلاع یک چهار ضلعی دلخواه را به هم وصل کنیم
یک متوازی الاضلاع می آید.



از برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی هر متوازی الاضلاع ، مستطیل پدید می آید.



از برخورد نیمسازهای زاویه های هر مستطیل ، مربع پدید می آید.



از برخورد عمود منصف های هر ضلع متوازی الاضلاع با یکدیگر متوازی الاضلاع پدید می آید.

مثلثها

قضیه حمار (نامساوی مثلثی) : در هر مثلث ، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و هر ضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. یا

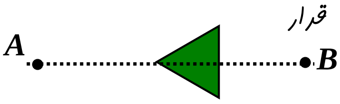
کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه خط راستی است که از آن دو نقطه می گذرد.

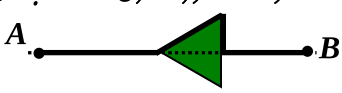
مثال: آیا سه پاره خط به طول ۴ و ۶ و ۷ سانتیمتر می توانند اضلاع یک مثلث باشند.

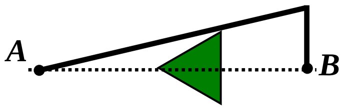
حل) بله زیرا طبق قضیه حمار مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.

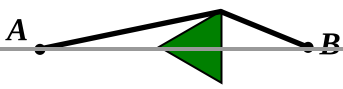
$$۶+۴>۷ \quad و \quad ۴+۷>۶ \quad و \quad ۷+۶>۴$$

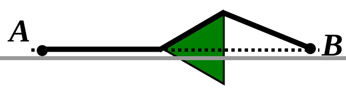
مثال:درکف یک انبار موشی که در نقطه A قرار دارد می خواهد با طی کوتاه ترین مسیر به فندقی که در نقطه B قرار دارد برسد و باید مواظب باشد که در تله‌ای که به شکل مثلث متساوی الاضلاع است نیفتد اگر خط گذرنده از دو نقطه A و B محور تقارن مثلث باشد کوتاه ترین مسیر کدام است؟



۱)


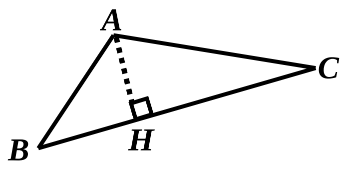
۲)




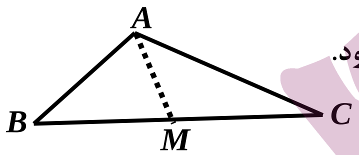


۳)　　　　　　　　　　　　۴)

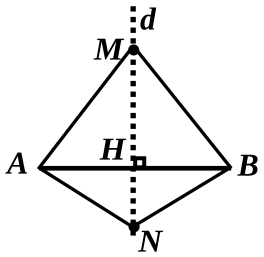
حل) اگر راس بالای مثلث را یک نقطه در نظر بگیریم طبق قضیه حمار پاسخ گزینه ۳ خواهد بود زیر کمترین فاصله بین سه نقطه A وراس مثلث و B خواهدبود.



ارتفاع: پاره خطی است که از راس بر ضلع مقابل عمود می شود.



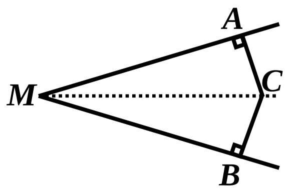
میانه : پاره خطی است که از راس به میان ضلع مقابل (وسط) وصل می شود.



عمود منصف: خطی است که بر پاره خط عمود می شود وآن را نصف می کند.

خاصیت عمود منصف : فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط تا دو سر آن پاره خط به یک اندازه است.

خط d عمود منصف پاره خط AB است $\Rightarrow MA = MB, NA = NB$

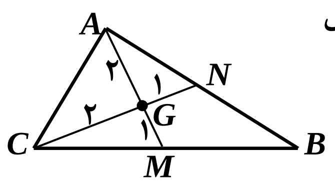


نیمساز: نیم خطی است که از راس زاویه می گذرد وزاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

خاصیت نیمساز: هر نقطه روی نیساز یک زاویه باشد فاصله اش تا دو ضلع زاویه به یک اندازه است.

MC نیمساز زاویه M است $\Rightarrow CA = CB$

نکته: سه ارتفاع،سه میانه ، سه عمود منصف و سه نیمساز مثلث همدیگر رادر یک نقطه قطع می کنند که این نقطه برای هر چهار نوع خط در مثلث متساوی الاضلاع یکی است ولی در بقیه مثلثها این چهار نقطه متفاوتند.



نکته: میانه های مثلث همدیگر را در نقطه ای در داخل مثلث قطع می کنند که به فاصله دو واحد از راس و یک واحد از ضلعی که آن را قطع می کنند قرار دارند.یعنی همدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کنند.

نکته: نقطه‌ی تقاطع میانه ها را(نقطه همرسی)نقطه ثقل یا مرکز ثقل مثلث می گویند.

نکته: نقطه برخوردسه نیمساز زاویه های داخلی هر مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

نکته: نقطه برخورد سه نیمساز داخلی هر مثلث مرکز دایره محاطی مثلث می شود.

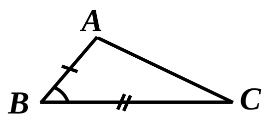
(در بخشهای بعدی تعریف می شود.)

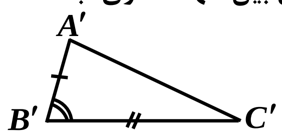
نکته :نقطه برخورد سه عمود منصف مثلث از سه راس مثلث به یک فاصله است.

نکته: نقطه برخورد سه عمود منصف مثلث مرکز دایره محیطی مثلث می شود.

(در بخشهای بعدی تعریف می شود.)

قضیه لولا: هرگاه در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر مساوی باشند ولی زاویه‌ی بین آنها مساوی نباشد ضلع سوم در مثلثی بزرگتر است که زاویه‌ی روبه رو به آن بزرگتر باشد.





$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ \hat{B'} > \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow A'C' > AC$$

تشخیص نوع مثلث

الف) تشخیص نوع مثلث با داشتن اندازه سه ضلع آن

فرض کنیم سه ضلع مثلث برابر a,b,c باشند که $a > b > c$ در این صورت داریم.

۱- اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$ باشد آنگاه یک زاویه مثلث حتماً باز است.

۲- اگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$ باشد آنگاه یک زاویه مثلث حتماً قائمه است.

۳- اگر $a^۲ < b^۲ + c^۲$ باشد آنگاه هر سه زاویه مثلث تند می باشند

مثال: یک مثلث با اضلاع ۵و۷و۹ چه نوع مثلثی است؟

حل مجذور بزرگترین ضلع مثلث ۸۱ می شود و مجموع مجذور های دو ضلع دیگر $۷^۲ + ۵^۲ = ۴۹ + ۲۵ = ۷۴$ می شود که چون $۸۱ > ۷۴$ می شود مثلث دارای یک زاویه باز است.

ب) تشخیص نوع مثلث با داشتن نسبت های سه زاویه آن

۱- اگر هر سه نسبت با هم برابر باشند مثلث متساوی الاضلاع است.

۲- اگر فقط دو تا از نسبتها با هم برابر باشند مثلث متساوی الساقین است.

۳-اگر بزرگ ترین نسبت با مجموع دو نسبت دیگر برابر باشد مثلث قائم الزاویه است.

۴- اگر بزرگ ترین نسبت ،بزرگتر از مجموع دو نسبت دیگر باشد مثلث دارای یک زاویه باز است.

۵- اگر بزرگترین نسبت ،کوچکتر از مجموع دو نسبت دیگر باشد مثلث دارای سه زاویه تند است.

مثال: اندازه های سه زاویه مثلثی با اعداد ۵و۴و۱ متناسب هستند این مثلث از کدام نوع است؟

۱) متساوی الاضلاع ۲) متساوی الساقین ۳) قائم الزاویه ۴) منفرجه الزاویه

حل) با توجه به نکات بالا چون مجموع دو نسبت کوچک تر برابر است با نسبت بزرگتر پس مثلث قائم الزاویه است.

نقطه برخورد ارتفاع ها

۱- در هر مثلث که دارای زاویه باز باشدنقطه برخورد ارتفاع ها ،خارج مثلث قرار می گیرد.

۲- در هر مثلث که دارای زاویه قائمه باشدنقطه برخورد ارتفاع ها ،روی راس قائم قرار می گیرد.

۳- در هر مثلث که سه زاویه آن تند باشدنقطه برخورد ارتفاع ها ،داخل مثلث قرار می گیرد.

مثال) اگر اضلاع مثلثی ۸و۵و۴ باشند محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کجا قراردارد؟

۱) داخل مثلث ۲) در راس مقابل به ضلع کوچک تر ۳)خارج مثلث ۴) روی ضلع بزرگ تر

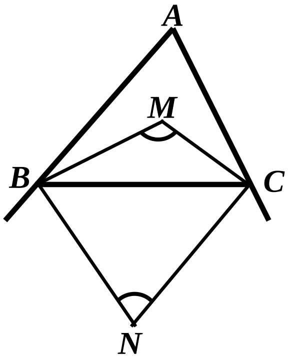
حل) چون $۸^۲ > ۴^۲ + ۵^۲$ در نتیجه این مثلث یک زاویه باز دارد پس طبق نکته بالا نقطه برخورد ارتفاع ها خارج مثلث قرار می گیرد.

زاویه‌ی بین دو نیمساز داخلی در هر مثلث:

$$\hat{M} = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$$

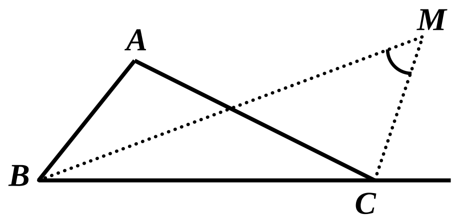
زاویه‌ی بین دو نیمساز خارجی در هر مثلث:

$$\hat{N} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$



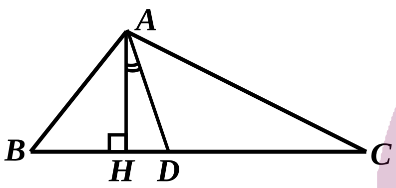
زاویه‌ی محل برخورد **نیمساز زاویه خارجی ونیمساز زاویه داخلی غیر مجاور آن**:

$$\hat{M} = \frac{\hat{A}}{۲}$$



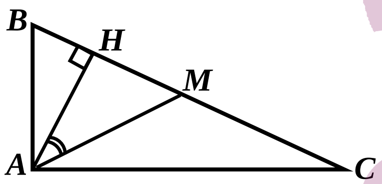
زاویه‌ی بین **ارتفاع و نیمساز زاویه هر راس** مثلث برابر نصف اختلاف دو زاویه دیگر است.

$$H\hat{A}D = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲}$$



زاویه بین **میانه و ارتفاع** وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه برابر است با قدر مطلق اختلاف دو زاویه تند (حاده) مثلث.

$$H\hat{A}M = \left|\hat{B} - \hat{C}\right|$$

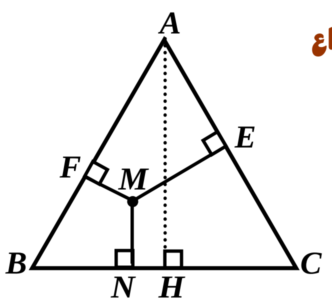


مثال: در مثلث قائم الزاویه‌ای ، زاویه‌ی بین ارتفاع ومیانه وارد بر وتر ۲۶ درجه است کوچک ترین زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟

۱) ۲۴   ۲) ۲۸   ۳) ۳۲ ✓   ۴) ۳۴

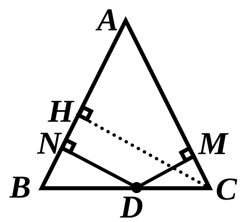
مجموع فاصله های هر نقطه ی دلخواه درون یک مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن برابر **ارتفاع** مثلث خواهد بود.

$$AB = AC = BC \Rightarrow ME + MF + MN = AH$$

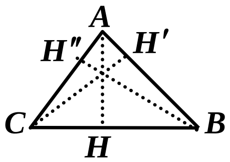


مثال: در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع $۸\sqrt{۳}$ اگر فاصله های نقطه‌ی M در داخل مثلث از ضلع های AB و AC به ترتیب ۳ و ۵ باشد فاصله‌ی آن از ضلع BC کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۴ ✓ ۴) ۳



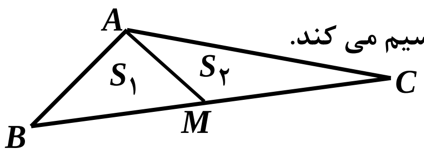
نکته: مجموع فاصله های هر نقطه روی قاعده **مثلث متساوی الساقین** تا دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است. $DN + DM = CH$



نکته: مجموع اندازه های **سه ارتفاع** هر مثلث از **محیط مثلث** کوچک تر است.

$$AH + CH' + BH'' < AB + BC + CA$$

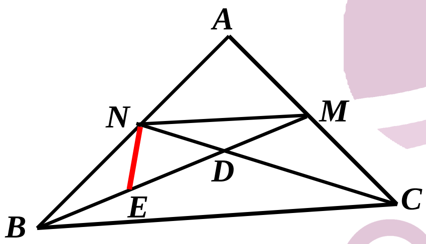
نکته : اگر یکی از اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع را به اندازه خودش امتداد دهیم مثلث حاصل قائم الزاویه است.



نکته: هر **میانه** مثلث آن را به دو مثلث که مساحت آنها با هم برابر است(**مثلث معادل**) تقسیم می کند.

$$S_{\overset{\Delta}{ABM}} = S_{\overset{\Delta}{AMC}} \Rightarrow S_1 = S_2$$

نکته: اگر قاعده یک مثلث را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و هر یک از نقاط تقسیم را به راس مقابل قاعده وصل کنیم مثلث اصلی به n **مثلث معادل** تقسیم می شود.

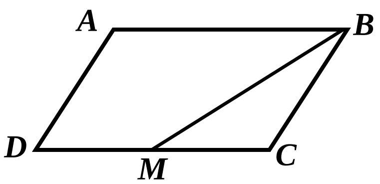


مثال: در شکل زیر BM و CN میانه اضلاع AC و AB می باشد اگر برانیم $BD = 2DM$ نسبت مساحت مثلث MDN به مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) $\frac{1}{12}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{5}$

حل) اگر وسط BD را E بنامیم خواهیم داشت. $BE = ED = DM = \frac{1}{3}BM$

$$S_{\overset{\Delta}{MDN}} = \frac{1}{3}S_{\overset{\Delta}{MNB}} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times S_{\overset{\Delta}{AMB}} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{12}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$



مثال) در متوازی الاضلاع زیر نقطه‌ی M وسط ضلع DC است مساحت متوازی الاضلاع چند برابر مساحت مثلث BMC است؟ ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ✓ ۴) ۳/۵

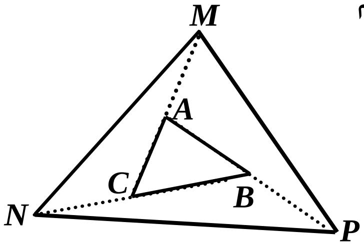
در بین مثلث ها با محیط ثابت،مثلثی دارای بیشترین مساحت است که متساوی الاضلاع باشد.

در بین مثلثهای با مساحت ثابت ، مثلثی دارای کمترین محیط است که متساوی الاضلاع باشد.

اگر هر ضلع مثلث را از یک طرف به اندازه خودش ادامه دهیم ونقاط حاصل را به هم وصل کنیم مثلثی پدید می آید که مساحت آن ۷ برابر مساحت مثلث اولیه است.

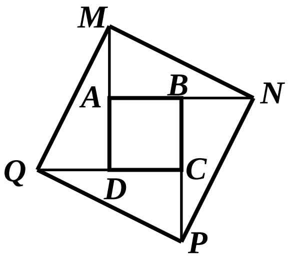
اثبات با استفاده از رسم میانه ها ومثلثهای معادل

$$S_{\overset{\Delta}{MNP}} = ۷\, S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

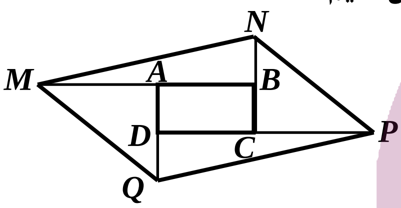


اگر هر ضلع مربع را از یک طرف به اندازه خودش ادامه دهیم ونقاط حاصل را به هم وصل کنیم مربعی پدید می آید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مربع اولیه است.

حل) مساحت هر یک از مثلث های قائم الزاویه داخل شکل با مساحت مربع اولیه برابر است.

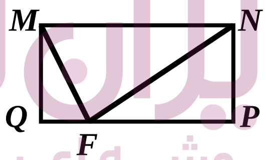


اگر هر ضلع یک مستطیل را از یک طرف به اندازه خودش ادامه دهیم ونقاط حاصل را به هم وصل کنیم متوازی الاضلاعی پدید می آید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مستطیل اولیه است.

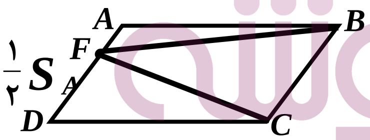


اگر در یک مستطیل یا متوازی الاضلاع از یک نقطه واقع بر یک ضلع به دو راس غیر واقع بر آن ضلع وصل کنیم مساحت مثلث حاصل نصف مساحت مستطیل یا متوازی الاضلاع است.

$$S_{\overset{\Delta}{MFN}} = \frac{۱}{۲} S_{MNPQ}$$



$$S_{\overset{\Delta}{BCF}} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$



حالت های هم نهشتی دو مثلث

حالت های هم نهشتی هر دو مثلث دلخواه:

۱– تساوی سه ضلع (ض ض ض)

۲– تساوی دو ضلع وزاویه بین (ز ض ز)

۳– تساوی دو زاویه و ضلع بین (ض ز ض)

تذکر مهم۱: *دو مثلث در حالت سه زاویه‌ی مساوی هیچ گاه هم نهشت نخواهند بود. یعنی حالت هم نهشتی (ززز) اصلاً نداریم.*

تذکر مهم۲: *هر گاه دو مثلث با یکدیگر هم نهشت شوند ارتفاع ها ، نیمساز ها و میانه های نظیر آنها نیز با یکدیگر برابرند.*

حالت های هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه:

۱– تساوی سه ضلع (ض ض ض)

۲– تساوی دو ضلع وزاویه بین (ز ض ز)

۳– تساوی دو زاویه و ضلع بین (ض ز ض)

۴–وتر ویک زاویه تند(و ز)

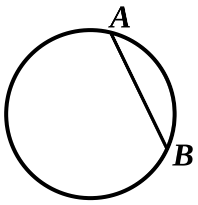
۵–وتر ویک ضلع (وض)

دایـــــــــــره

وتر : پاره خطی است که دوسر یک کمان را به هم وصل می کند.

قطر : بزرگترین وتر دایره است و یا وتری است که از مرکز دایره می گذرد.

کمان : قسمتی از محیط دایره است که بین دو نقطه قرار می گیرد.　　$\overset{\frown}{AB}$

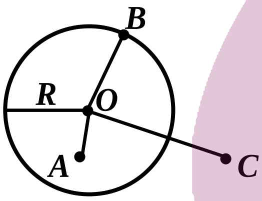


وضع یک نقطه و یک دایره:

۱- نقطه داخل دایره　$AO < R$

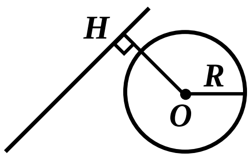
۲- نقطه روی دایره　$BO = R$

۳- نقطه خارج دایره　$CO > R$

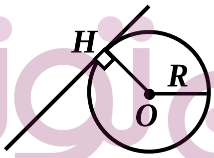


وضع یک خط و یک دایره

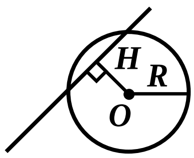
۱- خط ودایره نقطه مشترک ندارند(متخارج)　۲- خط ودایره یک نقطه مشترک دارند.(مماس)　۳- خط ودایره دو نقطه مشترک دارند(متقاطع)



$OH > R$



$OH = R$



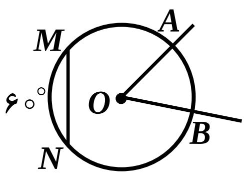
$OH < R$

تذکر: دانش آموزان عزیز به یاد داشته باشید برای بررسی وضع یک دایره با نقطه یا خط باید حتماً فاصله نقطه وخط تا مرکز با **شعاع** دایره سنجیده شود نه با قطرآن.

نکته : شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است.

زاویه مرکزی : زاویه ای که راس آن روی مرکز دایره است و اضلاع آن دایره را قطع می کند.

اندازه زوایه مرکزی با اندازه کمان رو به رویش برابر است.　$\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$



نکته: هر وتری که رو به روی کمان ۶۰ درجه باشد اندازه اش با شعاع دایره برابر است.　$\overset{\frown}{MN} = ۶۰^\circ \Rightarrow MN = R$

محاسبه طول یک کمان:

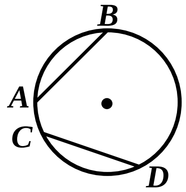
$$\text{طول کمان} = \frac{\text{محیط دایره} \times \hat{A}}{۳۶۰} \quad \text{یا} \quad \text{طول کمان دایره} = \frac{\text{اندازه زاویه مرکزی رو به رو به کمان} \times \text{محیط دایره}}{۳۶۰}$$

مثال: طول یک کمان که رو به رو به زاویه‌ی مرکزی ۴۰ درجه در دایره ای به شعاع ۳ سانتیمتر می باشد چقدر است؟

$$\text{طول کمان} = \frac{۲ \times ۳ \times ۳/۱۴ \times ۴۰}{۳۶۰} = \frac{۳/۱۴ \times ۲}{۳} = \frac{۶/۲۸}{۳} = ۲/۹$$

نکته: در هر دایره وترهای رو به رو به کمان های مساوی با هم برابرند و بالعکس.

$$\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD \quad \text{و} \quad AB = CD \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

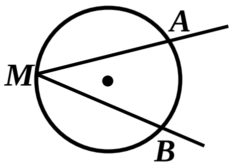


نکته: برای تقسیم دایره به ۶ و ۳ کمان مساوی فقط به کمک پر گار دهانه پرگار را به اندازه شعاع دایره باز می کنیم ومتوالیاً کمان می زنیم تا دایره به ۶ کمان مساوی تقسیم شود .برای تقسیم به سه کمان هر دو کمان متوالی را یک کمان در نظر می گیریم.

زاویه محاطی: زاویه ای که راس آن روی محیط دایره است ودو ضلعش دایره را قطع می کند.

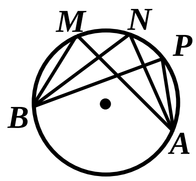
اندازه زاویه محاطی با نصف اندازه کمان رو به رویش برابر است.

$$\hat{M} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$$



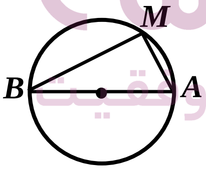
نکته: در هر دایره زاویه های محاطی رو به رو به یک کمان با هم مساویند.

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \widehat{AB}$$



نکته: در هر دایره زاویه محاطی رو به رو به قطر قائمه (۹۰ درجه) می شود.

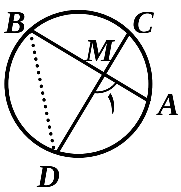
زاویه‌ی M رو به رو به قطر است پس ۹۰ درجه می شود.



زاویه‌ی داخلی دایره: زاویه ای است که از برخورد دو وتر در داخل دایره پدید می آید.

اندازه هر زاویه داخلی برابر با نصف مجموع کمان های مقابل به آن است.

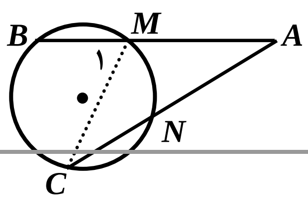
$$\hat{M}_۱ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{۲}$$



اثبات : از نقطه‌ی B *به* D *وصل می کنیم چون زاویه‌ی* $\hat{M}_۱$ *زاویه خارجی مثلث* BMD *است پس با دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش برابر است.*

$$\hat{M}_۱ = \hat{B} + \hat{D} = \frac{AB}{۲} + \frac{CD}{۲} = \frac{AB + CD}{۲}$$

زاویه‌ی خارجی دایره: زاویه ای است که از برخورد امتداد دو وتر دایره به دست می آید.



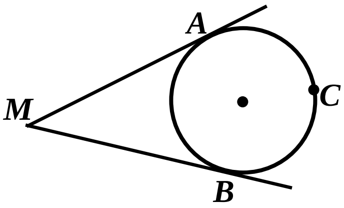
اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی برابر با نصف اختلاف (تفاضل) دو کمان مقابل آن است.

$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{MN}}{۲}$$

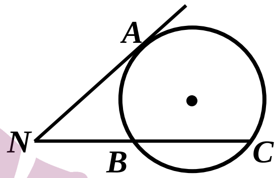
اثبات) از نقطه‌ی M به C وصل می‌کنیم چون زاویه‌ی $\hat{M}_۱$ زاویه خارجی مثلث AMC است پس با دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش برابر است.

$$\hat{M}_۱=\hat{A}+\hat{C}\Rightarrow \hat{A}=\hat{M}_۱-\hat{C}=\frac{BC}{۲}-\frac{MN}{۲}=\frac{BC-MN}{۲}$$

شکل های دیگر زاویه خارجی دایره



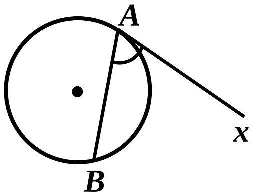
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



$$\hat{N}=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

زاویه ظلی:زاویه‌ای که راس آن روی محیط دایره قرار داردو یکی از اضلاع آن مماس بردایره و ضلع دیگرش وتری از دایره است.

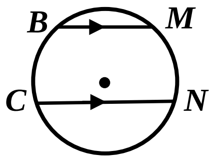
نکته: اندازه هر زاویه ظلی **نصف کمان رو به رویش** است.(مانند اندازه زاویه محاطی)



$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

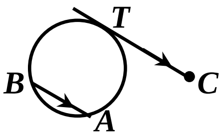
نکته: کمان های بین دو وتر موازی مساویند و بالعکس

$$BM \parallel CN \Rightarrow \overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{BC}$$



نکته: کمان های بین یک خط مماس و وتری که با آن موازی است با هم برابرند.

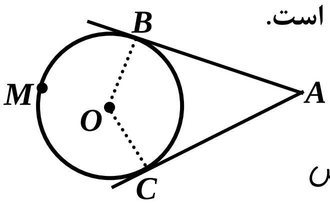
$$AB \parallel CT \Rightarrow \overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{BT}$$



نکته۱: از یک نقطه فقط می توان دو مماس بر دایره رسم کرد که طول این دو مماس همیشه با هم برابر است.

$$AB=AC$$

$$\hat{A}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ$$



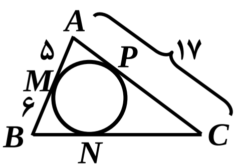
نکته۲: کمان بین دو مماس و زاویه بین دو مماس با هم مکملند.

اثبات: از نقاط B و C به مرکز دایره وصل می‌کنیم و سپس با توجه با اینکه شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس عمود است و مجموع زاویه های چهار ضلعی ۳۶۰ درجه است داریم:

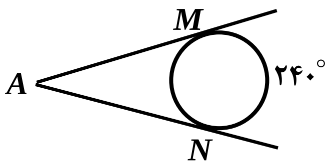
$$\left.\begin{matrix}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{O}=۳۶۰\\ \hat{B}+\hat{C}=۱۸۰\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{O}=۱۸۰\xrightarrow{\hat{O}=\overset{\frown}{BC}}\hat{A}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ$$

مثال: با توجه به شکل مقابل AB و BC و AC بر دایره مماسندمحیط مثلث ABC را به دست آورید.

با توجه به اینکه دومماس رسم شده از هر نقطه با هم برابرند. داریم:



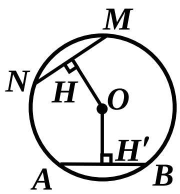
$$\left.\begin{array}{l} AM = AP = ۵ \\ BM = BN = ۶ \\ CP = CN = ۱۷ - ۵ = ۱۲ \end{array}\right\} \Rightarrow P_{\overset{\Delta}{ABC}} = AM + MB + BN + NC + CP + PA = ۵ + ۶ + ۶ + ۱۲ + ۱۲ + ۵ = ۴۶$$



مثال: زاویه‌ی A در شکل مقابل چند درجه است؟

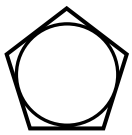
حل) با توجه به نکات بالا کافیست کمان MN را حساب کنیم و از ۱۸۰ درجه کم کنیم

$$\overset{\frown}{MN} = ۳۶۰ - ۲۴۰ = ۱۲۰ \Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰ - ۱۲۰ = ۶۰$$



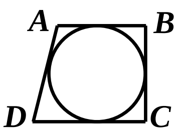
نکته: هر دو وتری که از مرکز دایره به یک فاصله باشند مساویند و بالعکس

$$OH = OH' \Rightarrow AB = MN \quad \text{و} \quad AB = MN \Rightarrow OH = OH'$$



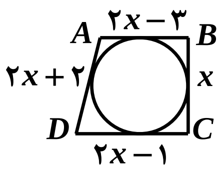
چند ضلعی محیطی: چند ضلعیی است که همه‌ی اضلاع آن بردایره مماس باشد.

به دایره ای که داخل چند ضلعی محیطی قرار دارد **دایره محاطی** گفته می شود.



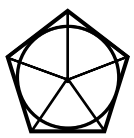
نکته: در چهار ضلعی محیطی مجموع اندازه دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است.

$$AB + DC = AD + BC$$



مثال)در چهار ضلعی مقابل مقدار x را به دست آورید.

حل) $(۲x - ۳) + (۲x - ۱) = (۲x + ۲) + x \Rightarrow ۴x - ۴ = ۳x + ۲ \Rightarrow ۴x - ۳x = ۲ + ۴ \Rightarrow x = ۶$



نکته: **مرکز دایره محاطی** هر چند ضلعی محل برخورد **نیمسازهای** زاویه های داخلی آن است.

نکته: **شعاع دایره محاطی هر مثلث** برابر است با مساحت مثلث تقسیم برنصف محیط یعنی $\dfrac{S}{P}$

مثال: در مثلثی به اضلاع ۱۰و۲۴و۲۶شعاع دایره محاطی مثلث چقدر است؟

۱) ۶		۲) ۸		۳) ۷		۴) ۴

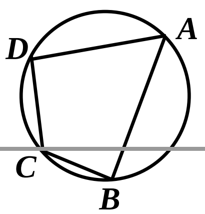
حل) چون اندازه اضلاع مثلث اعداد فیثاغورسی هستند پس مثلث قائم الزاویه است وداریم:

$$P = \frac{۱۰ + ۲۴ + ۲۶}{۲} = ۳۰$$

$$S = \frac{۲۴ \times ۱۰}{۲} = ۱۲۰ \Rightarrow \text{شعاع دایره محاطی} = \frac{S}{P} = \frac{۱۲۰}{۳۰} = ۴$$

چند ضلعی محاطی : چند ضلعی است که تمام راس های آن روی محیط یک دایره واقع شده باشند.

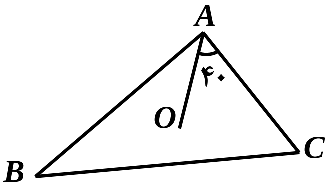
نکته: به دایره ای که چند ضلعی داخل آن قرار گرفته دایره‌ی محیطی می گویند.



نکته: در هر چهار ضلعی محاطی زاویه های مقابل مکملند.　$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$

نکته: **مرکز دایره‌ی محیطی** هر چند ضلعی محل برخورد **عمود منصف های** آن است.

نکته: **شعاع دایره محیطی هر مثلث** برابر است با حاصل ضرب اضلاع مثلث تقسیم بر ۴ برابر مساحت آن یعنی: $\frac{abc}{۴S}$



مثال: در مثلث ABC نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث است.اگر $O\hat{A}C=۴۰$ باشد.

اندازه زاویه $\hat{B}$ چند درجه است؟

۱) ۵۰　　۲) ۶۵　　۳) ۷۰　　۴) ۴۵

حل: ابتدا O را به C وصل می کنیم چون A و B و C روی دایره محیطی قرار دارند پس مثلث $\overset{\Delta}{AOC}$ متساوی الساقین است بنابراین

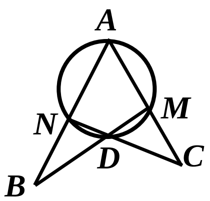
$O\hat{C}A=۴۰ \Rightarrow A\hat{O}C=۱۸۰-(۴۰+۴۰)=۱۰۰$ پس زاویه B مقابل به کمان ۱۰۰ درجه می شود و برابر نصف آن یعنی ۵۰ درجه

مثال :کدام چهار ضلعی هم محاطی وهم محیطی است؟

۱) لوزی　　۲) مربع　　۳) مستطیل　　۴) متوازی الاضلاع

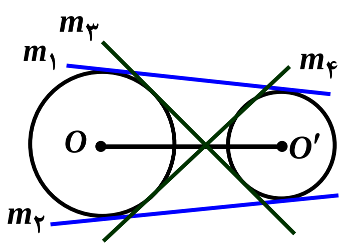
حل) چون در چهار ضلعی محاطی زاویه های رو به رو مکمل هستند ودر چهار ضلعی محیطی مجموع دو ضلع روبه رو با مجموع دو ضلع دیگر برابر است بنابراین لوزی فقط محیطی ومستطیل فقط محاطی است ولی مربع هم محیطی وهم محاطی می شود.

نکته: در شکل مقابل اگر نقطه برخورد دو پاره خط BM و CN روی دایره باشد و A و M و N روی محیط دایره باشندداریم:



$$۲\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

خط المرکزین: پاره خطی است که مرکز های دو دایره را به هم وصل می کند وبه طور معمول آن را با حرف d نمایش می دهند.



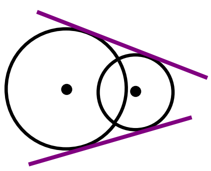
وضع دو دایره نسبت به هم:

۱- دو دایره **متخارج** هستند. $d>R+R'$

در این حالت دو مماس داخلی $(m_۳,m_۴)$ و دو مماس خارجی $(m_۱,m_۲)$وجود دارد.

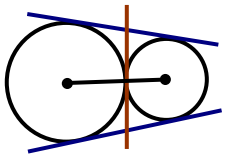
تذکر: برای پیدا کردن اندازه مماس خارجی ،دو شعاع دایره ها را که بر نقطه تماس وارد می شوندرسم می کنیم وسپس ازنقطه تماس در دایره کوچکتر خطی موازی با خط المرکزین رسم می کنیم تا یک مثلث قائم الزاویه تشکیل شود وبعد از رابطه فیثاغورس کمک می گیریم.

اندازه مماس خارجی= $\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}$　　و　　اندازه مماس داخلی= $\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}$



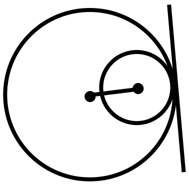
۲- دو دایره **متقاطع** هستند. $R-R'<d<R+R'$

در این حالت دو دایره فقط ۲ مماس مشترک خارجی دارند.



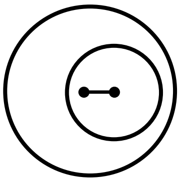
۳- دو دایره **مماس خارجی** اند. $d = R + R'$

دراین حالت دو دایره ۲ مماس مشترک خارجی ویک مماس مشترک داخلی دارند.



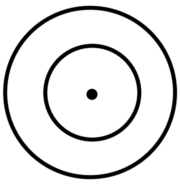
۴- دو دایره **مماس داخلی** اند. $d = R - R'$

در این حالت دو دایره فقط یک مماس مشترک خارجی دارند.



۵- دو دایره **متداخل** اند. $0 < d < R - R'$

در این حالت دو دایره مماس مشترکی ندارند.



۶- دو دایره **هم مرکزند**. $d = 0$

در این حالت دو دایره مماس مشترکی ندارند.

نکته: دو دایره که بیشتر از دو نقطه مشترک داشته باشند برهم منطبقند.

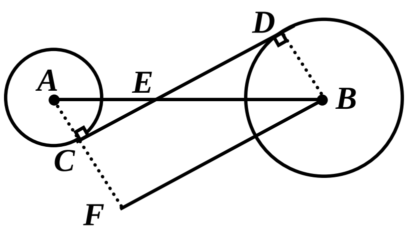
نکته: از دو نقطه بی شمار دایره می گذرد که مرکز این دایره ها عمود منصف پاره خطی است که این دو نقطه را به هم وصل می کند.

نکته: از سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست فقط یک خط راست می گذرد که مرکز این دایره نقطه‌ی برخورد عمود منصف های اضلاع مثلثی است .که این سه نقطه رئوس آن هستند.

مثال: شعاع دو دایره ۵و۸ سانتیمتر وطول خط المرکزین ۳ سانتیمتر است و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱)مماس داخلی   ۲) متخارج   ۳) مماس خارجی   ۴)متقاطع

حل) چون طول خط المرکزین با تفاضل دو شعاع مساوی است پس دو دایره مماس داخلی هستند.



مثال: دایره هایی به مرکز های A و B به شعاع های ۳و۸ در شکل زیر مفروضند مماس داخلی CD خط المرکزین AB را در نقطه E قطع کرده است اگر $AE = 5$ باشد اندازه CD کدام است؟

۱) $\sqrt{221}$ ۲) $\sqrt{225}$ ۳) $\frac{44}{3}$ ۴) $\frac{55}{3}$

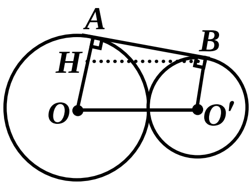
حل) FB را موازی CD رسم می کنیم چهار ضلعی $FCBD$ مستطیل است. $AF = AC + CF = 3 + 8 = 11$

از تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{ACE}$ و $\overset{\Delta}{EBD}$ داریم:

$$\frac{AC}{DB} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{5}{BE} \Rightarrow BE = \frac{40}{3} \Rightarrow AB = 5 + \frac{40}{3} = \frac{55}{3}$$

حال از رابطه فیثاغورس در مثلث AFB داریم:

$$AB^{۲} = AF^{۲} + FB^{۲} \Rightarrow \left(\frac{۵۵}{۳}\right)^{۲} = ۱۱^{۲} + FB^{۲} \Rightarrow FB = \frac{۴۴}{۳} = CD$$



مثال: در شکل رو به رو دو دایره به شعاع های ۶و۸ مماس خارج اند و AB مماس مشترک خارجی آنهاست محیط ذو زنقه‌ی $OABO'$ کدام است؟

۱) $۲۸+۵۲\sqrt{۳}$　　۲) $۲۸+۵۴\sqrt{۳}$

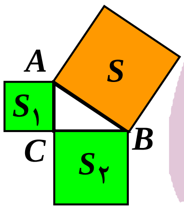
۳) $۲۸+۸\sqrt{۳}$　　۴) $۲۸+۶۰\sqrt{۳}$

حل) از نقطه B خطی موازی با خط المرکزین رسم می کنیم و سپس در مثلث قائم الزاویه BAH رابطه‌ی فیثاغورس را می نویسیم تا طول مماس خارجی AB را حساب کنیم(طول AH برابر با اختلاف دو شعاع یعنی ۲ می باشد)

$$BH^{۲} = AH^{۲} + AB^{۲} \Rightarrow ۱۴^{۲} = ۲^{۲} + AB^{۲} \Rightarrow AB^{۲} = ۱۹۶ - ۴ = ۱۹۲ \Rightarrow AB = ۸\sqrt{۳}$$

$$P_{\text{ذوزنقه}} = AB + BO' + O'O + OA = ۸\sqrt{۳} + ۶ + ۱۴ + ۸ = ۲۸ + ۸\sqrt{۳}$$

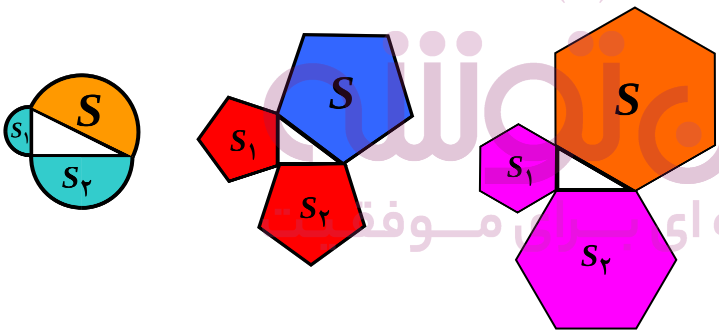
رابطه‌ی فیثاغـــورس



در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر برابر است با مجموع مربع های دو ضلع دیگر

$$AB^{۲} = AC^{۲} + BC^{۲} \Rightarrow S = S_{۱} + S_{۲}$$

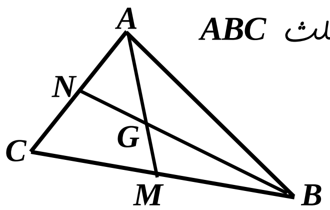
تذکر مهم: هر چند ضلعی منتظم یا نیمدایره روی اضلاع یک مثلث قائم الزاویه بسازیم همیشه مساحت شکل روی وتربرابر است با مجموع مساحت های دو شکل روی دو ضلع دیگر.



$$S = S_{۱} + S_{۲}$$

اعداد فیثاغورسی :به سه تایی های $(۳,۴,۵)$و $(۵,۱۲,۱۳)$و... ومضارب انها که در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می کنند اعداد فیثاغورسی می گویند.

نکته : اگر a عدد طبیعی بزرگتر از ۱ باشد آنگاه $a^{۲}+۱$ و $a^{۲}-۱$ و $۲a$ همواره اعداد فیثاغورسی هستند.



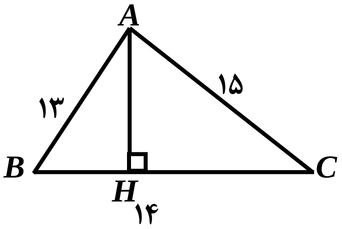
مثال: در شکل طول میانه های $AM = ۷/۵,$ و $BN = ۱۲$ می باشد اگر $AC = ۶$ باشد مساحت مثلث ABC چقدر است؟ ۱) ۲۲/۵　۲) ۲۴　۳) ۱۵　۴) ۳۶

$$AG = \frac{۲}{۳}AM \Rightarrow AG = \frac{۲}{۳} \times ۷/۵ = ۵$$

$$AN = \frac{۱}{۲}AC = \frac{۱}{۲}\times ۶ = ۳ \qquad و \qquad NG = \frac{۱}{۳}BN \Rightarrow NG = \frac{۱}{۳}\times ۱۲ = ۴$$

چون اضلاع مثلث ANG دارای اضلاع ۳و۴و۵ است پس قائم الزاویه می باشد در نتیجه BN ارتفاع نیز می شود بنابراین داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AC\times BN}{۲} = \frac{۶\times ۱۲}{۲} = ۳۶$$



مثال: در مثلثی به اضلاع ۱۳و۱۴و۱۵ مطابق شکل ارتفاع AH را رسم می کنیم طول BH کدام است؟

۱) ۵　　۲) ۴/۵　　۳) $\frac{۴۰}{۷}$　　۴) ۶/۵

حل: در مثلثهای قائم الزاویه AHB و AHC رابطه‌ی فیثاغورس را می نویسیم

$$\left.\begin{array}{l} AH^{۲} = AB^{۲} - BH^{۲} \Rightarrow AH^{۲} = ۱۳^{۲} - BH^{۲} \\ AH^{۲} = AC^{۲} - CH^{۲} \Rightarrow AH^{۲} = ۱۵^{۲} - (۱۴ - BH)^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۳^{۲} - BH^{۲} = ۱۵^{۲} - (۱۴ - BH)^{۲}$$

$$\Rightarrow (۱۴ - BH)^{۲} - BH^{۲} = ۱۵^{۲} - ۱۳^{۲} = ۲۲۵ - ۱۶۹ = ۵۶ \Rightarrow \cdots BH = ۵$$

نکته: درهر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه ۳۰درجه نصف وتر است و برعکس.

نکته: درهر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه ۴۵درجه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$وتر است و برعکس.

نکته: درهر مثلث قائم الزاویه ضلع رو به روی زاویه ۶۰درجه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$وتر است و برعکس.

نکته: درهر مثلث قائم الزاویه که زاویه ۱۵ درجه یا ۷۵ درجه داشته باشد ارتفاع وارد بر وتر ، ربع وتر است.

نکته: درهر مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است و برعکس.

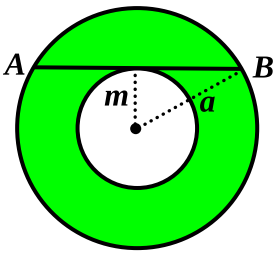
مثال: در مثلث ABC ضلع BC برابر ۱۰ سانتیمتر و میانه AM برابر ۵ است.این مثلث:

۱) در رأس A تند است.　　۲) در رأس A قائمه است.

۳) در رأس A منفرجه است.　　۴) هر سه حالت می تواند باشد.

حل: چون اندازه میانه نصف ضلع متناظرش شده است پس مثلث قائم الزاویه می باشد.

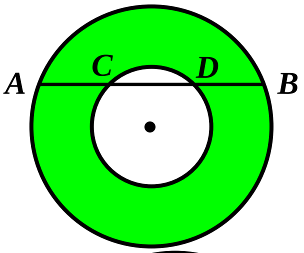
مساحت ناحیه بین دو دایره(تاج دایره)



الف) حالتی که وتر AB بر دایره مماس باشد. برابر است با: $S = \frac{\pi}{۴}(AB)^{۲}$

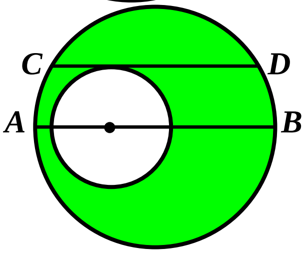
اثبات) طبق رابطه فیثا غورس داریم : $a^{۲} = m^{۲} + \left(\frac{AB}{۲}\right)^{۲}$

$$S_{رنگی} = S_{دایره بزرگ} - S_{دایره کوچک} \quad S = \pi a^{۲} - \pi m^{۲} = \pi\left(m^{۲} + \frac{AB^{۲}}{۴} - m^{۲}\right) = \frac{\pi}{۴}(AB)^{۲}$$



ب) حالتی که وتر AB دایره کوچک تر را قطع کند برابر است با:

$$S = \frac{\pi}{۴}\left(AB^{۲} - CD^{۲}\right)$$



مثال؛ در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و مماس بر دایره کوچک است.اگر $AB = ۸cm$ مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟

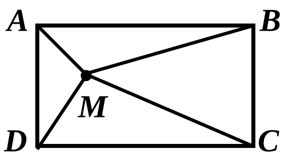
۱) ۸π　　۲) ۴π　　۳) ۱۶π　　۴) ۳۲π

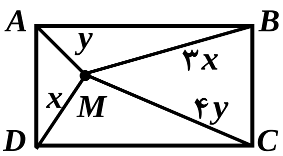
حل) با جابجایی دایره کوچک وانتقال آن به مرکز دایره بزرگ داریم :

$$S = \frac{\pi}{۴}(AB)^{۲} = \frac{\pi}{۴}\times ۸^{۲} = ۱۶\pi$$

نکته: اگر M نقطه‌ای دلخواه داخل مستطیل باشد آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$MA^{۲} + MC^{۲} = MB^{۲} + MD^{۲}$$

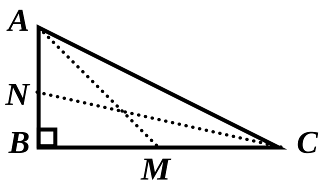




مثال)در شکل مقابل $ABCD$ مستطیل است و M نقطه‌ای دلخواه داخل آن است حاصل $\frac{y}{x}$ کدام است؟

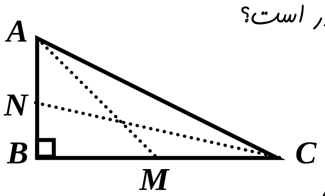
۱) $\sqrt{\frac{۱۰}{۱۷}}$　　۲) $\sqrt{\frac{۴}{۵}}$　　۳) $\sqrt{\frac{۱۴}{۱۹}}$　　۴) $\sqrt{\frac{۳}{۵}}$

حل) $MA^{۲} + MC^{۲} = MB^{۲} + MD^{۲} \Rightarrow y^{۲} + ۱۶y^{۲} = ۹x^{۲} + x^{۲} \Rightarrow ۱۷y^{۲} = ۱۰x^{۲} \Rightarrow \frac{y^{۲}}{x^{۲}} = \frac{۱۰}{۱۷} \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{۱۰}{۱۷}}$



نکته: در هر مثلث قائم الزاویه مجموع مربع های دو میانه‌ی وارد بر دو ضلع قائمه مثلث با $\frac{۵}{۴}$ مربع وتر برابر است.

$$AM^{۲} + CN^{۲} = \frac{۵}{۴}AC^{۲}$$



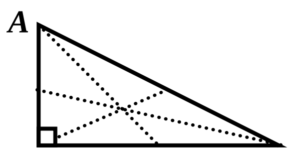
مثال ؛ در مثلث قائم الزاویه رو به رو میانه $AM = ۱۰cm$ و میانه $CN = \sqrt{۲۰}cm$ اندازه وتر AC چقدر است؟

۱) $\sqrt{۲۰۰}$　　۲) $\sqrt{۱۰۰}$　　۳) $\sqrt{۹۶}$　　۴) $\sqrt{۴۸}$

حل)

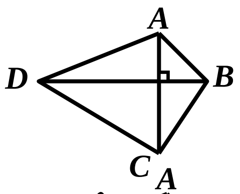
$$AM^{۲} + CN^{۲} = \frac{۵}{۴}AC^{۲} \Rightarrow ۱۰۰ + ۲۰ = \frac{۵}{۴}AC^{۲} \Rightarrow AC^{۲} = ۱۲۰\times\frac{۴}{۵} = ۹۶ \Rightarrow AC = \sqrt{۹۶}$$

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه مجموع مربع های سه میانه‌ی مثلث با $\frac{۳}{۲}$ مربع وتر برابر است.



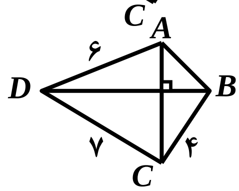
N P B M C

$$AM^۲ + CN^۲ + BP^۲ = \frac{۳}{۲} AC^۲$$



نکته: در هر چهار ضلعی که قطرها برهم عمود باشند مجموع مربع های اضلاع مقابل با مجموع مربع های دو ضلع دیگر برابر است.

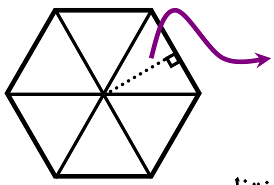
$$AB^۲ + DC^۲ = AD^۲ + BC^۲$$



مثال: با توجه به شکل مقابل اندازه ضلع AB برابر است با:

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲   ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۶}$

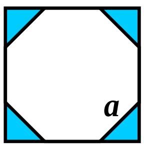
سهم چند ضلعی منتظم: پاره خطی که از مرکز چند ضلعی بر ضلع آن عمود می شود.



مساحت چند ضلعی منتظم: کافیست مرکز n ضلعی را به رئوس آن وصل کنیم به این ترتیب n مثلث مساوی پدید می آید در نتیجه :

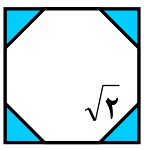
نصف محیط × سهم = نصف ضلع × سهم × n = مساحت یک مثلث × n = مساحت n ضلعی منتظم

مساحت ۸ ضلعی منتظم به ضلع a :



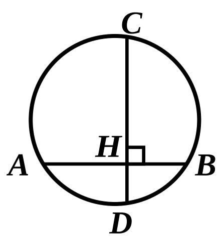
راه اول: ۸ ضلعی را داخل یک مربع قرار داده سپس مساحت مربع را منهای مساحت ۴ مثلث دورش می کنیم.

راه دوم : از فرمول $S = ۲a^۲(۱+\sqrt{۲})$ استفاده کنیم.



مثال : طول ضلع یک ۸ ضلعی منتظم $\sqrt{۲}$ است مساحت آن کدام است؟

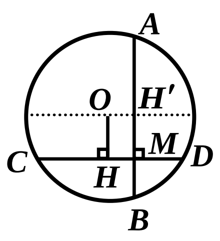
۱) $۶+\sqrt{۲}$ ۲) $۴+۲\sqrt{۲}$ ۳) $۶+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴+۴\sqrt{۲}$



نکته: هرگاه دو وتر دایره برهم عمود باشند (R شعاع دایره است.)

الف) $AH^۲ + BH^۲ + CH^۲ + DH^۲ = ۴R^۲$

ب) مجموع هر دو کمان روبه رو ۱۸۰درجه می شود. $\widehat{AD} + \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = ۱۸۰$



مثال: وترهای AB و CD در شکل زیر برهم عمودند و O مرکز دایره است.اگر $MB = ۳$ و $MD = ۴$ و $CM = ۹$ باشد طول پاره خط OH و شعاع دایره چقدر است؟

$$MC \times MD = AM \times BM \Rightarrow ۴ \times ۹ = AM \times ۳ \Rightarrow AM = \frac{۴ \times ۹}{۳} = ۱۲$$

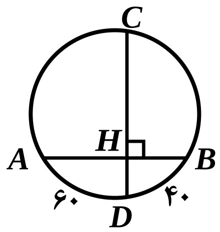
$AM + MB = ۱۲ + ۳ = ۱۵ =$طول وتر AB پس چون قطر دایره وتر AB را نصف می کندپس $BH' = ۷/۵$ در نتیجه

$$OH = MH' = BH' - BM = ۷/۵ - ۳ = ۴/۵$$

برای پیدا کردن شعاع از رابطه ای که در نکته بالا گفته شده استفاده می کنیم.

$$AM^۲ + BM^۲ + CM^۲ + DM^۲ = ۴R^۲ \Rightarrow ۱۲^۲ + ۳^۲ + ۹^۲ + ۴^۲ = ۴R^۲ \Rightarrow ۱۴۴ + ۹ + ۸۱ + ۱۶ = ۴R^۲$$

$$\Rightarrow ۲۵۰ = ۴R^۲ \Rightarrow R^۲ = \frac{۲۵۰}{۴} = ۶۲/۵ \Rightarrow R = \sqrt{۶۲/۵}$$



مثال: در شکل مقابل دو وتر AB و CD برهم عمودند اگر دو کمان BD و AD به ترتیب ۴۰ و۶۰ درجه باشند تفاضل دو کمان BC و AC چند درجه است؟

۱)۳۰　　　۲) ۴۰　　　۳) ۲۵　　　۴) ۲۰

حل) با توجه به نکته　$\widehat{AD} + \widehat{BC} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = ۱۸۰$کمان $BC = ۱۲۰$ وکمان $AC = ۱۴۰$ پس تفاضل دو کمان برابر ۱۲۰ درجه خواهد شد.

فرمول هرون : مساحت مثلثی که اندازه سه ضلع آن (a,b,c) معلوم باشد.

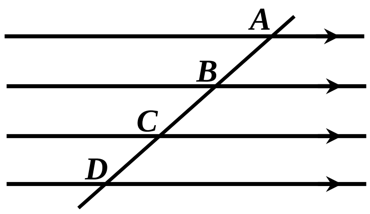
p نصف محیط دایره است.　　　$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ مثلث

مثال : مساحت مثلثی که سه ضلع آن ۴ و۵و۶ باشند را پیدا کنید.

حل)　　　نصف محیط $= (۵ + ۶ + ۷) \div ۲ = ۹$

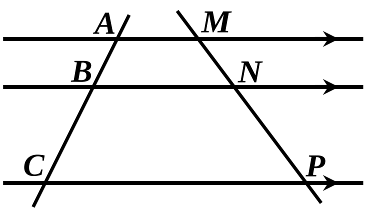
$$\Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۹(۹-۵)(۹-۶)(۹-۷)} = \sqrt{۹ \times ۴ \times ۳ \times ۲} = ۶\sqrt{۶}$$

خطوط موازی وقضیه تالس



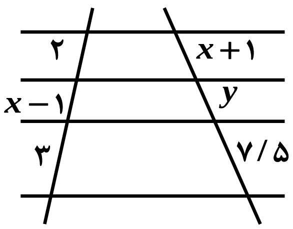
نکته: هرگاه خطی توسط چند خط موازی با فاصله های برابر قطع شود.قسمت های ایجاد شده بین هر دو خط متوالی با هم برابرند.

$$AB = BC = CD$$



نکته: هرگاه چند خط موازی خطوطی را قطع کنند روی آنها پاره خط های متناسب ایجاد می کنند.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP} \quad \text{یا} \quad \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

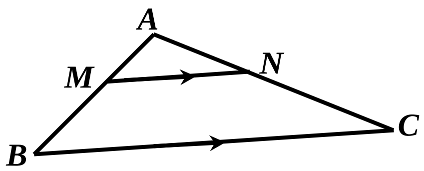


مثال: در شکل مقابل مقدار y چند است؟

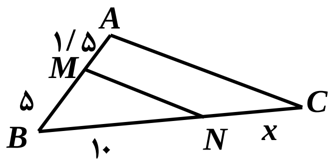
حل)　$$\frac{۲}{۳} = \frac{x+۱}{۷/۵} \Rightarrow ۱۵ = ۳x + ۳ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۳} = ۴$$

$$\frac{۴-۱}{۳}=\frac{y}{۴}\Rightarrow y=۱$$

قضیه‌ی تالس: هرگاه در یک مثلث خطی موازی با یکی از اضلاع آن رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند روی آن دو ضلع پاره خط متناسب ایجاد می کند.

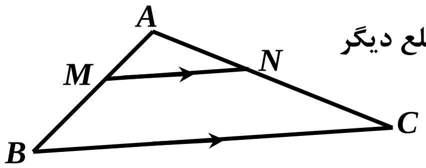


$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ رابطه جزء به کل $\qquad \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ رابطه جزء به جزء



مثال: در شکل مقابل $MN \parallel AC$ طول پاره خط NC چقدر است؟

$$\frac{BM}{MA}=\frac{BN}{NC}\Rightarrow\frac{۵}{۱/۵}=\frac{۱۰}{x}\Rightarrow x=\frac{۱/۵\times۱۰}{۵}=۳$$

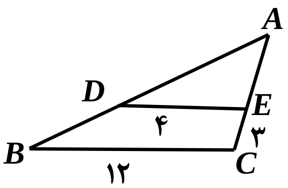


نتیجه قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث خطی موازی با یکی از اضلاع آن رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند با آن دو ضلع مثلثی می سازد که اضلاعش با اضلاع مثلث اصلی متناسبند.

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

تذکر ۱: همانطور که در بالا ملاحظه می کنید در نتیجه تالس حتما باید اضلاع یکی از مثلث ها در صورت و اضلاع مثلث دیگر در مخرج نوشته شوند.

تذکر۲: در حل سوالها زمانی از نتیجه تالس استفاده می کنیم که لازم باشد **دو خط موازی** را در حل بنویسیم.



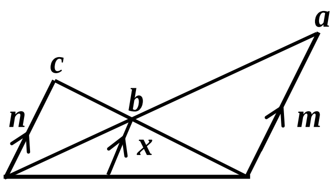
مثال: در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است طول پاره خط AE کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ $\qquad$ ۲) ۱ $\qquad$ ۳) ۹ $\qquad$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

حل) چون از دو خط موازی DE, BC برای در حل استفاده کنیم پس از نتیجه تالس استفاده می شود.

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{AE}{AE+۳}=\frac{۴}{۱۲}\Rightarrow ۱۲AE=۴AE+۱۲\Rightarrow ۸AE=۱۲\Rightarrow AE=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

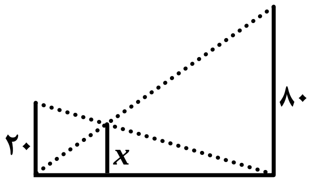
عکس قضیه تالس: هرگاه خطی روی یکی از اضلاع مثلثی پاره خط های متناسب ایجاد کند(رابطه های جزء به جزء و جزء به کل در آن صدق کند.)آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.



نکته: در شکل مقابل اگر سه خط a و b و c موازی باشند رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\frac{۱}{x}=\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}$$

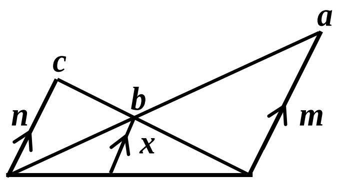
مثال: دو میله‌ی قائم ۲۰ و ۸۰ سانتیمتری به فاصله‌ی ۱۰۰ سانتیمتری یکدیگر قرار دارند بلندی نقطه‌ی مشترک خطوط واصل بین نوک هر میله با پای میله دیگر چقدر است؟



۱) ۱۲ ۲) ۴۰ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

$$\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۸۰}=\frac{۴+۱}{۸۰}=\frac{۵}{۸۰}=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow x=۱۶$$

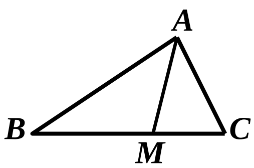
مثال: در شکل مقابل اگر سه خط a و b و c موازی باشند. حاصل $\frac{x}{m}+\frac{x}{n}$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

حل) $\frac{۱}{x}=\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}\Rightarrow x\times\frac{۱}{x}=x\left(\frac{۱}{m}+\frac{۱}{n}\right)\Rightarrow ۱=\frac{x}{m}+\frac{x}{n}$

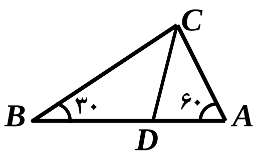
نکته: در هر مثلث نیمساز هر زاویه، ضلع مقابل زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می کند.



$\frac{AB}{BM}=\frac{AC}{CM}$ (AM نیمساز زاویه A است.)

اثبات) از نقطه C خطی موازی با نیمساز رسم می کنیم تا امتداد AB را قطع کند وسپس رابطه‌ی تالس را می نویسیم.

مثال: در شکل مقابل CD نیمساز زاویه C است با توجه به اندازه های داده شده مطلوب است نسبت $\frac{AD}{AC}$



۱) $\sqrt{۳}-۱$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$

حل) $\hat{B}=۳۰,\hat{A}=۶۰\Rightarrow\hat{C}=۹۰$ و چون ضلع مقابل زاویه ۳۰ درجه در مثلث قائم الزاویه نصف وتر و ضلع رو به رو به زاویه ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است داریم:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{DB}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}AB}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}AB}=\frac{AD}{DB}\Rightarrow\frac{۱}{۲}DB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AD\Rightarrow DB=\sqrt{۳}AD$$

$AB=AD+DB=AD+\sqrt{۳}AD\Rightarrow AB=\left(۱+\sqrt{۳}\right)AD$ اکنون نسبت $\frac{AD}{AC}$ را باتوجه به مقدار هایی که پیدا کرده ایم حساب میکنیم

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AD}{\frac{۱}{۲}AB}=\frac{۲AD}{AB}=\frac{۲AD}{\left(۱+\sqrt{۳}\right)AD}=\frac{۲}{۱+\sqrt{۳}}\Rightarrow\frac{۲}{۱+\sqrt{۳}}\times\frac{۱-\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}=\frac{۲\left(۱-\sqrt{۳}\right)}{۱-۳}=\sqrt{۳}-۱$$

تشـــــــــابه

چند ضلعی های متشابه: دو چند ضلعی را متشابه گویند هرگاه ضلع هایشان نظیر به نظیر با هم متناسب و زاویه هایشان نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

نسبت تشابه: به نسبت دو ضلع متناظر نسبت تشابه می گوییم .یا نسبت تشابه عددی است که نشان می دهد دو شکل متشابه چند برابر یکدیگرند.

شکل های متشابه:

۱- همه‌ی مربع ها با هم متشابهند.

۲- هر دو n ضلعی منتظم به شرط برابر بودن تعداد اضلاعشان با هم متشابهند.

۳- همه مثلث های متساوی الاضلاع با هم متشابهند .

۴- همه مثلث های قائم الزاویه متساوی الساقین با هم متشابهند.

۵- هر دو لوزی که یک زاویه برابر داشته باشند با هم متشابهند.

۶- هر دو چند ضلعی هم نهشت با هم متشابهند. و نسبت تشابه آنها ۱ می باشد.

۷- هر چند ضلعی با خودش متشابه است.

۸- هر دو دایره با هم متشابه هستند ونسبت تشابه آنها نسبت شعاع هایشان است.

۹- هر دو مستطیل که نسبت طول های آنها با نسبت عر ضهایشان برابر باشد متشابهند.

۱۰- هر دو مستطیل که زاویه بین قطر هایشان برابر باشد با یکدیگر متشابهند

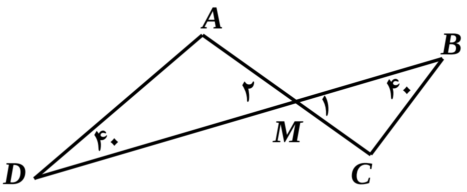
حالت های تشابه دو مثلث : دو مثلث در سه حالت با هم متشابهند:

۱- برابر بودن دو زاویه متناظر

۲- متناسب بودن دو ضلع و برابر بودن زاویه‌ی بین آن دو ضلع

۳- متناسب بودن سه ضلع

تذکر مهم : در دو مثلث متشابه، **اضلاع متناسب روبه روی زاویه های مساوی** قرار دارند.



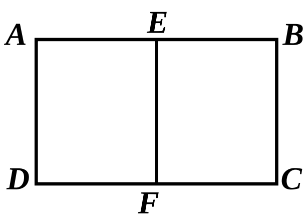
مثال: در شکل مقابل نشان دهید دو مثلث با هم متشابهند و تناسب اضلاع متناظر را بنویسید .

$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\hat{B}=۴۰\\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ADM}\approx \overset{\Delta}{MBC}$$

چون $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$ پس اضلاع روبه روی آنها یعنی AD و BC با هم متناسبند یعنی: $\frac{AD}{BC}$

چون $\hat{D}=\hat{B}$ پس اضلاع رو به روی آنها یعنی AM و MC با هم متناسبند یعنی: $\frac{AM}{MC}$

در نتیجه تناسب اضلاع متناظر به صورت مقابل می شود. $\frac{AD}{BC}=\frac{AM}{MC}=\frac{DM}{BM}$



مثال:در شکل مقابل دو مستطیل $ABCD$ و $AEFD$ با هم متشابهند نقطه‌ی E وسط ضلع AB است.نسبت طول به عرض هر مستطیل برابر است با:

۱) ۲   ۲) $\sqrt{۲}$ ✓   ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow\frac{۲AE}{AD}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow ۲AE^{۲}=AD^{۲}\Rightarrow AD=\sqrt{۲}AE\Rightarrow\frac{AD}{AE}=\sqrt{۲}$$

مثال: عکسی مستطیل شکل به ابعاد ۴و۶ سانتیمتر را بزرگ کرده ایم اگر به عرض عکس ۶ سانتیمتر اضافه کرده باشیم به طول آن چند سانتیمتر اضافه شده است؟　۱) ۱۲　　۲) ۹ ✓　　۳) ۱۵　　۴) ۶

به طول اضافه شده است.　$\frac{۴}{۶}=\frac{۴+۶}{x}\Rightarrow x=\frac{۶\times۱۰}{۴}=۱۵\Rightarrow ۱۵-۶=۹$

نکته مهم:

۱- در دو شکل متشابه نسبت محیط ها ، قطرها ،ارتفاع ها ، میانه ها و نیمسازها با نسبت تشابه دو شکل برابرند.

۲- در دو شکل متشابه نسبت مساحت ها با مجذور(مربع) نسبت تشابه دو شکل برابر است.

مثال: طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتیمتر و طول کوچک ترین ضلع مثلثی متشابه با اولی ۲۲/۵ سانتیمتر است.محیط مثلث دوم چقدر است؟

۱) ۱۰۲　　۲) ۱۰۲/۵　　۳) ۱۰۳　　۴) ۱۰۳/۵ ✓

طبق نکته بالا نسبت دوضلع متناظر در دو مثلث با نسبت محیط های دو مثلث برابر است.

$$\frac{۵}{۲۲/۵}=\frac{۲۳}{x}\Rightarrow x=\frac{۲۲/۵\times۲۳}{۵}=۱۰۳/۵$$

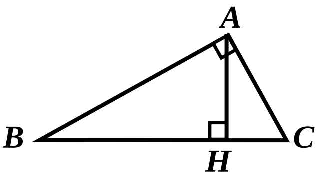
مثال: نسبت مساحت های دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{۴}{۹}$ است اگر اندازه‌ی یکی از آنها ۶ باشد اندازه‌ی ضلع متناظر در شکل دیگر برابر است با:

۱) ۴ یا ۸　　۲) ۴ یا ۹ ✓　　۳) ۹ یا ۸　　۴) ۵ یا ۱۳

چون نسبت مساحت ها با مجذور نسبت تشابه برابر است داریم:　نسبت تشابه $\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\frac{۲}{۳}$

$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{x}\Rightarrow x=\frac{۳\times۶}{۲}=۹$　و　$\frac{۲}{۳}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x=\frac{۲\times۶}{۳}=۴$

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر داریم:

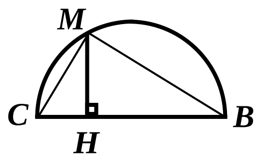


مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب دو قطعه ای که روی وتر به وجود می آورد　$AH^{۲}=BH\times CH$

$$AB^{۲}=BH\times BC$$

$$AC^{۲}=CH\times BC$$

$$AB\times AC=AH\times BC$$

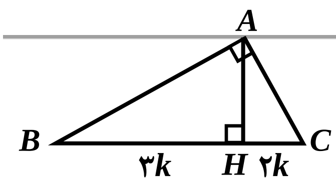


مثال)در نیم دایره مقابل $MH=۶$ و $HB=۹$ می باشد شعاع نیم دایره کدام است؟

۱)۴/۵　　۲)۵/۵　　۳)۶/۵　　۴) ۷/۵

حل) M را به B و C وصل می کنیم چون $\angle CMB$ محاطی رو به رو به قطر می باشد ۹۰ درجه می شود داریم:

$MH^{۲}=CH\times HB\Rightarrow ۳۶=۹CH\Rightarrow CH=۴$　و　$BC=۹+۴=۱۳\Rightarrow$ شعاع دایره $=۱۳\div۲=۶/۵$

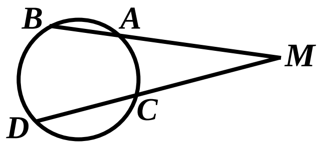


مثال: در مثلث قائم الزاویه ای طول وتر برابر $۱۵\sqrt{۶}$ واحد است اگر ارتفاع وارد بر وتر آن را به نسبت ۲و۳ تقسیم کند اندازه ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۱۶　　۳)۲۰　　۴) ۱۸

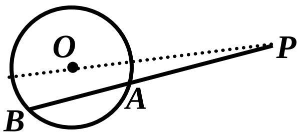
$$۲k + ۳k = ۱۵\sqrt{۶} \Rightarrow ۵k = ۱۵\sqrt{۶} \Rightarrow k = ۳\sqrt{۶}$$

$$AH^{۲} = BH \times CH = ۳k \times ۲k = ۶k^{۲} = ۶ \times \left(۳\sqrt{۶}\right)^{۲} = ۶ \times ۵۴ = ۳۲۴ \Rightarrow AH = ۱۸$$



نکته: اگر از یک نقطه بیرون دایره دو قاطع بر دایره رسم کنیم داریم:

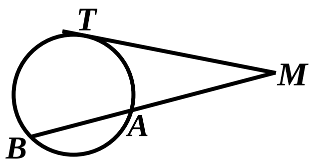
$$MA \times MB = MC \times MD$$



مثال) در شکل مقابل $PA = ۵, AB = ۳, R = ۴cm$ فاصله‌ی نقطه P تا مرکز دایره چقدر است؟

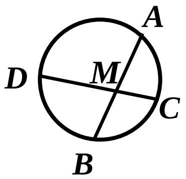
۱) $۲\sqrt{۲۱}$　　　۲) $۲\sqrt{۱۴}$　　　۳) $۴\sqrt{۷}$　　　۴) $۳\sqrt{۷}$

حل) ابتدا P را به مرکز دایره وصل کرده وامتداد می دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند و سپس از نکته بالا استفاده می کنیم.



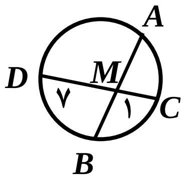
نکته : اگر MT مماس بر دایره باشد.آنگاه رابطه‌ی زیر را داریم:

$$MT^{۲} = MA \times MB$$



نکته : اگر دو وتر یک دیگر را در داخل دایره در نقطه ای مانند M قطع کنند داریم:

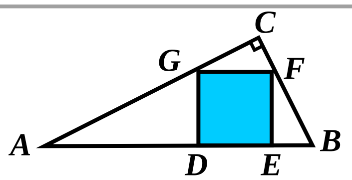
$$MA \times MB = MC \times MD$$



مثال: در شکل مقابل نقطه M وسط AB است اندازه AB چقدر است؟

۱) $\sqrt{۷}$　　　۲) ۸　　　۳) ۴　　　۴) $۲\sqrt{۷}$

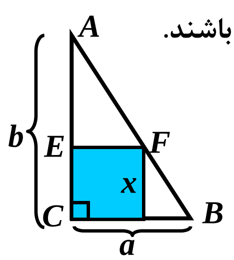
$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow MA \times MA = ۱ \times ۷ \Rightarrow MA^{۲} = ۷ \Rightarrow MA = \sqrt{۷} \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۷}$$



نکته: اگر مربعی در یک مثلث قائم الزاویه محاط شده باشد طوری که یک ضلع مربع نیز روی وتر منطبق باشد رابطه های زیر برقرار است.

$$DG \times FE = AD \times EB \quad \text{یا} \quad DE^{۲} = AD \times EB$$

اثبات) ثابت کنید دو مثلث AGD و BEF با هم متشابهند سپس تناسب اضلاع متناظر را بنویسید و طرفین وسطین کنید.



نکته: اگر مربعی در یک مثلث قائم الزاویه محاط شده باشد طوری که اضلاع مربع روی دو ضلع قائم آن منطبق باشند. رابطه ی زیر برقرار است.

یعنی معکوس ضلع مربع برابر است با مجموع معکوس های دو ضلع قائم مثلث

$$\frac{۱}{x} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$$

اثبات) ثابت کنید دو مثلث ABC و AEF متشابهند وسپس تناسب اضلاع را بنویسید.

حجــــــــــــم

انواع حجم:

۱- حجم هندسی : از شکل های هندسی و منظم و تعریف شده تشکیل شده اند.

۲- حجم غیر هندسی: از شکل های نامنظم و غیر مشخص درست شده اند.

انواع حجم های هندسی:

۱- حجم های منشوری: دارای دو قاعده برابر وموازی هستند ووجه های جانبی آنها مستطیل یا متوازی الاضلاع هستند.

مثل مکعب، منشور سه پهلوو. . .

۲-حجم های هرمی(مخروطی): دارای یک قاعده می باشند.تمامی وجه های جانبی در یک نقطه مشترک هستند که به آن راس می گویند

۳- حجم های کروی:

یال: به محل برخورد هر دو سطح یال می گویند.

راس: به نقطه برخورد هر سه سطح ، راس می گویند.

نکته: به طور کلی دریک منشور که قاعده آن یک n ضلعی باشد داریم:

تعداد وجه ها $= n+۲$　　　تعداد راس ها $= ۲n$　　　تعداد یالها $= ۳n$

نکته: در یک هرم که قاعده آن یک n ضلعی باشد داریم:

تعداد وجه ها $= n+۱$　　　تعداد راس ها $= n+۱$　　　تعداد یالها $= ۲n$

حجم منشور = مساحت قاعده × ارتفاع $\Rightarrow V = S.h$

مساحت جانبی منشور = محیط قاعده × ارتفاع $\Rightarrow S = P.h$

مساحت کل منشور = مساحت جانبی منشور + مساحت دو قاعده

نکته: اگر طول یال یک مکعب یا مکعب مستطیلی را n برابر کنیم :

۱- طول قطر آن n برابر می شود.

۲- مساحت هر وجه، مساحت جانبی و مساحت کل آن $n^۲$ برابر می شود.

۳- حجم آن $n^۳$ برابر می شود.

مثال: اگر ابعاد یک مکعب مستطیل را ۴ برابر کنیم طول قطر آن ۴ برابر می شود ومساحت هر وجه،مساحت جانبی و مساحت کل آن $۴^۲$ برابر یعنی ۱۶ برابر می شود.وحجم آن نیز $۴^۳$ برابر یعنی ۶۴ برابر می شود.

نکته: هر مکعب مستطیل دارای ۶ وجه ،۸ راس، ۱۲ یال، ۴قطر، ۱۲ قطر وجه می باشد.

نکته: مجموع اندازه همه یال های مکعب مستطیل ۴برابر مجموع ابعاد(طول وعرض وارتفاع) آن است.

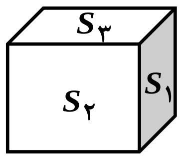
مثال:حجم مکعب مستطیلی به اضلاع a,b,c برابر ۸ سانتیمتر مکعب وسطح کل آن ۳۲سانتیمتر مربع است وبین ۳ یال ان رابطه‌ی $b^2=ac$ برقرار است مجموع طول همه‌ی اضلاع این مکعب مستطیل چقدر است؟

۱) ۲۸   ۲) ۳۲   ۳) ۴۰   ۴) ۳۶

$$\left.\begin{array}{l} V=abc \\ b^2=ac \end{array}\right\} \Rightarrow b^3=8 \Rightarrow b=\sqrt[3]{8}=2$$

$$\text{کل}\ S=2(ab+ac+bc)\Rightarrow 32=2(2a+4+2c)\Rightarrow 32=4(a+2+c)\Rightarrow 8=a+2+c\Rightarrow a+c=6$$

$$\text{مجموع طول یال ها}=4(a+b+c)=4\times 8=32$$

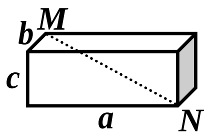


نکته: در هر مکعب مستطیل حاصل ضرب مساحت سه وجه مشترک در یک راس با مجذور حجم آن برابر است.

$$S_1\times S_2\times S_3=V^2$$

مثال:حجم مکعب مستطیلی که مساحت هر یک ازوجوه جانبی وقاعده‌ی آن به ترتیب ۱۲سانتیمترمربع، ۸تیمتر مربع و۶ سانتیمتر مربع می باشدبر حسب سانتیمتر مکعب کدام است؟

۱)۵۷۶   ۲)۴۴   ۳) ۹   ۴) ۱۰۴



نکته: اندازه هر قطر مکعب مستطیل به طول a وعرض b و ارتفاع c برابر است با:

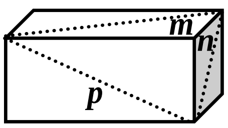
$$MN=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

مثال: اگر ابعادیک مکعب مستطیل $2\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ باشد طول قطر مکعب مستطیل چند است

$$MN=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+\sqrt{3}^2+\sqrt{5}^2}=\sqrt{8+3+5}=\sqrt{16}=4$$

مثال: ابعاد مکعب مستطیلی $a\sqrt{2},a\sqrt{3},\sqrt{6a}$ است. در صورتیکه براتیم قطر مکعب مستطیل $4\sqrt{2}$است مقدار a کدام است؟

۱)۲ ✓   ۲) ۱   ۳) ۳   ۴) ۵



نکته: اگر اندازه قطرهای سه وجه مشترک از یک مکعب مستطیل به ترتیب m و n و p باشند

قطر مکعب مستطیل برابر است با: $\sqrt{\dfrac{m^2+n^2+p^2}{2}}$

مثال: در یک مکعب مستطیل قطرهای وجه های جانبی $\sqrt{13},\sqrt{13},3\sqrt{2}$ است قطر مکعب مستطیل چقدر است؟

۱) $\sqrt{44}$ ۲) $\sqrt{32}$ ۳) ۸   ۴) $\sqrt{22}$

حل: روش اول: با کمک فرمول بالا

$$\sqrt{\frac{m^۲+n^۲+p^۲}{۲}}=\sqrt{\frac{\sqrt{۱۳}^۲+\sqrt{۱۳}^۲+\left(۳\sqrt{۲}\right)^۲}{۲}}=\sqrt{\frac{۱۳+۱۳+۱۸}{۲}}=\sqrt{۲۲}$$

روش دوم: با استفاده از قطر های مکعب مستطیل(اگر a,b,c اضلاع مکعب مستطیل باشند.)

$$\left.\begin{array}{l} \text{قطر وجه اول}=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow a^۲+b^۲=۱۳ \\ \text{قطر وجه دوم}=\sqrt{a^۲+c^۲}=\sqrt{۱۳}\Rightarrow a^۲+c^۲=۱۳ \\ \text{قطر وجه سوم}=\sqrt{b^۲+c^۲}=۳\sqrt{۲}\Rightarrow b^۲+c^۲=۱۸ \end{array}\right\}\Rightarrow ۲\left(a^۲+b^۲+c^۲\right)=۴۴\Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲=۲۲\ \Rightarrow$$

$$\text{قطر مکعب مستطیل}=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}=\sqrt{۲۲}$$

نکته: تعداد برشها برای تبدیل یک مکعب مربع به طول یال n واحد به $n^۳$ مکعب کوچک برابر است با: $۳(n-۱)$

مثال: مکعبی به ضلع ۱۰ سانتیمترمفروض است می خواهیم آن را به ۱۰۰۰ مکعب کوچکتر و مساوی تقسیم کنیم برای این کار حداقل به چند برش نیاز داریم؟

۱) ۲۵　　۲) ۲۷　　۳) ۴۹　　۴) ۳۰

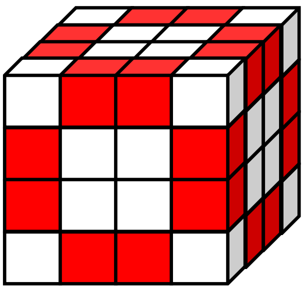
حل) $۳(n-۱)=۳\times(۱۰-۱)=۲۷$

نکته : هرگاه موازی با وجه های مکعبی به آن برش بزنیم به ازای هر برش دو وجه به آن افزوده می شود.

مثال:به موازات وجه های مکعبی ۱۲ برش زدیم. مساحت مجموع جسم های به وجود آمده چند برابر مساحت مکعب اولیه است؟

۱)۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴)۷

حل: چون با هر برش ۲ وجه به آن اضافه می شود پس با ۱۲ برش ۲۴ وجه به آن اضافه می شود و چون هر ۶ وجه برابر با مساحت کل یک مکعب می شود پس مجموع کل وجه ها را باید تقسیم بر۶ کنیم داریم: $۳۰=۶+۲۴=$کل وجه ها درنتیجه　　$۳۰\div۶=۵$



نکته: پس از رنگ کردن مکعبی که از $n^۳$ مکعب واحد تشکیل شده است داریم:

۱- تعداد مکعب هایی که سه وجه آنها رنگی می شود.(مکعب هایی که در گوشه ها هستند.) ۸ تاست

۲- تعداد مکعب هایی که دو وجه آنها رنگی می شود .(مکعب هایی که روی یالها هستند.) $۱۲\times(n-۲)$

۳- تعداد مکعب هایی که یک وجه آنها رنگی می شود. $۶\times(n-۲)^۲$

۴-تعداد مکعب هایی که اصلاً رنگ نمی شوند. $(n-۲)^۳$

نکته: در مکعب مستطیل به طول a وعرض b و ارتفاع c تعداد مکعب های واحد رنگی یا غیر رنگی برابر است با:

۱- سه وجه رنگی:　همواره ۸ تا

۲-دو وجه رنگی:　$۴\times[(a-۲)+(b-۲)+(c-۲)]=۴\times[a+b+c-۶]$

۳- یک وجه رنگی:　$۲\times[(a-۲)(b-۲)+(a-۲)(c-۲)+(b-۲)(c-۲)]$

۴- هیچ وجه رنگی:　$(a-۲)(b-۲)(c-۲)$

مثال: مکعب مستطیلی به ابعاد ۶×۸×۱۰ را در رنگ فرو برده وسپس آن را به مربع های واحد برش زدیم.اختلاف تعداد مکعب های کوچک ۲ وجه رنگی با مکعب های کوچک رنگ نشده چند تاست؟

۱) ۹۸	۲) ۱۰۰	۳) ۱۲۰	۴) ۱۲۴

نکته: **هرگاه یک مستطیل را یک بار حول طولش وبار دیگر حول عرضش دوران دهیم همواره مساحت جانبی دو استوانه ای که به وجود میآیند با هم برابر است. اما نسبت مساحت کل آنها برابر است با:**

$$\frac{\text{عرض}}{\text{طول}}=\frac{\text{مساحت کل حاصل از دوران حول طول}}{\text{مساحت کل حاصل از دوران حول عرض}}$$

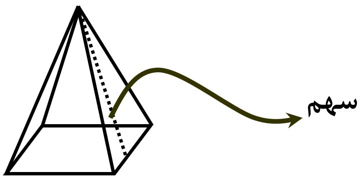
و نسبت حجم دو استوانه ایجاد شده برابر است با:

$$\frac{\text{عرض}}{\text{طول}}=\frac{\text{حجم حاصل از دوران حول طول}}{\text{حجم حاصل از دوران حول عرض}}$$

مثال: مستطیلی به طول ۶ وعرض ۴ را ابتدا حول طول وسپس حول عرض آن دوران می دهیم نسبت حجم حاصل از دوران اول به حجم حاصل از دوران دوم چقدر است؟

۱) $\frac{3\pi}{2}$	۲) $\frac{2\pi}{3}$	۳) $\frac{3}{2}$	۴) $\frac{2}{3}$

هـــــرم



ارتفاع هرم: پاره خطی که از رأس هرم بر قاعده عمود می شود

سهم: به ارتفاع هر وجه جانبی سهم هرم می گوییم.

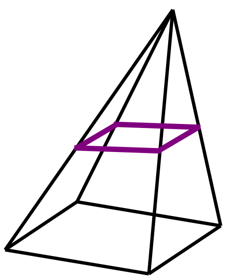
حجم . مساحت جانبی و مساحت کل هرم:

اگر مساحت قاعده هرم S و ارتفاع آن h و محیط قاعده آن P و سهم آن T باشد داریم:

$$V=\frac{1}{3}S.h$$

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{1}{2}P.T$$

$$S_{\text{کل}}=S_{\text{قاعده}}+S_{\text{جانبی}}$$



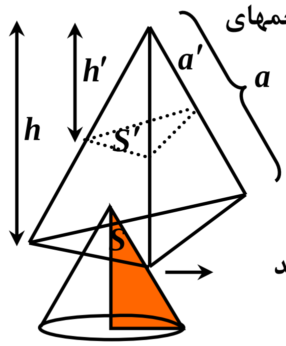
هرم ناقص: اگر هرمی را با صفحه ای موازی با صفحه قاعده قطع دهیم و هرم ایجاد شده را حذف کنیم به باقیمانده شکل هرم ناقص می گوییم.

اگر h فاصله‌ی دو قاعده در هرم ناقص و S,S' مساحت دو قاعده هرم ناقص و T سهم هرم ناقص باشند حجم ، مساحت جانبی و مساحت کل هرم ناقص از فرمول های زیر قابل محاسبه است.

$$V=\frac{h}{3}\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)$$

$$\text{مساحت جانبی هرم ناقص منتظم}=\frac{T}{2}\left(P+P'\right)$$

$$\text{مساحت کل هرم ناقص منتظم}=S_{\text{جانبی}}+S+S'$$



نکته: اگر به موازات قاعده هرمی یک برش بزنیم دو هرم به وجود می آید که راجع به مساحت ها و حجمهای آنها نکات زیر را داریم:

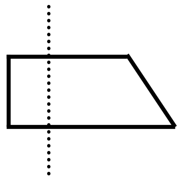
$$\frac{a}{a'}=\frac{h}{h'} \quad \text{و} \quad \frac{S}{S'}=\left(\frac{h}{h'}\right)^{۲}=\left(\frac{a}{a'}\right)^{۲} \quad \text{و} \quad \frac{V}{V'}=\left(\frac{h}{h'}\right)^{۳}=\left(\frac{a}{a'}\right)^{۳}$$

مخروط:
از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمش مخروط حاصل می شود.

مولد مخروط: وتر مثلث قائم الزاویه ای که مخروط را به وجود می آورد.

ضلعی که مثلث حولش دوران می کند **ارتفاع** مخروط می شود وضلع قائم دیگر **شعاع قاعده** مخروط می شود.

از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وترش دو مخروط حاصل می شود که قاعده مشترک دارند.



تذکر مهم: اگر شکلی را حول خطی که آن را به دو قسمت دلخواه تقسیم می کند دوران دهیم حجم ایجاد شده ، حجمی است که توسط قسمت بزرگتر شکل به دست می آید.(حجم شکل مقابل مخروط ناقص می شود.)

حجم . مساحت جانبی و مساحت کل مخروط:

$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\ \text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$$

$$\text{مساحت جانبی مخروط قائم}=\frac{۱}{۲}\ \text{محیط قاعده}\times\text{مولد}=\pi rL$$

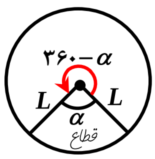
$$\text{مساحت کل مخروط قائم}=\text{مساحت جانبی}+\text{مساحت قاعده}=\pi rL+\pi r^{۲}$$

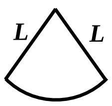
گسترده یک مخروط:

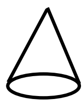
اگر از یک دایره قطاعی را جدا کنیم هم با قطاع و هم با مانده دایره می توان مخروط ساخت.(شعاع دایره، مولد مخروط می شود.)

الف) محیط قاعده مخروطی که با قطاع ساخته می شود.

$$P_{\text{قاعده}}=\frac{\alpha}{۳۶۰}\times ۲L\pi=\frac{\alpha L\pi}{۱۸۰}$$





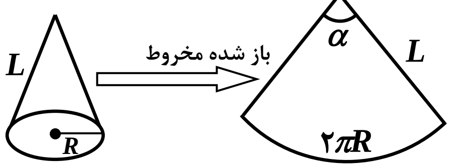


ب) محیط قاعده مخروطی که با مانده دایره درست می شود.

$$P_{\text{قاعده}}=\frac{۳۶۰-\alpha}{۳۶۰}\times ۲L\pi=\frac{(۳۶۰-\alpha)L\pi}{۱۸۰}$$

ج) از باز کردن یک مخروط قائم به شعاع R و مولد L ، قطاع دایره ای به شعاع L و اندازه کمانی برابر با محیط قاعده مخروط یعنی $۲\pi R$ حاصل می شود که همواره $\alpha=\frac{۲\pi R}{L}$ پس داریم

$$۲\pi R=\frac{\alpha}{۳۶۰}\times ۲\pi L\Rightarrow\frac{R}{L}=\frac{\alpha}{۳۶۰}$$



مثال: از دایره ای به شعاع ۱۰ قطاعی از دایره به اندازه α درجه جدا کرده و با باقیمانده دایره یک مخروط ساختیم α چند درجه باشد تا قطر قاعده مخروط ساخته شده ۱۲ سانتیمتر شود.

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۴۵ ۴) ۱۳۰

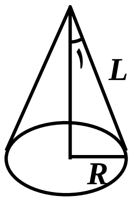
حل) $L=۱۰$ و $۲R\pi=۱۲\pi=$ محیط قاعده مخروط $\Rightarrow ۲R=۱۲$

$$P=\frac{(۳۶۰-\alpha)\times L\pi}{۱۸۰}\Rightarrow ۱۲\pi=\frac{(۳۶۰-\alpha)\times ۱۰\pi}{۱۸۰}\Rightarrow ۳۶۰-\alpha=۲۱۶\Rightarrow \alpha=۳۶۰-۲۱۶=۱۴۴$$ قاعده مخروط

مثال: اگر مولد مخروطی ۸ ومساحت قاعده آن برابر ۲۷π باشد مساحت جانبی آن برابر است با:

۱) $۸\pi\sqrt{۳}$ ۲) $۲۴\pi\sqrt{۳}$ ۳) $۳\pi\sqrt{۳}$ ۴) $۶\pi\sqrt{۳}$

حل: $\pi R^۲=۲۷\pi\Rightarrow R^۲=۲۷\Rightarrow R=۳\sqrt{۳}\quad\Rightarrow$ جانبی $S=\pi RL=\pi\times ۳\sqrt{۳}\times ۸=۲۴\pi\sqrt{۳}$



مثال: گسترده‌ی سطح جانبی یک مخروط دواره نیم دایره است.زاویه‌ی مولد این مخروط با ارتفاع آن چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

حل) $\frac{R}{L}=\frac{\alpha}{۳۶۰}\Rightarrow\frac{R}{L}=\frac{۱۸۰}{۳۶۰}=\frac{۱}{۲}$ چون R نصف L شد پس در مثلث قائم الزاویه مقابل زاویه $\hat{۱}$ برابر ۳۰ درجه می شود .زیرا در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل زاویه ۳۰ درجه نصف وتر می شود.

نکته: اگر در یک مخروط:

۱- ارتفاع n برابر شود اما شعاع قاعده ثابت بماند حجم مخروط نیز n برابر می شود.

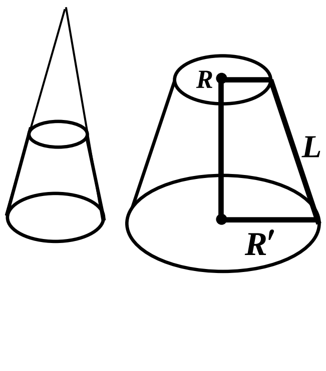
۲- شعاع قاعده n برابر اما ارتفاع ثابت بماند حجم مخروط $n^۲$ برابر می شود.

۳- شعاع قاعده و ارتفاع هر دو n برابر شوند حجم مخروط $n^۳$ برابر می شود.

مثال: در یک مخروط شعاع قاعده را ۲ برابر وارتفاع را ۹برابر می کنیم حجم چه تغییری می کند؟

۱) ۱۸برابر ۲) ۳۶ برابر ۳) ۱۸۲ برابر ۴) ۸۱ برابر

حل) $۹\times ۲^۲=۳۶$ برابر می شود.



مخروط ناقص : هرگاه مخروطی را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده قطع دهیم ومخروط ایجاد شده را حذف کنیم به باقیمانده شکل مخروط ناقص می گوییم.

نکته: از دوران یک ذوزنقه قائم الزاویه حول ساق قائمش یک مخروط ناقص قائم ایجاد می شود.

مساحت جانبی مخروط ناقص $=\pi L(R+R')$

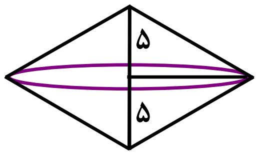
مساحت کل = مساحت دو قاعده + مساحت جانبی

$$V=\frac{۱}{۳}\pi h\left(R^۲+R'^۲+RR'\right)$$

نکته: حجم حاصل از دوران یک مثلث متساوی الاضلاع حول یکی از اضلاعش برابر است با: $V=\frac{\pi}{۴}a^۳$

مثال: مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۱۰ سانتیمتر را حول یک ضلع آن دوران می دهیم حجم شکل حاصل چقدر است؟

۱) ۷۵۰π　　　۲) ۲۵۰π　　　۳) ۱۲۵π　　　۴) ۱۰۰۰π

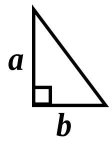


حل) شکل حاصل دو مخروط مساوی می باشد که ارتفاع آنها نصف ضلع مثلث یعنی ۵سانتیمتر و شعاع قاعده آنها برابر ارتفاع مثلث است و چون ارتفاع مثلث ضلع رو به رو به زاویه‌ی ۶۰ درجه می شود داریم

$V = ۲\times\frac{S.h}{۳} = ۲\times\frac{\left(۵\sqrt{۳}\right)^{۲}\times\pi\times ۵}{۳} = ۲۵۰\pi$ دو مخروط به هم چسبیده $\Rightarrow$ شعاع = ارتفاع مثلث $= \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱۰ = ۵\sqrt{۳}$

روش دوم: با استفاده از فرمول بالا: $V = \frac{\pi}{۴}a^{۳} = \frac{\pi}{۴}\times ۱۰^{۳} = \frac{\pi}{۴}\times ۱۰۰۰ = ۲۵۰\pi$

نکته: نسبت حجم مخروط های به دست آمده از دوران یک مثلث قایم الزاویه حول اضلاع قائم آن برابر است با:معکوس نسبت اضلاعی که حول آنها دوران کرده اند.



Vحجم حاصل از دوران حول ضلع a

V'حجم حاصل از دوران حول ضلع b

$$\frac{V}{V'} = \frac{b}{a}$$

مثال: نسبت حجم مخرو طهای به دست آمده از دوران یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم ۱۲ و۵ چند می شود؟

دوران حول ۵ $V = \frac{۱۲\times ۱۲\times\pi\times ۵}{۳} = ۲۴۰\pi$　و　دوران حول ۱۲ $V' = \frac{۵\times ۵\times\pi\times ۱۲}{۳} = ۱۰۰\pi$

$$\frac{V}{V'} = \frac{۲۴۰\pi}{۱۰۰\pi} = \frac{۱۲}{۵}$$

نکته: اگر به موازات قاعده مخروطی یک برش بزنیم نسبت حجم مخروط های ایجاد شده با مکعب نسبت ارتفاع هایشان برابر است. ومساحت مخروط های ایجاد شده با مربع نسبت ارتفاع هایشان برابر است.

$$\frac{L}{L'} = \frac{h}{h'} \quad و \quad \frac{S}{S'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^{۲} \quad و \quad \frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^{۳}$$

برای اثبات از قضیه تالس استفاده می شود.

مثال: مخروطی به شعاع قاعده ۳ وارتفاع ۶ را با صفحه موازی با صفحه قاعده و به فاصله ۴ واحد از آن قطع می دهیم حجم مخروط جدا شده کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$　　　۲) π　　　۳) $\frac{۴\pi}{۳}$　　　۴) ۲π

حل: حجم مخروط اولیه برابر است با: $V = \frac{Sh}{۳} = \frac{۳\times ۳\times\pi\times ۶}{۳} = ۱۸\pi$ و ارتفاع مخروط دوم برابر است با $۶ - ۴ = ۲$ پس داریم:

$$\frac{V}{V'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^{۳} \Rightarrow \frac{۱۸\pi}{V'} = \left(\frac{۶}{۲}\right)^{۳} = ۲۷ \Rightarrow V' = \frac{۱۸\pi}{۲۷} = \frac{۲\pi}{۳}$$

نکته: مخروط محاط درون یک مکعب زمانی بیشترین حجم را دارد که قطر قاعده مخروط مساوی با ضلع مکعب وارتفاع مخروط نیز با ضلع مکعب مساوی باشد.

نکته: هرگاه مخروطی را به فاصله‌ی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ از رأس آن یا $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ از قاعده آن برش دهیم مساحت جانبی دو جسم ایجاد شده با هم برابر است.

نکته: هرگاه مخروطی را به فاصله‌ی $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ از رأس برش دهیم حجم دو جسم ایجاد شده با هم برابر می شود.

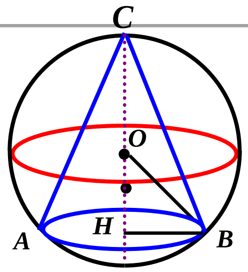
کُـــــــره: از دوران یک دایره یا نیم دایره حول قطرش کره حاصل می شود.

$$S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 \qquad \text{و} \qquad V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

مثال: مساحت کره ای معادل مساحت دو کره به شعاع های ۳و ۴ است. شعاع این کره برابر است با:

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $\frac{7}{2}$

$$4\pi R^2 = 4\pi\times 3^2 + 4\pi\times 4^2 \Rightarrow R^2 = 9+16 = 25 \Rightarrow R=\sqrt{25}=5$$



مثال: در کره ای به شعاع ۵ سانتیمتر یک مخروط به شعاع قاعده ۳ سانتیمتر محاط شده است حجم مخروط چقدر است؟

۱) 21π ۲) 24π ۳) 26π ۴) 27π

حل: در مثلث قائم الزاویه OHB داریم : $OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow 5^2 = OH^2 + 3^2 \Rightarrow OH = 4$

پس ارتفاع مخروط برابر است با: $CO + OH = 5+4 = 9$ بنابراین حجم مخروط برابر است با:

$$\checkmark V = \frac{Sh}{3} = \frac{3\times 3\times\pi\times 9}{3} = 27\pi$$

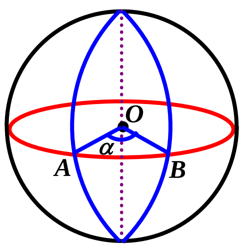
نکته: همواره نسبت حجم کره به مساحت آن ،ثلث شعاع کره می باشد. $\frac{V}{S} = \frac{R}{3}$

نکته: اگر شعاع کره‌ای **۳** باشد همواره عدد **مساحت** کره با عدد **حجم** آن برابر می شود.

نکته: اگر R و R' شعاع دو کره باشند همواره داریم : $\frac{V}{V'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^3$

نکته: هرگاه یک مکعب یا یک مکعب مستطیل در کره‌ای محاط باشند قطر مکعب یا مکعب مستطیل با قطر کره برابر است.

قاچ کروی: از دوران یک نیم دایره حول قطرش به اندازه a درجه قاچ کروی پدید می آید.



اگر زاویه $\hat{AOB}$ برابر a باشد .

$$S_{\text{پوسته قاچ}} = \frac{a}{360}\times \text{سطح کره} \qquad V_{\text{قاچ}} = \frac{a}{360}\times \text{حجم کره}$$

مثال: حجم حاصل از دوران یک نیم دایره به شعاع ۶ سانتیمتر حول قطرش به اندازه ۳۰ درجه چقدر است؟

سوالات ریاضی آزمون تیزهوشان سراسر کشور در سال ۹۴-۱۳۹۳

۱- در مورد پنج عدد اول متفاوت به نام های d,c,b,a و e می دانیم $a+b$ یک عدد اول است و همچنین $c+d+e$ نیز یک عدد اول است.کدام یک از اعداد زیر می تواند اول باشد؟

۱) $a+b+c$		۲) $a+b+c+d+e$		۳) $c+d$		۴) $e+b$ ✓

حل) چون a,b,c,d,e عدد اول هستند ومجموع $a+b$ نیز عددی اول است پس $a=۲$ یا $b=۲$ و چون $c+d+e$ نیز اول است پس d,c و e هر کدام فرد و عدد اول می باشند .اکنون گزینه ها را بررسی می کنیم.

گزینه ۱ غلط است زیرا $a+b$ عددی فرد و c نیز فرد می باشد پس $a+b+c$ عددی زوج است و بنابراین اول نمی باشد.

گزینه ۲ غلط است $c+d+e$ عددی فرد و $a+b$ نیز فرد می باشد پس مجموع آنها عددی زوج می شود و غیر اول.

گزینه ۳ نیز غلط است زیرا c و d نیز هر کدام عددی اول وغیر ۲ می باشند پس مجموع آنها یعنی $c+d$ نیز عددی زوج میشود وغیر اول.

پس با توجه به تو ضیحات در ابتدای حل $e+b$ می تواند عددی اول باشد.

۲- کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

۱) میانگین هر نه عدد بخشپذیر بر ۹ ،بر ۹ بخشپذیر است.

۲) میانگین نه عدد بخشپذیر بر ۹ نمی تواند بر ۹ بخشپذیر باشد.

۳) ۸ عدد وجود دارد که توانی از ۲ نیستند اما میانگین آنها توانی از ۲ است. ✓

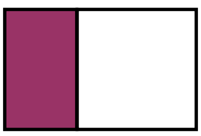
۴) میانگین هر ۸ عددی که توانی از ۲ باشند توانی از ۲ است.

حل)گزینه ۱ غلط است زیرا:
$$\left[(-۳۶)+(-۲۷)+(-۱۸)+(-۹)+۹+۱۸+۲۷+۳۶+۴۵\right]\div ۹=۵$$

گزینه ۲ غلط است زیرا:
$$\frac{۱\times ۹+۲\times ۹+۳\times ۹+۴\times ۹+...+۹\times ۹}{۹}=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹=۴۵$$

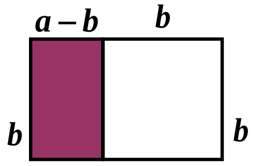
گزینه ۳درست است زیرا:
$$\frac{۰+۱+۳+۵+۷+۱۰+۱۲+۲۶}{۸}=\frac{۶۴}{۸}=۸=۲^{۳}$$

گزینه ۴ نیز غلط است زیرا:	۵۱۰توانی از ۲ نمی باشد.
$$۲^{۱}+۲^{۲}+۲^{۳}+۲^{۴}+۲^{۵}+۲^{۶}+۲^{۷}+۲^{۸}=۵۱۰$$



۳- مطابق شکل مقابل از مستطیل بزرگ یک مربع جدا کرده ایم مستطیل هاشور خورده با مستطیل بزرگ متشابه است. اگر مساحت مستطیل بزرگ ۱۰ باشد تفاضل مربعات اضلاع مستطیل بزرگ چقدر است؟

۱) ۵		۲) $۵\sqrt{۲}$		۳) ۱۰ ✓		۴) $۱۰\sqrt{۲}$



حل) چون دو مستطیل متشابهند داریم:
$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}\Rightarrow a^{۲}-ab=b^{۲}$$
$$a^{۲}-ab=b^{۲} \quad و \quad ab=۱۰\Rightarrow a^{۲}-۱۰=b^{۲}\Rightarrow a^{۲}-b^{۲}=۱۰$$

۴- اسبی برای طی کردن مسیر ۳۶ کیلو متری اگر یورتمه برود ۳ ساعته مسیر را طی می کند و اگر آهسته برود ۹ ساعته مسیر را طی می کنداگر قرار باشد این ۳۶ کیلو متر را در ۵ ساعت طی کند چند کیلومتر از مسیر را باید آهسته برود؟

۱) ۲۴　　۲) ۱۲ ✓　　۳) ۱۸　　۴) ۶

$x =$ ساعاتی که اسب یورتمه می رود　　$y =$ ساعاتی که اسب آهسته می رود

مسافتی که در هر ساعت به صورت یورتمه می رود. $۳۶ \div ۳ = ۱۲$　　مسافتی که در هر ساعت به صورت آهسته می رود $۳۶ \div ۹ = ۴$

$\begin{cases} x + y = ۵ \\ ۱۲x + ۴y = ۳۶ \end{cases}$ بعد از حل دستگاه $\Rightarrow x = ۲, y = ۳ \Rightarrow ۳ \times ۴ = ۱۲$ کیلومتر

۵- در یک میهمانی ۵۰٪ میهمان ها جوان وبقیه پیر هستند. ۷۵٪ میهمان ها خانم و بقیه آقا هستند. ۴۰٪ خانم ها جوان وبقیه پیر هستند. آقایان پیر چند درصد میهمان ها هستند؟

۱) ۲۰٪　　۲) ۱۵٪　　۳) ۱۰٪　　۴) ۵٪ ✓

حل) خانم های پیر $۱۰۰\% - ۴۰\% = ۶۰\%$　　$y =$ خانم ها　　$x =$ آقایان

تعداد خانم های پیربه کل میهمان ها　$۷۵\%(x+y) \Rightarrow \frac{۶۰}{۱۰۰}\left[\frac{۷۵}{۱۰۰}(x+y)\right] = \frac{۹}{۲۰}(x+y)$

تعداد میهمان های پیر $\frac{۵۰}{۱۰۰}(x+y) = \frac{۱}{۲}(x+y) \Rightarrow$　　و　　تعداد خانم های پیر $\frac{۹}{۲۰}(x+y)$

آقایان پیر $= \frac{۱}{۲}(x+y) - \frac{۹}{۲۰}(x+y) = \frac{۱}{۲۰}(x+y) = \frac{۵}{۱۰۰}(x+y)$

۶- میانگین وزن تعدادی گاو برابر با ۳۰۰ کیلو گرم است وقتی ۳تا از گاو ها مردند میانگین وزن گاو های باقیمانده بیشتر از ۳۰۰ کیلو گرم شد.اگر وزن دو گاو از گاوهای مرده ۲۸۰ و۴۰۰ کیلو گرم باشد وزن گاو دیگر کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

۱) ۲۲۰　　۲) ۳۲۰　　۳) ۲۱۰ ✓　　۴) ۳۱۰

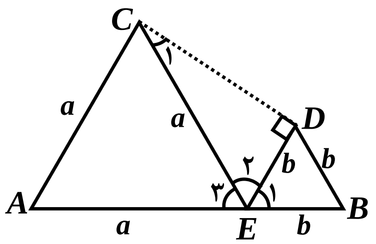
حل) چون میانگین وزن گاوهای باقیمانده بیشتر از میانگین وزن تمام گاوها شده است پس باید میانگین وزن گاوهای مرده از ۳۰۰ کیلو کمترباشد.درنتیجه داریم:

$$\frac{۴۰۰ + ۲۸۰ + x}{۳} < ۳۰۰ \Rightarrow ۴۰۰ + ۲۸۰ + x < ۹۰۰ \Rightarrow x < ۲۲۰$$

پس وزن گاو سوم باید از ۲۲۰ کمتر شود وتنها کمتر از ۲۲۰ در بین گزینه ها ۲۱۰ می باشد.

۷- در شکل مقابل طول پاره خط AB برابر $۹cm$ است و می دانیم دو مثلث ACE و BED متساوی الاضلاع هستند اگر بدانیم پاره خط DE بر پاره خط CD عمود است. طول پاره خط AC چند سانتیمتر است؟

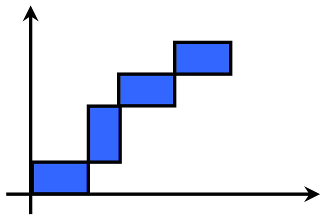
۱) ۵　　۲) ۶ ✓　　۳) ۶/۵　　۴) ۷



حل) اضلاع مثلث ACE را a و اضلاع مثلث BED را b نامگذاری می کنیم چون مثلث های ACE و BED متساوی الاضلاعند پس اندازه هر یک از زاویه های $E_۱ = E_۲ = E_۳ = ۶۰^\circ$ میشود. در نتیجه $C_۱ = ۳۰^\circ$ حال با توجه به این نکته که ضلع مقابل زاویه ۳۰ درجه در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است داریم:

$$DE = \frac{۱}{۲}CE \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}a \Rightarrow a = ۲b \Rightarrow a+b=۹ \Rightarrow a=۶=AC$$

۸- علی می خواهد ۸ مستطیل ۳×۲ به دلخواه به صورت افقی یا عمودی در صفحه مختصات به گونه ای رسم کند که رأس پایین چپ هر مستطیل روی رأس بالای راست مستطیل دیگر قرار گیرد و رأس پایین چپ اولین مستطیل نیز بر مبدا مختصات باشد. راس بالای آخرین مستطیل در کدام مختصات می تواند قرار داشته باشد؟(شکل مقابل نمونه ای از چیدمان چهار مستطیل است.)



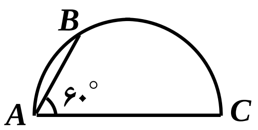
۱) $\begin{bmatrix} ۱۸ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲۲ \\ ۱۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۷ \\ ۲۳ \end{bmatrix}$ ✓ ۴) $\begin{bmatrix} ۲۵ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$

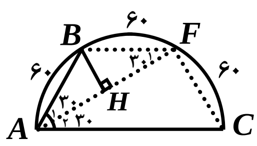
حل)گزینه ۳ صحیح است. فرض می کنیم تعداد مستطیل های قائم برابر b و تعداد مستطیل های افقی برابر a باشد اکنون به کمک دستگاه معادله هر یک از گزینه ها را بررسی می کنیم(دقت کنید چون a,b تعداد هستند باید عددی حسابی باشند.)

$$\begin{cases} ۳a+۲b=۲۲ \\ ۲a+۳b=۱۴ \end{cases} \Rightarrow a=۷/۶, b=-۰/۴ \qquad \begin{cases} ۳a+۲b=۱۸ \\ ۲a+۳b=۲۰ \end{cases} \Rightarrow a=۲/۸, b=۴/۸$$

$$\begin{cases} ۳a+۲b=۲۵ \\ ۲a+۳b=۱۵ \end{cases} \Rightarrow a=۹, b=-۱ \qquad \begin{cases} ۳a+۲b=۱۷ \\ ۲a+۳b=۲۳ \end{cases} \Rightarrow a=۱, b=۷$$

۹- در نیم دایره رو به رو طول پاره خط AB برابر یک است. نیمساز زاویه‌ی $B\hat{A}C$ نیم دایره را در نقطه F قطع می کند.طول AF چقدر است؟





۱) $\sqrt{۳}$ ✓ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۵}$

حل) چون AF نیمساز زاویه‌ی $B\hat{A}C$ است داریم:

$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ = ۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{CF} = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$$

با توجه به این نکته که در هر مثلث قائم الزاویه ضلع روبه روی زاویه ۳۰ درجه، نصف وتر و ضلع رو به روی زاویه ۶۰ درجه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$وتر است داریم:

$$FH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BF, BH = \frac{۱}{۲}BF \Rightarrow FH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$AF = AH + FH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

۱۰- کدام یک از بانک های زیر سود مشارکت بیشتری می دهد؟

۱) بانکی که سالانه ۲۵٪ سود مشارکت می دهد. ۲) بانکی که پس از دو سال ۶۰٪ سود مشارکت می دهد. ✓

۲) بانکی که پس از سه سال ۱۰۰٪ سود مشارکت می دهد. ۴)بانکی که پس از ۴سال ۱۵۰٪ سود مشارکت می دهد.

حل)گزینه۲ درست است. فرض کنیم سرمایه اولیه ۱۰۰ تومان بوده باشد . با محاسبه هر گزینه ومقایسه آنها داریم:

گزینه ۱) برای ۴ سال متوالی سرمایه می شود: $۱۰۰ \xrightarrow{+۲۵\%} ۱۲۵ \xrightarrow{+۲۵\%} ۱۵۶/۲۵ \xrightarrow{+۲۵\%} ۱۹۳/۳ \xrightarrow{+۲۵\%} ۲۴۴/۱$

گزینه۲) برای ۶ سال متوالی (۳دوره دو ساله) می شود: $۱۰۰ \xrightarrow{+۶۰\%} ۱۶۰ \xrightarrow{+۶۰\%} ۲۵۶ \xrightarrow{+۶۰\%} ۴۰۹/۶$

گزینه۳) برای ۶ سال متوالی(۲ دوره سه ساله) می شود: $۱۰۰ \xrightarrow{+۱۰۰\%} ۲۰۰ \xrightarrow{+۱۰۰\%} ۴۰۰$

گزینه ۴) برای ۴ سال متوالی(۱ دوره ۴ ساله) می شود: $۱۰۰ \xrightarrow{+۱۵۰\%} ۲۵۰$

۱۱- همه‌ی توان های ۵ از $۵^{۰}$ تا $۵^{۴}$ روی تخته نوشته شده است.محسن تعدادی از این عدد ها را به دلخواه انتخاب می کند وبا علامت های مثبت یا منفی پشت سرهم قرار می دهد وسپس حاصل عبارت نوشته شده را حساب می کند حاصل این عبارت کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

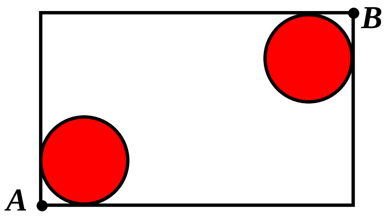
۱) ۳۳۰   ۲) ۷۱۵   ۳) ۴۸۱ ✓   ۴) ۵۴۹

حل) حاصل جمع وتفریق توانهای طبیعی عدد ۵ به صفر یا ۵ ختم می شود.چون $۵^{۰} = ۱$ می باشد پس یکان حاصل می تواند ۱ ، ۴ ، ۶ یا ۹ باشد لذا گزینه های ۱ و ۲ نادرستند.

چون $۵^{۴} + ۵^{۳} = ۷۵۰$ از گزینه ها بزرگتر است.پس باید $۵^{۴} - ۵^{۳} = ۵۰۰$ را در نظر بگیریم بنابراین داریم:

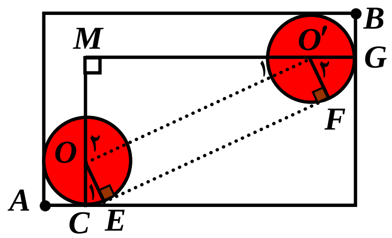
قبول $۵^{۴} - ۵^{۳} + ۵^{۰} + ۵^{۱} - ۵^{۲} = ۴۸۱$ رد $۵^{۴} - ۵^{۳} + ۵^{۰} + ۵^{۱} + ۵^{۲} = ۵۳۱$

۱۲-در یک مستطیل ۳×۲ مطابق شکل دو چاله دایره ای شکل به شعاع $\frac{۱}{۲}$ حفرشده است مورچه‌ای می خواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برسد طول کوتاه ترین مسیری که این مورچه باید بپیماید چقدر است؟



۱) ۵   ۲) $۳ + \frac{\pi}{۲}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $۱ + \sqrt{۵} + \frac{\pi}{۴}$ ✓

حل)



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{MOO'} : \hat{O}_۲ + \hat{O'}_۱ = ۹۰^{\circ} \\ \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۹۰^{\circ} \\ \hat{O'}_۱ + \hat{O'}_۲ = ۹۰^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ + \hat{O'}_۲ = ۹۰^{\circ} \Rightarrow \overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{FG} = ۹۰^{\circ}$$

AC و GB هر کدام برابر با شعاع دایره اند و EF نیز برابر با OO' است که از رابطه فیثاغورس به دست می آید.

$$OO'^{۲} = OM^{۲} + O'M^{۲} = ۱^{۲} + ۲^{۲} = ۱ + ۴ = ۵ \Rightarrow OO' = \sqrt{۵} = EF$$

$$\overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{FG} = \frac{۱}{۴}P = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\right)\pi = \frac{۱}{۴}\pi$$

پس با توجه به حل بالا نتیجه می گیریم که مجموع دو کمان CE و FG برابر با یک ربع دایره است. مسیر حرکت مورچه از نقطه A به B برابر است با:

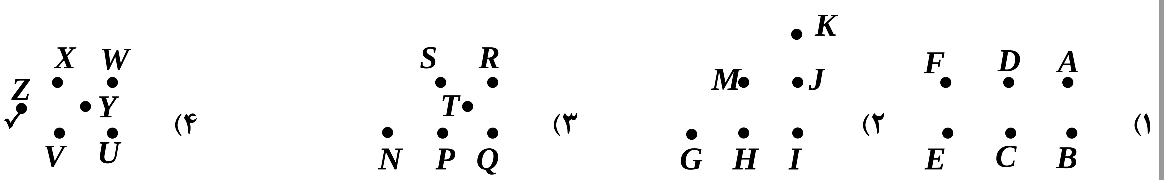
$$AC + \overset{\frown}{CE} + EF + \overset{\frown}{FG} + GB = \frac{۱}{۲} + \overset{\frown}{CE} + \sqrt{۵} + \overset{\frown}{FG} + \frac{۱}{۲} = ۱ + \sqrt{۵} + \overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{FG} = ۱ + \sqrt{۵} + \frac{\pi}{۴}$$

۱۳- تعدادی مکعب مستطیل هم اندازه داریم که با قرار دادن آنها بر روی هم ستونی به ارتفاع ۱۳۹۳ ساخته ایم اضلاع این مکعب مستطیل برابر کدام یک از گزینه های زیر نمی تواند باشد؟

۱) ۱۲ و ۱۸ و ۲۷ ✓　　۲) ۱۸ و ۱۴ و ۲۷　　۳) ۱۲ و ۱۴ و ۲۷　　۴) ۱۲ و ۱۱ و ۱۸

حل)گزینه ۱ صحیح است زیرا همه‌ی اعداد مضرب ۳ می باشند ووقتی چنین مکعبهایی را روی هم قرار دهیم مجموع این اعداد نیز مضرب ۳ می شود در صورتیکه ۱۳۹۳ مضرب ۳ نیست.

۱۴- در کدام یک از شکل های زیر تعداد بیشتری مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین می توانیم رسم کنیم که رأس های آن روی نقاط مشخص شده باشد.



حل) ابتدا مانند شکل بالا نقاط را نامگذاری می کنیم.

حل)مثلث های گزینه ۱ (۱۰تا)　$\overset{\Delta}{ABC},\overset{\Delta}{BCD},\overset{\Delta}{CDA},\overset{\Delta}{DAB},\overset{\Delta}{DCE},\overset{\Delta}{CEF},\overset{\Delta}{EFD},\overset{\Delta}{FCD},\overset{\Delta}{ACF},\overset{\Delta}{BED}$

مثلث های گزینه ۲ (۸ تا)　$\overset{\Delta}{KJM},\overset{\Delta}{KIG},\overset{\Delta}{KMI},\overset{\Delta}{GMI},\overset{\Delta}{GMH},\overset{\Delta}{JIH},\overset{\Delta}{JIM},\overset{\Delta}{JMH}$

مثلث های گزینه ۳ (۱۰تا)　$\overset{\Delta}{STR},\overset{\Delta}{STP},\overset{\Delta}{SPQ},\overset{\Delta}{SPN},\overset{\Delta}{SNQ},\overset{\Delta}{SPR},\overset{\Delta}{SRQ},\overset{\Delta}{RTQ},\overset{\Delta}{RPQ},\overset{\Delta}{TPQ}$

مثلث های گزینه ۴ (۱۱تا)　$\overset{\Delta}{XYZ},\overset{\Delta}{XYW},\overset{\Delta}{XZU},\overset{\Delta}{XUV},\overset{\Delta}{XWV},\overset{\Delta}{XWU},\overset{\Delta}{XYU},\overset{\Delta}{YZU},\overset{\Delta}{YUV},\overset{\Delta}{YWU},\overset{\Delta}{WVU}$

۱۵- دو خط l به معادله $۱۳x+۲y=۳۵$ و l' به معادله $۱۱x-۶y+۹=۰$ را در صفحه مختصات در نظر بگیرید. موقعیت نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$ نسبت به دو خط l و l' چگونه است؟(جهت مثبت محور عرض ها را بالا در نظر می گیریم.)

۱) بالای هر دو خط l و l' قرار دارد.　　۲) بالای خط l و پایین خط l' قرار دارد. ✓

۳)پایین خط l و بالای خط l' قرار دارد.　　۴) پایین هر دو خط l و l'قرار دارد.

حل) ابتدا معادلات خط را به شکل $ax+by+c=۰$ (باید ضریب y مثبت باشد.) می نویسیم و مختصات $A=\begin{bmatrix}۲\\۵\end{bmatrix}$ را در معادلات خط جایگذاری می کنیم داریم:

$$l: ۱۳x+۲y=۳۵ \Rightarrow ۱۳x+۲y-۳۵=۰ \Rightarrow ۱۳\times۲+۲\times۵=+۳۶>۰ \Rightarrow$$ بالای خط l

$$l': ۱۱x-۶y+۹=۰ \Rightarrow -۱۱x+۶y-۹=۰ \Rightarrow -۱۱\times۲+۶\times۵-۹=-۱<۰ \Rightarrow$$ پایین خط l'

۱۶- عددی که دقیقاً سه مقسوم علیه اول داشته باشد را عدد «ثالثیه» می نامیم .مثلاً $۵\times۳\times۲^۲=۶۰$ یک عدد ثالثیه است.با توجه به این تعریف کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

۱) ضرب هر دو عدد ثالثیه یک عدد ثالثیه است.

۲)اگر $a^{۲}\times b^{۳}$ یک عدد ثاثیه باشد آنگاه $a\times b$ نیز یک عدد ثالثیه است. $(a,b\in N)$ ✓

۳) اگر ضرب دو عدد ثالثیه یک عدد ثالثیه باشد آن گاه یکی از آنها بر دیگری بخشپذیر است.

۴) جمع دو عدد فرد ثالثیه نمی تواند یک عدد ثالثیه باشد.

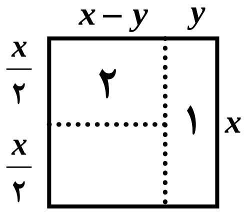
حل)گزینه ۱ غلط است زیرا: ۴ عامل اول دارد. $۶۰\times ۷۰=(۲^{۲}\times ۳\times ۵)\times(۲\times ۷\times ۵)=۲^{۳}\times ۳\times ۵\times ۷$

گزینه ۳ غلط است زیرا اگر $۶۰=۲^{۲}\times ۳\times ۵$ و $۹۰=۲\times ۳^{۲}\times ۵$ باشد ضرب این دو عدد یک عدد ثالثیه است اما هیچ کدام از این دوعدد ۶۰ و ۹۰ برهم بخشپزیر نیستند.

گزینه ۴ نیز غلط است زیرا اگر $۱۰۵=۷\times ۳\times ۵$ و $۳۷۵=۱۱\times ۷\times ۵$ دو عدد فرد ثالثیه باشند انگاه مجموع آنها یعنی عدد $۴۹۰=۲\times ۵\times ۷^{۲}$ یک عدد ثالثیه می باشد. پس گزینه ۲ درست است.

۱۷- مربعی را با دو برش به سه مستطیل تقسیم کرده ایم و فقط ۲تا از این مستطیل ها با هم برابرند.اگر محیط هر سه مستطیل برابر ۲۰ باشد مساحت مربع چند است؟

۱)۴۹　　۲) ۳۶　　۳) ۸۱　　۴) ۶۴ ✓



حل)گزینه ۴ صحیح است.

مستطیل۱ $P_{۱}=۲(x+y)=۲۰\Rightarrow x+y=۱۰$

مستطیل۲ $P_{۲}=۲\left(x-y+\frac{x}{۲}\right)=۲۰\Rightarrow ۳x-۲y=۲۰$

$$\begin{cases} x+y=۱۰ \\ ۳x-۲y=۲۰ \end{cases}\Rightarrow x=۸\Rightarrow S=۸\times ۸=۶۴$$

۱۸- اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند $A \oslash B$ را به این صورت تعریف می کنیم $A \oslash B=\left\{\frac{a}{b}\,|\,a\in A,b\in B,b\neq ۰\right\}$ با توجه به این تعریف اگر A مجموعه اعداد سه رقمی باشد در این صورت چند تا از اعضای مجموعه $A \oslash A$ عدد طبیعی هستند؟

۱) ۹۰۰　　۲) ۹ ✓　　۳) ۹۰　　۴) ۹۹

حل) اگر $a=b$ باشد آنگاه $\frac{a}{b}=۱$

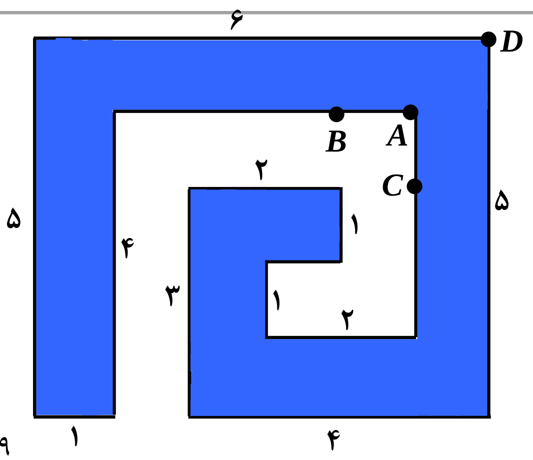
$\frac{۹۰۰}{۱۰۰}=۹$ و ... و $\frac{۴۰۴}{۱۰۱}=۴$ و $\frac{۴۰۰}{۱۰۰}=۴$ و ... و $\frac{۳۰۳}{۱۰۱}=۳$ و $\frac{۳۰۰}{۱۰۰}=۳$ و ... و $\frac{۲۰۲}{۱۰۱}=۲$ و $\frac{۲۰۰}{۱۰۰}=۲$

اکنون با توجه به اینکه عضو های تکراری در هر مجموعه فقط یک بار حساب می شوند پس جواب برابر است با:

$\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

۱۹- قطعه ای مطابق شکل مقابل از جنس کاغذ داریم کدام یک از نقطه های مشخص شده بر روی این قطعه کاغذ را آتش بزنیم تا کل کاغذ زودتر بسوزد.(سرعت حرکت آتش بر روی کاغذ ثابت است.)

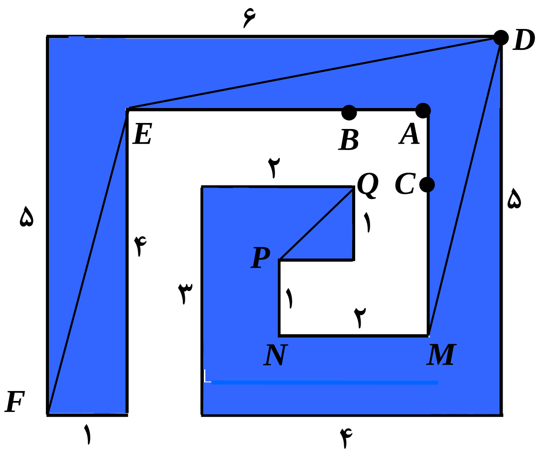
۱) A ✓　　۲) B　　۳) C　　۴) D



حل) با توجه به شکل مقابل داریم:

برای شروع از نقطه A به F داریم:

$$AE+EF=۴+\sqrt{۱۷}$$



از نقطه A به Qداریم:

$$AM + MN + NP + PQ = ۳ + ۲ + ۱ + \sqrt{۲} = ۶ + \sqrt{۲}$$

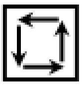
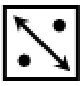
برای شروع از نقطه D به Fداریم:

$$DE + EF = \sqrt{۲۶} + \sqrt{۱۷}$$

از نقطه D به Qداریم

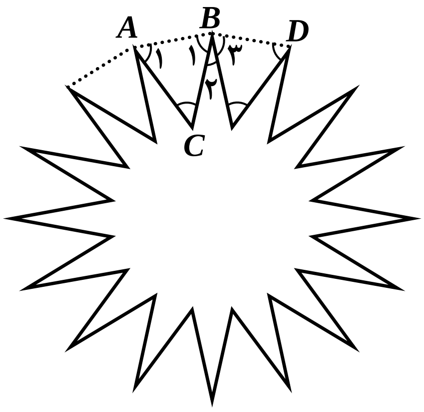
$$DM + MN + NP + PQ = \sqrt{۱۷} + ۲ + ۱ + \sqrt{۲} = ۳ + \sqrt{۱۷} + \sqrt{۲}$$

پس چون فاصله نقطه D تا F و Q از فاصله نقطه A تا همین دو نقطه F و Qبیشتر است پس Aجواب است.

۲۰- کاظم شکلی رسم کرده است که دوران های   ء مجموعه دوران های آن شکل هستند. مجموعه دوران های شکلی که کاظم رسم کرده است دست کم چند عضو دارد؟

۱) ۸ عضو ✓   ۲) ۴ عضو   ۳) ۳ عضو   ۴) ۲ عضو

این سوال در مباحث کتاب های جدید ریاضی هشتم ونهم وجود ندارد.



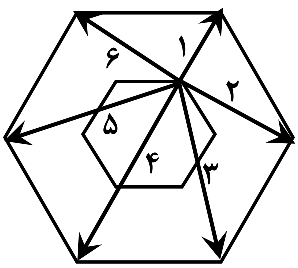
۲۱ – در شکل مقابل اندازه همه‌ی زاویه های حاده داخلی با هم برابر است.
همچنین اندازه همه زاویه های حاده خارجی نیز با هم برابر است تفاضل یک زاویه حاده خارجی ویک زاویه حاده داخلی چند درجه است؟

۱) ۲۲/۵ ✓   ۲) ۳۰   ۳) ۴۵   ۴) ۱۵

حل) مطابق شکل راس های A و B و D را به هم وصل می کنیم که این راس ها راس های یک ۱۶ ضلعی منتظم می شوند. همچنین داریم: $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \hat{B}_۳$

$$\hat{B} = \frac{(۱۶ - ۲) \times ۱۸۰}{۱۶} = ۱۵۷/۵^\circ$$ هر زاویه داخلی ۱۶ ضلعی منتظم

$$\hat{C} - \hat{B}_۲ = \left[۱۸۰ - \left(\hat{A}_۱ + \hat{B}_۱\right)\right] - \left[۱۵۷/۵ - \left(\hat{B}_۳ + \hat{B}_۱\right)\right] = ۱۸۰ - ۱۵۷/۵ = ۲۲/۵^\circ$$

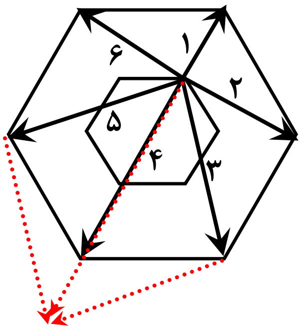


۲۲- در شکل مقابل مرکز تقارن دو شش ضلعی منتظم بر روی هم قرار دارد.از روی یکی از رأسهای شش ضلعی کوچک شش بردار به شش رأس شش ضلعی بزرگ رسم می کنیم طول حاصل جمع این شش بردار کدام است؟

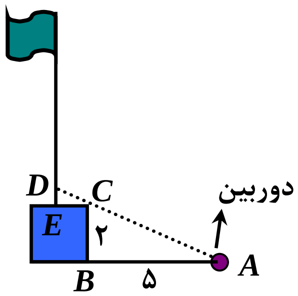
۱) ۴ برابر طول ضلع شش ضلعی کوچک.
۲) ۶برابر طول ضلع شش ضلعی کوچک. ✓
۳) ۴ برابر طول ضلع شش ضلعی بزرگ.
۴) ۶ برابر طول ضلع شش ضلعی بزرگ.

حل)گزینه ۲ صحیح است. بردار ۲ وبردار ۶ قرینه هم هستند.پس مجموعشان صفر می شود.داریم:

$$\vec{۱}+\vec{۴}=-۲\times\vec{۱}$$
$$\vec{۳}+\vec{۵}=-۴\times\vec{۱}$$
$$\Rightarrow \vec{۱}+\vec{۴}+\vec{۳}+\vec{۵}=\left(-۲\times\vec{۱}\right)+\left(-۴\times\vec{۱}\right)=-۶\times\vec{۱}$$



۲۳- مطابق شکل یک دوربین عکاسی روی زمین در فاصله‌ی ۵ متری از پایه‌ی یک پرچم قرار دارد.با توجه به این که پایه پرچم مکعبی به ضلع ۲ متر و میله‌ی پرچم به طول ۶ متر است این دوربین چه طولی از میله‌ی پرچم را می تواند ببینند؟(میله دقیقاً در وسط وجه بالایی پایه پرچم قرار دارد.)

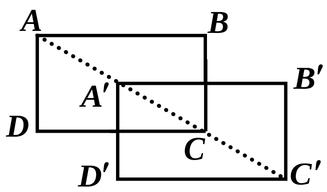


۱) ۵متر　　۲) ۳/۶ متر　　۳) ۵/۶ متر ✓　　۴) ۴/۴ متر

حل) با استفاده از تشابه دو مثلث ABC و DEC و نوشتن تناسب اضلاع بین آنها داریم :

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{EC}\Rightarrow\frac{۲}{x}=\frac{۵}{۱}\Rightarrow x=\frac{۲}{۵}=۰/۴m \quad DE \text{ اندازه } \Rightarrow \text{ طولی از میله که می تواند ببیند }=۶-۰/۴=۵/۶m$$

۲۴- در شکل روبه رو دو مستطیل $ABCD$ و $A'B'C'D'$ با هم برابرند .اگر نقطه A' محل تقاطع قطرهای مستطیل $ABCD$ باشد وبدانیم $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ و $A'=\begin{bmatrix}۴\\-۱\end{bmatrix}$ مجموع طول وعرض نقطه C' کدام است؟



۱) ۳ ✓　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

حل)نقاط A و A' و C و C' را به هم وصل می کنیم چون نقطه A' مرکز مستطیل $ABCD$ می شود داریم:

$$A'C'=۲AA'\Rightarrow C'-A'=۲A'-۲A\Rightarrow C'=۳A'-۲A=۳\begin{bmatrix}۴\\-۱\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲\\-۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰\\-۷\end{bmatrix}\Rightarrow$$
$$۱۰+(-۷)=۳$$

سوالات آزمون ورودی تیز هوشان سال ۹۶–۹۵

۱- چند زیر مجموعه‌ی سه عضوی از اعداد طبیعی وجود داردکه حاصل ضرب اعضای آن درهم برابر ۴۵ شود؟

۱) یک   ۲) دو   ۳) سه   ۴) چهار

حل) گزینه ۲ صحیح است. فقط دو حالت $\{1,3,15\}$ و $\{1,5,9\}$ صحیح است و حالت هایی مانند $\{1,1,45\}$ قابل قبول نیستند زیرا دارای عضو تکراری هستند که با حذف آن مجموعه دو عضوی می شود.

۲- از تساوی $\sqrt{a^2b^2c^3}\times\sqrt{-a^2b^3c}=2$ کدام یک از گزینه های زیر نتیجه می شود؟

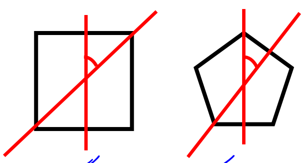
۱) $a>0$ ۲) $b<0$ ۳) $abc<0$ ۴) $ab<0$

حل) گزینه ۴ صحیح است. چون فرجه رادیکالها زوج است پس نباید زیر رادیکالها منفی شود. بنابراین یکی از دو حالت زیر رخ می دهد

الف) $a>0,b<0,c>0$ ویا ب) $a<0,b>0,c<0$ پس با توجه به مختلف العلامت بودن a و b تنها گزینه ای که همواره برقرار است گزینه ۴ خواهد بود.

---

۳) زاویه‌ی بین دو محور تقارن متوالی از یک چند ضلعی، کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟



۱) $\sqrt{360^\circ}$ ۲) 31° ۳) $\frac{1}{5}^\circ$ ۴) 7°

حل)گزینه ۳ صحیح است. زاویه‌ی بین هر دو محور تقارن متوالی یک n ضلعی منتظم از رابطه‌ی $\frac{360}{2n}$ به دست می آید. که با آزمایش گزینه ها جواب به دست می آید. $\frac{360}{2n}=\frac{1}{5}\Rightarrow 2n=1800\Rightarrow n=900$ توجه کنید که بعداز حل معادله‌ی قبل باید مقدار n عددی طبیعی شود.

---

۴) مجموعه‌ی $\left\{\frac{a}{b}\mid\frac{a}{b}<1,b<13,a,b\in N\right\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۴۹ عضو   ۲) ۴۵ عضو   ۳) ۷۸ عضو   ۴) ۵۵ عضو

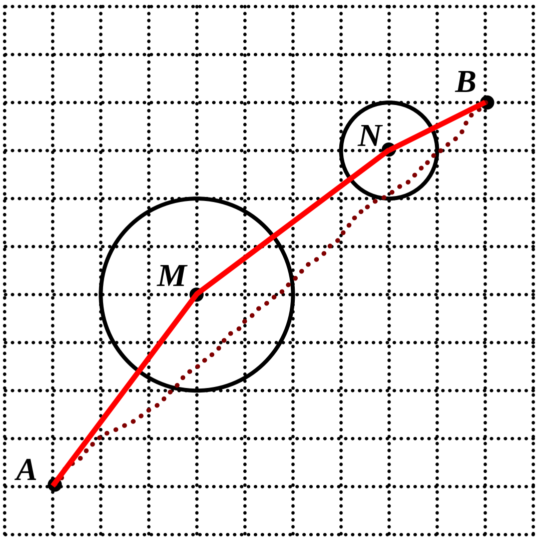
حل)گزینه ۲ صحیح است.

عدد ۱ می تواند صورت کسرهایی با مفرج ۲ تا ۱۲ باشد.(۱۱ کسر) — عدد ۲ میتواند صورت کسرهای با مفرج فرد(۳و۵و۷و۹و۱۱)باشد.(۵کسر)

عدد ۳ می تواند صورت کسرهایی که مفرج آنها مضرب ۳ نباشد.(۶کسر) و به همین ترتیب برای کسرهای با صورت ۴ ، ۴کسر–برای کسرهایی با صورت ۵ ، ۶کسر – برای کسرهایی با صورت ۶ ، ۲کسر — برای کسرهایی با صورت ۷ ، ۵ کسر– کسرهایی با صورت ۸، ۲کسر

کسرهایی باصورت ۹ ، ۲کسر – کسرهایی با صورت ۱۰ ، ۱ کسر — کسرهایی با صورت ۱۱ ، ۱ کسرپس در مجموع کل این کسر ها برابر است با:

$$11+5+6+4+6+2+5+2+2+1+1=45$$



۵- در یک روز بارانی علی می خواهد از نقطه A به نقطه B برود مطابق شکل در مسیر او چادرهای دایره ای شکلی هستند که اورا از باران حفظ می کنند. یکی از مسیر های ممکنی که علی می تواند طی کند تا به مقصد برسد با خط چین مشخص شده است .
علی دست کم چه مسافتی را زیر باران خواهد پیمود؟

۱) $۴+\sqrt{۵}$　　۲) $۱۰+\sqrt{۵}$

۳) $۴+۲\sqrt{۵}$　　۴) $۵+\sqrt{۱۰}$

حل) گزینه ۱ صحیح است.

کوتاه ترین مسیر خط شکسته $AMNB$ است که باید قسمت هایی ازآن را که داخل دایره ها قرار دارد وبرابر ۲مجموع شعاع هامی شود را از آن کم کنیم.اکنون با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم:

$$AM^{۲}=۳^{۲}+۴^{۲}=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow AM=\sqrt{۲۵}=۵$$
$$MN^{۲}=۳^{۲}+۴^{۲}=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow MN=\sqrt{۲۵}=۵$$
$$NB^{۲}=۲^{۲}+۱^{۲}=۴+۱=۵\Rightarrow NB=\sqrt{۵}$$

پس کوتاه ترین مسیر برابر است با:

$$۵+۵+\sqrt{۵}-[۲\times(۲+۱)]=۴+\sqrt{۵}$$

۶- دو عدد را با تقریب کمتر از یک قطع کرده ایم و حاصل را در هم ضرب کرده ایم وعدد ۱۶۰۰ به دست آمده است.اگر ابتدا دو عدد را در هم ضرب می کردیم و بعد حاصل را قطع می کردیم.حاصل برابر کدام گزینه می توانست باشد؟

۱) ۳۲۰۱　　۲) ۳۲۰۲　　۳) ۱۵۹۸　　۴) ۱۵۹۹

حل) گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه هر دو عدد قطع شده اند بنا براین حاصل ضرب واقعی آنها نباید از ۱۶۰۰ کمتر شود.پس گزینه های ۳و۴ حذف میشوند.همچنین این دو عدد هر قدر هم بزرگ باشند نمی توانند خود ۱۶۰۱ و ۲ باشند پس حاصل ضرب واقعی آنها قطعا بایداز ۳۲۰۲ کمتر باشد.(چون قرار است حاصل ضرب به صورت تقریبی و به روش قطع کردن محاسبه شود.)به این ترتیب تنها گزینه ای که می تواند درست باشد گزینه ۱ است.

۷- چه تعداد از گزاره های زیر درست است؟

a) از چسباندن دو چند ضلعی مقعر می توان یک چند ضلعی محدب ساخت.

b) از چسباندن دو چند ضلعی محدب می توان یک چند ضلعی مقعر ساخت.

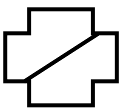
c) از چسباندن دو چند ضلعی مقعر می توان یک چند ضلعی مقعر ساخت.

۱) صفر　　۲) یک　　۳) دو　　۴) سه

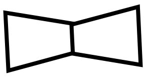
حل) گزینه ۴ صحیح است.

چون در هر سه عبارت از کلمه می توان استفاده شده است.هر سه درست هستند.

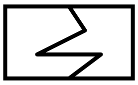
شکل برای چسباندن دو چند ضلعی مقعر یک چند ضلعی مقعر می شود.



شکل برای چسباندن دو چند ضلعی محدب یک چند ضلعی مقعر می شود.



شکل برای چسباندن دو چند ضلعی مقعر یک چند ضلعی محدب می شود.



۸- منظورمان از دستور $a*b$ رسم ذوزنقه متساوی الساقینی است که قاعده کوچک آن a و قاعده بزرگ آن b و طول دو ساق آن نیز برابر یک است. می دانیم بعضی از دستورات مثل $۵*۱$ قابل اجرا نیستند. اگر $a*b$ دستوری قابل اجرا باشد .کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(a+۴)*(b+۴)$ می تواند قابل اجرا باشد.　　۲) $۴a*۴b$ می تواند قابل اجرا باشد.

۳) $۴a*۴b$ می تواند قابل اجرا نباشد.　　۴) $(a+۴)*(b+۴)$ می تواند قابل اجرا نباشد.

حل) گزینه ۴ صحیح است.

چون در هر ۴گزینه از کلمه می تواند استفاده شده اگر برای هر کدام یک گزینه درست بیابیم.گزینه تایید می شود.

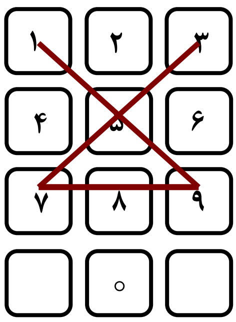
چون $a*b$ قابل اجراست اگر به هر یک از قاعده ها ۴ واحد اضافه کنیم ذوزنقه متساوی الساقین دیگری خواهیم داشت.پس

$(a+۴)*(b+۴)$ قابل اجراست. $۴a*۴b$ هم می تواند قابل اجراباشد وهم می تواند نباشد. زیرا اگر $a=۱$ و $b=۱\frac{۱}{۴}$ باشد ذوزنقه ای به اضلاع ۱و۴ و۵ قابل رسم است.پس گزینه ۲ درست است. واگر $a=۱$ و $b=۲$ باشد قابل اجرا نیست زیرا باید ذوزنقه ای به اضلاع ۱و۴و۸ داشته باشیم که غیر ممکن است.

گزینه۴ همواره قابل اجراست زیرا با توجه به قابل اجرا بودن $a*b$ داریم:

$۱+۱+a>b \Rightarrow ۱+۱+(a+۴)>b+۴$ پس a و b هرچه که باشد همواره $(a+۴)*(b+۴)$ قابل اجراست.

۹- حرکت سرانگشت شخصی برای گرفتن یک شماره ۵ رقمی روی تلفن دیجیتال به شکل مقابل است.با فرض این که سر انگشت او حرکت اضافه نداشته باشد .تعداد شماره هایی که او ممکن است گرفته باشد چقدر است؟



۱) ۷ شماره　　۲) ۱۴ شماره　　۳) ۲۲شماره　　۴) ۲۸شماره

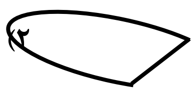
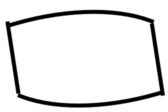
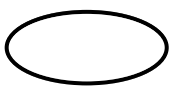
حل) گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به مسیر حرکت انگشت ها ۴رقم از شماره تلفن مورد نظر قطعا باید ۱ و ۹ و ۷ و ۳ باشندو ترتیب آنها نیز باید به همین صورت ویا برعکس باشد همچنین اجازه نداریم از مسیر دیگری برویم مثلا نمی توانیم از ۱ به ۷ برویم

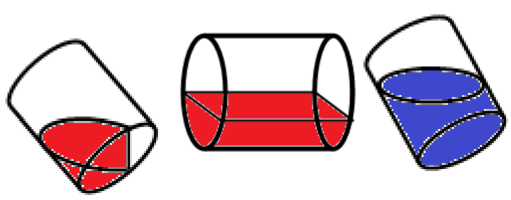
شماره های مطلوب با استفاده از راهبرد الگوسازی:

۱۹۷۳۵ و ۱۹۷۳۷ و ۳۷۹۱۵ و ۳۷۹۱۹ و ۱۵۹۷۳ و ۱۹۸۷۳ و ۱۹۷۵۳ و ۱۱۹۷۳ و ۱۹۹۷۳ و ۱۹۷۷۳ و ۱۹۷۳۳ ومقلوب آنها

۱۰- مقداری آب را در استوانه ای که سر وته آن بسته است ریخته ایم با حرکت دادن این استوانه در جهات مختلف،سطح آب به کدام شکل نمی تواند باشد؟(به صورت مستقیم و از بالا به سطح آب نگاه کرده ایم.)

۱) 　۲) 　۳) 　۴) 

حل) گزینه ۲ صحیح است.



اگر استوانه را روی یکی از لبه های قاعده آن کج کنیم طوری که آب تمام قاعده آن را نگیرد سطح آب به شکل گزینه ۱ در می آید.

اگر استوانه را روی سطح جانبی آن قرار دهیم سطح آب به شکل گزینه ۳ در می آید.

اگر استوانه را روی یکی از لبه های قاعده آن کج کنیم طوری که آب تمام قاعده آن را بگیرد سطح آب به شکل گزینه ۴ در می آید.

۱۱- کدام یک از گزاره های زیر نادرست است؟

۱) مکعب مستطیلی وجود دارد که اندازه همه ابعاد آن عددی گنگ و حجم آن عددی گویا باشد.

۲) کره ای وجود دارد که اندازه شعاع آن عددی گنگ و حجم ومساحت جانبی آن عددی گویا باشد.

۳) مکعب مستطیلی وجود دارد که مساحت همه‌ی وجه های آن عددی گنگ وحجم آن عددی گویا باشد.

۴) کره ای وجود دارد که مساحت جانبی آن عددی گنگ وحجم آن عددی گویا باشد.

حل) گزینه ۲ صحیح است. مثال برای تایید هر یک از گزینه ها

گزینه۱: حجم مکعب مستطیلی به ابعاد $\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۶}$ عددی گویا می شود.

گزینه۳: مکعب مستطیلی به ابعاد $\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۶}$ مساحت وجه های آن برابراست با :

$$S_۱=\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\sqrt{۶}\quad و\quad S_۲=\sqrt{۳}\times\sqrt{۶}=\sqrt{۱۸}\quad و\quad S_۳=\sqrt{۲}\times\sqrt{۶}=\sqrt{۱۲}$$

$$\Rightarrow V^۲=\left(\sqrt{۶}\times\sqrt{۱۲}\times\sqrt{۱۸}\right)^۲=۶\times۱۲\times۱۸=۱۲۹۶$$

گزینه ۴: برای کره ای به شعاع $\frac{۱}{\sqrt[۳]{\pi}}$ مساحت جانبی و حجم آن به صورت زیر است:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{\pi}}\right)^۳=\frac{۴}{۳}\pi\times\frac{۱}{\pi}=\frac{۴}{۳}\in Q \qquad\qquad S=۴\pi\left(\frac{۱}{\sqrt[۳]{\pi}}\right)^۲=\frac{۴\pi}{\left(\sqrt[۳]{\pi}\right)^۲}\in Q'$$

گزینه ۲ نادرست است زیرا عدد گنگی وجود ندارد که هم وقتی به توان ۲ برسد گویا باشد و هم وقتی به توان ۳ برسد گویا شود.

۱۲- علی دو نقشه از شهر خود دارد نقشه اول با مقیاس ۱ به ۱۰۰۰۰۰ و نقشه دوم با مقیاس ۱ به ۲۵۰۰۰ او محل کار و منزل خود را در هر یک از این دو نقشه با پاره خطی به هم وصل کرده و مرکز این دو نقشه را روی هم قرار داده است به طوری که شمال هر دو نقشه در یک جهت است. در مورد فاصله‌ی مرکز این دو پاره خط چه می توان گفت؟

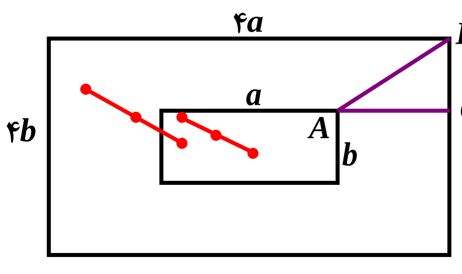
۱) می تواند به اندازه طول نقشه اول باشد.　　　۲) قطعا صفر است.

۳) می تواند به اندازه طول نقشه دوم باشد.　　　۴) نمی تواند صفرباشد.

حل) گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به مقیاسهای داده شده می توان نتیجه گرفت که طول هر پاره خط روی نقشه دوم ۴ برابر طول پاره خط متناظر آن روی نقشه اول است.اگر طول نقشه اول a باشد طول نقشه دوم $۴a$ و اگر عرض نقشه اول b باشد عرض نقشه دوم $۴b$ خواهد بود.

با توجه به شکل مقابل و متشابه بودن دو نقشه فاصله مرکز دو پاره خط باید از طول پاره خط AB کمتر باشد.



پس داریم:

$$BC=\frac{۴b-b}{۲}=\frac{۳}{۲}b\quad و\quad AC=\frac{۴a-a}{۲}=\frac{۳}{۲}a$$

درنتیجه با کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^۲=\left(\frac{۳}{۲}a\right)^۲+\left(\frac{۳}{۲}b\right)^۲=\frac{۹}{۴}a^۲+\frac{۹}{۴}b^۲=\frac{۹}{۴}\left(a^۲+b^۲\right)<\frac{۹}{۴}\left(a^۲+a^۲\right)=\frac{۹}{۴}\left(۲a^۲\right)=\frac{۹}{۲}a^۲\Rightarrow AB<\frac{۳}{\sqrt{۲}}a\cong ۲/۱a$$ از

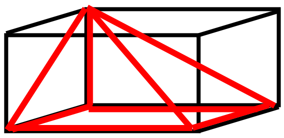
طرفی $a<۲/۱a<۴a$ بنابراین فاصله مرکز دو پاره خط می تواند به اندازه طول نقشه اول باشد(تایید گزینه ۱) ولی نمی تواند به اندازه طول نقشه دوم باشد(رد ۳)اگر مرکز پاره خط ها دقیقا در مرکز هر نقشه باشد فاصله صفر خواهد شد(رد ۴)ولی اگر چنین نباشد می توتند صفر نباشد.(رد ۲)

راه دوم) مقیاس نقشه اول $\frac{۱}{۴}$ نقشه دوم است یعنی نقشه دوم ۴ برابر نقشه اول است پس طول وعرض نقشه دوم هر کدام ۲ برابر

نقشه اول است.اگر نقشه اول را طوری روی نقشه دوم قرار دهیم که وسط آن قرار گیرد(چون طول وعرض آن نصف نقشه دوم است پس می تواند فاصله هر نقطه درآن تا نقطه مشابه آن در نقشه دوم به اندازه طول یا عرض نقشه اول باشد

۱۳- بزرگ ترین هرمی که می تواند به طور کامل در یک استخر به طول ۲۰ متر وعرض ۱۲متر وعمق ۴متر ساخته شودرا در نظر بگیرید.حداکثر چه تعداد هرم با حجم این هرم می توان درون این استخر ساخت؟

۱) یکی ۲) دو تا ۳) سه تا ۴) چهارتا



حل) گزینه ۳ صحیح است.

زیرا حجم هر هرم برابر $\frac{۱}{۳}$ حجم منشوری است که هم مساحت و هم ارتفاع با آن باشد.

۱۴- فرض کنید A_i نشان دهنده مجموعه مقسوم علیه های عدد i باشد به عنوان مثال $A_۶ = \{۱,۲,۳,۶\}$ مجموعه $A_{۵۱} \cup A_{۵۲} \cup A_{۵۳} \cup ... \cup A_{۱۰۰}$ چند عضو دارد؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۳۷۷۵

حل) گزینه ۲ صحیح است.

زیرا هر عدد مقسوم علیه خودش می باشد. بنابراین تمام عدد های ۵۱ و ۵۲ و ۵۳ و ... و۱۰۰ عضو اجتماع مجموعه هاهستند.همچنین هر یک از اعداد ۱و ۲ و ۳ و ... و۵۰ دست کم مقسوم علیه یکی از اعداد ۵۱ و ۵۲ و ۵۳ و ... و ۱۰۰ نیز می باشند

بنابراین : $A_{۵۱} \cup A_{۵۲} \cup A_{۵۳} \cup ... \cup A_{۱۰۰} = \{۱,۲,۳,...,۱۰۰\}$

۱۵- حاصل $\sqrt{۴^{۴^{(-۴)^۴}}}$ کدام است؟

۱) $۴^{۴^{(-۴)^{-۲}}}$ ۲) $۴^{۴^{(-۲)^{-۴}}}$ ۳) $۴^{۲^{(-۴)^{-۴}}}$ ۴) $۲^{۴^{(-۴)^{-۴}}}$

حل) گزینه۴ صحیح است.

برای جذر گیری از اعداد تواندار یا باید توان آنها را نصف کرد و یا باید جذر پایه را گرفت بنابراین اگر جذر پایه یعنی ۴را بگیریم به گزینه ۴ می رسیم.

۱۶- فرض کنید $۰ < b < a$ باشد منظورمان از S_a مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a است.کدام یک از حالت های زیر می تواند درست باشد؟

۱) $S_{a+b} = S_a + S_b$ ۲) $S_{۲a} = ۳S_a$

۳) $S_{a+b} + S_{a-b} = ۲S_a + ۲S_b$ ۴) $S_{a^۲} = S^۲_a$

حل) گزینه ۳ صحیح است. مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با: ۶برابر مساحت یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a یعنی

حال با امتحان گزینه ها داریم:

$$S_a = ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} a^۲$$

گزینه ۱ رد زیرا :

$$\left.\begin{cases} S_{a+b} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(a+b)^۲ \\ S_a + S_b = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ + \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}b^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\left(a^۲ + b^۲\right) \end{cases}\right\} \Rightarrow S_{a+b} \neq S_a + S_b$$

گزینه ۲ رد زیرا:
$$S_{۲a}=۳S_a \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(۲a)^۲ = ۳\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ \Rightarrow ۶\sqrt{۳}a^۲ \neq \frac{۹\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

گزینه ۴ رد زیرا:
$$S_{a^۲}=S^۲_a \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\left(a^۲\right)^۲ = \left(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۴ \neq \frac{۲۷}{۴}a^۴$$

۱۷- اگر رقمهای عددی به ترتیب در عدد دیگری دیده شود عدد دوم را «سرور» عدد اول می گوییم مثلا عدد ۲۳۱۵ سرور عدد ۲۱ است. کدام گزینه در باره کوچک ترین عددی که «سرور» هر دو عدد ۳۲۵۴۵ و ۵۲۳۴۵۲ است صحیح است؟

۱) بین ۳×۱۰^۷ و $۳/۳\times۱۰^۷$ است.　　　۲) کمتر از ۳×۱۰^۷ است.

۳) بین $۳/۳\times۱۰^۷$ و $۵/۴\times۱۰^۸$ است.　　　۴) بیش از $۵/۴\times۱۰^۸$ است.

حل) گزینه ۱ صحیح است.

با دقت در رقم های دو عدد وتعریف سرور نتیجه می گیریم که عدد خواسته شده تعداد رقم هایش از عدد ۵۲۳۴۵۲ باید بیشتر باشد حال چون سه رقم ۲و۴و۵ از عدداولی به ترتیب در رقم های عدد ۵۲۳۴۵۲ وجود دارد پس فقط دو رقم ۳و۲ در عدد دوم وجود ندارد که باید آنها را به سمت چپ ۵۲۳۴۵۲ اضافه کنیم داریم. **۳۲**۵۲۳۴۵۲

$$۳۲۵۲۳۴۵۲ \cong ۳/۲\times۱۰^۷ \Rightarrow ۳\times۱۰^۷ < ۳/۲\times۱۰^۷ < ۳/۳\times۱۰^۷ \Rightarrow$$ گزینه ۱ صحیح است

۱۸- محسن وسعید می خواهند به مدت یک ساعت ، یک مسیر ۱۰۰ متری را به صورت رفت و برگشتی بدوند.اگر هر دو از ابتدای مسیر دویدن را آغاز کنند .وسرعت های آنها به ترتیب $\sqrt{۴۰}$ و ۸ کیلومتر بر ساعت باشد آنها در طول این مسیر تقریبا چند بار از کنار یک دیگر عبور خواهند کرد؟

۱) ۳۰بار　　　۲) ۸۰ بار　　　۳) ۱۵ بار　　　۴) ۵۰ بار

حل) گزینه ۲ صحیح است.

اگر سرعت را با V و مسافت را با d و زمان را با t نمایش دهیم داریم:
$$V=\frac{d}{t} \Rightarrow t=\frac{d}{V}$$

ابتدا مدت زمانی را که طول می کشد تا هر یک ۱۰۰ متر را طی کنندبه دست آوریم.

$$t_۱=\frac{d}{V_۱} \Rightarrow t_۱=\frac{۱۰۰}{\sqrt{۴۰}}=\frac{۱۰۰}{۲\sqrt{۱۰}}=\frac{۵۰}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۵۰}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۵۰\sqrt{۱۰}}{۱۰}=۵\sqrt{۱۰}\,\frac{km}{h}$$

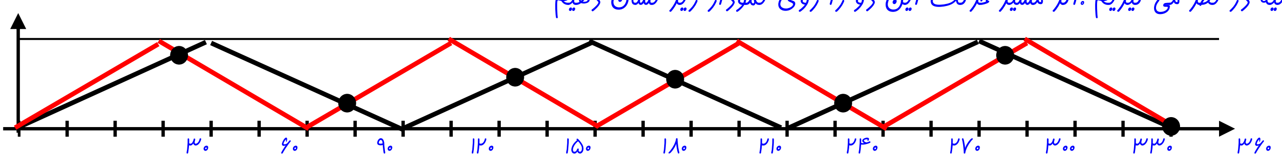
چون هر کیلو متر ۱۰۰۰متر و هر ساعت ۳۶۰۰ ثانیه است. پس :

$$t_۱=۵\sqrt{۱۰}\times\frac{۳۶۰۰}{۱۰۰۰}=۱۸\sqrt{۱۰}s$$

اگر $\sqrt{۱۰}$ را تقریبا ۳/۱ در نظر بگیریم حاصل ۵۵/۸ و اگر ۳/۲ در نظر بگیریم حاصل ۵۷/۶ می باشد.

$$t_۲=\frac{d}{V_۲} \Rightarrow t_۲=\frac{۱۰۰}{۸}=\frac{۲۵}{۲}\frac{km}{h} \Rightarrow t_۲=\frac{۲۵}{۲}\times\frac{۳۶۰۰}{۱۰۰}=۴۵s$$

برای راحتی کار مدت زمانی که محسن فاصله ۱۰۰ متری را طی می کند۶۰ ثانیه ومدت زمانی که سعید ۱۰۰ متر را طی میکند ۴۵ ثانیه در نظر می گیریم .اگر مسیر حرکت این دو را روی نمودار زیر نشان دهیم



متوجه می شویم که درکمتر از۳۶۰ ثانیه اول تقریبا ۷ بار از کنار هم عبور می کنند پس در طول یک ساعت یا ۳۶۰۰ ثانیه بیشتر از ۷۰ بار از کنار هم عبور خواهند کرد.که به گزینه۲ که ۸۰ می باشد نزدیکتر است.

۱۹- سه خط به معادله های $y=ax+b$ و $y=cx+d$ و $y=ex+f$ تشکیل یک مثلث به مساحت ۱ واحد می دهند .مساحت مثلثی که از سه خط به معادله $y=ax+۲b$ و $y=cx+۲d$ و $y=ex+۲f$ به دست می آید کدام است؟

۱) ۱واحد		۲) ۲ واحد		۳) ۴واحد		۴) ۶واحد

حل) گزینه ۳ صحیح است.

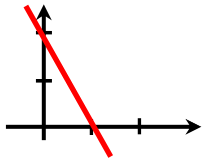
کافیست سه خطی را در نظر بگیریم که با هم مثلثی به مساحت یک تشکیل دهند.

به عنوان نمونه خط های زیر را در نظر می گیریم: (مثلث قائم الزاویه بین دو محور مختصات و خط $y=-۲x+۲$)

$$y=\circ x+\circ \Rightarrow y=\circ$$

$$\circ y=۱x+\circ \Rightarrow x=\circ$$

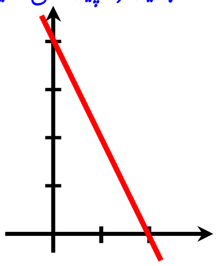
$$y=-۲x+۲$$



$$S_\Delta=\frac{۲\times۱}{۲}=۱$$

حالا معادلات خط های جدید را که عرض از مبدا هر کدام دوبرابر شده است می نویسیم و مساحت مثلث جدید را پیدا می کنیم.

معادلات جدید عبارتند از: $y=\circ$ و $x=\circ$ و $y=-۲x+۴$



$$S_\Delta=\frac{۴\times۲}{۲}=۴$$

۲۰- فرض کنید k یک عدد ثابت است و $A=\left\{x^۲+k \mid x\in Z, -۳\le x<k\right\}$ اگر بدانیم $\{۶,۹\}\subseteq A$ ، آنگاه k عضو کدام مجموعه است؟

۱) $\{۵x+۱ \mid x\in Z\}$		۲) $\{۴x+۳ \mid x\in Z\}$		۳) $\{۲x+۶ \mid x\in Z\}$		۴) $\{۳x-۴ \mid x\in Z\}$

حل) گزینه ۴ صحیح است.

چون ۶و ۹ عضو مجموعه‌ی A هستند پس با ازای دو مقدار ۶ و۹ مقدار $x^۲+k$ برابر شده است در نتیجه داریم:

$$x^۲+k=۶\Rightarrow x^۲=۶-k$$

$$x^۲+k=۹\Rightarrow x^۲=۹-k$$

بنابراین $۶-k$ و $۹-k$ دو عدد مربع کاملند که با هم ۳واحد اختلاف دارند درنتیجه این دوعدد ۱ و ۴ می شوند و از انجا مقدار kعدد ۵ به دست می آید.حال باید با نوشتن عضوهای گزینه ها بررسی کنیم ببینیم که۵ عضو کدام یک از مجموعه هاست؟

۱) $\{...,۱,۶,۱۱,...\}$		۲) $\{...,۳,۷,۱۱,...\}$		۳) $\{...,۲,۴,۶,۸,...\}$		۴) $\{...,-۱,۲,۵,۸,...\}$

پس k عضو مجموعه‌ی گزینه‌ی ۴ است.

سوالات آزمون ریاضی ورودی مدارس تیزهوشان دوره دوم متوسطه   اردیبهشت ماه ۹۶

۱- باقیمانده تقسیم $x^{100}-x^{98}+x^{96}-...+x^{4}-x^{2}+1$ بر $x^{2}-1$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

حل) ابتدا ریشه های مقسو علیه را پیدا می کنیم و سپس آنها را در مقسوم به جای x جایگذاری می کنیم.(چون توانهای متغیر x همه زوجند فرقی نمی کند که ۱- قرار دهیم ویا ۱+)

$$x^{2}-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow 1^{100}-1^{98}+1^{96}-...+1^{4}-1^{2}+1=0+1=1$$

۲- کدام گزاره در مورد عدد حقیقی و مثبت a نمی تواند درست باشد؟

۱) $\sqrt[3]{a}<1000$ و $\sqrt{a}>1000$ ۲) $\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}$

۳) $\sqrt[3]{a}<1$ و $\sqrt{a}>1$ ۴) $\sqrt{a}>10000$ و $\sqrt[3]{a}<1000$

حل) هر یک از گزینه ها را بررسی می کنیم

$$\begin{aligned}\sqrt{a}>1000 &\Rightarrow a>(1000)^{2} \Rightarrow a>10^{6}\\ \sqrt[3]{a}<1000 &\Rightarrow a<(1000)^{3} \Rightarrow a<10^{9}\end{aligned} \quad \Rightarrow 10^{6}<a<10^{9}$$

پس گزینه ۱ درست است.

گزینه ۲ را بررسی می کنیم و برای این کار دو طرف را به توان ۶ می رسانیم داریم

$$\sqrt[3]{a}>\sqrt{a} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{a}\right)^{6}>\left(\sqrt{a}\right)^{6} \Rightarrow a^{2}>a^{3}$$

حالت مقابل وقتی درست می باشد که $0<a<1$ باشد پس این گزینه نیز صحیح می باشد

بررسی گزینه ۳:

$$\begin{aligned}\sqrt{a}>1 &\Rightarrow a>1 \Rightarrow a>1\\ \sqrt[3]{a}<1 &\Rightarrow a<1 \Rightarrow a<1\end{aligned} \quad \Rightarrow a>1 \text{ و } a<1$$

واین غیر ممکن است که عددی هم از ۱ بزرگتر باشد وهم از یک کوچکتر باشد

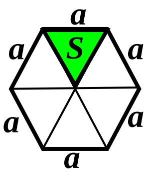
بررسی گزینه ۴:

$$\begin{aligned}\sqrt{a}>10000 &\Rightarrow a>(10000)^{2} \Rightarrow a>10^{8}\\ \sqrt[3]{a}<1000 &\Rightarrow a<(1000)^{3} \Rightarrow a<10^{9}\end{aligned} \quad \Rightarrow 10^{8}<a<10^{9}$$

پس این گزینه نیز صحیح می باشد

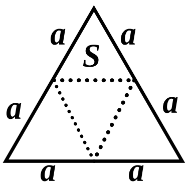
۳- علی با مقداری نخ یک شش ضلعی منتظم ساخته است .رضا با همان مقدار نخ ، یک مثلث متساوی الاضلاع ساخته است. نسبت مساحت شش ضلعی به مساحت مثلث چقدر است؟

۱) ۲   ۲) ۱/۵   ۳) ۱   ۴) $\frac{2}{3}$



حل) اگر ضلع ۶ ضلعی منتظم را برابر a بگیریم a مساوی با $\frac{1}{6}$ طول نخ می شود.با توجه به شکل مقابل مساحت ۶ ضلعی منتظم مساوی ۶ برابر مساحت یکی از مثلثها ی داخل شش ضلعی می شود.

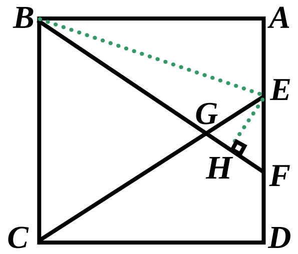
$=6S$ مساحت ۶ ضلعی منتظم



حال چون با همان نخ مثلث متساوی الاضلاع درست می کنیم اندازه هر ضلع این مثلث $\frac{1}{3}$ طول نخ یعنی $2a$ می شود.

$=4S$ مساحت مثلث متساوی الاضلاع

$$\frac{\text{مساحت ۶ ضلعی منتظم}}{\text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع}}=\frac{6S}{4S}=1/5$$



۴- مربع $ABCD$ به طول ضلع a را در نظر بگیرید.نقاط E و F بر روی AD چنان قرار گرفته اند که $EF=\frac{a}{۳}$ ، مساحت مثلث BEG چند برابر مساحت مثلث GEF خواهد بود؟

۱) دو برابر　　　۲) سه برابر

۳) چهار برابر　　　۴)شش برابر

حل:گزینه ۲) نقطه E را به B وصل کرده و از E عمود EH را بر BF رسم می کنیم.اکنون داریم:

چون دو مثلث دارای دو ضلع موازی EF و BC می باشد پس زاویه های متناظر آنها با هم برابر می شوند پس دو مثلث با هم متشابهندوداریم :

$$\frac{BC}{EF}=\frac{BG}{GF}\Rightarrow\frac{a}{\frac{a}{۳}}=\frac{BG}{GF}\Rightarrow\frac{BG}{GF}=\frac{۳}{۱}=۳$$

چون در دو مثلث ذکر شده EH ارتفاع دو مثلث است و BG و GF ارتفاع دو مثلث ذکر شده می باشد داریم:

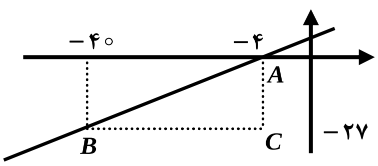
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BEG}}}{S_{\overset{\Delta}{GEF}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BG\times EH}{\frac{۱}{۲}GF\times EH}=\frac{BG}{GF}=۳$$

۵- مورچه‌ای از نقطه‌ی $\begin{bmatrix}-۴۰\\-۲۷\end{bmatrix}$ با سرعت یک واحد بر ثانیه روی خطی به معادله‌ی $۴y=۳x+۱۲$ حرکت می کند پس از چه مدت به محور x ها می رسد؟

۱) ۴۵ ثانیه　　　۲) ۶۷ ثانیه　　　۳) ۳۶ ثانیه　　　۴) ۶۳ ثانیه

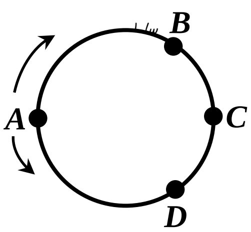
حل: گزینه ۱)ابتدا محل برخورد خط با محور x ها را پیدا می کنیم وبرای این کار به جای y صفر قرار می دهیم.

$$y=۰\Rightarrow ۴\times ۰=۳x+۱۲\Rightarrow ۰=۳x+۱۲\Rightarrow x=-۴$$



اکنون طول AB از مثلث قائم الزاویه ABC را به کمک رابطه فیثاغورس به دست می اوریم.

$$AB^۲=BC^۲+AC^۲=۳۶^۲+۲۷^۲=۲۰۲۵\Rightarrow AB=\sqrt{۲۰۲۵}=۴۵$$



۶-سارا ولیلا از روی نقطه A و در جهت مخالف یکدیگر شروع به حرکت می کنند . سرعت سارا دو برابر سرعت لیلا و جهت حرکت او ساعتگرد است.آنها پس از جدایی در کدام نقطه برای هشتمین بار از کنار یکدیگر عبور می کنند؟

۱) A　　　۲) B　　　۳) C　　　۴) D

حل:گزینه ۲) اولا با توجه به شکل سه کمان AB و BD و DA با هم برابرند و هر کدام ۱۲۰ درجه می شوند.

وقتی لیلا ۱۲۰ درجه را (پاد ساعتگرد)طی می کند سارا دو برابر او یعنی ۲۴۰ درجه را(ساعتگرد) طی می کند

پس هر دو در نقطه D برای بار اول به هم می رسند پس وقتی به همین ترتیب ادامه دهیم داریم:

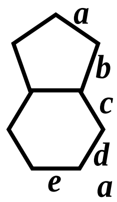
نقطه شروع $A\xrightarrow{۱}D\xrightarrow{۲}B\xrightarrow{۳}A\xrightarrow{۴}D\xrightarrow{۵}B\xrightarrow{۶}A\xrightarrow{۷}D\xrightarrow{۸}B$

۷- دو شش ضلعی منتظم با طول ضلع یک و یک پنج ضلعی منتظم با طول ضلع یک را به چند طریق مختلف می توان از اضلاع به هم چسباند ، به طوریکه با دوران یا تقارن به هم تبدیل نشوند؟

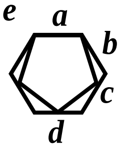
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

حل) گزینه ۴

حالت اول: اگر پنج ضلعی بیرون شش ضلعی باشد آنگاه شش ضلعی دوم را مطابق شکل مقابل می توان روی یکی از اضلاع a,b,c,d,e قرار داد.



حالت دوم: اگر پنج ضلعی داخل شش ضلعی باشد آنگاه شش ضلعی دوم را مطابق شکل می توان روی یکی از اضلاع a,b,c,d قرار داد پس مجموعا به ۹ روش می توان این کار را انجام داد.



۸- اگر در صفحه مختصات عرض یک نقطه عددی گویا باشد آن نقطه را «خوش بیان» می نامیم. چه تعداد از خطوط زیر از هیچ نقطه «خوش بیانی» نمی گذرد ؟

$$y=\sqrt{۲}x+۱ \quad \text{و} \quad y=x+\sqrt{۳} \quad \text{و} \quad y=\pi x+۲\sqrt{۳}$$

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) صفر

حل) گزینه۴

پس خط $y=\sqrt{۲}x+۱$ نقطه خوش بیان دارد. $x=\sqrt{۲}\Rightarrow y=۳$ یا $y=\sqrt{۲}x+۱\Rightarrow x=۰\Rightarrow y=۱$

پس خط $y=x+\sqrt{۳}$ نقطه خوش بیان دارد. $y=x+\sqrt{۳}\Rightarrow x=-\sqrt{۳}\Rightarrow y=-\sqrt{۳}+\sqrt{۳}=۰$

$$y=\pi x+۲\sqrt{۳}\Rightarrow x=\frac{-۲\sqrt{۳}}{\pi}\Rightarrow y=\pi\left(\frac{-۲\sqrt{۳}}{\pi}\right)+۲\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}=۰$$

پس خط $y=\pi x+۲\sqrt{۳}$ نیز نقطه خوش بیان دارد.

۹-عدد اول p را به توان یک عدد طبیعی رسانده ایم و عدد a به دست آمده است .حاصل ضرب همه‌ی مقسوم علیه های a کدام یک از گزینه های زیر می تواند باشد؟

۱) $p^{۸}$ ۲) $p^{۱۰}$ ۳) $p^{۱۲}$ ۴) $p^{۱۴}$

حل) گزینه ۲

مقسوم علیه های عدد a به صورت $p^{۰},p^{۱},p^{۲},p^{۳},p^{۴},\ldots,p^{n}$ می باشند اکنون باید ببینیم تاکدام توان p مجموع توانهای p برابر با یکی از اعداد ۸ یا ۱۰ یا ۱۲یا۱۴ خواهد شد؟ با امتحان مقدارهای مختلف n گزینه صحیح را مشخص می کنیم.

$$p^{۱}p^{۲}p^{۳}p^{۴}p^{۵}=p^{۱۵} \quad \text{یا} \quad p^{۱}p^{۲}p^{۳}p^{۴}=p^{۱۰} \quad \text{یا} \quad p^{۱}p^{۲}p^{۳}=p^{۶} \quad \text{یا} \quad p^{۱}p^{۲}=p^{۳}$$

۱۰- امیر حسین می خواهد بین دو سرویس اینترنتی یکی را انتخاب کند . در سرویس اول، هزینه‌ی اولیه ۱۰۰۰۰۰ تومان و هزینه‌ی هر گیگابایت مصرف، ۱۰۰۰۰تومان است. ودر سرویس دوم ، هزینه اولیه ۱۵۰۰۰۰تومان و هزینه هر گیگا بایت مصرف ۸۰۰۰ تومان است . با توجه به مصرف سالیانه کدام سرویس مقرون به صرفه است؟

۱)همیشه سرویس او بهتر است. ۲)همیشه سرویس دوم بهتر است.

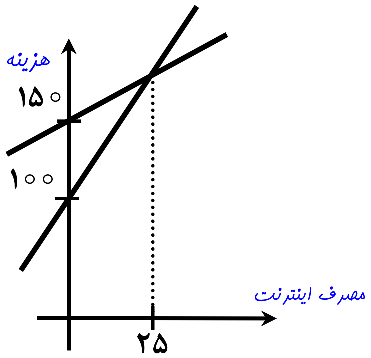
۳) برای مصرف تا ۲۵ گیگابایت سرویس دوم بهتر است. ۴) برای مصرف بیش از ۲۵ گیگابایت سرویس دوم بهتر است.

حل) گزینه ۴:

اگر هزینه کلی را با y وحجم مصرف شده را با x نشان دهیم هزینه های هر سرویس را می توان با معادلات روبه رو نشان داد.

$$\begin{cases} y = ۱۰۰۰۰x + ۱۰۰۰۰۰ \\ y = ۸۰۰۰x + ۱۵۰۰۰۰ \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = ۲۵$$

اگر این دو معادله را در یک دستگاه حل کنیم به $x = ۲۵$ می رسیم.
نقطه برخورد این دو خط همان نقطه ای است که نشان می دهد دو سرویس هزینه
یکسان دارند و این یعنی برای x های کوچکتر از ۲۵ سرویس اول هزینه کمتر و برای
x های بزرگتر از ۲۵ سرویس دوم هزینه کمتری دارد.

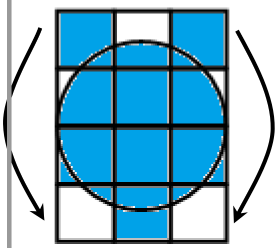


۱۱-ساعتی داریم که عدد ۱۲ آن همواره روبه شمال و عدد ۳ آن همواره رو به شرق است .فاطمه راس هر دقیقه در جهت عقربه دقیقه شمار این ساعت به اندازه ۱ متر جابجا می شود. اگر فاطمه نخستین بار راس ساعت ۱۳:۰۱ به این ساعت نگاه کرده باشد لحظاتی پیش از ساعت ۱۴ در چه فاصله‌ای از نقطه شروع حرکت ایستاده است؟

**۱) صفر	۲) یک متر	۳) بیش از ۱متر و کمتر از ۳۰ متر	۴) بیش از ۳۰متر و کمتر از ۶۰ متر**

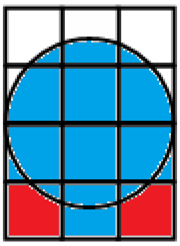
حل) گزینه ۲
در این فاصله‌ی زمانی فاطمه هر حرکتی انجام دهد قرینه‌ی آن حرکت را نیز انجام خواهد داد(بجز ساعت ۱۳:۳۰)
مثلا حرکت در ساعت ۱۳:۰۱ با حرکت در ساعت ۱۳:۳۱ قرینه هم هستند که خنثی می شوند.ولی حرکت در ساعت ۱۳:۳۰ قرینه اش ساعت ۱۴:۰۰ می باشد که چون در قبل از ساعت ۱۴:۰۰ متوقف شده پس حرکت در ساعت ۱۳:۳۰ قرینه نخواهد داشت بنابراین در فاصله امتری شروع حرکت ایستاده است.

۱۲- شکل مقابل از ۱۲ مربع به طول ضلع ۲ ویک دایره به قطر ۶ ساخته شده است .
مرکز دایره روی یکی از اضلاع مربع های هاشور خورده قرار دارد. مساحت قسمت هاشور خورده چقدر است؟



**۱) ۳۶	۲) $۳(۸ + ۳\pi)$**

**۳) ۳۸	۴) $۲۴ + \frac{۹}{۲}\pi$**



حل :گزینه ۴)
ابتدا قسمت هایی از دو مربع را که در دوگوشه بالاو سمت چپ وراست شکل هستند را
به دو قسمت پایین سمت چپ و راست انتقال می دهیم. حال قسمت رنگی برابر است با:
یک نیم دایره و یک مستطیل ۳×۲ پس داریم:

$S = ۲۴ + \frac{۹}{۲}\pi$ *قسمت هاشور خورده* $\Leftarrow$ $S = ۶ \times ۴ = ۲۴$ *مربع*	$S = \frac{۳ \times ۳ \times \pi}{۲} = \frac{۹}{۲}$ *نیم دایره*

۱۳- جمعیت یک نوع باکتری در هر ساعت یا ۱۸ برابر می شود یا ۱۲ برابر می شود. پس از گذشت ۱۰ ساعت جمعیت این نوع باکتری چند برابر می تواند شده باشد.

**۱) $۶^{۱۸}$ برابر	۲) ۲×۶^{۱۴}برابر	۳) ۱۶×۶^{۱۳}برابر	۴) ۹×۶^{۱۵} برابر**

حل:گزینه ۳
اگر فرض کنیم که در k ساعت ۱۸ برابر می شود پس در $۱۰ - k$ ساعت ۱۲ برابر می شود. اکنون داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱۲ = ۲ \times ۶ \\ ۱۸ = ۳ \times ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ۱۸^k = ۳^k \times ۶^k \\ ۱۲^{۱۰-k} = ۳^{۱۰-k} \times ۶^{۱۰-k} \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۸^k \times ۱۲^{۱۰-k} = ۳^k \times ۲^{۱۰-k} \times ۶^{۱۰}$$

حال باید ببینیم که کدام یک از گزینه ها را می توان به مانند رابطه ✪ نوشت.(یعنی توان ۶ عدد ۱۰ باشد و جمع توانهای ۲و۳ نیز ۱۰ شود)

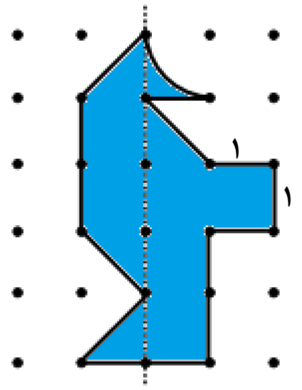
گزینه ۱ غلط است زیرابه شکل رابطه ✪ نیست. $۶^{۱۸} = ۶^{۱۰} \times ۲^{۸} \times ۳^{۸}$

گزینه۲ غلط است زیرابه شکل رابطه ✪ نیست. $۲ \times ۶^{۱۴} = ۶^{۱۰} \times ۳^{۴} \times ۲^{۵}$

گزینه ۳ درست است زیرا: $۱۶ \times ۶^{۱۳} = ۲^{۴} \times ۶^{۳} \times ۶^{۱۰} = ۲^{۴} \times ۲^{۳} \times ۳^{۳} \times ۶^{۱۰} = ۲^{۴} \times ۳^{۶} \times ۶^{۱۰}$

گزینه ۴ نیز غلط است زیرابه شکل رابطه ✪ نیست. $۹ \times ۶^{۱۵} = ۳^{۳} \times ۶^{۵} \times ۶^{۱۰} = ۳^{۳} \times ۳^{۵} \times ۲^{۵} \times ۶^{۱۰} = ۳^{۸} \times ۲^{۵} \times ۶^{۱۰}$

۱۴- حجم شکلی که با دوران دادن حول خط چین به دست می آید کدام است؟

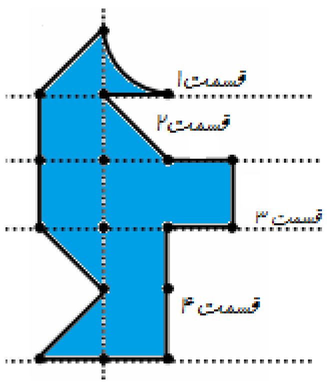


۱) $۷\frac{۱}{۳}\pi$　　۲) $۶\frac{۲}{۳}\pi$

۳) $۵\frac{۱}{۳}\pi$　　۴) ۸π

حل) گزینه ۱

برای حل این سوال باید این نکته را مد نظر داشته باشیم که وقتی یک شکل حول خطی که نسبت به آن تقارن ندارد دوران کند آنگاه حجم به وجود آمده به وسیله قسمت بزرگتر شکل تولید می شود و قسمت کوچکتر تاثیری در حجم به وجود آمده نخواهد داشت.



$V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۱^۲ \times ۱ = \frac{۱}{۳}\pi$ حجم مخروط (قسمت ۱)

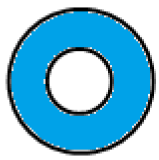
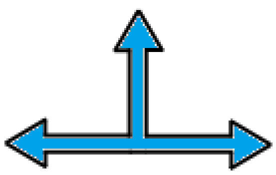
$V_۲ = \pi r^۲ h = \pi \times ۱^۲ \times ۱ = ۱\pi$ حجم استوانه (قسمت ۲)

$V_۳ = \pi r^۲ h = \pi \times ۲^۲ \times ۱ = ۴\pi$ حجم استوانه (قسمت ۳)

$V_۴ = \pi r^۲ h = \pi \times ۱^۲ \times ۲ = ۲\pi$ حجم استوانه (قسمت ۴)

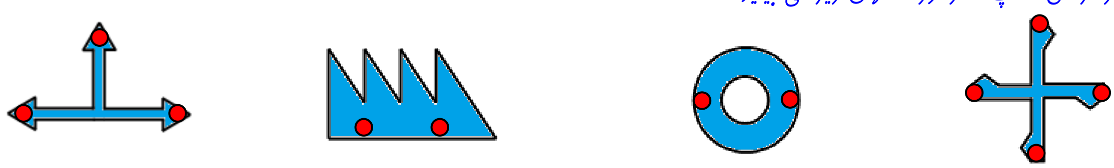
$V = V_۱ + V_۲ + V_۳ + V_۴ = \frac{۱}{۳}\pi + ۱\pi + ۴\pi + ۲\pi = ۷\frac{۱}{۳}\pi$ حجم کل

۱۵- نقشه چهار سالن (از بالا) به شکل گزینه های زیر است .(فضای سالن ها با رنگ تیره مشخص شده است.)کدام یک از سالن ها تعداد چراغ کمتری لازم دارد تا نور به صورت مستقیم به تمام نقاط آن برسد؟

۱) 
۲) 
۳) 


حل: گزینه های ۲و۳

گزینه اهداقل با ۴ لامپ و گزینه ۴ حداقل با سه لامپ (که در راس هر یک از فلشها قرار دارند) روشن می شود اما گزینه های ۲ و۳ هر کدام حداقل با دو لامپ روشن می شوند.(محل قرار گرفتن لامپ ها را در شکلهای زیر می بینید.



۱۶- از کیسه ای شامل ۹ گوی شماره گذاری شده از ۱ تا ۹ ، در سه نوبت ، هر بار یک گوی بیرون می آوریم . و در جدول رو به رو خانه مربوطه را علامت می زنیم(گوی ها را به کیسه برنمی گردانیم.)چقدر احتمال دارد که همه‌ی خانه های یک سطر یا یک ستون و یا یک قطر این جدول علامت دار شوند؟

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

۱) $\frac{۸}{۵۰۴}$　　۲) $\frac{۲۴}{۵۰۴}$　　۳) $\frac{۳۰}{۵۰۴}$　　۴) $\frac{۴۸}{۵۰۴}$

حل) گزینه ۴

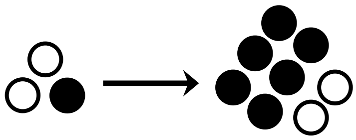
ابتدا کل حالتهای ممکن یعنی $n(S)$ را به دست می آوریم.

در بار اول برای انتخاب یک گوی ۹ انتخاب داریم و دربار دوم برای انتخاب گوی ، ۸ انتخاب داریم (زیرا گوی اول را به کیسه بر نمی گردانیم.) و در بار سوم برای انتخاب گوی، ۷ انتخاب داریم زیرا ۲تا از گوی ها بیرون هستند. پس تعداد کل حالتها برابر است با:
$$n(S)=۹\times۸\times۷=۵۰۴$$

برای به دست آوردن تعداد حالت های مطلوب یعنی $n(A)$ ، چون ۳ سطر و ۳ ستون و ۲ قطر داریم پس کل حالتها ۸ حالت می شود.ولی چون مثلاحالات اول۲و۳ با حالت اول۳و۲ فرق دارد برای هر سطر و ستون و قطر ۶ حالت داریم در نتیجه :

$$n(A)=۶\times۸=۴۸\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۸}{۵۰۴}$$

۱۷- مطابق الگوی مقابل در هر مرحله،هر دایره سیاه به ۲ دایره سفید و هر دایره سفید به ۳ دایره سیاه تبدیل می شوند. در شکل هشتم چند دایره سفید وجود دارد؟



شکل اول　　شکل دوم

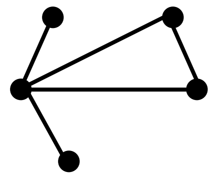
۱) $۶^{۴}\times۲$　　۲) $۶^{۴}\times۳$　　۳) $\frac{۶^{۴}}{۲}$　　۴) $\frac{۶^{۴}}{۳}$

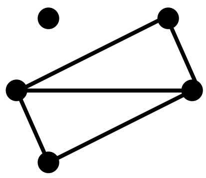
حل:گزینه ۴

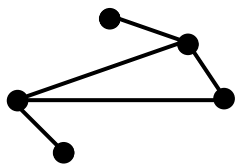
فلش های رو به پایین ضریبر ۳ را و فلش های رو به بالا ضریبر ۲ را نشان می دهند.حال با توجه به جدول زیر و پیدا کردن حاصل هر گزینه ، گزینه ۴ صحیح می باشد.

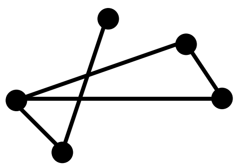
شماره شکل	شکل۱	شکل۲	شکل۳	شکل۴	شکل۵	شکل۶	شکل۷	شکل۸
مهره سفید	۲	۲	۱۲	۱۲	۷۲	۷۲	۴۳۲	۴۳۲
مهره سیاه	۱	۶	۶	۳۶	۳۶	۲۱۶	۲۱۶	۱۲۹۶

۱۸- ۵ مجموعه‌ی دو عضوی غیر مساوی داریم. در گزینه های زیر، هر نقطه ، یکی از این مجموعه ها را نشان می دهد. اگر اشتراک دو مجموعه تهی نباشد ، نقاط مربوط به آنها را به هم وصل کرده ایم. کدام یک از اشکال زیرنمی تواند مربوط به این پنج مجموعه باشد؟

۱)


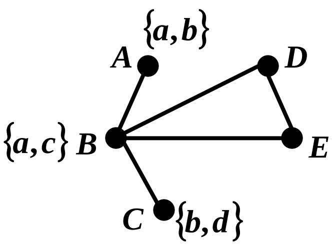
۲)


۳)


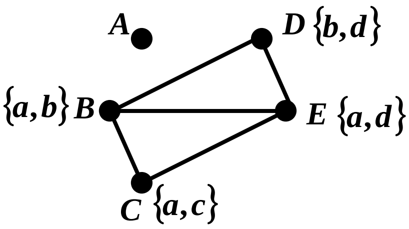
۴)


حل: گزینه ۱

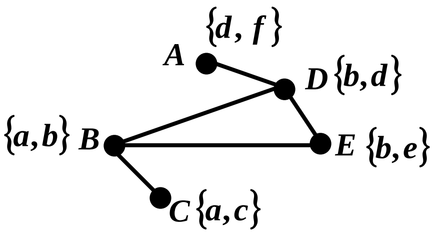
در گزینه (۱) هر کدام از D و E باید، هم بایکدیگر و هم با A اشتراک داشته باشند که چون هر کدام دو عضو دارند این غیر ممکن است.



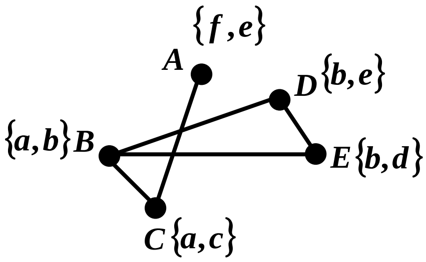
گزینه۲



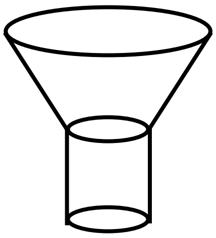
گزینه۳



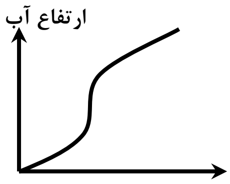
گزینه۴



۱۹-در ظرفی مانند شکل رو به رو با سرعتی ثابت آب می ریزیم. کدام نمودار توصیف دقیق تری از ارتفاع آب در ظرف است؟

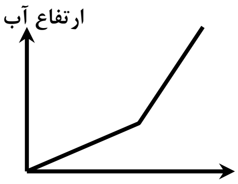


۱)



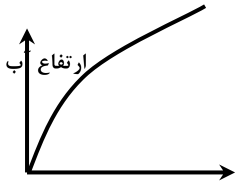
زمان

۲)



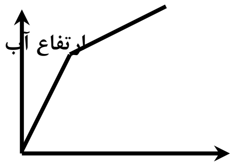
زمان

۳)



زمان

۴)

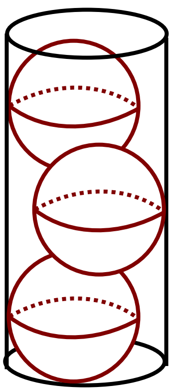


زمان

حل) گزینه ۳

در قسمت استوانه ارتفاع آب به دلیل اینکه سطح مقطع ثابت است با سرعت ثابتی افزایش پیدا می کند(یعنی به صورت یک خط راست) اما در قسمت مخروط ناقص چون سطح مقطع تغییر می کند سرعت تغییر می کند. و ارتفاع کاهش می یابد(یعنی به صورت یک خط خمیده می شود.)

۲۰-استوانه‌ای به قطر ۶، چه ارتفاعی داشته باشد که در آن سه کره به قطر ۴ مانند شکل رو به رو قرار بگیرد؟



۱) $۴\sqrt{۳}+۴$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}+۲$ ۴) $۶\sqrt{۳}+۴$

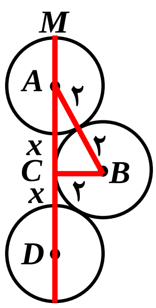
حل: گزینه ۱

چون کره ها با هم تماس دارند پس دایره های عظیمه آنها در نقاط تماسشان با هم مماس هستند

اکنون با توجه به شکل مقابل و رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۴^۲ = x^۲ + ۲^۲ \Rightarrow x = \sqrt{۱۶-۴} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AD == ۲x = ۲\times ۲\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳}$$



چون کره ها بردو قاعده استوانه مماس هستند و شعاع هر کدام نیز ۲ می باشد پس AM و DN نیز هر کدام ۲ سانتیمتر می باشد و بنابراین ارتفاع استوانه یعنی MN برابر است با:

$$MN = ۲+۲+۴\sqrt{۳} = ۴+۴\sqrt{۳}$$