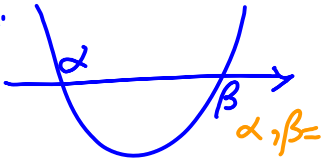
بنام خدا

معادله درجه دوم

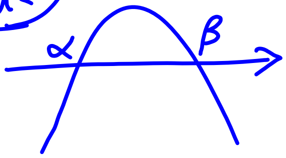
$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

$a>0$



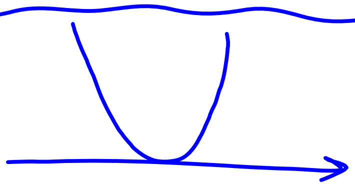
$\alpha,\beta=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$a<0$

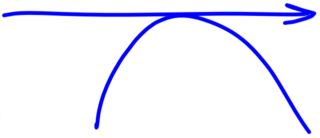


$\Delta>0$ دو ریشه دارد

$a>0$



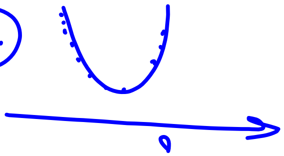
$a<0$



$\Delta=0$ $\alpha=\beta=\frac{-b}{2a}$

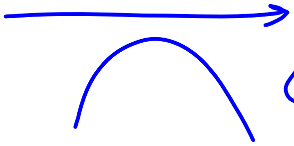
یک ریشه مضاعف دارد.

$a>0$



همواره مثبت $\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$

$a<0$



همواره منفی $\begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$

$ax^2+bx+c=0$

$$\begin{cases}\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}+\frac{-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\boxed{\frac{-b}{a}}$$

$$P=\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\boxed{\frac{c}{a}}$$

$$\boxed{|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$$

$$\begin{cases}\boxed{\alpha^2+\beta^2=S^2-2P}\\ \boxed{\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS}\end{cases}$$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$4x^2-7x+1=0$

$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{7}{4}$

$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$

نکته: هرگاه در معادله درجه دوم $\boxed{ax^2+bx+c=0}$ یکی از ریشه ها K برابر دیگری باشد داریم:

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(K+1)^2}{K}$$

در معادله $x^2-(m+1)x+m=0$ یکی از ریشه ها ۲ برابر دیگری است، m را بیابید.

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(K+1)^2}{K}\Longrightarrow\frac{(m+1)^2}{m}=\frac{9}{2}\Longrightarrow 2m^2+4m+2=9m$$

$$2m^2-5m+2=0$$

$$m=\frac{5\pm3}{4}<\begin{matrix}2\\ 1/2\end{matrix}$$

$\alpha+\beta=۶$ $\alpha\beta=۴$

اگر α , β ریشه‌های معادله $x^۲-۶x+۴=۰$ باشند مطلوب است:

الف) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}=\frac{S^۲-۲P}{P}=\frac{۳۶-۸}{۴}=\frac{۲۸}{۴}=۷$

ب) $\frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha\beta}=\frac{S^۳-۳PS}{P}=\frac{۲۱۶-۷۲}{۴}=\frac{۱۴۴}{۴}=۳۶$

ج) $A=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ $\quad A^۲=\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^۲=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+۲\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}}$

$=۷+۲=۹$

$A=\pm۳$

غ ق ق

د) $\frac{۱}{\alpha^۲+۴}+\frac{۱}{\beta^۲+۴}$

ریشه α : $\alpha^۲-۶\alpha+۴=۰$

$\alpha^۲+۴=۶\alpha$

ست

$=\frac{۱}{۶\alpha}+\frac{۱}{۶\beta}=\frac{\beta+\alpha}{۶\alpha\beta}=\frac{۶}{۶\times۴}=\frac{۱}{۴}$

۱ ریشه β : $\beta^۲-۶\beta+۴=۰$

$\beta^۲+۴=۶\beta$

$$\left.\begin{cases} x=\alpha \longrightarrow x-\alpha=۰ \\ x=\beta \longrightarrow x-\beta=۰ \end{cases}\right\} \Longrightarrow (x-\alpha)(x-\beta)=۰ \longrightarrow x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰$$

$$x^۲-Sx+P=۰$$

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۲+\sqrt{۳} , ۲-\sqrt{۳}$ باشند:

$$\left.\begin{array}{l} S=\alpha+\beta=۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}=۴ \\ P=\alpha\beta=(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})=۴-۳=۱ \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{x^۲-۴x+۱=۰}$$

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲-۶x+۴=۰$ باشند معادله درجه دوم دیگری بنویسید که ریشه‌هایش:

$S=\frac{-b}{a}=\boxed{\alpha+\beta=۶}$ $\quad \boxed{\alpha\beta=۴}$

الف) از ۲ برابر ریشه‌های معادله فوق ۳ واحد کمتر باشد

$۲\alpha-۳ , ۲\beta-۳$

$$\left.\begin{array}{l} S=(\underbrace{۲\alpha}-۳)+\underbrace{۲\beta}-۳=۲(\alpha+\beta)-۶=۶ \\ P=(۲\alpha-۳)(۲\beta-۳)=۴\alpha\beta-۶\alpha-۶\beta+۹ \\ \quad =۴\alpha\beta-۶(\alpha+\beta)+۹=-۱۱ \end{array}\right\} \rightarrow x^۲-۶x-۱۱=۰$$

ب) معکوس ریشه‌های معادله اصلی ۴ واحد بیشتر باشد

$\frac{۱}{\alpha}+۴ , \frac{۱}{\beta}+۴$

$S=\frac{۱}{\alpha}+۴+\frac{۱}{\beta}+۴=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}+۸=\frac{۶}{۴}+۸=\frac{۳}{۲}+۸=\frac{۱۹}{۲}$

$P=\left(\frac{۱}{\alpha}+۴\right)\left(\frac{۱}{\beta}+۴\right)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۴}{\alpha}+\frac{۴}{\beta}+۱۶=\frac{۱}{۴}+۴\left(\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}\right)+۱۶=۲۲,۲۵$

$x^۲-\frac{۱۹}{۲}x+\frac{۸۹}{۴}=۰$

$۴x^۲-۳۸x+۸۹=۰$

ج) مربع ریشه‌های معادله فوق باشند.

$\alpha^۲ , \beta^۲$

$S=\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۳۶-۸=۲۸$

$P=\alpha^۲\cdot\beta^۲=(\alpha\beta)^۲=۱۶$

$\rightarrow x^۲-۲۸x+۱۶=۰$

د) معکوس ریشه‌های معادله اصلی باشند ($x^۲-۶x+۴=۰$)

$\frac{۱}{\alpha} , \frac{۱}{\beta}$

$S=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$

$P=\frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta}=\frac{۱}{۴}$

$\rightarrow x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۴}=۰$

$۴x^۲-۶x+۱=۰$

کافی است جای a, c را عوض کنیم.

ه) قرینه ریشه‌های معادله اصلی باشند.

$-\alpha , -\beta$

$S=(-\alpha)+(-\beta)=-(\alpha+\beta)=-۶$

$P=(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta=۴$

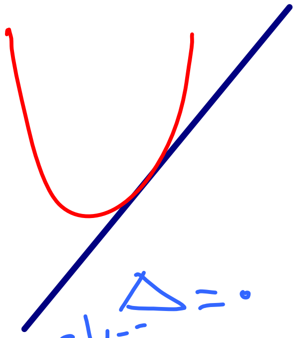
$\longrightarrow x^۲+۶x+۴=۰$

کافی است b را قرینه کنیم.

نکته مهم

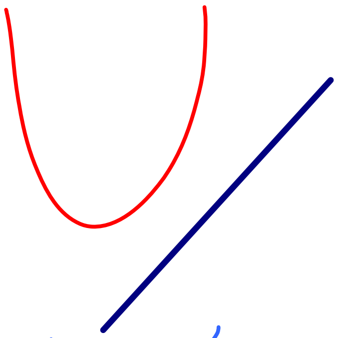
$\underbrace{ax^۲+bx+c=mx+h}$

معادله تقاطع درجه ۲ $\longrightarrow \Delta>۰$



$\Delta=۰$

تقاطع



$\Delta<۰$ تقاطع