

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دعای پیش از مطالعه

اَللّٰهُمَّ اَخْرِجْنِيْ مِنْ ظُلُمَاتِ الْوَهْمِ وَاكْرِمْنِيْ بِنُورِ الْفَهْمِ
اَللّٰهُمَّ افْتَحْ عَلَيْنَا اَبْوَابَ رَحْمَتِكَ وَاَنْشُرْ عَلَيْنَا خَزَائِنَ عُلُوْمِكَ
بِرَحْمَتِكَ يَا اَرْحَمَ الرَّاحِمِيْنَ

پروردگارا، خارج کن مرا از تاریکی های فکر و گرامی بدار به نور فهم
پروردگارا، بگشای بر ما در های رحمت را و بگستران کنج های دانشت را به امید رحمت
تو ای مهربان ترین مهربانان

بیایید به حقوق دیگران احترام بگذاریم

دوست عزیز، این کتاب حاصل دسترنج چندین ساله ی مؤلف، مترجم و ناشر آن است. تکثیر و فروش آن به هر شکلی بدون اجازه از پدیدآورنده کاری غیراخلاقی، غیرقانونی، غیرشرعی و کسب درآمد از دسترنج دیگران است، نتیجه ی این عمل نادرست، موجب رواج بی اعتمادی در جامعه و بروز پی آمدهای ناگوار در زندگی و محیط ناسالم برای خود و فرزندانمان می گردد.



درسنامه ریاضی

ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی انفورماتیک پزشکی

**تألیف و گردآوری:
سلیمان سعیدی**

سرشناسه	: سعیدی، سلیمان، ۱۳۶۸-، گردآورنده
عنوان و نام پدیدآور	: AGK درسنامه ریاضی ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی انفورماتیک پزشکی / تألیف و گردآوری سلیمان سعیدی.
مشخصات نشر	: تهران: آناهید گستر خلیلی، ۱۴۰۳.
مشخصات ظاهری	: ۱۷۱ص: جدول، نمودار؛ ۲۹×۲۲ س.م.
شابک	: 978-622-4907-32-5
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
موضوع	: ریاضیات -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی) Mathematics -- Study and teaching -- Examinations, questions, etc. (Higher) انفورماتیک پزشکی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی) Medical informatics -- Examinations, questions, etc. (Higher) دانشگاه‌ها و مدارس عالی -- آزمون‌ها -- آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی -- ایران Universities and colleges -- Examinations -- Graduate Record Examinations -- Iran
رده‌بندی کنگره	: QA۳۷/۲
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۸۲۲۸۹۱



انتشارات آناهید گستر خلیلی

نام: AGK درسنامه ریاضی

(ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی انفورماتیک پزشکی)

تألیف و گردآوری: سلیمان سعیدی

ناشر: آناهید گستر خلیلی

نوبت و سال چاپ: اول. ۱۴۰۳

شمارگان: ۱۰۰۰

چاپ و صحافی: گیلان

مدیر تولید: امیرحسین خلیلی

مدیر فنی و هنری: مریم آرده

تایپ و صفحه‌آرایی: آرزو راضی

بهاء: ۲۲۰۰۰۰ تومان

آموزشگاه/فروشگاه: ۰۲۱۶۶۵۶۸۶۲۱

مرکز پخش: ضلع جنوب غربی میدان انقلاب . جنب بانک پارسیان . مجتمع تجاری پارس . طبقه اول

مدیر فروش: ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ (ارتباط از طریق پیامک)

 agkpublisher@gmail.com



www.agkins.com

طلیحه سخن مدیر تولید:

سپردن کار به اهلش نشانه‌ی خردمندی است.

برای تولید بسته‌های آموزشی تمام تلاش خود را به کار گرفته‌ایم تا محصولی شایسته را تقدیم شما عزیزان نماییم.

مجموعه‌ای که پیش روی شماست براساس معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور و به قلم مجرب‌ترین اساتید تألیف شده است و مطالعه آن موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه شما خواهد شد. ارائه بالاترین آمار قبولی در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری در دهه اخیر بیان‌گر توانایی این مجموعه در راستای اهداف آموزشی خود می‌باشد. اینک با اتکا به تجربه‌ای ۱۷ ساله می‌توانیم ادعا کنیم که مجموعه حاضر، بی‌شک از جمله کامل‌ترین و به‌روزترین بسته‌های آموزشی موجود در عرصه کنکور می‌باشد.

❧ برخی از ویژگی‌های بسته‌های آموزشی:

- منطبق با معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور
- گردآوری و تألیف توسط مجرب‌ترین اساتید کنکور
- تدریس مطالب از سطح پایه تا پیشرفته به بیان ساده و روان
- انتقال بهتر مفاهیم با استفاده از شکل، جدول و نمودار
- تألیف مبتنی بر نحوه‌ی طراحی سوالات کنکور
- مطالعه یک منبع منسجم به جای مطالعه چندین منبع مختلف
- منبعی خودآموز و بدون نیاز به مدرس

اینک علاوه بر مطالعه بسته‌های آموزشی استفاده از خدمات و محصولات زیر را به عنوان ضمانتی برای قبولی به شما داوطلبان عزیز توصیه می‌کنم؛

❧ آزمون‌های آزمایشی: خوش بود گر محک تجربه آید به میان

داوطلب شجاع کیست؟ داوطلبی است که خود را مورد سنجش (خود را با خود) و ارزیابی (خود را با دیگران) قرار دهد تا پیش از کنکور به نقاط ضعف خود پی ببرد و آن‌ها را تقویت نماید. آزمون‌های آزمایشی دارای یک برنامه‌ریزی منسجم است و به شما اولتیماتوم می‌دهد. یعنی شما باید در یک زمان معین مطالب معینی را مطالعه نمایید.

آزمون‌های آزمایشی مجموعه دارای سوالات استاندارد، پاسخنامه تشریحی و کارنامه تحلیلی می‌باشد. صادقانه شرکت در آزمون‌های آزمایشی را به شما عزیزان توصیه می‌کنم.

❧ مشاوره تخصصی و برنامه‌ریزی: زیر نظر حرفه‌ای‌ها درس بخوانید ...

در صورتی که نمی‌توانید با توجه به زمان آزادتان برنامه‌ی مطالعاتی استاندارد را برای خود تدوین کنید حتماً از افراد متخصص کمک بخواهید. افرادی که تجربیات خود را صادقانه در اختیار شما قرار می‌دهند و برنامه‌ریزی مناسب با شرایط شما را انجام می‌دهند.

📖 کتاب تست:

کوچک‌ترین واحد یادگیری در کنکور، تست است.

شما می‌توانید برای این‌که سطح یادگیری خود را پس از مطالعه بسنجید از کتاب‌های تست مجموعه (تست کنکور) و ماطراحان (تست‌های تألیفی) استفاده کنید. این کتاب‌ها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده‌اند و می‌توانند نحوه‌ی طرح سوالات کنکور و سطح آن‌ها را به‌صورت واضح به شما نشان دهند.

📖 درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم مناسب‌ترین منابع برای دوران مرور و جمع‌بندی:

بیش‌تر داوطلبان حین مطالعه نگران خلاصه‌نویسی و مرور آموخته‌های خود هستند و برای خلاصه‌نویسی زمان زیادی را صرف می‌کنند. اینک به شما مژده می‌دهیم که این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است و دیگر با استفاده از درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم نیاز به خلاصه‌نویسی ندارید.

شما می‌توانید نظرات، انتقادات و پیشنهادهای سازنده خود را در مورد بسته‌های آموزشی به شماره‌تلفن همراه ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ فقط و فقط پیامک نمایید.

مشاور و مدیر تولید

امیرحسین خلیلی

طلیعه سخن مؤلف:

پروردگارا! تو را سپاس که به ما سعادتِ ارزانی داشتی تا ضمنِ علاقه به حرفه و امر آموزش، بتوانیم با گردآوری و نگارش این درسنامه، قدمی هرچند کوتاه در راه پیشبرد علم برداریم.

درسنامه‌ای که اکنون تقدیم شما می‌گردد، در دوازده فصل تهیه و تنظیم شده است، که به‌طور مختصر و مفید، کلیه مطالب اساسی و کاربردی را در رابطه با مباحث ریاضی عمومی توضیح داده است، برای دانشجویان و داوطلبان آزمون کارشناسی ارشد رشته انفورماتیک پزشکی و دیگر رشته‌های دارای درس ریاضی عمومی بسیار مفید خواهد بود.

در پایان لازم می‌دانم که از مسئولان و کارکنان محترم انتشارات آناهید گستر خلیلی که در امر چاپ و نشر این اثر نهایت همکاری را با ما داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نموده و آرزوی توفیق روزافزون دارم.

موفق و پیروز باشید.

سلیمان سعیدی

۹	فصل اول: توابع
۵۳	فصل دوم: حد و پیوستگی
۶۰	فصل سوم: حساب توابع یک متغیره
۹۵	فصل چهارم: حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره
۱۲۲	فصل پنجم: مجموعه‌ها
۱۲۵	فصل ششم: حساب انتگرال
۱۳۵	فصل هفتم: بسط دو جمله‌ای
۱۳۸	فصل هشتم: ماتریس‌ها
۱۶۳	فصل نهم: اعداد مختلط
۱۶۶	فصل دهم: معادلات دیفرانسیل
۱۶۷	فصل یازدهم: بردار، صفحه و خط در IR^3
۱۷۰	فصل دوازدهم: سری‌ها

۱-۱- تعریف:

مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را تابع گوییم، هرگاه مولفه‌های اول هیچ دو عضو متفاوتی برابر نباشد.

تابع $f_1 \rightarrow \{(2,5), (1,4), (2,5)\}$ مثال:

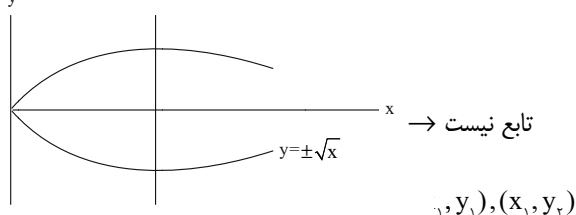
نکته: $\{a, a, a, \dots\} = \{a\}$

تابع نیست $f_2 \rightarrow \{(2,5), (2,4)\}$ مثال:

۱-۱-۲ نمودار تابع: خطی عمودی، نمودار یک تابع را همواره در یک نقطه قطع می‌کند.

مثال:

$\rightarrow$ در این نقطه تابع است ولی در کل تابعه نیست.



۱-۱-۳ ضابطه تابع: $y=f(x)$ را تابع گوییم هرگاه همواره به ازاء هر x فقط یک y وجود داشته باشد.

تابع نیست به ازاء یک x پیش از یک y دارد $\rightarrow y=\pm 1 \xrightarrow{x=1} y=\pm\sqrt{x}$ مثال:

مثال: اگر $y = \frac{3x-5}{x+4}$ باشد، هر یک از موارد زیر را به دست آورید:

$$۱) f(2) = \frac{3(2)-5}{2+4} = \frac{6-5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$۲) f(0) = \frac{3(0)-5}{0+4} = \frac{-5}{4}$$

$$۳) f(a) = \frac{3a-5}{a+4}$$

$$۴) f(2x-1) = \frac{3(2x-1)-5}{2x-1+4} = \frac{6x-3-5}{2x+3} = \frac{6x-8}{2x+3}$$

فصل اول

مثال: اگر $F = (2x-1) = \frac{6x-8}{7x+3}$ باشد، $f(x)$ را به دست آورید:

$$2x-1=+$$

$$\rightarrow x = \frac{t+1}{2} \rightarrow f(t) = \frac{6(\frac{t+1}{2})-8}{7(\frac{t+1}{2})+3} = \frac{3t+3-8}{t+1+3} = \frac{3t-5}{t+4}$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = \frac{3x-5}{x+4}$$

تست / مدیریت

۱. اگر $f(\frac{x-2}{x+1}) = \frac{x-1}{2x}$ باشد، $f(x) = ?$

$$2x-1=3 \Rightarrow x=2$$

$$f(3) = \frac{(2^2)-1}{(2)^2+1} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{8}{5} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

$$1 \quad (3)$$

۱۰

تست / حسابداری

۲. اگر $f(\frac{x-2}{x+1}) = \frac{x-1}{2x}$ باشد، $f(x) = ?$

$$4 \leftarrow \frac{2x+4}{2x+1} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \leftarrow \frac{2x+1}{2x+4} \quad (4)$$

$$\frac{-1}{0} \leftarrow \frac{2x-1}{2x} \quad (1)$$

$$0 \leftarrow \frac{4x}{2x+1} \quad (3)$$

$$f(\frac{x-2}{x+1}) = \frac{x-1}{2x} \xrightarrow{x=2} f(0) = \frac{1}{4}$$

صفر را در گزینه‌ها می‌گذاریم. هر کدام $\frac{1}{4}$ شد، جواب درست همان است.

نکته: در تکنیک عددگذاری:

۱- عددی قرار دهید که عبارت داخل پرانتز را صفر نماید.

۲- عددی قرار دهید که عبارت داخل پرانتز را عدد صحیح کند.

۳- صفر قرار دهید.

۴- هر عدد دلخواه دیگر قرار دهید.

نکته: (۱) $\frac{\text{عدد}}{0} \leftarrow \text{نامعین}$

(۲) $\frac{\text{عدد}}{0} \leftarrow \infty$ در حد

(۳) $\frac{0}{\text{عدد}} = 0$

تست / اقتصاد

۳. اگر $f\left(\frac{1}{3x-2}\right) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد $f(x) \Leftarrow$ ؟

$$(۱) \frac{1}{0} \leftarrow \frac{x=1}{x-1} \text{ نامعین}$$

$$(۳) \left. \begin{array}{l} \frac{x=1}{0} \leftarrow \\ \frac{x=\frac{1}{2}}{-1} \leftarrow \end{array} \right\} \frac{1-x}{1+\Delta x}$$

$$(۲) \frac{x-3}{x} \leftarrow \frac{x=1}{-2}$$

$$(۴) \left. \begin{array}{l} \frac{x=1}{0} \leftarrow \\ \frac{x=\frac{-1}{2}}{-3} \leftarrow \end{array} \right\} \frac{x-1}{x+1}$$

$$F\left(\frac{1}{3x-2}\right) = \frac{x-1}{x+1} \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x=1 \rightarrow F(1)=0 \\ \text{اگر } x=0 \rightarrow F\left(\frac{-1}{2}\right)=-1 \end{cases}$$

رابطه طلایی اول $\xrightarrow{x=1} f(1)=0 \rightarrow$

رابطه طلایی دوم $\xrightarrow{x=0} f\left(\frac{-1}{2}\right)=-1 \rightarrow$

اگر از رابطه اول دو جواب درست درآمد، رابطه دوم را تشکیل می‌دهیم.

تست / اقتصاد

۴. اگر x متغیر مستقل باشد، کدام یک از روابط زیر تابع است؟

$$(۲) x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(۱) y^2 = x + 1$$

$$(۴) \sin y = x$$

$$(۳) y + x^2 - 1 = 0$$

$$\text{لـ } x = 0, x, 2x, \dots, y = 0$$

$$\text{لـ } y = -x + 1$$

در چند جمله‌ای‌ها، هر گاه y بتوان یک باشد $\Leftarrow$ تابع است.

تست / مدیریت

۵. تابع هزینه کل به صورت $TC = 5e^x + \ln(x+1)$ می‌باشد، هزینه ثابت؟

$$(۴) 5e$$

$$(۲) 5$$

$$(۲) 182$$

$$(۱) 0$$

$$FC = 5e^0 + \ln(0+1)$$

$$FC = 5 + \ln 1 = 5$$

نکته: ۱- هزینه متغیر + هزینه ثابت = هزینه کل

$$TC = FC + VC \quad ۲-$$

$$۳- VC = V.X \leftarrow V: \text{هزینه متغیر هر واحد}$$

$$TC = FC + V.X \quad ۴-$$

$$۵- TC = FC \Leftarrow \frac{x=0}{}$$

۶- هزینه کل به ازاء تولید صفر برابر هزینه ثابت است.

$$۷- e = 2 / 182$$

$$۸- \ln x = \log_e x$$

$$۹- \log \frac{100}{10} = 2, \log \frac{1}{2} = 3 \leftarrow a^b = c \rightarrow \log \frac{c}{a} = b$$

$$۱۰- \ln 1 = 0 \leftarrow \log 1 = 0$$

$$۱۱- a^0 = 1$$

۱-۲- دامنه، قلمرو یا حوزه تعریف

تعریف: مجموعه مولفه‌های اول یک تابع را دامنه تابع نامیده و آن را با نماد Df برای $y = f(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$\text{مثال: } f_1 = \{(2,3), (5,8)\} \Rightarrow Df = \{2,5\}$$

تذکر ۱: دامنه توابع چند جمله‌ای یا کثیرالجمله‌ای شامل تمام اعداد حقیقی R است.

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 8x + \frac{5}{7} \rightarrow Df = \{2,5\}$$

تذکر ۲: توابع نمایی نیز مشابه تذکر فوق می‌باشند.

$$y = \frac{1}{2}e^x + 5x - \frac{3}{7} \rightarrow Df = IR$$

تذکر ۳: دامنه توابع کسری شامل تمام اعداد حقیقی به جز ریشه‌های مخرج کسر می‌باشد.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \rightarrow Df = x \in IR - \{1\}$$

تذکر ۴: توابع رادیکالی با فرجه فرد، از نظر رادیکال محدودیتی ندارد.

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \rightarrow Df = IR$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \rightarrow Df = x \neq 0$$

تذکر ۵: دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج مقادیری است که به ازاء آن عبارت زیر رادیکال نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی) صفر می‌شود.

$$y = \sqrt{x^2 - 4} \quad x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow Df = x \geq 2 \cup x \leq -2$$

$$Df = x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$x = \pm a \quad \leftarrow \quad x^2 = a^2 - 1 \quad \text{نکته: } \oplus$$

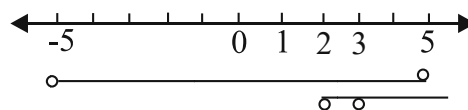
$$-a \leq x \leq +a \quad \leftarrow \quad x^2 \leq a^2 - 2$$

$$x \leq -a \cup x \geq a \quad \leftarrow \quad x^2 \geq a^2 - 3$$

تذکر ۶: دامنه توابع لگاریتمی به صورت $f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ ، مقادیری است که به ازاء آن $g(x) > 0$ و $h(x) > 0$ و $h(x) \neq 1$ می‌شود.

$$y = \log_{x-2} (25 - x^2) \quad 25 - x^2 > 0 \quad x^2 < 25 \Rightarrow -5 < x < 5$$

$$\left. \begin{array}{l} x-2 > 0 \\ x-2 \neq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (x > 2) - \{3\} \\ \Rightarrow x > 2 \\ \Rightarrow x \neq 3 \end{array} \quad \checkmark$$



✓ ← اشتراک آنها را می‌گیریم.

$$\Rightarrow Df = x \in (2,3) \cup (3,5)$$

$$\text{یا } Df = x \in$$

⊕ نکته: تغییر علامت نامساوی در دوجا اتفاق می‌افتد.

۱- قرینه نمودن طرفین

۲- عکس نمودن طرفین

فواصل تعریف شد:

$$۱) [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$۲) (a, b) = \{x \mid a < x < b\} =]a, b[$$

$$۳) [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\} = [a, b[$$

$$۴) (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\} =]a, b]$$

۱-۳ دامنه $\frac{f}{g}, fg, f-g, f+g$

برابر اشتراک دامنه‌ها به جز ریشه فرج است.

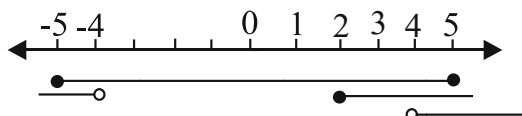
$$y = \frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x-2}} - \ln(x^2-16)$$

$$f_1 = \sqrt{25-x^2} \quad 25-x^2 \geq 0 \quad x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$$

$$f_2 = \sqrt{x-2} \quad x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$f_3 = \ln(x^2-16) \quad x^2-16 > 0 \quad x^2 > 16 \Rightarrow x < -4 \cup x > 4$$

$$Df = x \in (Df_1 \cap Df_2 \cap Df_3) - (\text{ریشه مخرج})$$



$$\Rightarrow Df = (4, 5] - \{2\}$$

$$\Rightarrow Df = (4, 5]$$

تست / اقتصاد

$$6. \text{ دامنه تابع } y = \sqrt{1-x^2} + \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} \text{ کدام است؟}$$

$$\ln x \rightarrow x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x \rightarrow x > 0$$

$$[-1, 1] \quad (2) \quad [-1, 1] \quad (1)$$

نکته: محاسبه دامنه را از تابع لگاریتمی شروع کنید.

نکته: موارد زیر نامعین می‌باشد.

$$\ln 0 \quad (2) \quad \frac{0}{0} \quad (1)$$

تست / اقتصاد

$$7. \text{ دامنه تابع } y = \frac{\ln(x+2)}{x-3} + \sqrt{4-x^2} \text{ کدام است؟}$$

$$[-2, 2] \quad (1) \quad [-2, 2] \quad (2) \quad [-2, 2] \quad (3) \quad [-2, 2] \quad (4)$$

تست / حسابداری و مدیریت

$$8. \text{ دامنه تابع } y = \sqrt{\log \frac{x+2}{z^2}} \text{ کدام است؟}$$

$$(-2, 0) \cup (0, 1) \quad (3) \quad (-2, 0) \cup (0, 2] \quad (4) \quad (-2, 0) \quad (2) \quad (0, 2] \quad (1)$$

غلط درست مقایسه ۲ و ۱

$$x = 2 \quad \sqrt{\log(1)} = 0 \quad \text{معین} \quad x = 2 \Rightarrow 3, 2$$

غلط درست مقایسه ۴ و ۱

$$x = 1 \quad \sqrt{\log(1)} = 0 \quad \text{معین} \quad x = -1 \Rightarrow 1$$

تست

$$9. \text{ دامنه تابع } y = \sqrt{\frac{x}{x+1}} \text{ کدام است؟}$$

$$-1 < x \leq 0 \quad (2) \quad -1 \leq x \leq 0 \quad (1) \quad x < -1 \cup x \geq 0 \quad (4) \quad x \leq 1 \cup x \geq 0 \quad (3)$$

$$y = \sqrt{\frac{-1}{0}} = \text{نامعین} \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow \text{غلط}$$

$$x = -1 \quad \text{درست} \quad 1 \text{ و } 3$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}} = \text{معین} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{غلط}$$

$$x = -1 \quad 2$$

فصل

۲

حد و پیوستگی

۵۳

۱-۲ تابع $y = f(x)$

تابع $y = f(x)$ مفروض است. اگر x به سمت عددی مثل a میل کند و به دنبال آن y به سمت عددی مانند L میل نماید، آن گاه می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

۲-۲ حد راست و چپ

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_+$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_-$$

الف - تابع f مفروض است. اگر x از سمت راست به طرف a میل کند، می‌نویسیم:

ب - تابع f مفروض است. اگر x از سمت چپ به طرف a میل کند، می‌نویسیم:

تذکر: f در $x = a$ زمانی حد دارد که چپ و راست آن برابر باشد.

۳-۲ قضایای حد

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = +\infty \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{ زوج } R \quad \text{فرد } R$$

نکته: $\leftarrow$

$$۱) \frac{\text{عدد}}{\infty} \rightarrow 0 \text{ در حد}$$

$$۲) \frac{\text{عدد}}{\infty} \rightarrow 0 \text{ در حد}$$

$$۳) (\text{عدد} > ۱)^{+\infty} = +\infty \rightarrow ۲^{+\infty} = +\infty$$

$$۴) (\text{عدد} > ۱)^{-\infty} = 0 \rightarrow ۲^{-\infty} = \frac{1}{۲^{+\infty}} = 0$$

$$۵) (\text{عدد} < ۱)^{+\infty} = 0 \rightarrow ۲^{+\infty} = (۲^{-1})^{+\infty} = 0$$

$$۶) (\text{عدد} < ۱)^{-\infty} = +\infty \rightarrow \left(\frac{1}{۲}\right)^{-\infty} = (۲^{-1})^{-\infty} = ۲^{+\infty} = +\infty$$

فصل

۳

حساب توابع یک متغیره

۶۰ ۱-۳ تعریف مشتق

تابع $y = f(x)$ مفروض است. مشتق y نسبت x را با نماد y' یا y'_x یا $\frac{dy}{dx}$ یا $\frac{df(x)}{dx}$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad y' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

۲-۳ قواعد مشتق‌گیری

$$v = f(x), u = f(x)$$

$$1) y = m$$

$$y' = 0$$

$$y = x^r \Rightarrow y' = r x^{r-1}$$

$$2) y = m x^n$$

$$y' = m n x^{n-1}$$

$$y = x^r \Rightarrow y' = r x^{r-1}$$

$$3) y = m u^n$$

$$y' = m n u^{n-1} u'$$

$$y = x^r (x^r + x - 1)^s \Rightarrow y' = r(x^r - 1)(x^r + x - 1)^{s-1} + s(x^r + x - 1)^s (r x^{r-1} + 1)$$

$$4) y = u^v$$

$$y' = u^v \left[v' \ln u + \frac{u' v}{u} \right]$$

$$y = (x^r + x - 1)^{(x^r - x)} \Rightarrow y' = (x^r + x - 1)^{(x^r - x)} \left[(r x^{r-1} - 1) \ln(x^r + x - 1) + \frac{(r x + 1)(x^r - x)}{x^r + x - 1} \right]$$

$$۵) y = \sqrt[m]{u^n}$$

$$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

$$y = \sqrt[r]{(x^r + x - 1)^r} \Rightarrow y' = \frac{r(r x + 1)}{r\sqrt[r]{(x^r + x - 1)^r}}$$

$$۶) y = \sqrt{u}$$

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y = \sqrt{x^r + x - 1} \Rightarrow y' = \frac{r x + 1}{2\sqrt{x^r + x - 1}}$$

$$۷) y = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$۸) y = u.v$$

$$y' = u'v + v'u$$

$$y = (x^r + x - 1)(x^r - x) \Rightarrow y' = (r x + 1)(x^r - x) + (r x^r - 1)(x^r + x - 1)$$

$$۹) y = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y = \frac{x^r + x - 1}{x^r - x} \Rightarrow y' = \frac{(r x + 1)(x^r - x) - (r x^r - 1)(x^r + x - 1)}{(x^r - x)^2}$$

$$۱۰) y = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$۱۱) y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$y = \frac{x + 1}{x + r} \Rightarrow y' = \frac{1}{(x + r)^2} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & r \end{vmatrix} = r - 1 = 1$$

$$۱۲) y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$۱۳) y = me^u$$

$$y' = mu'e^u$$

$$y = re^{x^r + x - 1} \Rightarrow y' = r(r x + 1)r^{x^r + x - 1}$$

$$۱۴) y = ma^u$$

$$y' = mu'a^u \ln a$$

$$y = re^{x^r + x - 1} \Rightarrow y' = r(r x + 1)r^{x^r + x - 1} \ln r$$

$$۱۵) y = a^x$$

$$y' = a^x \ln a$$

$$y = r^x \Rightarrow y' = r x \cdot \ln r$$

فصل

۴

حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره

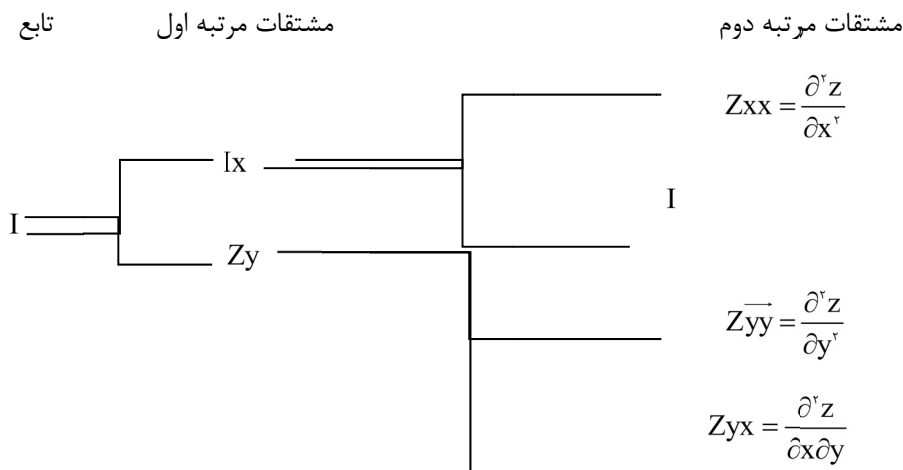
۴-۱ مشتقات جزئی یا نسبی:

تابع $I = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ مفروض است. مشتق جزئی I نسبت به یکی از متغیرها (برای مثال x_1) را با نماد I_{x_1} یا $\frac{\partial I}{\partial x_1}$ یا fx_1 یا $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ یا $\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1}$ نمایش داده و برای محاسبه آن سایر متغیرها را ثابت فرض نموده و مشتق I نسبت به x_1 را به دست می آوریم:

تذکر: قواعد مشتق گیری توابع چند متغیره مشابه توابع یک متغیره است.

۴-۲ مشتقات جزئی مرتبه دوم:

تابع $z = f(x, y)$ مفروض است. مشتقات جزئی مرتبه اول آن به صورت z_x و z_y بوده و مشتقات جزئی مرتبه دوم آن به صورت زیر است:



تذکر: قضیه مشتقات آمیخته $Z_{xy} = Z_{yx}$

مثال: کلیه مشتقات مرتبه اول و دوم تابع Z را به دست آورید:

$$Z = 5x^2 - 3x^2y + 6xy^2 - 8y^2 + 10x - 8y + 20$$

$$Z_x = 10x - 6xy + 6y^2 + 10$$

$$Z_{xy} = -6x + 12y = Z_{yx} = -6x + 12y$$

$$Z_y = -3x^2 + 12xy - 16y - 8 = Z_{yy} = 12x - 16y$$

تست / حسابداری مدیریت ۸۹

۱. در تابع $Z = \frac{xy}{x+y}$ مقدار $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ در نقطه $(-1, 3)$ کدام است؟

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

$$\frac{-3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{-3}{8} \quad (2)$$

$$\frac{5}{4} \quad (1)$$

$$I_x = \frac{y(x+y) - (1)(xy)}{(x+y)^2} = \frac{\cancel{xy} + y^2 - \cancel{xy}}{(x+y)^2}$$

$$Z_{xy} = \frac{2y(x+y)^2 - 2(1)(x+y)y^2}{(x+y)^4} \quad Z_{xy} = \frac{2y(x+y)^2 - 2(1)(x+y)y^2}{(x+y)^4}$$

$$\xrightarrow[x=-1]{y=3} \frac{2(-1)(3-1)^2 - 2(1)(3-1)(-1)^2}{(3-1)^4} = \frac{-8-4}{16} = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}$$

تست / اقتصاد ۸۲

۲. در تابع $x^2 = x^2 + y^2$ مقدار $\frac{\partial \ln z}{\partial \ln y} + \frac{\partial \ln z}{\partial \ln x}$ کدام است؟

$$x+y \quad (4)$$

$$xy \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$\ln z^2 = \ln(x^2 + y^2)$$

$$2 \ln z = \ln(x^2 + y^2) \Rightarrow \ln z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

مشتق تابع نسبت به تابع:

$$\frac{\partial \ln z}{\partial x} + \frac{\partial \ln z}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

تست / اقتصاد ۸۵

۳. اگر $F = u^2 + v^2 - 2xy + y^2 = 0$ و $G = uV + x^2 - y^2 = 0$ باشد، مقدار ژاکوبین $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ کدام است؟

$$2u^2 - 2v^2 \quad (4)$$

$$uv + u^2 + v^2 \quad (3)$$

$$u^2 + v^2 - uv \quad (2)$$

$$u^2 + v^2 \quad (1)$$

$$|J| = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ V & u \end{vmatrix} = 2u^2 - 2v^2$$

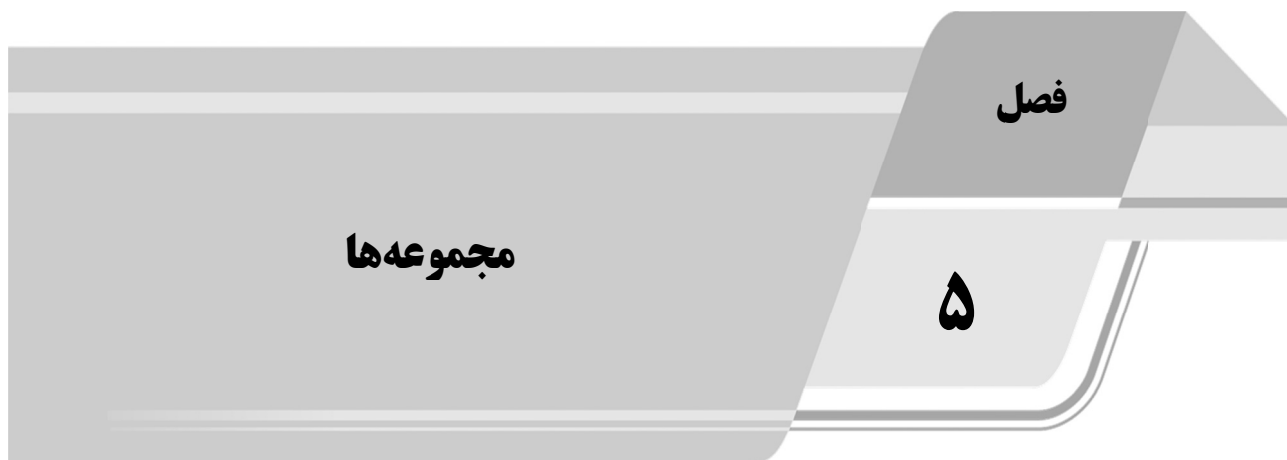
تمرین:

۱- در تابع $I = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ مقدار Z_{xx} در نقطه $(1, 1)$ ؟

ج: -۱

$$I_x = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(\cancel{x^2} + y^2 - \cancel{x^2} + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow Z_x = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Z_{xx} = \frac{4y^2(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2)(4xy^2)}{(x^2 + y^2)^4} \xrightarrow{x=y=1} \frac{16 - 32}{16} = -1$$



۱۲۲ ۵-۱ تعریف

مجموعه، از مفاهیم اولیه بوده و تعریف مشخصی ندارد ولی گروهی از اشیاء مشخص را مجموعه تلقی می‌کنیم. (مجموعه را با شکل آن نمایش می‌دهیم.)

۵-۲ تعلق یا عضویت

تعلق یا عضویت عنصر b به مجموعه A را با نماد $b \in A$ و نفی آن را با نماد $b \notin A$ نمایش می‌دهیم.

۵-۳ مجموعه تهی

هیچ عضوی ندارد. نماد آن با $\{\}$ یا $\emptyset$ نمایش داده می‌شود.

۵-۴ مجموعه مرجع

مجموعه تمام مجموعه‌هاست و نماد آن u یا M نمایش داده می‌شود.

۵-۵ زیرمجموعه

مجموعه A را زیرمجموعه، مجموعه B گوئیم هر گاه هر عضو A عضو B نیز باشد و نماد آن $A \subset B$ و نفی آن $A \not\subset B$ می‌باشد.

۵-۶ تساوی دو مجموعه

دو مجموعه A و B را مساوی می‌گوئیم هر گاه $A \subset B$ و $B \subset A$ باشد نماد آن $A=B$ و نفی آن $A \neq B$ است.

۵-۷ متمم یا مکمل A

شامل تمام عناصر مرجع به جز A است و نماد آن A' یا A°

۵-۸ اجتماع A و B

شامل تمام عناصر دو مجموعه است $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$

۵-۹ اشتراک A و B

شامل تمام عناصر مشترک A و B است. $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$

۵-۱۰ تفاضل A و B

شامل عناصری از اولی است که در دومی نباشد. $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

مثال: $\{2, 4, 6, 8, 10\} - \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

۵-۱۱ دو مجموعه جدا از هم

عضو مشترکی ندارند $A \cap B = \emptyset$

۵-۱۲ تعداد عناصر

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ب) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

۵-۱۳ ضرب دو مجموعه

مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است به گونه‌ای که مولفه اول آن متعلق به مجموعه اول و مولفه دوم آن متعلق به مجموعه دوم است:

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

مثال: $\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

۵-۱۴ قوانین مجموعه‌ها

قوانین	اجتماع	اشتراک
۱) خاصیت جابجایی	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
۲) خاصیت شرکت پذیری	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
۳) پخش	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
۴) دمورگان	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
۵) همانی	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
۶) متمم‌ها	$A \cup A' = \mu$	$A \cap A' = \emptyset$
۷) جذب	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
۸) شبه جذب	$A \cup (A' \cap B) = A \cup B$	$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$
۹) اعمال خنثی	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \mu = A$

تذکر ۱

الف) $A \cup \mu = \mu$

ب) $A \cap \emptyset = \emptyset$

تذکر ۲

اگر ACB باشد داریم:

الف) $A \cap B = A$

ج) $A \cap B' = \emptyset$

تذکر ۳: تفاضل $A - B = A \cap B'$

تذکر ۴: جدا از هم

اگر A و B جدا از هم باشند.

الف) $A - B = A$

ب) $B - A = B$

تذکر ۵: زیرمجموعه

(۱) تهی زیرمجموعه تمام مجموعه‌هاست

(۲) هر مجموعه زیر مجموعه خودش است.

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

شماره تماس با نمایندگی‌های فعال و رسمی آناهید گستر خلیلی

شماره تماس	نمایندگی	شماره تماس	نمایندگی
۰۹۱۰۱۷۱۱۸۷۲	سبزوار (آقای شریفان)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۵۰	اراک (آقای حسینی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۱	شاهرود (آقای سلمانی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۸	اردبیل (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۹	شهرکرد (خانم تقی‌پور)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۱	ارومیه (آقای آرمیون)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	شیراز (آقای فروردین / خانم هوشمندی)	۰۹۱۹۶۳۲۱۸۵۲	اسفراین (خانم اسماعیل‌زاده)
۰۹۱۹۳۷۱۳۷۴۲	فسا (خانم شعبانی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۰	اصفهان (آقای کیانی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۹	قزوین (خانم چگینی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۴	اهواز (آقای دکتر رضازاده)
۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۷۱	کرج (آقای دکتر علیرضاپور)	۰۹۱۹۰۹۸۰۳۱۸	ایلام (آقای دکتر بوچانی)
۰۹۱۳۱۹۸۱۲۷۰	کرمان (خانم ضمانتی‌یار)	۰۹۱۹۶۸۵۳۱۱۶	بروجرد (آقای احمدی‌صدر)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کرمانشاه (آقای ابراهیمی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۹	بم (خانم سرحدی‌نژاد)
۰۹۱۹۵۳۷۱۸۹۰	کوهدشت (خانم یاریان)	۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۳	بیرجند (آقای دکتر بهروان)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۷	گرگان (آقای شاه‌علی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۷	تبریز (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	مراغه (آقای صمدی)	۰۹۰۱۳۷۳۷۸۹۶	جهرم (آقای یاعلی جهرمی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۴	مشهد (خانم دکتر شجاعی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۰	جیرفت (خانم دکتر محمدی)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	میاندوآب (آقای صمدی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۸	خرم‌آباد (خانم میر)
۰۹۱۹۶۳۵۰۷۶۸	نیشابور (آقای موسوی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۳	رشت (خانم تنها)
۰۹۱۹۵۷۳۳۲۸۴	هرمزگان (آقای زارعی)	۰۹۱۹۶۸۲۹۲۸۰	رفسنجان (آقای یوسفی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۵	همدان (آقای سوری)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۵	زاهدان (آقای مهمان‌دوست)
۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۴	یاسوج (آقای مرتضوی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۱	زنجان (خانم دکتر هوشیار)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۳	یزد (خانم آزاد)	۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۴	ساری (آقای دکتر اکبری)

بانک کتاب ناهید



«هر کتابی، از هر انتشاراتی را از ما بخواهید»

✓ جامع‌ترین بانک کتاب

✓ تحویل روزانه

✓ ارسال به تمامی نقاط کشور

✓ سفارش کتاب به صورت تلفنی و آنلاین

www.NIBS.ir



کتاب دانشگاهی، فنی و مهندسی، علوم پزشکی، علوم انسانی، عمومی،
ادبی، مذهبی، کمک آموزشی، کودک و نوجوان و کتاب نفیس

فروشگاه: تهران - خیابان انقلاب - روبه روی درب اصلی دانشگاه تهران

پاساژ فروزنده - طبقه همکف - پلاک ۳۳۱

تلفن: ۶۶۴۸۹۳۷۵ - ۰۲۱ - ۶۶۴۸۹۳۴۹ - ۰۲۱