

نکته: $[x] = n \iff n \leq x < n+1$

بنابراین
خرامی

مثال: حاصل $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{10}]$ را بیابید.

$$3(1) + 4(2) + 5(3) = 32$$

مثال: حاصل $P = \left[\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^4} \right]$ را بیابید.

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{1}{(\sqrt{2}-1)^4} \right] = \left[(\sqrt{2}+1)^4 \right] = \left[((\sqrt{2}+1)^2)^2 \right] \\ &= \left[(3+2\sqrt{2})^2 \right] = \left[17+12\sqrt{2} \right] = \left[32 \right] = 32 \end{aligned}$$

مثال: دامنه تعریف $f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{[x]-3}$ را بیابید.

$$\begin{aligned} 25-x^2 \geq 0 &\rightarrow x^2 \leq 25 \rightarrow -5 \leq x \leq 5 \\ [x]-3 \neq 0 &\rightarrow [x] \neq 3 \rightarrow x \notin [3, 4) \end{aligned}$$

$D_f = [-5, 3) \cup [4, 5]$

نکته: $[x] > 2 \rightarrow x \geq 3$, $[x] < 2 \rightarrow x < 2$
 $[x] \geq 2 \rightarrow x \geq 2$, $[x] \leq 2 \rightarrow x < 3$

مثال: حاصل $\left[\frac{x}{2} \right] = \frac{x}{2}$ را بیابید.

تساوی $\left[\frac{x}{2} \right] = \frac{x}{2}$ معادل $\frac{x}{2} = k$ (که $k \in \mathbb{Z}$) است.

$$\frac{x}{2} = k \Rightarrow x = 2k \rightarrow \left[\frac{2k}{2} \right] = k$$

برای $k \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$k \leq \frac{2k}{2} < k+1 \Rightarrow \begin{cases} k - \frac{2k}{2} \leq 0 \rightarrow \frac{k}{2} \leq 0 \rightarrow k \leq 0 \\ k+1 - \frac{2k}{2} > 0 \rightarrow \frac{k}{2} > -1 \rightarrow k > -2 \end{cases} \Rightarrow k = 0, -1$$

بنابراین $x = 0, -2$

۲

نکته ۲: $[x+n] = [x] + n \quad (n \in \mathbb{Z})$
 $[x+2] = [x] + 2$

مثال: $[x + \frac{1}{2}] + [x - \frac{1}{2}] = 0$

$[x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}] + [x - \frac{1}{2}] = 0$

$1 + [x - \frac{1}{2}] + [x - \frac{1}{2}] = 0 \rightarrow 2[x - \frac{1}{2}] = -1$

$\rightarrow [x - \frac{1}{2}] = -\frac{1}{2} \rightarrow 2 \leq x - \frac{1}{2} < 3 \rightarrow 2.5 \leq x < 3.5$

نکته ۳: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

الف) $f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]}$ دامنه حریف از توابع زیر را تعیین کنید.
 $D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}, R_f = \{-1\}$

ب) $f(x) = \sqrt{[x] + [-x]}$ $D_f = \mathbb{Z}, R_f = \{0\}$

ج) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{[x] + [-x]}}$ $D_f = \emptyset$ تعریف به عبارات.

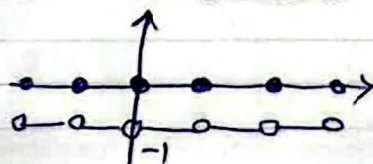
مثال: اگر $f(x) = 1 + [x] + [-x]$ باشد آن گاه $f(x)$ یک مقدار از ۱ یا ۰ می باشد.
 $(f(x))^2 \quad \sqrt{f(x)} \quad \frac{1}{f(x)} \quad f(-x)$

$f(x) = 1 + [x] + [-x] = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

تمرین: به وسیله نمودار مشخص کنید $f(x)$ به ازای x چه مقدار می گیرد.

$g = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

تذکر $\lim_{n \rightarrow \infty} ([x] + [-x]) = -1$



مث

نکته ۱:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

* برد تابع $f(x) = x - [x]$ را تعیین کنید.

$$\begin{cases} 0 \leq 2x - [2x] < 1 \\ 0 \leq 3x - [3x] < 1 \end{cases}$$

$$0 \leq f(x) < 2 \rightarrow R_f = [0, 2)$$

* برد تابع $f(x) = x - 4\left[\frac{x}{4}\right]$ را تعیین کنید.

$$f(x) = 4\left(\frac{x}{4} - \left[\frac{x}{4}\right]\right)$$

بین صفر تا ۴

$$0 \leq \frac{x}{4} - \left[\frac{x}{4}\right] < 1$$

$$0 \leq 4\left(\frac{x}{4} - \left[\frac{x}{4}\right]\right) < 4$$

$$R_f = [0, 4)$$

نکته ۵

$$[x + y] \geq [x] + [y]$$

$$\begin{matrix} x = 2, 3 \\ y = 2, 4 \end{matrix} \rightarrow [x + y] = [x] + [y]$$

$$\begin{matrix} x = 2, 3 \\ y = 2, 8 \end{matrix} \rightarrow [x + y] > [x] + [y]$$

همه اعداد اعشاری هر دو عدد x و y اگر کسری باشند، برای عددی است که بزرگتر یا مساوی یک باشد، است و بزرگتر خواهد بود (یک واحد بزرگتر خواهد بود)

دع

$$دع: [\log_r^y] = ?$$

$$r^y < r^r \rightarrow \log_r r^y < \log_r r^r$$

$$[\log_r^y] = y \leftarrow (y < \log_r^y < r)$$

$$دع: [\log_{\frac{1}{r}}^y] = ?$$

$$\log_{\frac{1}{r}}^y = \log_{\frac{1}{r}}(y^{-1}) = -\log_r^y$$

$$r^y < r^r \rightarrow \log_r r^y < \log_r r^r \rightarrow y < \log_r^y < r$$

$$-y < -\log_r^y < -r \Rightarrow [-\log_r^y] = [\log_{\frac{1}{r}}^y] = -y$$

این عبارت را به شکل $f(x) = x + [x]$ را تعریف کنید.

$$y = x + [x] \xrightarrow[\text{خارج صحیح میگیریم}]{\text{از دو طرف +}} [y] = [x + [x]]$$

$$[y] = [x] + [x]$$

$$\Rightarrow [y] = 2[x] \Rightarrow [x] = \frac{1}{2}[y] **$$

$$** , * \rightarrow y = x + \frac{1}{2}[y]$$

$$\rightarrow x = y - \frac{1}{2}[y] = f(y) \Rightarrow f(x) = x - \frac{1}{2}[x]$$

9

مثال: مجموع جبر کسری $f(n) = \left[\frac{dx^r + 2vx + 3}{x^r + 2x + 1} \right]$

$f(n) = \left[\frac{dx^r + 2.0x + 3}{x^r + 2x + 1} + \frac{Vx + 1}{x^r + 2x + 1} \right]$ $P = \text{درجه عدد}$

$f(n) = \left[\frac{d(x^r + 2x + 1)}{x^r + 2x + 1} + \frac{V(x+1)}{(x+1)^r} \right] = d + \left[\frac{V}{x+1} \right]$

$x > 0 \rightarrow x+1 > 1 \rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{1} \rightarrow \left(\frac{V}{x+1} \right) < \frac{V}{1}$

$x > 0 : \left[\frac{V}{x+1} \right] = 0 \rightarrow f(n) = d + 0 = d$

$x = 1 : \left[\frac{V}{x+1} \right] = 1 \rightarrow f(n) = d + 1 = 2$

$x = 2 : \left[\frac{V}{x+1} \right] = 1 \rightarrow f(n) = d + 1 = 2$

$x = 3 : \left[\frac{V}{x+1} \right] = 1 \rightarrow f(n) = d + 1 = 2$

مثال: $\frac{1}{x+1}$
مجموع جبر کسری
مثال: $\frac{1}{x+1}$
مثال: $\frac{1}{x+1}$

$P < 1$ $f(n) = \left[\frac{dx^r + 1.0x + 3}{x^r + 2x + 1} \right]$

$A = \left[\frac{dx^r + 1.0x + 3}{x^r + 2x + 1} + \frac{-1V}{x^r + 2x + 1} \right]$

$= \left[\frac{d(x^r + 2x + 1)}{x^r + 2x + 1} + \frac{-1V}{x^r + 2x + 1} \right]$

$= d + \left[\frac{-1V}{x^r + 2x + 1} \right] \xrightarrow{x=1, 2, 3} d + (-1) = 2$

جواب

2
0
9
✓

✓

بجواب: $\left[\frac{4n-1}{\sqrt{}} \right]$ حاصل $\left[\frac{\varepsilon n-1}{\delta} \right] = 3, \left[\frac{2n-1}{\frac{1}{2}} \right] = 3$ ✓

$3 \leq \frac{2n-1}{\frac{1}{2}} < \varepsilon \rightarrow 9 \leq 2n-1 < \varepsilon \rightarrow 10 \leq 2n < \varepsilon+1 \rightarrow 5 \leq n < \frac{\varepsilon+1}{2}$ ①
 $3 \leq \frac{\varepsilon n-1}{\delta} < \varepsilon \rightarrow 10 \leq \varepsilon n-1 < \varepsilon \rightarrow 11 \leq \varepsilon n < \varepsilon+1 \rightarrow 1 \leq n < \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$ ②

① $\cap$ ② $\rightarrow 5 \leq n < \frac{\varepsilon+1}{2}$
 $10 \leq 9n < \frac{71}{2} \rightarrow 20 \leq 9n-1 < \frac{71}{2}$
 $\frac{20}{9} \leq \frac{9n-1}{\sqrt{}} < \frac{71}{18}$
 $\left[\frac{9n-1}{\sqrt{}} \right] = \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon, 0 \leq \frac{9n-1}{\sqrt{}} < \varepsilon, 0$

سابع جزء

$y = [nx]$

$y = [nx] \rightarrow \text{طول} = \frac{1}{n}$

$y = [2x] \rightarrow \text{طول} = \frac{1}{2}$

$y = \left[\frac{x}{\frac{1}{2}} \right] \rightarrow \text{طول} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

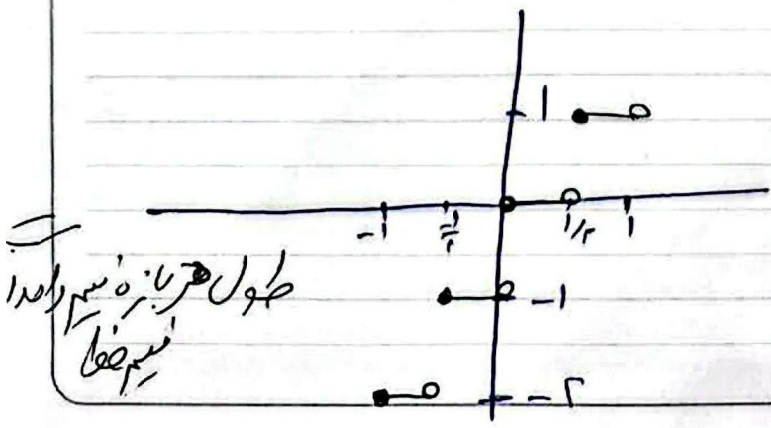
$y = [2x] \quad [-1, 1) \rightarrow \text{طول} = \frac{1}{2}$

$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \rightarrow -2 \leq 2x < -1 \xrightarrow{[2x]} y = -2$

$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \rightarrow -1 \leq 2x < 0 \rightarrow y = -1$

$0 \leq x < \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq 2x < 1 \rightarrow y = 0$

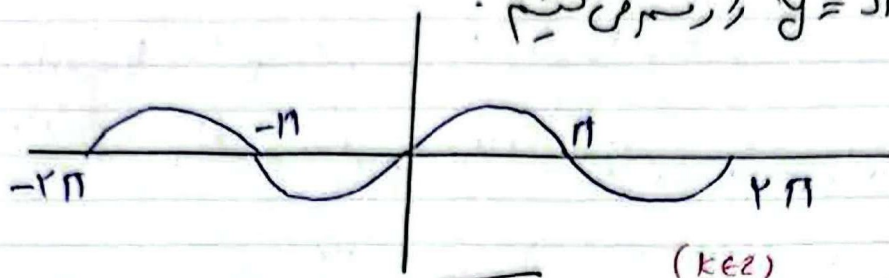
$\frac{1}{2} \leq x < 1 \rightarrow 1 \leq 2x < 2 \rightarrow y = 1$



طول هر بازه مساوی است
تقسیم

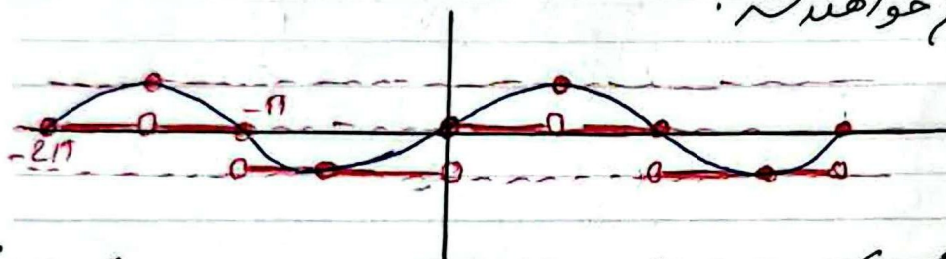
$$y = [\sin x] \quad (-2\pi, 2\pi)$$

ابتدا $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم:



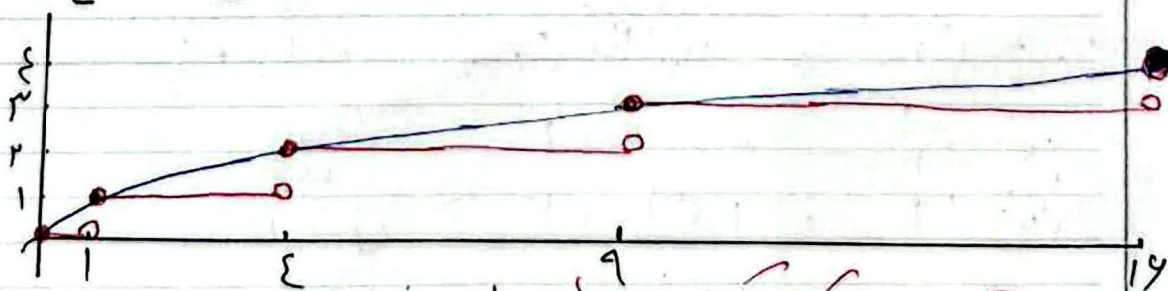
حال خطوط افقی $y = k$ را رسم می‌کنیم (در برد تابع)

و محل برخورد خطوط افقی $y = k$ با نمودار تابع را بر روی y می‌کشیم این نقاط جزئی از تابع خواهند شد.



منحنی تابع (آبدرت) که بین دو خط متوالی $y = k$ و $y = k+1$ قرار می‌گیرد را حذف می‌کنیم و مقصوره است حذف شده را روی $y = k$ قرار می‌دهیم.
حال نمودار $[f(x)] = y$ حاصل شده.

$$y = [\sqrt{x}] \quad [0, 16]$$



آب‌ها را پاک می‌کنیم و تمرکز را جواب نهایی اند.