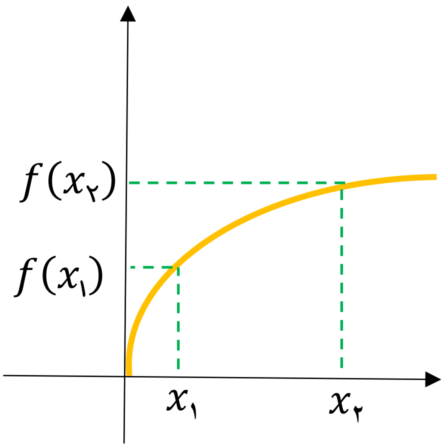
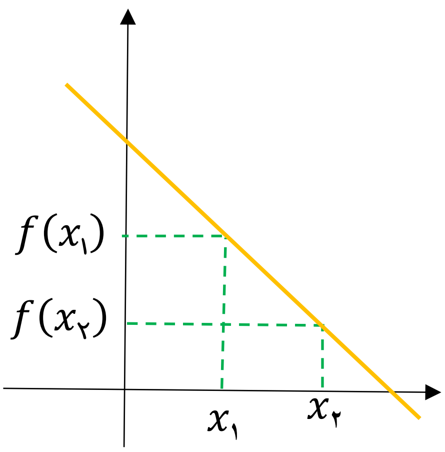
تابع اکیدا صعودی :

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیدا صعودی می نامیم.



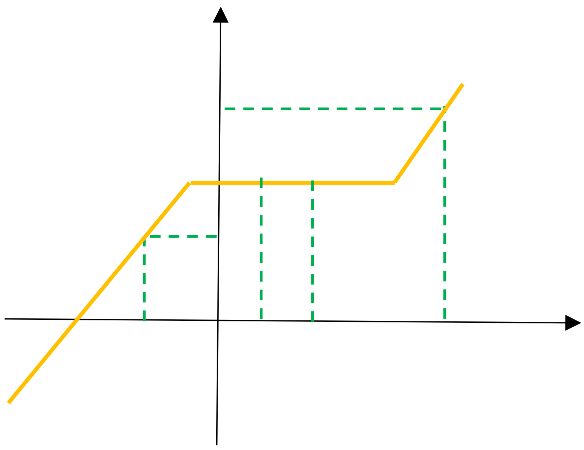
تابع اکیدا نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$، آنگاه f را تابعی اکیدا نزولی می نامیم.



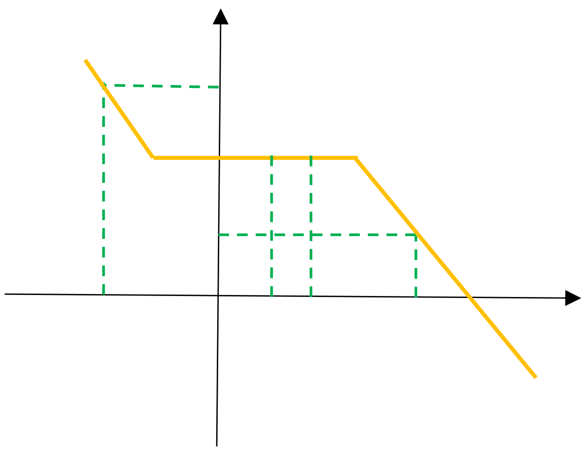
تابع صعودی :

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می نامیم .



تابع نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی نزولی می نامیم .



تابع f را در یک بازه ثابت می گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی هم نزولی محسوب می شود.

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیدا فقط اکیدا صعودی یا فقط اکیدا نزولی باشد، اکیدا یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم. توابع اکیدا یکنوا همواره یکنوا هستند.

مثال : نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی اند.

۱)$f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$; $D_f=[۰,۲\pi]$

۲)$g(x)=x+[x]$

۳)$t(x)=-x^{۲}-۱$

مثال : نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن ها را مشخص نمایید.

۱) $y = (x - ۱)^۳ - ۱$

۲) $y = (x + ۲)^۳ - ۲$

مثال : نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه هایی را که در آن ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -۲x - ۲ & x < -۴ \\ ۲ & -۴ \leq x < ۲ \\ ۳x - ۲ & x \geq ۲ \end{cases}$$

ترکیب توابع:

نماد ترکیب تابع f و g را به صورت fog و gof می باشد. به صورت

$fog(x) = f(g(x))$ و $gof(x) = g(f(x))$ تعریف می گردد

$a \rightarrow \boxed{f} \rightarrow b$

$b \rightarrow \boxed{g} \rightarrow c$

$a \rightarrow \boxed{f} \rightarrow b \rightarrow \boxed{g} \rightarrow c$

دامنه ی ترکیب توابع:

$$D_{fog} = \{x | x \in D_g \, , g(x) \in D_f\}$$

طریقه بدست آوردن دامنه ترکیب توابع :

ابتدا فرمول $D_{fog} = \{x | x \in D_g \, , g(x) \in D_f\}$

مقدمه $\begin{cases} D_f & \text{حساب کن} \\ D_g & \text{حساب کن} \end{cases}$

سپس $\begin{cases} A & \text{در مقدمه حساب شد} \\ B & \text{حساب کن} \end{cases} \rightarrow$ اشتراک بگیر

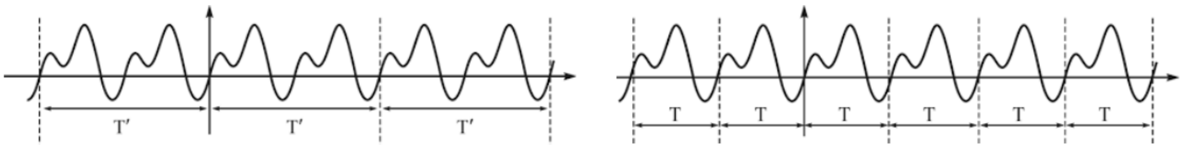
مثال: اگر $h(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲+۲}$ مطلوبست دامنه و ضابطه ی goh و $goh(۰)$ ؟

تابع متناوب :

تابع f را متناوب گویند هرگاه بازه ای به طول T داشته باشیم به طوریکه

$$f(x+T)=f(x)$$

دوره تناوب : کوتاهترین حالت ممکن T را دوره تناوب می گویند ...



دوره تناوب توابع معروف :

$$\begin{cases}\sin ax\\ \cos ax\end{cases} \rightarrow T=\frac{۲\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases}\tan ax\\ \cot ax\end{cases} \rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases}y=ax-[ax]\\ y=[ax]+[-ax]\end{cases} \rightarrow t=\frac{۱}{|a|}$$

مثال : دوره تناوب توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = ۲\sin\frac{x}{۲} - ۷$

۲) $y = \sqrt{۲} - ۳\cos(\frac{\pi}{۳} - ۲x)$

۳) $y = ۵ + \pi\cos(-۴x + ۳)$

۴) $y = ۳x - [۳x]$

۵) $y = \left[\frac{x}{۲}\right] + \left[-\frac{x}{۲}\right]$

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases} x & ۰\le x\le ۱ \\ ۲-x & ۱\le x\le ۲ \end{cases}$ با دوره تناوب ۲ مفروض است. مساحت محصور بین نمودار تابع و محور طول ها در بازه ی $[-۰.۷۵ , ۳.۲۵]$ کدام است؟

بررسی کتاب درسی:

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دوره تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

۱) $y=۱+۲\sin ۷x$

۲) $y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x$

۳) $y=-\pi\sin\left(\frac{x}{۲}\right)-۲$

۴) $y=-\frac{۳}{۴}\sin ۳x$

مثال : در هر مورد ضابطه تابع مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

۱) $T=\pi \quad , \quad \max=۳ \quad , \quad \min=-۱$

۲) $T=۳ \quad , \quad \max=۹ \quad , \quad \min=۳$

۳) $T=۴\pi \quad , \quad \max=+۱ \quad , \quad \min=-۷$

مثال : ضابطه مربوط به هر یک از نمودار های داده شده را بنویسید.

حد رادیکال

$$۱)\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{\sqrt{۲-x}-x}$$

$$۲)\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt[۳]{x+۵}-۲}{x^{۲}-۲x-۳}$$

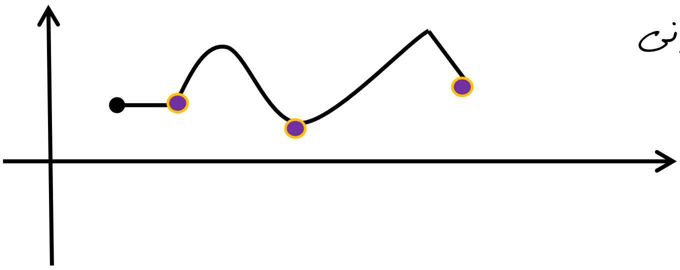
نقاط بحرانی - ماکزیمم و مینیمم مطلق و نسبی - صعودی و نزولی - جهت تقعر و نقطهٔ عطف

نقطهٔ بحرانی

نقطهٔ $x_{\circ} \in D_f$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f است. ← هرگاه $f'(x_{\circ})$ موجود نباشد یا $f'(x_{\circ}) = \circ$

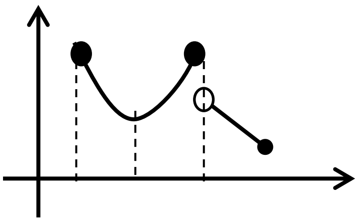
مثلاً در شکل مقابل ← ۵، ۳،۲، ، (۱،۲) : نقطهٔ بحرانی

توجه کنید که ابتدا و انتهای باز، بحرانی .... !!

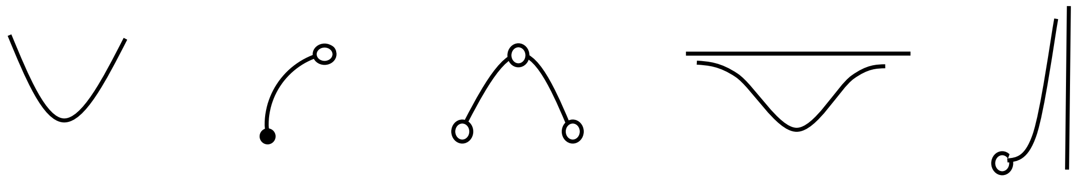


نقطهٔ ماکزیمم مطلق : نقطهٔ $x_{\circ} \in D_f$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع f است هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمامی نقاط دیگر بیشتر یا با آنها مساوی باشد.

نقطهٔ مینیمم مطلق : بطور مشابه تعریف می شود مثلاً در شکل مقابل: نقطهٔ ماکزیمم و یا مینیمم مطلق را نقاط اکسترمم مطلق می نامند.

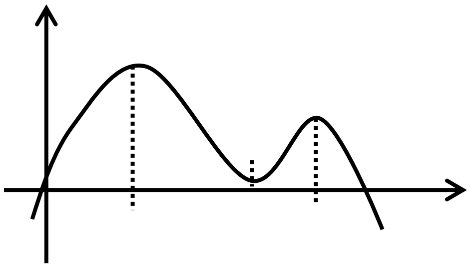


تذکر : شکل های زیر ماکزیمم مطلق ندارد.



توجه: ماکزیمم و مینیمم مطلق، بنام ماکزیمم و مینیمم سراسری نیز خوانده می شوند.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی: نقطهٔ $x_0 \in D_f$ نسبی تابع f است، هرگاه مقدار تابع در این نقطه به نسبت نقاط اطرافش از بقیه یا با آن ها مساوی باشد.



نقطهٔ مینیمم نسبی: به طور مشابه تعریف می شود.

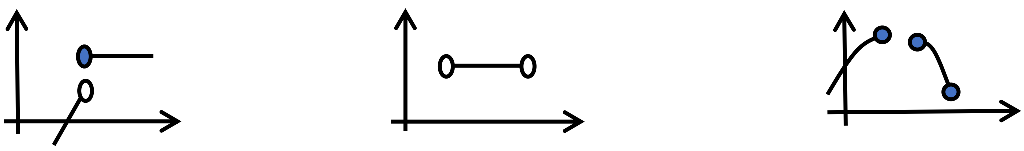
مثلاً در شکل مقابل: $x = ۲ ، ۴$: نقطهٔ ماکزیمم نسبی (موضعی)

$x=۳$: نقطهٔ مینیمم نسبی (موضعی)

منطقهٔ ماکزیمم و مینیمم نسبی را نقاط اکسترمم نسبی می نامند.

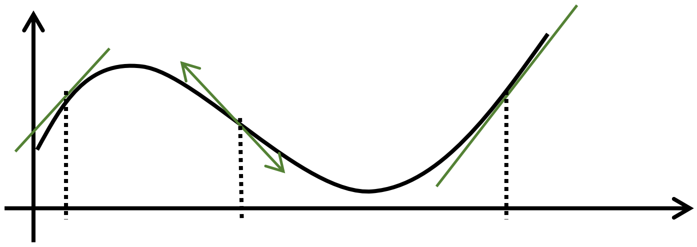
توجه: ماکزیمم و مینیمم نسبی، بنام ماکزیمم و مینیمم موضعی نیز خوانده شوند.

مثال: در هر شکل معلوم کنید نقطهٔ مورد سوال ماکزیمم نسبی است یا مینیمم نسبی.

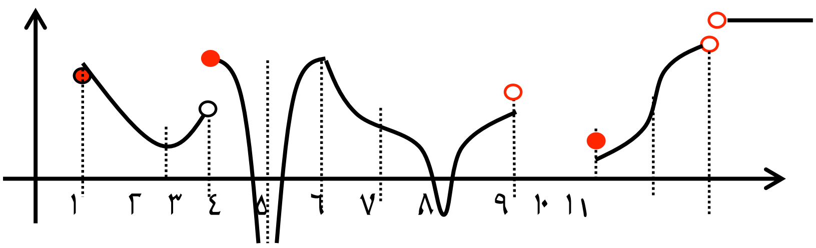


جهت تقعر و نقطه عطف

اگر نمودار تابع f مطابق شکل مقابل باشد. در x=۱ خط مماس بر منحنی و بالای منحنی واقع است، در این نقطه تقعر منحنی به سمت پائین است. در تمامی باز (۴،۱) وضعیت اینگونه است و تقعر منحنی به سمت پائین است. در x=۷ خط مماس بر منحنی موجود و زیر منحنی واقع است، دراین نقطه تقعر منحنی به سمت بالا است. در تمامی باز $(4,+\infty)$ تقعر به سمت بالاست. x=۴ که در آن دو ویژگی مهم مقابل را داراست، نقطهٔ عطف منحنی است. ۱) تقعر عوض می شود. ۲) خط مماس بر منحنی موجود است.



مثال : برای شکل زیر موارد مقابل را تعیین کنید. (موارد ۷ گانه)



۱) بحرانی : $x =$ ۲,۳,۵,۶,۷, ۱۰, (۱۱, $+\infty$)

۲) ماکزیمم مطلق : (۱۱, $+\infty$)

۳) مینیمم مطلق : ندارد

۴) ماکزیمم نسبی : $x =$ ۳,۵, (۱۱, $+\infty$)

۵) مینیمم نسبی : $x =$ ۲,۷, (۱۱, $+\infty$)

۶) جهت تقعر :
- بالا : (۱,۳) , (۵,۶), (۹,۱۰)
- پایین: (۳,۴), (۴,۵), (۶,۷), (۷,۸), (۱۰,۱۱)

۷) نقطه عطف : $x =$ ۶, ۱۰

اگر ضابطه‌ها داده شده باشد و بتوانیم نمودار آن ضابطه را رسم نمائیم. در این صورت آن را رسم نموده و موارد ۷ گانه را مشخص می‌کنیم.

$$a)\ y = [x] + [-x]$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \cos x\ , |x| \leq \frac{\pi}{۲} \\ ۱\quad\ , |x| > \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

۶) جهت تقعر :

۷) نقطهٔ عطف :

$$۱)\ f(x) = \big||x| - ۱\big|$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

۲) $f(x) = x|x|$: $x \in [-۱, ۲)$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

۳) $y = |x^۲ - ۱|$: $-۱ \leq x < ۲$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق:

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

$$۴)y = |x^{۲} - ۲x| = |x(x - ۲)|$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق:

۴) ماکزیمم نسبی:

۵) مینیمم نسبی :

$$۵)f(x) = |x|(x - ۲) = \begin{cases} x(x - ۲) & ,x \geq ۰ \\ -x(x - ۲) & ,x < ۰ \end{cases} , \quad x \in [-۱, ۲]$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق:

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

تمرین : نمودار هریک از توابع داده شده را رسم نموده و سپس نمودار موارد ۷ گانه یاد شد فوق را تعیین کنید.

۱)$y = ||x| - ۱|$

۲) $y = x|x|; x\epsilon[-۱,۲)$

۳) $y = |\sin x|: x\epsilon\left(-\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲}\right)$

۴)$|\cos x|$

۵)$y = |x^{۲} - ۱|: -۱ \leq x < ۲$

۶)$y = |x^{۲} - ۲x|$

۷)$y = |x|(x - ۲): x \in [-۱, ۲]$

۸)$y = [x]: x \geq -۱$

۹)$y = [x] + [-x]$

۱۰)$[x] - x: ۰ \leq x \leq ۳$

۱۱)$y = [\sin x]: |x| \leq \pi$

۱۲)$y = \sqrt{|x|}$

اگر ضابطه داده شده باشد و نتوانیم نمودار آن را رسم کنیم.

ماکزیمم مینیمم مطلق (سراسری): ابتدا y' را بدست آورد و نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. پس برای نقاط بحرانی پیدا شده و نیز نقاط ابتدایی و انتهایی بازه عرض نقاط بدست می‌آوریم، نقطه‌ای که بیشترین عرض را داراست، ماکزیمم و آنکه کمترین را دارد، مینیمم مطلق است.

۱) $y = ۳x^{۲} - x^{۳} \quad , x \in [-۱,۱]$

۲) $f(x) = x - ۳\sqrt[۳]{x} \quad , ۰ \leq x \leq ۸$

۳) $y = (x - ۵).x^{\frac{۲}{۳}} \quad , x \in [-۱,۱]$

۴) $y = \sqrt{۹ - x^۲}$

نکته: مقادیر ماکزیمم و مینمم مطلق تابع که به ترتیب فوق بدست می آیند. بیانگر بیشترین و کمترین و یا حداکثر و حداقل و نیز برد تابع است.

مثال : برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ - ۱۲x + ۸$ بر بازه $[-۳,۱]$ کدام است؟

کنکور۸۴ (سراسری ریاضی) : برای کدام مقدار k ، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + k$ در $[۱,۳]$ قرینه اند؟

تمرین :

مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع داده شده را بیابید.

نکته: در ۳ مورد آخر، باید خودتان تعریف را و دربازه بدست آمده حل کنید.

$۱)y = x - ۲\sqrt{x} , ۰ \leq x \leq ۹$

$۲)y = ۳\sqrt[۳]{x} - x, \qquad |x| \leq ۱$

$۳)y = \sqrt{x} - \sqrt{۱ - x}$

$۴)y = x.\sqrt{۴ - x^{۲}}$

$۵)y = x + \sqrt{۱ - x^{۲}}$

تشخیص یکنوایی تابع به کمک مشتق : مشتق اول تابع را تعیین علامت کرده ....

مثال: تابع $f(x) = x + \frac{۴}{x^۲}$ در کدام بازه داده شده صعودی است.

الف) $(-\infty,۱)$
ج) $(۰,۲)$

ب) $(۱,+\infty)$
د) $(۲,+\infty)$

پیدا کردن نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی وقتی ضابطهٔ داده شده

برای این منظور روش زیر که به آزمون مشتق اول مرسوم است ابتدا y' را به دست آورده و جدول تعیین علامت را رسم میکنیم (این جدول بنام جدول تغییرات یا رفتار معروف است)

در نقاطی که از جدول که تغییر علامت رخ دهد اکسترمم نسبی وجود دارد. (نقطه متعلق به دامنه باشد)

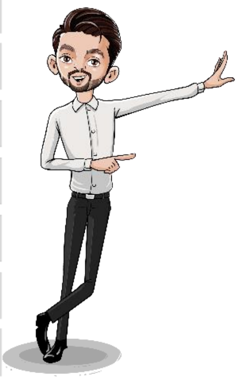
مثال مهم : جدول تغییرات توابع داده شده را رسم کنید در مورد نقاط اکسترمم بحث کنید؟

۱)$f(x) = ۳x^{۵} - ۵x^{۳}$

۲)$f(x) = (x - ۵)\sqrt[۳]{x^{۲}}$

۳) $f(x) = ۳\sqrt[۳]{x} - x$

۴) $f(x) = x + \frac{۴}{x^{۲}}$



ه) $f(x) = \frac{x}{x-۱}$

کنکور ۸۷: کدام بیان برای تابع با ضابطهٔ $f(x) = x.|x^۲ - ۳|$ بر دامنه $[-۱,۱]$ نادرست است.

۱) مینیمم مطلق دارد
۲) ماکزیمم مطلق دارد
۳) دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد
۴) فاقد اکسترمم نسبی است.

جهت تقعر و نقطه عطف

ابتدا y'' را بدست آورده و جدول تعیین علامت آن را رسم می کنیم در نقاطی که الف) $y'' > 0$ باشد، تقعر منحنی به سمت بالاست. ب) $y'' < 0$ باشد، تقعر منحنی به سمت پایین است. و در نقاطی که تغییر علامت رخ دهد، نقطه عطف وجود دارد. (نقطه متعلق به دامنه باشد)

مثال : جهت تقعر و نقطه عطف توابع داده شده را مشخص کنید.

۱) $y = \frac{x^{۵}}{۵} - \frac{x^{۴}}{۴}$

۲) $y = x + \sqrt[۳]{x}$

آزمون مشتق دوم

اگر $f'(c) = 0$ ، $f''(c)$ موجود باشد.

الف) اگر $f''(c) > 0$ آنگاه C نقطه مینیمم موضعی است.

ب) اگر $f''(c) < 0$ آنگاه C نقطه ماکزیمم موضعی است.

تذکر: اگر $f''(c) = 0$ با این آزمون امکان پاسخگویی نیست.

مثال: با استفاده از آزمون مشتق دوم، نقاط ماکزیمم و یا مینیمم موضعی تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$ را تعیین کنید.

مسائل پارامتری نقطه ماکزیمم یا مینیمم و نقطهٔ عطف:

در این مسائل به موارد زیر توجه داریم:

۱) طول نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم حتماً y' را صفر می‌کند.
۲) طول نقطهٔ عطف حتماً y'' را صفر می‌کند.
۳) مختصات نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم و یا نقطهٔ عطف و یا هر نقطهٔ دلخواه دیگر واقع بر منحنی در ضابطه خود تابع صدق می‌کند.

مثال: تابع $f(x) = x^{2} + ax + b\sin x + c$ مفروض است، a, b, c را چنان بیابید که $A\Big|_{1}^{0}$ نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع بود و نقطهٔ $x = \frac{\pi}{6}$ نقطه عطف آن باشد.

نکته: در برخی از سوالات تاکید بر نوع اکسترمم موضعی وجود دارد که یعنی ماکزیمم باشد یا مینیمم.

کنکور ۸۹ (سراسری ریاضی): تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{a}{x} + bx^{2}$ در نقطهٔ $(1, -2)$ دارای اکسترمم نسبی است، عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

نکته: در برخی از مسائل فقط عرض نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم و یا نقطهٔ عطف داده شده است، در این صورت خودمان بایستی طول نقطهٔ مورد نظر را بدست آورده و به اتفاق عرض داده شده در ضابطهٔ تابع قرار دهیم.

مثال: a را چنان بیابید که تابع $y = x^{2} - ax + 4$ مینیمم مساوی ۳ داشته باشد.

نکته: نقاط تابع $y = |f(x)|$ عبارت است از ۱) نقاط بحرانی $y = f(x)$ ۲) ریشه‌های ساده $y = f(x)$

کنکور ۹۰ (سراسری ریاضی): تعداد نقاط بحرانی $y = |x^{3} - x|$ در $-1 \le x \le 2$؟

جدول تغییرات (رفتار) تنظیم کنید و نقاط ماکزیمم و مینیمم را تعیین کنید و نمودار تابع را در نقاط مرز (روی خطوط) رسم کنید.

۱)$y=\frac{x^{۳}}{۳}-\frac{x^{۵}}{۵}$

۲)$y=x-۳\sqrt[۳]{x}$

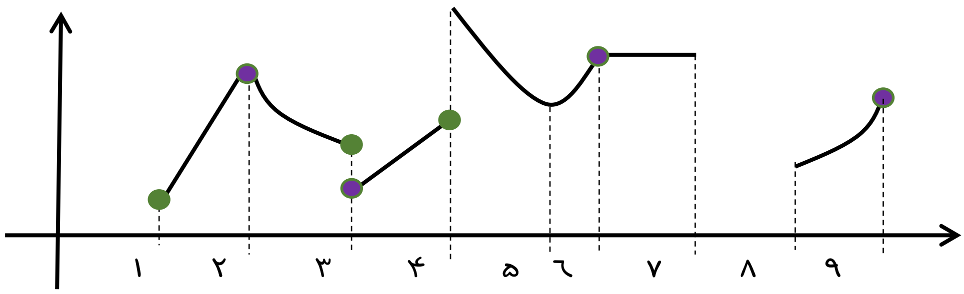
۳)$y=(x-۱).x^{\frac{۲}{۳}}$

ه) $y = x + \frac{۲}{x}$

۶) $y = \frac{x^{۲}}{x^{۲} + ۱}$

۷) $y = \frac{۱}{x^{۲} - ۴}$

با توجه به شکل زیر به تست ۱۰۱ و ۱۰۲ و ۱۰۳ پاسخ دهید.



۱- تعداد نقاط بحرانی کدام است.

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) بی شمار

۲- تعداد نقاط ماکزیمم نسبی که مشتق ناپذیرند کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

۳- مجموعه نقاطی که هم ماکزیمم نسبی باشند و هم مینیمم نسبی کدام است.

الف) $\{6\}$ ب) $\{2\}$ ج) $(6,7)$ د) $\emptyset$

۴- در تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2 & ,|x|<1\\ x-1 & ,1\le x\le 2\end{cases}$ تعداد نقاط بحرانی α و اکسترمم مطلق β و اکسترمم نسبی γ کدام درست است.

الف) $\alpha>\beta>\gamma$ ب) $\alpha=\beta>\gamma$

ج) $\alpha>\beta=\gamma$ د) $\alpha=\beta=\gamma$

۵- مجموع تعداد بحرانی و اکسترمم مطلق و اکسترمم نسبی تابع $y=x(|x|-1)$ کدام است.

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ٦

۶- اگر $f(x) = [-x]$ و مجموعه نقاط ماکزیمم نسبی M و مجموعه نقاط مینیمم نسبی N باشد، کدامیک درست است.

الف) $M = N$ ب) $M - N = R - Z$

ج) $M - N = Z$ د) $N - M = Z$

۷- اگر $f(x) = |[x] - x|$ کدامیک از نقاط زیر را دارا نیست.

الف) بحرانی ب) ماکزیمم مطلق

ج) مینیمم مطلق د) مینیمم نسبی

۸- مجموعه نقاط مرکزی نسبی تابع $f(x) = [[x] - x]$ کدام است.

الف) $\emptyset$ ب) Z ج) $R - Z$ د) R

۹- اختلاف بین مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع به معادله $y = ۲\sqrt{x}$ در $[۰,۹]$ کدام است.

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۸ د) ۹

۱۰- نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = (x - ۱)x^{\frac{۲}{۳}}$ بترتیب:

الف) $x = \frac{۲}{۵}, x = ۰$ ج) $x = ۰, x = \frac{۲}{۵}$

ب) $x = \frac{۲}{۵}, x = ۱$ د) $x = ۱, x = ۰$

۱۱- تابع $f(x) = x - \sqrt[۳]{x}$ کدام مورد را دارا نیست.

الف) عطف با مماس افقی ج) ماکزیمم

ب) عطف با مماس عمودی د) مینیمم

۱۲- تعداد اکسترمم نسبی تابع $y = (x - ۴)\sqrt[۳]{x}$ کدام است.

الف) ۳ ب) ۲ ج) ۱ د) ۰

۱۳- مجموع تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم و نقاط عطف تابع f با ضابطه $f(x) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲}$ کدام است.

الف) ۴ ب) ۳ ج) ۲ د) ۱

۱۴- مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{\sin x}{۲\sin x+۱}$ در باز $[-\pi, \pi]$ کدام است.

الف) ۰	ب) ۳	ج) ۲	د) ۱

۱۵- در تابع $f(x) = x.\cos x - \sin x$ مبدأ مختصات چگونه نقطه ای است.

الف) ماکزیمم	ب) مینیمم	ج) عطف	د) عادی

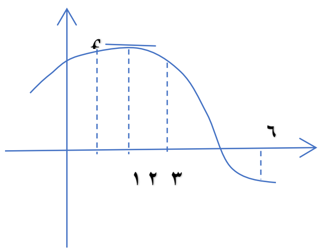
۱٦- نمودار تابع $f(x) = ۳x + \frac{۱}{x^۳}$ در همسایگی $x = ۱$ کدام است.

۱۷- نمودار تابع $y = x - \tan x$ در نزدیکی $x = \pi$ کدام است.

۱۸- نمودار $f(x) = \cos x - \cot x$ در نزدیکی نقطه $x = \frac{\pi}{۲}$ کدام است.

۱۹- نمودار تابع چند جمله ای f مطابق شکل مقابل است، در کدام نقطه داریم. $f(x).f'(x)f''(x) < ۰$

الف) $x = ۱$	ب) $x = ۲$	ج) $x = ۳$	د) $x = ٦$



۲۰- اگر $A(۱,۳)$ نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع $y = ax^۲ + \frac{b}{x}$ باشد، حاصل $۲a + b$ کدام است.

الف) ۳	ب) ۴	ج) ۵	د) ٦

۲۱- اگر نقطه عطف تابع $y = \sqrt{۳}\sin x - \cos x + k$ روی خط $y = ۱$ باشد، k کدام است.

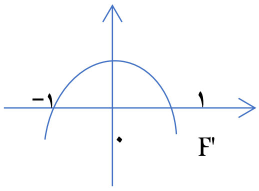
الف) ۰	ب) ۲	ج) -۲	د) ۱

۲۲- در کدام مورد نقطهٔ C نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

الف) $f'(c) = ۰, f''(c) > ۰$ ج) $f'(c) > ۰, f''(c) = ۰$

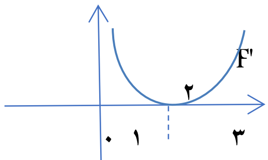
ب) $f'(c) = ۰, f''(c) < ۰$ د) $f'(c) < ۰, f''(c) = ۰$

۲۳- با توجه به شکل مقابل f در چه بازه ای صعودی است.



الف) $(-۱,۱)$ ب) $(-\infty,۰)$ ج) $(۰,+\infty)$ د) R

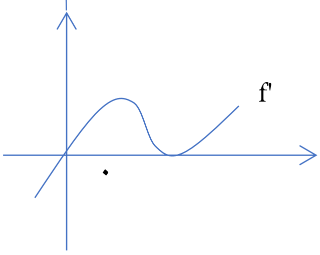
۲۴- با توجه به شکل مقابل در چه بازه ای تقعر نمودار تابع f به سمت بالاست.



الف) R ج) $(-\infty,۲)$

ب) $(-\infty,۱)\cup(۳,+\infty)$ د) $(۲,+\infty)$

۲۵- با توجه به شکل مقابل، نمودار تابع f دارای



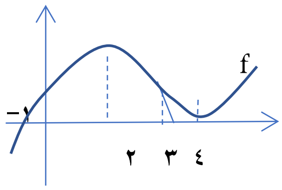
الف) یک ماکزیمم و یک عطف

ب) یک مینیمم و یک عطف

ج) یک ماکزیمم و دو عطف

د) یک مینیمم و دو عطف

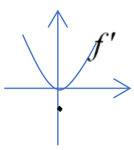
۲۶- با توجه به شکل مقابل در چه بازه ای f' نزولی اکید است.

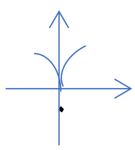
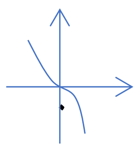
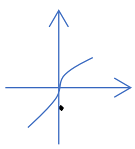
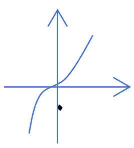


الف) $(-\infty,-۱]$ ب) $[۲,۴]$

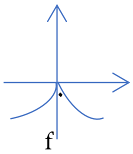
ج) $(-\infty,۳]$ د) $[-\infty,۳)$

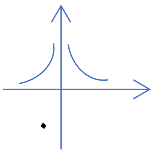
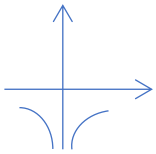
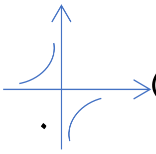
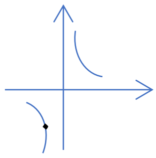
۲۷- با توجه به نمودار مقابل، کدامیک می تواند نمودار f باشد.



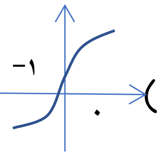
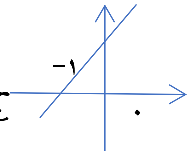
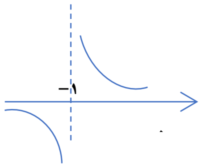
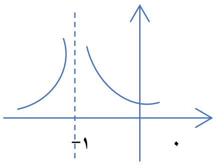
الف)  ب)  ج)  د) 

۲۸- با توجه به شکل مقابل، نمودار تابع f' کدام است.

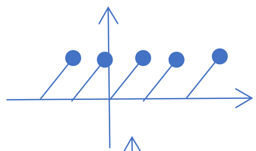
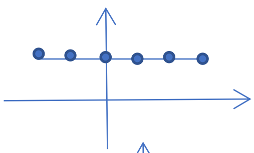
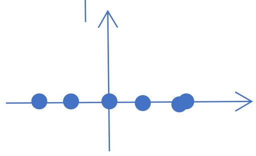
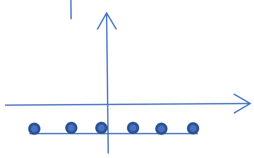


الف) 
ب) 
ج) 
د) 

۲۹- اگر $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ، نمودار تابع مشتق کدام است.

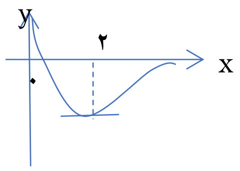
الف) 
ب) 
ج) 
د) 

۳۰- اگر $f(x)=x-[x]$، نمودار تابع f' کدام است.

الف) 
ب) 
ج) 
د) 

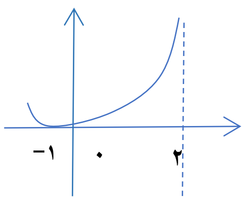
سوالات چهارگزینه‌ای :

۱-شکل مقابل قسمتی از نمودار $y = \frac{ax^3+bx+1}{(x+c)^3}$ است، b کدام است؟



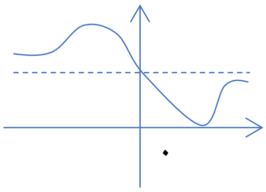
الف) $\frac{3}{2}$ ب) $-\frac{3}{2}$ ج) $-\frac{3}{4}$ د) $-\frac{4}{3}$

۲-شکل مقابل قسمتی از نمودار $y = \frac{x^2+mx+n}{x^2+px+12}$ است حاصل $m+n+p$ کدام است؟



الف) ۵- ب) ۷- ج) ۱۰- د) ۱۱-

۳-شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{ax^2+bx+2}{x^2+1}$ است، حاصل a+b کدام است؟



الف) ۱   ب) ۱-   ج) ۲   د) ۲-

آهنگ تغییرات :

فرض کنیم f تابعی از x باشد:

الف) منظور از آهنگ آنی تغییرات f نسبت به تغییرات x عبارت است از : $f'(x)$

ب) منظور از آهنگ متوسط (میانگین) تغییرات f نسبت به تغییرات x وقتی متغیر x از x_1 به x_2 می رسد عبارت است از: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

توجه: ممکن است بجای کلمه آهنگ کلمه سرعت مورد استفاده قرار بگیرد.

تذکر: آهنگ آنی در یک نقطه مورد سوال قرار می گیرد و برای محاسبه آن بایستی مشتق گیری شود اما آهنگ متوسط در یک فاصله (بازه) محاسبه می شود و نیازی به مشتق ندارد.

مثال: شعاع دایره ای در حال بزرگ شدن است: $S(R) = \pi R^2$

الف) سرعت تغییرات مساحت دایره نسبت به تغییرات شعاع آن وقتی شعاع مساوی $R=5$ باشد؟

ب) آهنگ متوسط تغییرات مساحت دایره نسبت به تغییرات شعاع آن وقتی شعاع از $R_1=4$ به $R_2=10$ می رسد؟

تعبیر آهنگ آنی: فرض کنیم f تابعی از x باشد:

وقتی متغیر x مساوی a باشد مقدار تابع مساوی f(a) خواهد بود اینک چنانچه x یک واحد افزایش یافته و به a+1 رسد، مقدار تابع نیز f(a+1) خواهد بود و مقدار تغییرات تابع f که با نماد Δf نمایش داده می شود مساوی است با:

$$\Delta f = f(a+1) - f(a)$$

اما مهم اینکه: $f'(a)$ یعنی مشتق تابع f در نقطه a یا به عبارتی آهنگ آنی تغییرات f در نقطه a به عنوان تقریبی برای f(a+1)-f(a) بکار می رود.

مثال: تابع مشتق پذیر $p(t)$، جمعیت جامعه‌ای را پس از t سال نشان می‌دهد توضیح دهید

الف) $p'(5)=10000$ چه مفهومی دارد؟ جواب: یعنی در فاصله زمانی $5 \le t \le 6$ که همان سال ششم است جمعیت ۱۰۰۰۰ نفر افزایش دارد. (تقریبی)

ب) $p'(10)=-2000$ یعنی چه؟ جواب: در $10 \le t \le 11$ یعنی سال یازدهم جمعیت ۲۰۰۰ نفر کاهش خواهد داشت. (تقریبی)

مثال: قانون حرکت ذره ای بصورت $x(t)=t^2-6t$ می باشد که در آن t زمان برحسب ثانیه و x مسافت برحسب متر است.

الف) سرعت متحرک را پس از ۱۰ ثانیه از شروع حرکت بیابید. $(t=10)$؟

ب) سرعت متوسط میانگین متحرک در ده ثانیه دوم حرکت چقدر است؟

تمرین : در مثال بالا در چه زمانی سرعت متحرک با سرعت متوسط آن در ۱۰ ثانیه دوم مساوی است؟

نکته: اگر f تابعی درجه دوم باشد آهنگ متوسط در $[a,b]$ با آهنگ آنی در $\frac{a+b}{۲}$ مساوی است.

با توجه به نکته بالا جواب تمرین فوق عبارت است از $۱۵ = \frac{۱۰+۲۰}{۲}$

مثال: استخری پر از آب است وقتی شیر تخلیه آن باز می شود حجم آب باقیمانده در استخر برحسب مترمکعب بعد از t دقیقه از $V = ۱۵۰(۱ - \frac{t}{۱۰۰})^{۲}$

الف) بعد از گذشت یک ساعت حجم آب باقیمانده در استخر با چه آهنگی کاهش می یابد؟

تمرین : عدد بدست آمده چه مفهومی دارد؟ یعنی در فاصله زمانی $60 \leq t \leq 61$ یعنی دقیقه شصت و یکم حجم آب به اندازه $-\frac{6}{5} m^3$ کاهش خواهد داشت (تقریبی)

ب) سرعت میانگین تغییر حجم آب استخر در فاصله زمانی $t_1=0$ تا $t_2=100$؟

ج) در چه زمانی سرعت تخلیه آب با سرعت متوسط آن در صد دقیقه اول مساوی است؟

بهینه سازی

با فرا گرفتن مشتق و کاربرد های آن توانایی پیدا کردن بیشترین وکمترین مقدار توابع را به دست آوردیم . از این رو میتوانیم حالت بهینه‌را در مسائل مربوط به‌زمان ، فاصله‌و مساحت و... محاسبه‌کنیم. دقت داشته‌باشید که:

۱) درصورت امکان، شکل مناسبی برای آن رسم می کنیم و سپس روی شکل، متغیرهای مربوطه‌را تعریف می کنیم.

۲) در این گونه‌مسائل، به‌طور معمول دو متغیر یا بیشتروجود دارد که‌یا در صورت مسئله‌رابطه‌ای بین متغیر ها هست و یا در شکلی که‌رسم نموده ایم رابطه‌ای بین متغیرها به‌وجود می آید، به‌این رابطه معادله کمکی می گوییم.

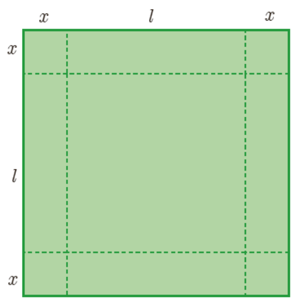
۳) کمیتی که‌خواسته‌شده ماکزیمم یا مینیمم گردد را به صورت را به صورت معادله‌تابعی از متغیر مجهول می نویسیم، به‌این معادله، معادله‌هدفی می گوییم.

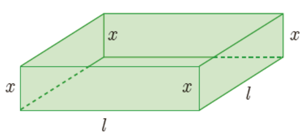
۴) چنان چه‌معادله‌هدف شامل بیش از یک متغیر باشد، با استفاده معادله‌از معادله‌کمکی، آن را به صورت تابعی فقط بر حسب یک متغیر تبدیل می کنیم.

۵) از معادله‌به‌دست آمده (معادله‌با یک متغیر) مشتق گرفته‌و نقطه‌بحرانی را به دست آورده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را به دست می آوریم.

مثال : نشان دهید در تمام مستطیل های با محیط ثابت ۱۴ متر ، مستطیلی بیشترین مساحت را داراست که طول و عرض یکسانی داشته باشند؟

مثال: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل میخواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟





مثال : مجموع دو عدد مثبت ۱۱۰ می باشد ، بیشترین مقدار حاصلضرب این دو عدد کدام است؟

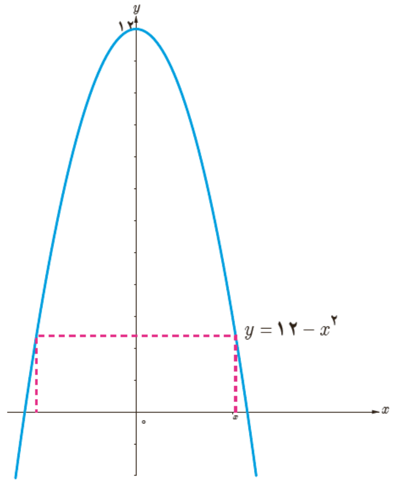
۱) ۳۰۲۵ ۲) ۳۰۰۰ ۳) ۲۸۰۰ ۴) ۲۴۰۰

مثال : مساحت یک مستطیل ۲۵ متر مربع می باشد کمترین محیط ممکن برای این مستطیل کدام است؟

مثال: نقطه $\mathbf{A}$ روی منحنی $y=\sqrt{x}$ در کمترین فاصله از نقطه (۰ و ۴) واقع است. طول این نقطه کدام است؟

مثال ۶: مثلث قائم الزاویه‌ای با طول وتر ۶ متر داریم. بیشترین مساحت ممکن این مثلث چقدر است؟

مثال : ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور xها و دو راس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^۲$ باشند.



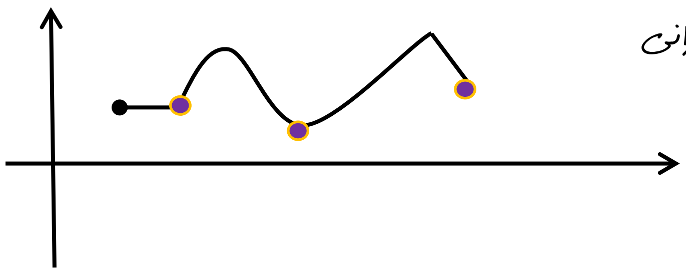
نقاط بحرانی - ماکزیمم و مینیمم مطلق و نسبی - صعودی و نزولی - جهت تقعر و نقطهٔ عطف

نقطهٔ بحرانی

نقطهٔ $x_0 \in D_f$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f است. ← هرگاه $f'(x_0)$ موجود نباشد یا $f'(x_0) = 0$

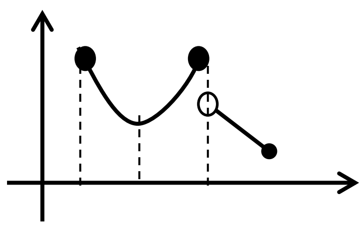
مثلاً در شکل مقابل ← ۳،۲،۵ ، (۱،۲) : نقطهٔ بحرانی

توجه کنید که ابتدا و انتهای باز، بحرانی ....!!

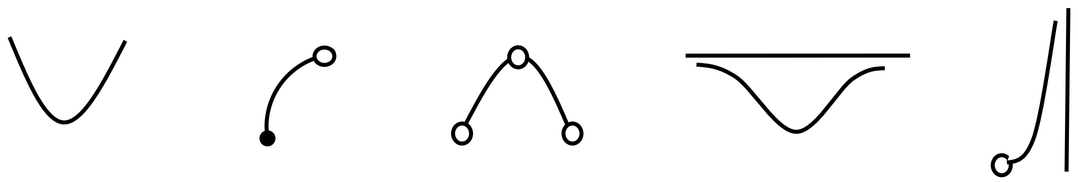


نقطهٔ ماکزیمم مطلق : نقطهٔ $x_0 \in D_f$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع f است هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمامی نقاط دیگر بیشتر یا با آنها مساوی باشد.

نقطهٔ مینیمم مطلق : بطور مشابه تعریف می شود مثلاً در شکل مقابل: نقطهٔ ماکزیمم و یا مینیمم مطلق را نقاط اکسترمم مطلق می نامند.

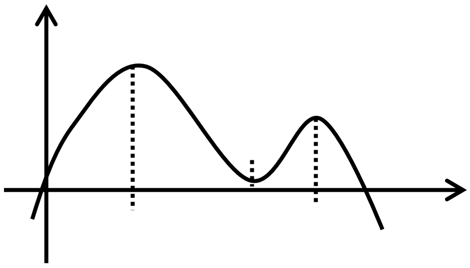


تذکر : شکل های زیر ماکزیمم مطلق ندارد .



توجه: ماکزیمم و مینیمم مطلق، بنام ماکزیمم و مینیمم سراسری نیز خوانده می شوند.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی: نقطهٔ $x_0 \in D_f$ نسبی تابع f است، هرگاه مقدار تابع در این نقطه به نسبت نقاط اطرافش از بقیه یا با آن ها مساوی باشد.



نقطهٔ مینیمم نسبی: به طور مشابه تعریف می شود.

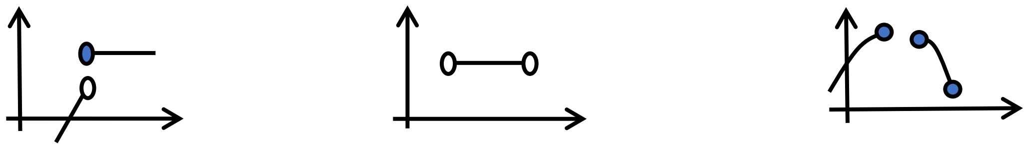
مثلاً در شکل مقابل: ۲ ، ۴ = x : نقطهٔ ماکزیمم نسبی (موضعی)

x=۳: نقطهٔ مینیمم نسبی (موضعی)

منطقهٔ ماکزیمم و مینیمم نسبی را نقاط اکسترمم نسبی می نامند.

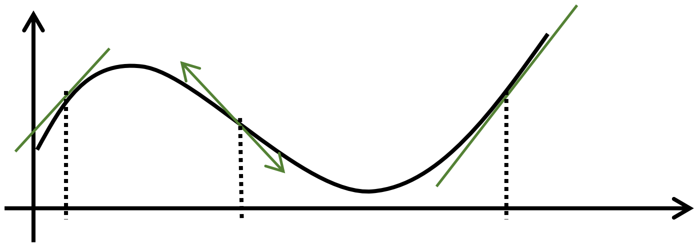
توجه: ماکزیمم و مینیمم نسبی، بنام ماکزیمم و مینیمم موضعی نیز خوانده شوند.

مثال: در هر شکل معلوم کنید نقطهٔ مورد سوال ماکزیمم نسبی است یا مینیمم نسبی.

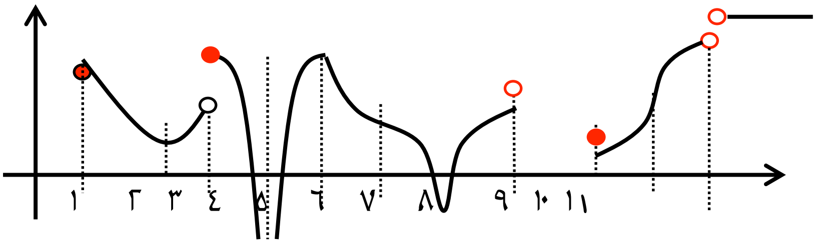


جهت تقعر و نقطه عطف

اگر نمودار تابع f مطابق شکل مقابل باشد. در x=۱ خط مماس بر منحنی و بالای منحنی واقع است، در این نقطه تقعر منحنی به سمت پائین است. در تمامی باز (۴،۱) وضعیت اینگونه است و تقعر منحنی به سمت پائین است. در x=۷ خط مماس بر منحنی موجود و زیر منحنی واقع است، در این نقطه تقعر منحنی به سمت بالا است. در تمامی باز $(4,+\infty)$ تقعر به سمت بالا ست. x=۴ که در آن دو ویژگی مهم مقابل را دارا است، نقطهٔ عطف منحنی است. ۱) تقعر عوض می شود. ۲) خط مماس بر منحنی موجود است.



مثال : برای شکل زیر موارد مقابل را تعیین کنید. (موارد ۷ گانه)



۱) بحرانی : x = ۲,۳,۵,۶,۷,   ۱۰, (۱۱, +∞)

۲) ماکزیمم مطلق : (۱۱, +∞)

۳) مینیمم مطلق : ندارد

۴) ماکزیمم نسبی : x = ۳,۵, (۱۱, +∞)

۵) مینیمم نسبی : x = ۲,۷, (۱۱, +∞)

۶) جهت تقعر :
- بالا : (۱,۳) , (۵,۶), (۹,۱۰)
- پایین: (۳,۴), (۴,۵), (۶,۷), (۷,۸), (۱۰,۱۱)

۷) نقطه عطف : x = ۶,۱۰

اگر ضابطه‌ها داده شده باشد و بتوانیم نمودار آن ضابطه‌را رسم نمائیم. در این صورت آن را رسم نموده و موارد ۷ گانه‌را مشخص می‌کنیم.

$$a)y = [x] + [-x] \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} \cos x\ , |x| \le \frac{\pi}{۲} \\ ۱ \qquad , |x| > \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی:

۵) مینیمم نسبی :

۶) جهت تقعر :

۷) نقطهٔ عطف :

$$۱)f(x) = \left||x| - ۱\right|$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

$$۲)f(x) = x|x| \qquad : x \in [-۱,۲)$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق :

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

$$۳)y = |x^{۲} - ۱| \qquad : -۱ \leq x < ۲$$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق:

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

$۴) y = |x^۲ - ۲x| = |x(x-۲)|$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق:

۴) ماکزیمم نسبی:

۵) مینیمم نسبی :

$ه) f(x) = |x|(x-۲) = \begin{cases} x(x-۲) & , x \geq ۰ \\ -x(x-۲) & , x < ۰ \end{cases} , \quad x \in [-۱, ۲]$

۱) بحرانی :

۲) ماکزیمم مطلق :

۳) مینیمم مطلق:

۴) ماکزیمم نسبی :

۵) مینیمم نسبی :

تمرین : نمودار هریک از توابع داده شده را رسم نموده و سپس نمودار موارد ۷ گانه یاد شد فوق را تعیین کنید.

$۱) y = ||x| - ۱|$

$۲) y = x|x|; x \epsilon [-۱,۲)$

$۳) y = |\sin x|: x \epsilon \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}\right)$

$۴) |\cos x|$

$۵) y = |x^{۲} - ۱|: -۱ \leq x < ۲$

$۶) y = |x^{۲} - ۲x|$

$۷) y = |x|(x - ۲): x \in [-۱, ۲]$

$۸) y = [x]: x \geq -۱$

$۹) y = [x] + [-x]$

$۱۰) [x] - x: ۰ \leq x \leq ۳$

$۱۱) y = [\sin x]: |x| \leq \pi$

$۱۲) y = \sqrt{|x|}$

اگر ضابطه داده شده باشد و نتوانیم نمودار آن را رسم کنیم.

ماکزیمم مینیمم مطلق (سراسری): ابتدا y' را بدست آورد و نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم. پس برای نقاط بحرانی پیدا شده و نیز نقاط ابتدایی و انتهایی بازه عرض نقاط بدست می‌آوریم، نقطه‌ای که بیشترین عرض را داراست، ماکزیمم و آنکه کمترین را دارد، مینیمم مطلق است.

۱) $y = 3x^2 - x^3 \quad , x\in[-1,1]$

۲) $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x} \quad , 0 \le x \le 8$

۳) $y = (x-5).x^{\frac{2}{3}} \quad , x\in[-1,1]$

۴) $y = \sqrt{۹ - x^۲}$

نکته: مقادیر ماکزیمم و مینمم مطلق تابع که به ترتیب فوق بدست می آیند. بیانگر بیشترین و کمترین و یا حداکثر و حداقل و نیز برد تابع است.

مثال : برد تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ - ۱۲x + ۸$ بر بازه $[-۳,۱]$ کدام است؟

کنکور۸۴ (سراسری ریاضی) : برای کدام مقدار k، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + k$ در $[۱,۳]$ قرینه اند؟

تمرین :

مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع داده شده را بیابید.

نکته: در ۳ مورد آخر، باید خودتان تعریف را و دربازه بدست آمده حل کنید.

۱) $y = x - ۲\sqrt{x} , ۰ \leq x \leq ۹$

۲) $y = ۳\sqrt[۳]{x} - x, \quad |x| \leq ۱$

۳) $y = \sqrt{x} - \sqrt{۱ - x}$

۴) $y = x . \sqrt{۴ - x^{۲}}$

۵) $y = x + \sqrt{۱ - x^{۲}}$

تشخیص یکنوایی تابع به کمک مشتق : مشتق اول تابع را تعیین علامت کرده ....

مثال: تابع $f(x) = x + \frac{۴}{x^۲}$ در کدام بازه داده شده صعودی است.

الف) $(-\infty, ۱)$

ب) $(۱, +\infty)$

ج) $(۰, ۲)$

د) $(۲, +\infty)$

پیدا کردن نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی وقتی ضابطهٔ داده شده

برای این منظور روش زیر که به آزمون مشتق اول مرسوم است ابتدا y' را به دست آورده و جدول تعیین علامت را رسم میکنیم (این جدول بنام جدول تغییرات یا رفتار معروف است)

در نقاطی که از جدول که تغییر علامت رخ دهد اکسترمم نسبی وجود دارد. (نقطه متعلق به دامنه باشد)

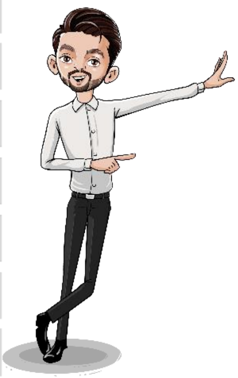
مثال مهم : جدول تغییرات توابع داده شده را رسم کنید در مورد نقاط اکسترمم بحث کنید؟

۱) $f(x) = ۳x^{۵} - ۵x^{۳}$

۲) $f(x) = (x - ۵)\sqrt[۳]{x^{۲}}$

$۳)f(x) = ۳\sqrt[۳]{x} - x$

$۴)f(x) = x + \frac{۴}{x^{۲}}$



$۵)f(x) = \frac{x}{x-۱}$

کنکور ۸۷: کدام بیان برای تابع با ضابطهٔ $f(x) = x.|x^۲ - ۳|$ بر دامنه $[-۱,۱]$ نادرست است.

۱) مینیمم مطلق دارد ۲) ماکزیمم مطلق دارد

۳) دو نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد ۴) فاقد اکسترمم نسبی است.

جهت تقعر و نقطه عطف

ابتدا y'' را بدست آورده و جدول تعیین علامت آن را رسم می کنیم در نقاطی که الف) $y'' > 0$ باشد، تقعر منحنی به سمت بالاست. ب) $y'' < 0$ باشد، تقعر منحنی به سمت پایین است. و در نقاطی که تغییر علامت رخ دهد، نقطه عطف وجود دارد. (نقطه متعلق به دامنه باشد)

مثال : جهت تقعر و نقطه عطف توابع داده شده را مشخص کنید.

$$۱)y = \frac{x^{۵}}{۵} - \frac{x^{۴}}{۴}$$

$$۲)y = x + \sqrt[۳]{x}$$

آزمون مشتق دوم

اگر $f'(c) = 0$ ، $f''(c)$ موجود باشد.

الف) اگر $f''(c) > 0$ آنگاه C نقطه مینیمم موضعی است.

ب) اگر $f''(c) < 0$ آنگاه C نقطه ماکزیمم موضعی است.

تذکر: اگر $f''(c) = 0$ با این آزمون امکان پاسخگویی نیست.

مثال: با استفاده از آزمون مشتق دوم، نقاط ماکزیمم و یا مینیمم موضعی تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$ را تعیین کنید.

مسائل پارامتری نقطه ماکزیمم یا مینیمم و نقطهٔ عطف:

در این مسائل به موارد زیر توجه داریم:

۱) طول نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم حتماً y' را صفر می‌کند.
۲) طول نقطهٔ عطف حتماً y'' را صفر می‌کند.
۳) مختصات نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم و یا نقطهٔ عطف و یا هر نقطهٔ دلخواه دیگر واقع بر منحنی در ضابطه خود تابع صدق می‌کند.

مثال: تابع $f(x) = x^{2} + ax + b\sin x + c$ مفروض است. a, b, c را چنان بیابید که $A\Big|_{1}^{\circ}$ نقطه ماکزیمم یا مینیمم تابع بود و نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$ نقطه عطف آن باشد.

نکته: در برخی از سوالات تاکید بر نوع اکسترمم موضعی وجود دارد که یعنی ماکزیمم باشد یا مینیمم.

کنکور ۸۹ (سراسری ریاضی): تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{a}{x} + bx^{2}$ در نقطهٔ $(1, -2)$ دارای اکسترمم نسبی است، عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

نکته: در برخی از مسائل فقط عرض نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم و یا نقطهٔ عطف داده شده است، در این صورت خودمان بایستی طول نقطهٔ مورد نظر را بدست آورده و به اتفاق عرض داده شده در ضابطه تابع قرار دهیم.

مثال: a را چنان بیابید که تابع $y = x^۲ - ax + ۴$ مینیمم مساوی ۳ داشته باشد.

نکته: نقاط تابع $y = |f(x)|$ عبارت است از ۱) نقاط بحرانی $y = f(x)$ ۲) ریشه های ساده $y = f(x)$

کنکور ۹۰ (سراسری ریاضی): تعداد نقاط بحرانی $y = |x^۳ - x|$ در $-۱ \leq x \leq ۲$؟

جدول تغییرات (رفتار) تنظیم کنید و نقاط ماکزیمم و مینیمم را تعیین کنید و نمودار تابع را در نقاط مرز (روی خطوط) رسم کنید.

۱) $y = \frac{x^{۳}}{۳} - \frac{x^{۵}}{۵}$

۲) $y = x - ۳\sqrt[۳]{x}$

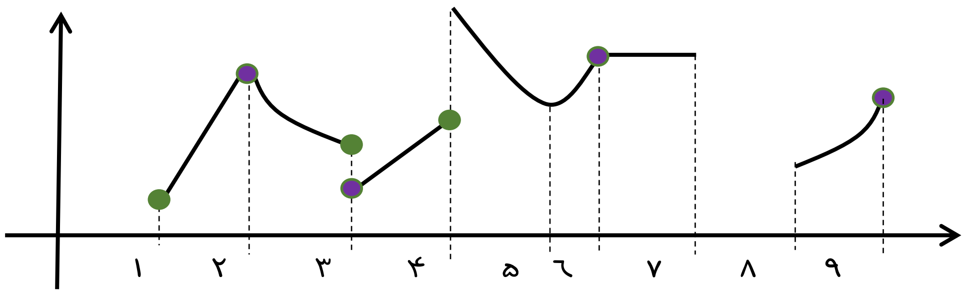
۳) $y = (x - ۱).x^{\frac{۲}{۳}}$

۵) $y = x + \frac{۲}{x}$

۶) $y = \frac{x^{۲}}{x^{۲} + ۱}$

۷) $y = \frac{۱}{x^{۲} - ۴}$

با توجه به شکل زیر به تست ۱۰۱ و ۱۰۲ و ۱۰۳ پاسخ دهید.



۱- تعداد نقاط بحرانی کدام است.

الف) ۷　　ب) ۸　　ج) ۹　　د) بی شمار

۲- تعداد نقاط ماکزیمم نسبی که مشتق ناپذیرند کدام است؟

الف) ۰　　ب) ۱　　ج) ۲　　د) ۳

۳- مجموعه نقاطی که هم ماکزیمم نسبی باشند و هم مینیمم نسبی کدام است.

الف) $\{٦\}$　　ب) $\{۲\}$　　ج) $(٦,۷)$　　د) $\emptyset$

۴- در تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۲} & ,|x|<۱\\ x-۱ & ,۱\le x\le ۲\end{cases}$ تعداد نقاط بحرانی α و اکسترمم مطلق β و اکسترمم نسبی γ کدام درست است.

الف) $\alpha>\beta>\gamma$　　ب) $\alpha=\beta>\gamma$

ج) $\alpha>\beta=\gamma$　　د) $\alpha=\beta=\gamma$

۵- مجموع تعداد بحرانی و اکسترمم مطلق و اکسترمم نسبی تابع $y=x(|x|-۱)$ کدام است.

الف) ۳　　ب) ۴　　ج) ۵　　د) ٦

٦- اگر $f(x)=[-x]$ و مجموعه نقاط ماکزیمم نسبی M و مجموعه نقاط مینیمم نسبی N باشد، کدامیک درست است.

الف) $M=N$ ب) $M-N=R-Z$

ج) $M-N=Z$ د) $N-M=Z$

۷- اگر $f(x)=|[x]-x|$ کدامیک از نقاط زیر را دارا نیست.

الف) بحرانی ب) ماکزیمم مطلق

ج) مینیمم مطلق د) مینیمم نسبی

۸- مجموعه نقاط مرکزی نسبی تابع $f(x)=[[x]-x]$ کدام است.

الف) $\emptyset$ ب) Z ج) $R-Z$ د) R

۹- اختلاف بین مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع به معادله $y=۲\sqrt{x}$ در $[۰,۹]$ کدام است.

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۸ د) ۹

۱۰- نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y=(x-۱)x^{\frac{۲}{۳}}$ بترتیب:

الف) $x=\frac{۲}{۵}, x=۰$ ج) $x=۰, x=\frac{۲}{۵}$

ب) $x=\frac{۲}{۵}, x=۱$ د) $x=۱, x=۰$

۱۱- تابع $f(x)=x-\sqrt[۳]{x}$ کدام مورد را دارا نیست.

الف) عطف با مماس افقی ج) ماکزیمم

ب) عطف با مماس عمودی د) مینیمم

۱۲- تعداد اکسترمم نسبی تابع $y=(x-۴)\sqrt[۳]{x}$ کدام است.

الف) ۳ ب) ۲ ج) ۱ د) ۰

۱۳- مجموع تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم و نقاط عطف تابع f با ضابطه $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ کدام است.

الف) ۴ ب) ۳ ج) ۲ د) ۱

۱۴- مجموع طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۲\sin x+۱}$ در بازه $[-\pi,\pi]$ کدام است.

الف) ۰	ب) ۳	ج) ۲	د) ۱

۱۵- در تابع $f(x)=x.\cos x-\sin x$ مبدأ مختصات چگونه نقطه‌ای است.

الف) ماکزیمم	ب) مینیمم	ج) عطف	د) عادی

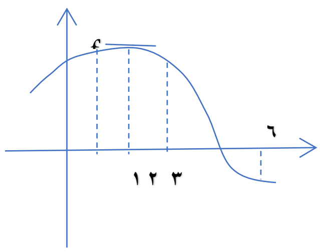
۱۶- نمودار تابع $f(x)=۳x+\frac{۱}{x^۳}$ در همسایگی $x=۱$ کدام است.

۱۷- نمودار تابع $y=x-\tan x$ در نزدیکی $x=\pi$ کدام است.

۱۸- نمودار $f(x)=\cos x-\cot x$ در نزدیکی نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$ کدام است.

۱۹- نمودار تابع چند جمله‌ای f مطابق شکل مقابل است، در کدام نقطه داریم. $f(x).f'(x)f''(x)<۰$

الف) $x=۱$	ب) $x=۲$	ج) $x=۳$	د) $x=٦$



۲۰- اگر $A(۱,۳)$ نقطهٔ ماکزیمم یا مینیمم تابع $y=ax^۲+\frac{b}{x}$ باشد، حاصل $۲a+b$ کدام است.

الف) ۳	ب) ۴	ج) ۵	د) ٦

۲۱- اگر نقطهٔ عطف تابع $y=\sqrt{۳}\sin x-\cos x+k$ روی خط $y=۱$ باشد، k کدام است.

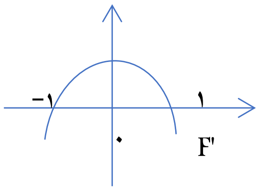
الف) ۰	ب) ۲	ج) -۲	د) ۱

۲۲- در کدام مورد نقطهٔ C نقطهٔ ماکزیمم نسبی است.

الف) $f'(c) = ۰, f''(c) > ۰$ ج) $f'(c) > ۰, f''(c) = ۰$

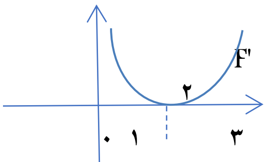
ب) $f'(c) = ۰, f''(c) < ۰$ د) $f'(c) < ۰, f''(c) = ۰$

۲۳- با توجه به شکل مقابل f در چه بازه ای صعودی است.



الف) $(-۱,۱)$ ب) $(-\infty,۰)$ ج) $(۰,+\infty)$ د) R

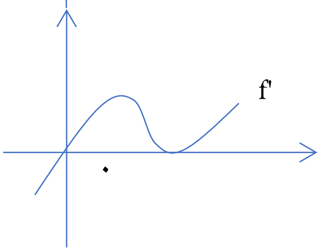
۲۴- با توجه به شکل مقابل در چه بازه ای تقعر نمودار تابع f به سمت بالا ست.



الف) R   ج) $(-\infty,۲)$

ب) $(-\infty,۱) \cup (۳,+\infty)$ د) $(۲,+\infty)$

۲۵- با توجه به شکل مقابل، نمودار تابع f دارای



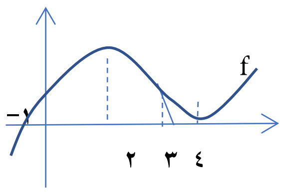
الف) یک ماکزیمم و یک عطف

ب) یک مینیمم و یک عطف

ج) یک ماکزیمم و دو عطف

د) یک مینیمم و دو عطف

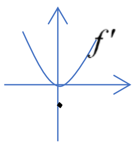
۲۶- با توجه به شکل مقابل در چه بازه ای f' نزولی اکید است.

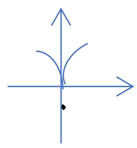
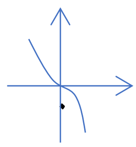
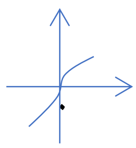
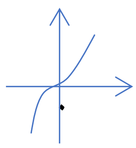


الف) $(-\infty,-۱]$ ب) $[۲,۴]$

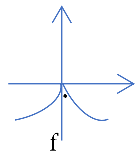
ج) $(-\infty,۳]$ د) $[-\infty,۳)$

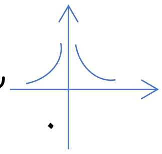
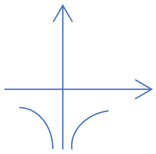
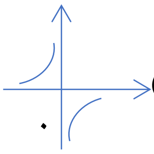
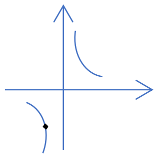
۲۷- با توجه به نمودار مقابل، کدامیک می تواند نمودار f باشد.



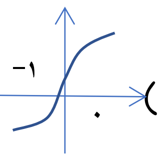
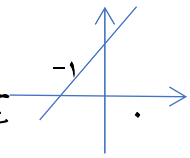
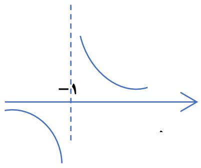
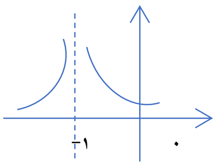
الف)    ب)    ج)    د) 

۲۸- با توجه به شکل مقابل، نمودار تابع f' کدام است.

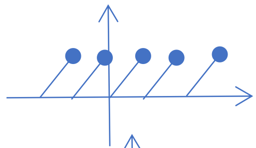
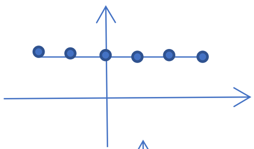
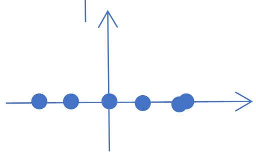
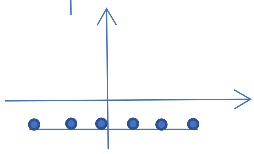


الف) 
ب) 
ج) 
د) 

۲۹- اگر $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ، نمودار تابع مشتق کدام است.

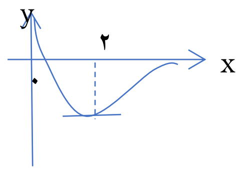
الف) 
ب) 
ج) 
د) 

۳۰- اگر $f(x) = x - [x]$، نمودار تابع f' کدام است.

الف) 
ب) 
ج) 
د) 

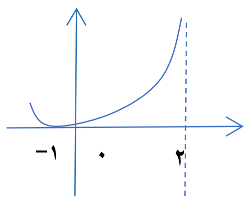
سوالات چهارگزینه‌ای :

۱-شکل مقابل قسمتی از نمودار $y = \frac{ax^3+bx+1}{(x+c)^3}$ است، b کدام است؟



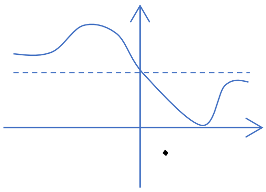
الف) $\frac{3}{2}$	ب) $-\frac{3}{2}$	ج) $-\frac{3}{4}$	د) $-\frac{4}{3}$

۲-شکل مقابل قسمتی از نمودار $y = \frac{x^2+mx+n}{x^2+px+12}$ است حاصل m+n+p کدام است؟



الف) ۵-	ب) ۷-	ج) ۱۰-	د) ۱۱-

۳-شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{ax^2+bx+2}{x^2+1}$ است، حاصل a+b کدام است؟



الف) ۱ ب) ۱- ج) ۲ د) ۲-

آهنگ تغییرات :

فرض کنیم f تابعی از x باشد:

الف) منظور از آهنگ آنی تغییرات f نسبت به تغییرات x عبارت است از : $f'(x)$

ب) منظور از آهنگ متوسط (میانگین) تغییرات f نسبت به تغییرات x وقتی متغیر x از x_1 به x_2 می رسد عبارت است از: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

توجه: ممکن است بجای کلمه آهنگ کلمه سرعت مورد استفاده قرار بگیرد.

تذکر: آهنگ آنی در یک نقطه مورد سوال قرار می گیرد و برای محاسبه آن بایستی مشتق گیری شود اما آهنگ متوسط در یک فاصله (بازه) محاسبه می شود و نیازی به مشتق ندارد.

مثال: شعاع دایره ای در حال بزرگ شدن است: $S(R) = \pi R^{2}$

الف) سرعت تغییرات مساحت دایره نسبت به تغییرات شعاع آن وقتی شعاع مساوی R=5 باشد؟

ب) آهنگ متوسط تغییرات مساحت دایره نسبت به تغییرات شعاع آن وقتی شعاع از $R_1=4$ به $R_2=10$ می رسد؟

تعبیر آهنگ آنی: فرض کنیم f تابعی از x باشد:

وقتی متغیر x مساوی a باشد مقدار تابع مساوی f(a) خواهد بود اینک چنانچه x یک واحد افزایش یافته و به a+1 رسد، مقدار تابع نیز f(a+1) خواهد بود و مقدار تغییرات تابع f که با نماد Δf نمایش داده می شود مساوی است با:

$$\Delta f = f(a+1) - f(a)$$

اما مهم اینکه: f'(a) یعنی مشتق تابع f در نقطه a یا به عبارتی آهنگ آنی تغییرات f در نقطه a به عنوان تقریبی برای f(a+1)-f(a) بکار می رود.

مثال: تابع مشتق پذیر $p(t)$، جمعیت جامعه‌ای را پس از t سال نشان می دهد توضیح دهید

الف) $p'(5)=10000$ چه مفهومی دارد؟ جواب: یعنی در فاصله زمانی $5 \le t \le 6$ که همان سال ششم است جمعیت ۱۰۰۰۰ نفر افزایش دارد. (تقریبی)

ب) $p'(10)=-2000$ یعنی چه؟ جواب: در $10 \le t \le 11$ یعنی سال یازدهم جمعیت ۲۰۰۰ نفر کاهش خواهد داشت. (تقریبی)

مثال: قانون حرکت ذره ای بصورت $x(t)=t^2-6t$ می باشد که در آن t زمان برحسب ثانیه و x مسافت برحسب متر است.

الف) سرعت متحرک را پس از ۱۰ ثانیه از شروع حرکت بیابید. $(t=10)$؟

ب) سرعت متوسط میانگین متحرک در ده ثانیه دوم حرکت چقدر است؟

تمرین : در مثال بالا در چه زمانی سرعت متحرک با سرعت متوسط آن در ۱۰ ثانیه دوم مساوی است؟

نکته: اگر f تابعی درجه دوم باشد آهنگ متوسط در $[a,b]$ با آهنگ آنی در $\frac{a+b}{۲}$ مساوی است.

با توجه به نکته بالا جواب تمرین فوق عبارت است از $۱۵ = \frac{۱۰+۲۰}{۲}$

مثال: استخری پر از آب است وقتی شیر تخلیه آن باز می شود حجم آب باقیمانده در استخر برحسب مترمکعب بعد از t دقیقه از $V = ۱۵۰(۱ - \frac{t}{۱۰۰})^۲$

الف) بعد از گذشت یک ساعت حجم آب باقیمانده در استخر با چه آهنگی کاهش می یابد؟

تمرین : عدد بدست آمده چه مفهومی دارد؟ یعنی در فاصله زمانی $60 \leq t \leq 61$ یعنی دقیقه شصت و یکم حجم آب به اندازه $-\frac{6}{5}m^3$ کاهش خواهد داشت (تقریبی)

ب) سرعت میانگین تغییر حجم آب استخر در فاصله زمانی $t_1=0$ تا $t_2=100$؟

ج) در چه زمانی سرعت تخلیه آب با سرعت متوسط آن در صد دقیقه اول مساوی است؟

بهینه سازی

با فرا گرفتن مشتق و کاربرد های آن توانایی پیدا کردن بیشترین وکمترین مقدار توابع را به دست آوردیم . از این رو میتوانیم حالت بهینه را در مسائل مربوط به زمان ، فاصله و مساحت و... محاسبه کنیم. دقت داشته باشید که:

۱) درصورت امکان، شکل مناسبی برای آن رسم می کنیم و سپس روی شکل، متغیرهای مربوطه را تعریف می کنیم.

۲) در این گونه مسائل، به طور معمول دو متغیر یا بیشتر وجود دارد که یا در صورت مسئله رابطه ای بین متغیر ها هست و یا در شکلی که رسم نموده ایم رابطه ای بین متغیرها به وجود می آید، به این رابطه معادله کمکی می گوییم.

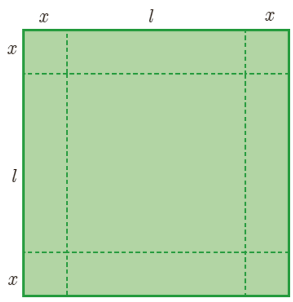
۳) کمیتی که خواسته شده ماکزیمم یا مینیمم گردد را به صورت را به صورت معادله تابتی از متغیر مجهول می نویسیم، به این معادله، معادله هدفی می گوییم.

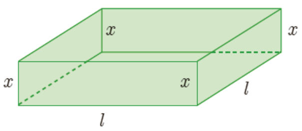
۴) چنان چه معادله هدف شامل بیش از یک متغیر باشد، با استفاده معادله از معادله کمکی، آن را به صورت تابعی فقط بر حسب یک متغیر تبدیل می کنیم.

۵) از معادله به دست آمده (معادله با یک متغیر) مشتق گرفته و نقطه بحرانی را به دست آورده و ماکزیمم یا مینیمم مطلق تابع را به دست می آوریم.

مثال : نشان دهید در تمام مستطیل های با محیط ثابت ۱۴ متر ، مستطیلی بیشترین مساحت را داراست که طول و عرض یکسانی داشته باشند؟

مثال: ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را در نظر بگیرید. مطابق شکل میخواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن ها را کنار بگذاریم . سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه درباز بسازیم . مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟





مثال : مجموع دو عدد مثبت ۱۱۰ می باشد، بیشترین مقدار حاصلضرب این دو عدد کدام است؟

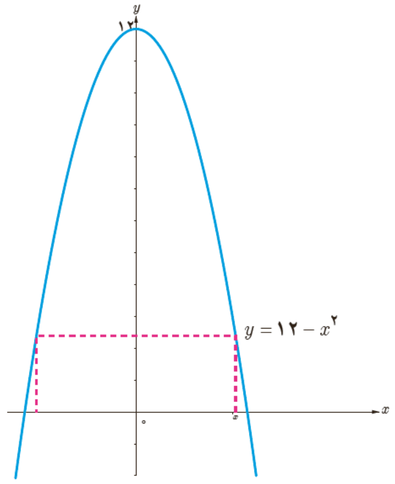
۱) ۳۰۲۵ ۲) ۳۰۰۰ ۳) ۲۸۰۰ ۴) ۲۴۰۰

مثال : مساحت یک مستطیل ۲۵ متر مربع می باشد کمترین محیط ممکن برای این مستطیل کدام است؟

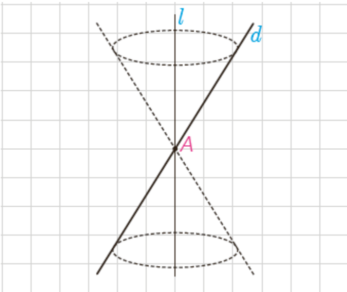
مثال: نقطه A روی منحنی $y=\sqrt{x}$ در کمترین فاصله از نقطه (۰و۴) واقع است. طول این نقطه کدام است؟

مثال ۶: مثلث قائم الزاویه‌ای با طول وتر ۶ متر داریم. بیشترین مساحت ممکن این مثلث چقدر است؟

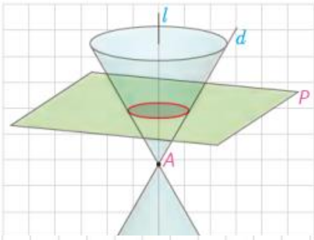
مثال : ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور **x**ها و دو راس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^۲$ باشند.



رویه مخروطی:

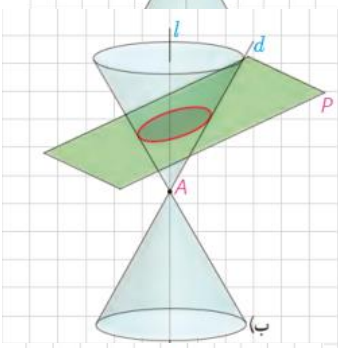


فرض کنید دو خط d و L در نقطه A (مانند شکل) متقاطع (غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط L را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می نامیم. در این حالت خط L را محور، نقطه A را راس و خط d را مولد این سطح مخروطی می نامیم.

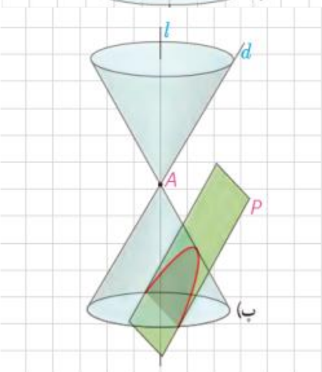


الف) درحالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

در چه حالتی فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها نقطه A خواهد بود؟



ب) درحالتی که صفحه p بر محور L عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط راقطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.

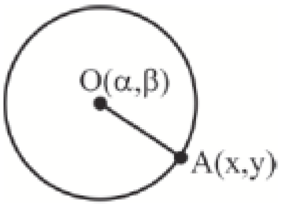


پ) اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از راس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحه P از راس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آن ها یک خط است.)

ت) اگر صفحه p به گونه ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور L نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است.

دایره :

دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله ی آن ها از یک نقطه ی ثابت در آن صفحه مقدار ثابتی باشد. به این نقطه ثابت مرکز دایره و به فاصله ی ثابت مرکز تا هر نقطه دایره، شعاع گفته می شود .



معادله ی استاندارد دایره : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

معادله ی گسترده ی دایره : $F(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c$

محاسبه ی مرکز دایره : مربع کامل کردن

فرمول : $O\left|\begin{matrix}-\frac{a}{2}\\-\frac{b}{2}\end{matrix}\right.$

مشتق : $O\left|\begin{matrix}F'_x=0\\F'_y=0\end{matrix}\right.$

محاسبه ی شعاع دایره : مربع کامل کردن

فرمول : $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

شرط دایره بودن مقطع مخروطی :

$a^2+b^2-4c>0\ \rightarrow$ دایره(مهم)

$a^2+b^2-4c=0\ \rightarrow$ یک نقطه

$a^2+b^2-4c<0\ \rightarrow$ هیچ شکلی

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که از نقطه $A(-۱,۴)$ گذشته و مرکز آن $O(۲,۰)$ می باشد؟

مثال: معادله دایره ای که بر خط $۳x - ۴y = ۲$ مماس بوده و $O(۲,-۵)$ مرکز آن باشد؟

مثال: اگر $A(۳,۷), B(-۱,۴)$ دو نقطه باشند معادله دایره ای را بنویسید که AB قطر آن باشد؟

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(-۱,۰), B(۰,۲), C(-۱,۲)$ بگذرد؟

مثال: در صورت دایره بودن شعاع و مرکز را مشخص کنید؟

$A)(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۴$

$B)(x+۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$

$C)(۲x-۶)^۲+(۲y-۲)^۲=۳$

$D)(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=-۳$

$E)(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۰$

$F)x^۲+(y+۱)^۲=۳$

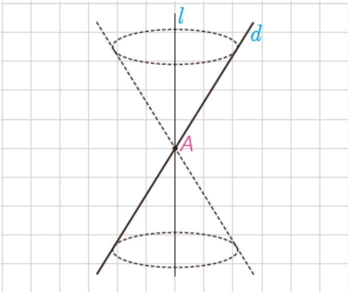
$G)-x^۲-y^۲+۲x+y=۰$

$H) x^۲ + ۲y^۲ - ۳x + ۳y + ۳ = ۰$

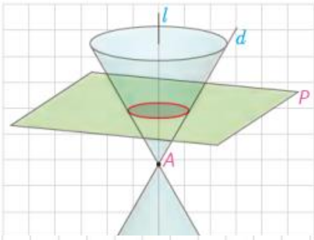
$I) x^۲ + y^۲ - ۳x + ۳y = -۳$

$J) - ۴x^۲ - ۴y^۲ + ۴x - ۸y - ۱۲ = ۰$

رویه مخروطی:

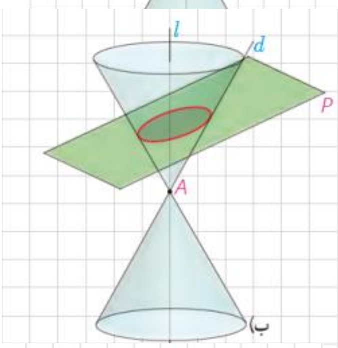


فرض کنید دو خط d و L در نقطه A (مانند شکل) متقاطع (غیر عمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط L را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می نامیم. در این حالت خط L را محور، نقطه A را راس و خط d را مولد این سطح مخروطی می نامیم.

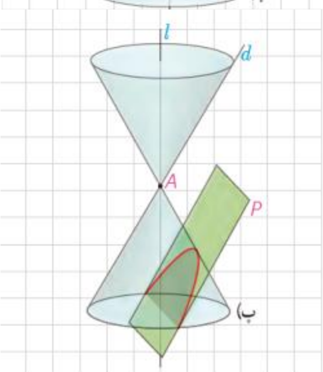


الف) درحالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

در چه حالتی فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها نقطه A خواهد بود؟



ب) درحالتی که صفحه p بر محور L عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.

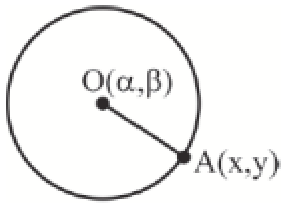


پ) اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از راس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحه P از راس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آن ها یک خط است.)

ت) اگر صفحه p به گونه ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور L نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است.

دایره :

دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله ی آن ها از یک نقطه ی ثابت در آن صفحه مقدار ثابتی باشد. به این نقطه ثابت مرکز دایره و به فاصله ی ثابت مرکز تا هر نقطه دایره، شعاع گفته می شود .



معادله ی استاندارد دایره : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

معادله ی گسترده ی دایره : $F(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c$

محاسبه ی مرکز دایره : مربع کامل کردن

فرمول : $O\left|\begin{matrix}-\dfrac{a}{2}\\ -\dfrac{b}{2}\end{matrix}\right.$

مشتق : $O\left|\begin{matrix}F'_x=0\\ F'_y=0\end{matrix}\right.$

محاسبه ی شعاع دایره : مربع کامل کردن

فرمول : $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

شرط دایره بودن مقطع مخروطی :

$a^2+b^2-4c>0 \rightarrow$ دایره(مهم)

$a^2+b^2-4c=0 \rightarrow$ یک نقطه

$a^2+b^2-4c<0 \rightarrow$ هیچ شکلی

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که از نقطه $A(-۱,۴)$ گذشته و مرکز آن $O(۲,۰)$ می باشد؟

مثال: معادله دایره ای که بر خط $۳x - ۴y = ۲$ مماس بوده و $O(۲,-۵)$ مرکز آن باشد؟

مثال: اگر $A(۳,۷), B(-۱,۴)$ دو نقطه باشند معادله دایره ای را بنویسید که AB قطر آن باشد؟

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(-۱,۰), B(۰,۲), C(-۱,۲)$ بگذرد؟

مثال: در صورت دایره بودن شعاع و مرکز را مشخص کنید؟

$A)(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۴$

$B)(x+۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$

$C)(۲x-۶)^۲+(۲y-۲)^۲=۳$

$D)(x-۳)^{۲}+(y-۱)^{۲}=-۳$

$E)(x-۳)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۰$

$F)x^{۲}+(y+۱)^{۲}=۳$

$G)-x^{۲}-y^{۲}+۲x+y=۰$

$H) x^{۲} + ۲y^{۲} - ۳x + ۳y + ۳ = ۰$

$I) x^{۲} + y^{۲} - ۳x + ۳y = -۳$

$J) -۴x^{۲} - ۴y^{۲} + ۴x - ۸y - ۱۲ = ۰$