

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دعای پیش از مطالعه

اَللّٰهُمَّ اَخْرِجْنِيْ مِنْ ظُلُمَاتِ الْوَهْمِ وَاكْرِمْنِيْ بِنُورِ الْفَهْمِ
اَللّٰهُمَّ افْتَحْ عَلَيْنَا اَبْوَابَ رَحْمَتِكَ وَاَنْشُرْ عَلَيْنَا خَزَائِنَ عُلُوْمِكَ
بِرَحْمَتِكَ يَا اَرْحَمَ الرَّاحِمِيْنَ

پروردگارا، خارج کن مرا از تاریکی های فکر و گرامی بدار به نور فهم
پروردگارا، بگشای بر ما در های رحمت را و بگستران کنج های دانشت را به امید رحمت
تو ای مهربان ترین مهربانان

بیایید به حقوق دیگران احترام بگذاریم

دوست عزیز، این کتاب حاصل دسترنج چندین ساله ی مؤلف، مترجم و ناشر آن است. تکثیر و فروش آن به هر شکلی بدون اجازه از پدیدآورنده کاری غیراخلاقی، غیرقانونی، غیرشرعی و کسب درآمد از دسترنج دیگران است، نتیجه ی این عمل نادرست، موجب رواج بی اعتمادی در جامعه و بروز پی آمدهای ناگوار در زندگی و محیط ناسالم برای خود و فرزندانمان می گردد.



درسنامه ریاضی عمومی

ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار زیستی

**تألیف و گردآوری:
افشین یعقوبی**

سرشناسه	: یعقوبی، افشین، ۱۳۶۸ -
عنوان و نام پدیدآور	: AGK درسنامه ریاضی عمومی: ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار زیستی/ تألیف و گردآوری افشین یعقوبی.
مشخصات نشر	: تهران: آناهید گستر خلیلی، ۱۴۰۳.
مشخصات ظاهری	: ۱۱۲ص: مصور؛ ۲۲ × ۲۹سم.
شابک	: 978-622-4907-44-8
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
موضوع	: ریاضیات -- راهنمای آموزشی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی) Mathematics -- Study and teaching -- Problems, exercises, etc. (Higher)
رده‌بندی کنگره	: QA۱۳۹
رده‌بندی دیویی	: ۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی	: ۹۸۵۶۳۳۰



انتشارات آناهید گستر خلیلی

نام: AGK درسنامه ریاضی عمومی

(ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار زیستی)

تألیف و گردآوری: افشین یعقوبی

ناشر: آناهید گستر خلیلی

نوبت و سال چاپ: اول. ۱۴۰۳

شمارگان: ۱۰۰۰

چاپ و صحافی: گیلان

مدیر تولید: امیرحسین خلیلی

مدیر فنی و هنری: مریم آرده

تایپ و صفحه‌آرایی: آرزو راضی

بهاء: ۲۴۰۰۰۰ تومان

آموزشگاه/ فروشگاه: ۰۲۱۶۶۵۶۸۶۲۱

مرکز پخش: ضلع جنوب غربی میدان انقلاب . جنب بانک پارسیان . مجتمع تجاری پارس . طبقه اول

مدیر فروش: ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ (ارتباط از طریق پیامک)

 agkpublisher@gmail.com

 www.agkins.com

طلیحه سخن مدیر تولید:

سپردن کار به اهلش نشانه‌ی خردمندی است.

برای تولید بسته‌های آموزشی تمام تلاش خود را به کار گرفته‌ایم تا محصولی شایسته را تقدیم شما عزیزان نماییم.

مجموعه‌ای که پیش روی شماست براساس معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور و به قلم مجرب‌ترین اساتید تألیف شده است و مطالعه آن موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه شما خواهد شد. ارائه بالاترین آمار قبولی در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری در دهه اخیر بیان‌گر توانایی این مجموعه در راستای اهداف آموزشی خود می‌باشد. اینک با اتکا به تجربه‌ای ۱۷ ساله می‌توانیم ادعا کنیم که مجموعه حاضر، بی‌شک از جمله کامل‌ترین و به‌روزترین بسته‌های آموزشی موجود در عرصه کنکور می‌باشد.

❧ برخی از ویژگی‌های بسته‌های آموزشی:

- منطبق با معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور
- گردآوری و تألیف توسط مجرب‌ترین اساتید کنکور
- تدریس مطالب از سطح پایه تا پیشرفته به بیان ساده و روان
- انتقال بهتر مفاهیم با استفاده از شکل، جدول و نمودار
- تألیف مبتنی بر نحوه‌ی طراحی سوالات کنکور
- مطالعه یک منبع منسجم به جای مطالعه چندین منبع مختلف
- منبعی خودآموز و بدون نیاز به مدرس

اینک علاوه بر مطالعه بسته‌های آموزشی استفاده از خدمات و محصولات زیر را به عنوان ضمانتی برای قبولی به شما داوطلبان عزیز توصیه می‌کنم؛

❧ آزمون‌های آزمایشی: خوش بود گر محک تجربه آید به میان

داوطلب شجاع کیست؟ داوطلبی است که خود را مورد سنجش (خود را با خود) و ارزیابی (خود را با دیگران) قرار دهد تا پیش از کنکور به نقاط ضعف خود پی ببرد و آن‌ها را تقویت نماید. آزمون‌های آزمایشی دارای یک برنامه‌ریزی منسجم است و به شما اولتیماتوم می‌دهد. یعنی شما باید در یک زمان معین مطالب معینی را مطالعه نمایید.

آزمون‌های آزمایشی مجموعه دارای سوالات استاندارد، پاسخنامه تشریحی و کارنامه تحلیلی می‌باشد. صادقانه شرکت در آزمون‌های آزمایشی را به شما عزیزان توصیه می‌کنم.

❧ مشاوره تخصصی و برنامه‌ریزی: زیر نظر حرفه‌ای‌ها درس بخوانید ...

در صورتی که نمی‌توانید با توجه به زمان آزادتان برنامه‌ی مطالعاتی استاندارد را برای خود تدوین کنید حتماً از افراد متخصص کمک بخواهید. افرادی که تجربیات خود را صادقانه در اختیار شما قرار می‌دهند و برنامه‌ریزی مناسب با شرایط شما را انجام می‌دهند.

📖 کتاب تست:

کوچک‌ترین واحد یادگیری در کنکور، تست است.

شما می‌توانید برای این‌که سطح یادگیری خود را پس از مطالعه بسنجید از کتاب‌های تست مجموعه (تست کنکور) و ماطراحان (تست‌های تألیفی) استفاده کنید. این کتاب‌ها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده‌اند و می‌توانند نحوه‌ی طرح سوالات کنکور و سطح آن‌ها را به‌صورت واضح به شما نشان دهند.

📖 درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم مناسب‌ترین منابع برای دوران مرور و جمع‌بندی:

بیش‌تر داوطلبان حین مطالعه نگران خلاصه‌نویسی و مرور آموخته‌های خود هستند و برای خلاصه‌نویسی زمان زیادی را صرف می‌کنند. اینک به شما مژده می‌دهیم که این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است و دیگر با استفاده از درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم نیاز به خلاصه‌نویسی ندارید.

شما می‌توانید نظرات، انتقادات و پیشنهادهای سازنده خود را در مورد بسته‌های آموزشی به شماره‌تلفن همراه ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ فقط و فقط پیامک نمایید.

مشاور و مدیر تولید

امیرحسین خلیلی

طلیحه سخن مؤلف:

هر ساله شاهد رقابت فشرده‌تری در تمامی سطوح کنکور می‌باشیم، رشته‌ی آمار زیستی هم از این امر مستثنی نمی‌باشد. درس ریاضی عمومی با توجه به وزن کم آن در رشته‌ی آمار زیستی، ممکن است خیلی از داوطلب‌ها را نسبت به آن بی‌توجه کند و آن را کنار بگذارند.

مؤلف این درسنامه سعی بر آن داشته که با توجه به تجزیه و تحلیل کردن سؤالات سال‌های گذشته‌ی این درس در رشته‌ی آمار زیستی، چکیده تقریباً کامل و مناسبی در اختیار داوطلبان قرار دهد.

این درسنامه صرفاً برای کنکور طراحی شده است، از اثبات قضایا و ... صرف‌نظر شده است. مطالب هر فصل تقریباً به‌طور کامل در اختیار داوطلبان قرار گرفته شده است. در انتهای هر فصل سؤالات سال‌های گذشته‌ی رشته‌ی آمار زیستی و برخی از تست‌های کنکور سراسری رشته‌ی ریاضی و تجربی گنجانده شده است. همچنین پاسخ سؤالات به‌طور کاملاً تشریحی بیان شده است، لذا داوطلبانی که به نمره مطلوب در این درس می‌اندیشند، با خواندن این درسنامه و پاسخگویی به سؤالات هر فصل، می‌توانند به‌طور کامل به هدف خود برسند.

درضمن، در تمام درسنامه علامت (+) نماد نکته می‌باشد و حائز اهمیت ویژه است.

و در پایان از تمامی معلمان و اساتید بزرگوارم از کلاس اول ابتدایی تا مقطع فعلی، نهایت سپاس و قدردانی را دارم.

با آرزوی موفقیت برای تمامی داوطلبان عزیز

ارادتمند شما

افشین یعقوبی

فهرست مطالب

صفحه

فصل و عنوان

۹	یادآوری
۱۱	فصل اول: تابع
۳۲	فصل دوم: حد و پیوستگی
۵۸	فصل سوم: مشتق و کاربرد آن
۸۲	فصل چهارم: انتگرال و کاربرد آن
۱۰۵	فصل پنجم: دنباله و سری

یادآوری

اتحاد جبری

به ازای $a, b \in \mathbb{R}$ ، داریم:

$$۱) (a+b)^r = a^r + r ab + b^r, (a-b)^r = a^r - r ab + b^r$$

$$۲) (a+b)(a-b) = a^r - b^r$$

$$۳) (a+b)(a+c) = a^r + (b+c)a + bc$$

$$۴) (a+b+c)^r = a^r + b^r + c^r + r(ab+ac+bc)$$

$$۵) a^r - b^r = (a-b)(a^r + ab + b^r)$$

$$۶) a^r + b^r = (a+b)(a^r - ab + b^r)$$

توان و لگاریتم

$$۱) a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$۲) (a^r)^s = (a^s)^r = a^{rs}$$

$$۳) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$۴) \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{a}^r b} = \sqrt[r]{a^r b}$$

$$۵) \log A \cdot B = \log A + \log B, \log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

$$۶) \log A^B = B \log A$$

$$۷) A^{\log A^B} = B$$

$$۸) \log_a 1 = 0, a \in \mathbb{R}$$

تعریف

تابع $f: A \rightarrow B$ را یک تابع گویند، هرگاه به ازای هر عضو از مجموعه A یک عضو متمایز از B به ما بدهد و اگر دو عضو یکسانی از A انتخاب شود، یک عضو از B به ما بدهد، به عبارتی تابع f در صورتی تابع است که مولفه‌های اول آن با هم برابر نباشند و اگر برابر باشند، مولفه‌ی دوم آن‌ها نیز باید برابر باشد.

مثال: به ازای کدام مقدار m ، $f = \{(3, 2), (4, 3), (4, m^2 + 2m)\}$ یک تابع است؟

دقت کنید، f در صورتی تابع است که مولفه‌های اول آن با هم برابر نباشند، و اگر مولفه‌های اول برابر بودند باید

$$m^2 + 2m = 3 \rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \rightarrow (m + 3)(m - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

مولفه‌های دوم نیز برابر باشند.

در رابطه‌هایی که در آن‌ها y ، داخل قدرمطلق یا توان زوج و یا داخل جز صحیح و یا کمان یک نسبت مثلثاتی باشد، معمولاً تابع نمی‌باشد.

مثال: کدام یک از روابط زیر می‌تواند یک تابع باشد؟ ($[]$ نماد جزء صحیح می‌باشد)

$$\tan y = x \quad (4) \quad [y] = 2x \quad (3) \quad x^2 + y = 4 \quad (2) \quad |y| + x = 1 \quad (1)$$

با توجه به نکته فوق، گزینه‌های ۱ و ۳ رد می‌شوند. اما در گزینه ۳ به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$y = 4 - x^2 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow y = 4 - (\pm 5)^2 = 4 - 25 = -21$$

یعنی به ازای هر x یا x های متفاوت تابع یک y به ما می‌دهد، که بیانگر یک تابع می‌باشد.

نکته: تشخیص تابع از روی نمودار: هر خطی که موازی محور y ها رسم کنیم، تابع موردنظر را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

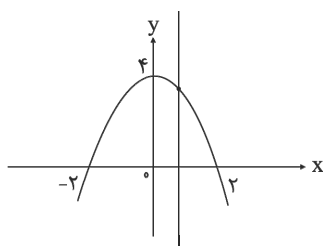
در گزینه‌ی ۳ مثال فوق داریم:

$$x^2 + y = 4 \rightarrow y = 4 - x^2$$

منحنی $y = 4 - x^2$ یک سهمی به صورت زیر می‌باشد.

ملاحظه می‌شود که اگر هر خط موازی محور y ها رسم کنیم، نمودار

را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند که نشان دهنده‌ی یک تابع می‌باشد.



حد و پیوستگی

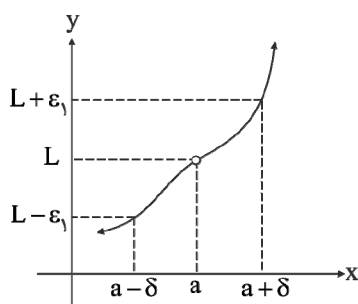
حد

تعریف

تابع f با ضابطه $y = f(x)$ را در نظر بگیرید که در یک بازه‌ی باز که شامل عددی مانند a است، به جز احتمالاً در خود a ، تعریف بشود. حد $f(x)$ وقتی که x به سمت a میل می‌کند، برابر است با L . یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



یعنی وقتی x به سمت عددی مانند a میل می‌کند، مقادیر $f(x)$ به سمت حدی چون L میل می‌کند. اگر با انتخاب x به اندازه کافی نزدیک به a ، با شرط این‌که $x \neq a$ ، بتوان فاصله $f(x)$ از L را به مقدار دلخواه کوچک کرد. تعبیر هندسی تعبیر فوق به شکل روبه‌رو می‌باشد:

مثال: فرض کنید تابع f با معادله $f(x) = 4x - 1$ تعریف شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 11$ ، δ ، یی برای $\varepsilon = 0.01$ پیدا

کنید که وقتی که $0 < |x - 3| < \delta$ ، آنگاه: $|f(x) - 11| < 0.01$.

$$|f(x) - 11| = |4x - 1 - 11| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$$

حل:

$$\Rightarrow 4|x - 3| < \frac{1}{100} \rightarrow |x - 3| < \frac{1}{400} \Rightarrow \delta = \frac{1 \times 2/5}{400 \times 2/5} = \frac{2/5}{1000} = 0.0025$$

مثال: با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 1) = 11$.

حل:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 11| < \varepsilon$$

باید نشان دهیم که:

$$\Rightarrow |(4x - 1) - 11| = |4x - 12| = 4|x - 3| < \varepsilon \rightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

تعریف حد به زبان ریاضی

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

حد راست تابع: اگر تابع $f(x)$ بر یک بازه مثلاً (a, b) تعریف شده باشد، آنگاه:

تابع در نقطه‌ی $x = a$ دارای حد راست L می‌باشد و به صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ نمایش می‌دهیم.

حد چپ تابع: اگر تابع $f(x)$ بر یک بازه مثلاً (a, b) تعریف شده باشد، آنگاه:

تابع در نقطه‌ی $x = b$ دارای حد چپ L می‌باشد و به صورت $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$ نمایش می‌دهیم.

اگر حد چپ تابع با حد راست تابع در نقطه‌ی $x = x_0$ موجود و با هم برابر باشند، آنگاه تابع در آن نقطه دارای حد می‌باشد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

مثال: آیا تابع $f(x) = \frac{[x]}{x+1}$ در نقطه‌ی $x=1$ حد دارد؟

ابتدا تکلیف جزء صحیح را مشخص کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[1^+]}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[1^-]}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{x+1} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} = \frac{1}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} = 0$$

پس تابع موردنظر در نقطه‌ی $x=1$ حد ندارد (زیرا حد چپ و راست با هم برابر نیستند).

اگر حد تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ برابر L_1 باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و حد تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x=a$

برابر L_2 باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ آنگاه:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \cdot L_2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \neq 0$$

اگر تابع $f(x)$ در $x=a$ تابعی کراندار باشد، و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ باشد، آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ را بیابید؟

می‌دانیم که تابع $1 \leq \sin x \leq -1$ ، یک تابع کراندار است و $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \frac{1}{x} = 0 \times \text{کرانداری} = 0$$

محاسبه حدود توابع جزء صحیح و قدر مطلق

1) توابع جزء صحیح: برای محاسبه حد این گونه توابع در نقطه‌ی موردنظر، باید حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

به‌طور مثال حد تابع $f(x) = [x]$ را در نقطه‌ی $x = x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [x] = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} [x] = x_0 - 1$$

مشتق و کاربرد آن

تعریف مشتق

مشتق تابع $f(x)$ را با $f'(x)$ نمایش می‌دهند، هرگاه هرکدام از حدود زیر وجود داشته باشند و به یکی از صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم.

$$۱) f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$۲) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$۳) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

مشتق راست

مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ را به صورت $f'_+(a)$ یا $f'(a^+)$ می‌دهیم هرگاه حد زیر وجود داشته باشد، و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مشتق چپ

مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ را به صورت $f'_-(a)$ یا $f'(a^-)$ نشان می‌دهیم، هرگاه حد زیر موجود باشد و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

هرگاه، تابع در نقطه‌ای مانند $x = a$ ، مشتق راست و مشتق چپ برابر داشت باشد، آنگاه تابع در آن نقطه $(x = a)$ مشتق پذیر است.

✚ اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای مشتق پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه نیز پیوسته است، عکس این مطلب لزوماً درست نمی‌باشد.

آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای (آنی) تابع

تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ را در نظر بگیرید، آهنگ متوسط تابع $f(x)$ را به صورت $\bar{f}(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x = a$ به صورت $f'(a)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

قواعد مشتق‌گیری

فرض u و v توابعی از x باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$۱) f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0 \quad c \text{ یک عدد ثابت}$$

$$۲) f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

$$۳) f(x) = u(x) \cdot v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

$$۴) f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} (v(x) \neq 0) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$$

$$۵) f(x) = \sqrt[n]{u(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$$

$$۶) f(x) = (u(x))^m \rightarrow f'(x) = mu'(x)[u(x)]^{m-1}$$

$$۷) f(x) = \sqrt[n]{[u(x)]^m} \rightarrow f'(x) = \frac{mu'(x)}{n\sqrt[n]{[u(x)]^{n-m}}}$$

$$۸) f(x) = e^{u(x)} \rightarrow f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

$$۹) f(x) = a^{u(x)} \rightarrow f'(x) = u'(x)a^{u(x)} \cdot \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$۱۰) f(x) = \sin u(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)\cos u(x)$$

$$۱۱) f(x) = \cos u(x) \rightarrow f'(x) = -u'(x)\sin u(x)$$

$$۱۲) f(x) = \tan u(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)(1 + \tan^2 u(x))$$

$$۱۳) f(x) = \cot u(x) \rightarrow f'(x) = -u'(x)(1 + \cot^2 u(x))$$

$$۱۴) f(x) = \sec u(x) = \frac{1}{\cos u(x)} \rightarrow f'(x) = u'(x)\tan u(x)\sec u(x)$$

$$۱۵) f(x) = \operatorname{Arcsin} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}}$$

$$۱۶) f(x) = \operatorname{Arccos} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}}$$

$$۱۷) f(x) = \operatorname{Arc tan} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2}$$

$$۱۸) f(x) = \operatorname{Arccot} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{-u'(x)}{1 + (u(x))^2}$$

$$۱۹) f(x) = \sinh u(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cosh u(x)$$

$$۲۰) f(x) = \cosh u(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \sinh u(x)$$

$$۲۱) f(x) = \tanh u(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) (1 - \tanh^2 u(x))$$

$$۲۲) f(x) = \coth u(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) (1 - \coth^2 u(x))$$

$$۲۳) f(x) = \operatorname{Arcsinh} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 + (u(x))^2}}$$

$$۲۴) f(x) = \operatorname{Arccosh} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}}$$

$$۲۵) f(x) = \operatorname{Arctanh} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1 - (u(x))^2}$$

$$۲۶) f(x) = \operatorname{Arccoth} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{1 - (u(x))^2}$$

$$۲۷) f(x) = \operatorname{Lnu}(x) \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$۲۸) f(x) = \log_c^{u(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x) \operatorname{Lnc}}$$

$$۲۹) f(x) = |u(x)| \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot u(x)}{|u(x)|}$$

$$۳۰) f(x) = g(u(x)) \rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot g'(u(x))$$

$$۳۱) f(x) = g \circ h(x) \rightarrow f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$$

$$۳۲) f(x) = h \circ g(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x))$$

$$۳۳) f(x) = [u(x)]^{v(x)} \rightarrow f'(x) = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \operatorname{Lnu}(x) + \frac{u'(x)}{u(x)} v(x) \right)$$

تمرین: حاصل هریک از مشتق‌های زیر را حل کنید؟ ($u(x)$ و $v(x)$ توابعی از x)

$$۱) f(x) = \Delta x^y g(x^r - rx)$$

$$۲) f(x) = \frac{a^{\sqrt{x}}}{e^{rx}}$$

$$۳) f(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{Arcsin} \sqrt{x})$$

$$۴) f(x) = \sin(x^r - rx) \cos(\operatorname{Lnx})$$

$$۵) f(x) = \sin(\tan x)$$

$$۶) f(x) = \sinh(a^x) - \cosh(a^x)$$

$$۷) f(x) = \tanh(\sqrt{x^r})$$

$$۸) f(x) = \sec(\operatorname{Lnx})$$

$$۹) f(x) = \operatorname{Arcsinh} \sqrt{x} + \operatorname{Arccosh} x^r$$

$$۱۰) f(x) = |x^r - rx|$$

$$۱۱) f(x) = \frac{a[u(x)] + b}{c[v(x)] + d}$$

$$۱۲) f(x) = x^x$$

انتگرال و کاربرد آن

تعریف

$$\int f(x)dx = F(x) + c \xrightarrow{\text{مشتق بگیریم}} F'(x) = f(x)$$

تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه برای $f(x)$ تعریف می‌کنیم هرگاه:

برخی از توابع اولیه انتگرال‌های نامعین

$$۱) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

$$۳) \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$۵) \int \ln x dx = x \ln x - x + c$$

$$۷) \int \frac{dx}{x^r - a^r} = \frac{1}{ra} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$۹) \int \frac{dx}{x^r + a^r} = \frac{1}{a} \operatorname{Arc tan} \frac{x}{a} + c$$

$$۱۱) \int \cos ax = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

$$۱۳) \int \cot ax = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + c$$

$$۱۵) \int (1 + \cot^2 ax) dx = -\frac{1}{a} \cot ax + c$$

$$۱۷) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$۱۹) \int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax + c$$

$$۲۱) \int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax + c$$

$$۲) \int x^{-1} dx = \ln x + c$$

$$۴) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad a \neq 1, a > 0$$

$$۶) \int \log_a x dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} dx = \frac{1}{\ln a} (x \ln x - x) + c$$

$$۸) \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x-b}{x-a} \right| + c$$

$$۱۰) \int \sin ax = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$۱۲) \int \tan ax = \frac{1}{a} \ln |\cos ax| + c$$

$$۱۴) \int (1 + \tan^2 ax) dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$$

$$۱۶) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$$

$$۱۸) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Arcsinh} x + c = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) + c$$

$$۲۰) \int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax + c$$

$$۲۲) \int \coth ax dx = \frac{1}{a} \ln \sinh ax + c$$

مثال: حاصل هریک از انتگرال‌های زیر را بدست آورید؟

۱) $\int \left(x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$

۲) $\int (\ln x + \log x) dx$

۳) $\int \left(e^{2x} + 2^x - \frac{1}{x^2} \right) dx$

۴) $\int \left[\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4} \right] dx$

۵) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

۶) $\int \tan^2 x dx$

۷) $\int (\tanh 2x + \coth 2x - \tan 2x - \cot 2x) dx$

۸) $\int (\sin x \cos 2x + \cos 2x) dx$

حل ۱)

$$\begin{aligned} \int \left(x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int \frac{dx}{x} \\ &= \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_1 \right) - \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c_2 \right) + (\ln x + c_3) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln x + c \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln x + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln x + c \end{aligned}$$

حل ۲)

$$\int (\ln x + \log x) dx = \int \ln x dx + \int \log x dx = (x \ln x - x + c_1) + \frac{1}{\ln a} (x \ln x - x + c_2)$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a \neq 1)$$

حل ۳)

$$\int \left(e^{2x} + 2^x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int e^{2x} dx + \int 2^x dx - \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{x} + c$$

حل ۴)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 4} + \int \frac{dx}{x^2 + 4} &= \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)} + \int \frac{dx}{x^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{2(-2)} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{Arc tan} \left(\frac{x}{2} \right) + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{Arc tan} \left(\frac{x}{2} \right) + c \end{aligned}$$

حل ۵)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - x^2}} = \operatorname{Arc sin} \left(\frac{x}{2} + c \right)$$

حل ۶)

$$\int \tan^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int dx = \tan x - x + c$$

حل ۷)

$$\begin{aligned} \int (\tanh 2x + \coth 2x - (\tan 2x + \cot 2x)) dx &= \int \tanh 2x dx + \int \coth 2x dx - \int \tan 2x dx - \int \cot 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \cosh 2x + \frac{1}{2} \ln \sinh 2x + \frac{1}{2} \ln |\cos 2x| - \frac{1}{2} \ln |\sin 2x| + c \end{aligned}$$

حل ۸)

$$\int \underbrace{\sin x \cos 2x}_{I_1} dx + \int \underbrace{\cos 2x}_{I_2} dx$$

دنباله

دنباله را با $\{a_n\}$ نمایش داده و به a_n جمله عمومی دنباله می‌گویند.

دنباله $\{a_n\}$ را همگرا می‌گوییم، هرگاه: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ موجود باشد و در غیراینصورت دنباله واگرا می‌باشد.

هر دنباله همگرا، کراندار می‌باشد.

دنباله $\{a_n\}$ را کراندار می‌گوییم، هرگاه: $|a_n| \leq k$

دنباله‌ی $\{a_n\}$ را صعودی (اکیدا صعودی) می‌گوییم، هرگاه:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \text{ اکیدا صعودی} \right)$$

یا می‌توان از دنباله، نسبت n مشتق گرفت، اگر مشتق بزرگتر مساوی صفر بود، آنگاه دنباله صعودی می‌باشد. $a'_n \geq 0$.

($a'_n > 0$ ، دنباله، اکیدا صعودی است)

دنباله $\{a_n\}$ را نزولی (اکیدا نزولی) می‌گوییم، هرگاه:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ اکیدا نزولی} \right)$$

یا اگر $a'_n \leq 0$ ، آنگاه دنباله نزولی می‌باشد. ($a'_n < 0$ ، دنباله اکیدا نزولی می‌باشد)

اگر دنباله‌ی a_n همگرا، و دنباله‌ی b_n نیز همگرا باشد، آنگاه:

$$(1) \quad a_n \pm b_n \text{ همگرا می‌باشد.}$$

$$(2) \quad a_n \cdot b_n \text{ همگرا می‌باشد.}$$

$$(3) \quad \frac{a_n}{b_n} \text{ به شرطی که } b_n \neq 0 \text{ باشد، همگرا می‌باشد.}$$

اگر a_n همگرا و b_n واگرا باشد، آنگاه:

$$(1) \quad a_n \pm b_n \text{، واگرا می‌باشد.}$$

$$(2) \quad a_n \cdot b_n \text{ ممکن است همگرا باشد.}$$

$$(3) \quad \frac{a_n}{b_n} \text{ ممکن است همگرا باشد.}$$

فصل پنجم

در محاسبه حد دنباله‌ها:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (۳) \quad \text{چند جمله ای بر حسب } n$$

$$k > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = 1 \quad (۲)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (۱)$$

$$n^n > n! > b^n > a^n > n^\alpha > Lnn$$

در قوانین رشد، همواره رابطه‌ی زیر برقرار است، وقتی $n \rightarrow \infty$:

$$b > a > 1 \text{ و } \alpha > 0$$

هم‌ارزی‌ها در دنباله‌ها، وقتی $n \rightarrow \infty$.

$$۱) \sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}, \sqrt[n]{(kn)!} \sim \left(\frac{kn}{e}\right)^k$$

$$۲) \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \sim n!$$

$$۳) ۱^p + ۲^p + \dots + n^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{۲} \quad (p > -۱)$$

$$۴) \cosh n \sim \frac{e^n}{۲}$$

$$۵) \sinh n \sim \frac{e^n}{۲}$$

مثال: در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله‌های زیر بحث کنید و بگویید کدام دنباله همگرا و کدام یک واگرا می‌باشد.

$$۱) \{a_n\} = \frac{۱+۲^n}{۳+۲^{n-۱}}$$

$$۲) \{a_n\} = \frac{\cosh n}{n}$$

$$۳) \{a_n\} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

$$۴) \{a_n\} = \left[\frac{(-1)^n}{n} \right]$$

$$۵) \{a_n\} = \log \frac{1}{n}$$

$$۶) \{a_n\} = \sin \frac{\pi}{n}$$

$$۷) \{a_n\} = \frac{n^2-1}{2n+1}$$

$$۸) \{a_n\} = n^{(-1)^{2n-1}}$$

$$۹) \{a_n\} = \cos \frac{n\pi}{۲}$$

$$۱۰) \{a_n\} = \left[۲ + \frac{(-1)^n}{n} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{۱+۲^n}{۳+۲^{n-۱}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{۲^n}{۲^{n-۱}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{۲^n}{۲^n \cdot ۲^{-۱}} = ۲$$

حل (۱)

پس دنباله $\frac{۱+۲^n}{۳+۲^{n-۱}}$ همگرا به ۲ می‌باشد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cosh n}{n} \stackrel{\text{هم ارز}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^n}{۲}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{۲n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{۲n} = \infty$$

حل (۲)

پس دنباله $\frac{\cosh n}{n}$ واگرا می‌باشد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{en} = \frac{1}{e}$$

حل (۳) همگرا

$$\frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , n \text{ زوج} \\ -\frac{1}{n} & , n \text{ فرد} \end{cases}$$

حل (۴)

$$n \text{ زوج: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \right] = [0^+] = 0$$

$$n \text{ فرد: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{n} \right] = [0^-] = -1$$

و چون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ یکتا نمی‌باشد ($0 \neq -1$) پس دنباله واگرا می‌باشد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = \log 0^+ = -\infty$$

حل (۵) دنباله واگرا است.

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

شماره تماس با نمایندگی‌های فعال و رسمی آناهید گستر خلیلی

شماره تماس	نمایندگی	شماره تماس	نمایندگی
۰۹۱۰۱۷۱۱۸۷۲	سبزوار (آقای شریفان)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۵۰	اراک (آقای حسینی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۱	شاهرود (آقای سلمانی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۸	اردبیل (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۹	شهرکرد (خانم تقی‌پور)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۱	ارومیه (آقای آرمیون)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	شیراز (آقای فروردین / خانم هوشمندی)	۰۹۱۹۶۳۲۱۸۵۲	اسفراین (خانم اسماعیل‌زاده)
۰۹۱۹۳۷۱۳۷۴۲	فسا (خانم شعبانی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۰	اصفهان (آقای کیانی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۹	قزوین (خانم چگینی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۴	اهواز (آقای دکتر رضازاده)
۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۷۱	کرج (آقای دکتر علیرضاپور)	۰۹۱۹۰۹۸۰۳۱۸	ایلام (آقای دکتر بوچانی)
۰۹۱۳۱۹۸۱۲۷۰	کرمان (خانم ضمانتی‌یار)	۰۹۱۹۶۸۵۳۱۱۶	بروجرد (آقای احمدی‌صدر)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کرمانشاه (آقای ابراهیمی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۹	بم (خانم سرحدی‌نژاد)
۰۹۱۹۵۳۷۱۸۹۰	کوهدشت (خانم یاریان)	۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۳	بیرجند (آقای دکتر بهروان)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۷	گرگان (آقای شاه‌علی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۷	تبریز (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	مراغه (آقای صمدی)	۰۹۰۱۳۷۳۷۸۹۶	جهرم (آقای یاعلی جهرمی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۴	مشهد (خانم دکتر شجاعی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۰	جیرفت (خانم دکتر محمدی)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	میاندوآب (آقای صمدی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۸	خرم‌آباد (خانم میر)
۰۹۱۹۶۳۵۰۷۶۸	نیشابور (آقای موسوی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۳	رشت (خانم تنها)
۰۹۱۹۵۷۳۳۲۸۴	هرمزگان (آقای زارعی)	۰۹۱۹۶۸۲۹۲۸۰	رفسنجان (آقای یوسفی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۵	همدان (آقای سوری)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۵	زاهدان (آقای مهمان‌دوست)
۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۴	یاسوج (آقای مرتضوی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۱	زنجان (خانم دکتر هوشیار)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۳	یزد (خانم آزاد)	۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۴	ساری (آقای دکتر اکبری)

بانک کتاب ناهید



«هر کتابی، از هر انتشاراتی را از ما بخواهید»

✓ جامع‌ترین بانک کتاب

✓ تحویل روزانه

✓ ارسال به تمامی نقاط کشور

✓ سفارش کتاب به صورت تلفنی و آنلاین

www.NIBS.ir



کتاب دانشگاهی، فنی و مهندسی، علوم پزشکی، علوم انسانی، عمومی،
ادبی، مذهبی، کمک آموزشی، کودک و نوجوان و کتاب نفیس

فروشگاه: تهران - خیابان انقلاب - روبه روی درب اصلی دانشگاه تهران

پاساژ فروزنده - طبقه همکف - پلاک ۳۳۱

تلفن: ۶۶۴۸۹۳۷۵ - ۰۲۱ - ۶۶۴۸۹۳۴۹ - ۰۲۱