

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دعای پیش از مطالعه

اَللّٰهُمَّ اَخْرِجْنِيْ مِنْ ظُلُمَاتِ الْوَهْمِ وَاكْرِمْنِيْ بِنُورِ الْفَهْمِ
اَللّٰهُمَّ افْتَحْ عَلَيْنَا اَبْوَابَ رَحْمَتِكَ وَاَنْشُرْ عَلَيْنَا خَزَائِنَ عُلُوْمِكَ
بِرَحْمَتِكَ يَا اَرْحَمَ الرَّاحِمِيْنَ

پروردگارا، خارج کن مرا از تاریکی های فکر و کرامی بدار به نور فهم
پروردگارا، بکشای بر ما درهای رحمت را و بکستران کنج های دانشت را به امید رحمت
تو ای مهربان ترین مهربانان

بیایید به حقوق دیگران احترام بگذاریم

دوست عزیز، این کتاب حاصل دسترنج چندین ساله ی مؤلف، مترجم و ناشر آن است. تکثیر و فروش آن به هر شکلی بدون اجازه از پدیدآورنده کاری غیراخلاقی، غیرقانونی، غیرشرعی و کسب درآمد از دسترنج دیگران است، نتیجه ی این عمل نادرست، موجب رواج بی اعتمادی در جامعه و بروز پی آمدهای ناگوار در زندگی و محیط ناسالم برای خود و فرزندانمان می گردد.



درسنامه ریاضی

ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی ارگونومی

تألیف و گردآوری:

سیده مریم طاهری . محدثه دلارام . زهرا بیگزاده

«مهندسی بهداشت حرفه‌ای دانشگاه علوم پزشکی تهران»

سرشناسه

: طاهری، سیده مریم، ۱۳۶۹ -

عنوان و نام پدیدآور

: AGK درسنامه ریاضی ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی ارگونومی / تالیف و گردآوری سیده مریم طاهری،

محدثه دلارام، زهرا بیگزاده

مشخصات نشر

: تهران: آناهید گستر خلیلی، ۱۴۰۳.

مشخصات ظاهری

: ۱۸۵ ص.: مصور، جدول؛ ۲۲×۲۹ س.م.

شابک

: 978-622-4907-65-3

یادداشت

: کتابنامه: ص. ۱۸۶.

موضوع

: ریاضیات -- راهنمای آموزشی (عالی)

Mathematics -- Study and teaching (Higher)

ریاضیات -- مسائل و تمرین‌ها و غیره (عالی)

Mathematics -- Problems, exercises, etc. (Higher)

شناسه افزوده

: دلارام، محدثه، ۱۳۶۷ -

شناسه افزوده

: بیگزاده، زهرا، ۱۳۷۱ -

رده‌بندی کنگره

: QA۱۳۹

رده‌بندی دیویی

: ۵۱۰/۷۶

شماره کتابشناسی ملی

: ۹۸۶۸۷۰۷



انتشارات آناهید گستر خلیلی

نام: AGK درسنامه ریاضی

(ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی ارگونومی)

تألیف و گردآوری: سیده مریم طاهری . محدثه دلارام . زهرا بیگزاده

ناشر: آناهید گستر خلیلی

نوبت و سال چاپ: اول. ۱۴۰۳

شمارگان: ۱۰۰۰

چاپ و صحافی: گیلان

مدیر تولید: امیرحسین خلیلی

مدیر فنی و هنری: مریم آرده

تایپ و صفحه‌آرایی: بیتا اندوژفر

بهاء: ۲۵۰۰۰۰ تومان

آموزشگاه/فروشگاه: ۰۲۱۶۶۵۶۸۶۲۱

مرکز پخش: ضلع جنوب غربی میدان انقلاب . جنب بانک پارسیان . مجتمع تجاری پارس . طبقه اول

مدیر فروش: ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ (ارتباط از طریق پیامک)

 agkpublisher@gmail.com

 www.agkins.com

طلیحه سخن مدیر تولید:

سپردن کار به اهلش نشانه‌ی خردمندی است.

برای تولید بسته‌های آموزشی تمام تلاش خود را به کار گرفته‌ایم تا محصولی شایسته را تقدیم شما عزیزان نماییم.

مجموعه‌ای که پیش روی شماست براساس معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور و به قلم مجرب‌ترین اساتید تألیف شده است و مطالعه آن موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه شما خواهد شد.

ارائه بالاترین آمار قبولی در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری در دهه اخیر بیان‌گر توانایی این مجموعه در راستای اهداف آموزشی خود می‌باشد. اینک با اتکا به تجربه‌ای ۱۷ ساله می‌توانیم ادعا کنیم که مجموعه حاضر، بی‌شک از جمله کامل‌ترین و به‌روزترین بسته‌های آموزشی موجود در عرصه کنکور می‌باشد.

❧ برخی از ویژگی‌های بسته‌های آموزشی:

- منطبق با معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور
- گردآوری و تألیف توسط مجرب‌ترین اساتید کنکور
- تدریس مطالب از سطح پایه تا پیشرفته به بیان ساده و روان
- انتقال بهتر مفاهیم با استفاده از شکل، جدول و نمودار
- تألیف مبتنی بر نحوه‌ی طراحی سوالات کنکور
- مطالعه یک منبع منسجم به جای مطالعه چندین منبع مختلف
- منبعی خودآموز و بدون نیاز به مدرس

اینک علاوه بر مطالعه بسته‌های آموزشی استفاده از خدمات و محصولات زیر را به عنوان ضمانتی برای قبولی به شما داوطلبان عزیز توصیه می‌کنم؛

❧ آزمون‌های آزمایشی: خوش بود گر محک تجربه آید به میان

داوطلب شجاع کیست؟ داوطلبی است که خود را مورد سنجش (خود را با خود) و ارزیابی (خود را با دیگران) قرار دهد تا پیش از کنکور به نقاط ضعف خود پی ببرد و آن‌ها را تقویت نماید. آزمون‌های آزمایشی دارای یک برنامه‌ریزی منسجم است و به شما اولتیماتوم می‌دهد. یعنی شما باید در یک زمان معین مطالب معینی را مطالعه نمایید.

آزمون‌های آزمایشی مجموعه دارای سوالات استاندارد، پاسخنامه تشریحی و کارنامه تحلیلی می‌باشد. صادقانه شرکت در آزمون‌های آزمایشی را به شما عزیزان توصیه می‌کنم.

❧ مشاوره تخصصی و برنامه‌ریزی: زیر نظر حرفه‌ای‌ها درس بخوانید ...

در صورتی که نمی‌توانید با توجه به زمان آزادتان برنامه‌ی مطالعاتی استاندارد را برای خود تدوین کنید حتماً از افراد متخصص کمک بخواهید. افرادی که تجربیات خود را صادقانه در اختیار شما قرار می‌دهند و برنامه‌ریزی مناسب با شرایط شما را انجام می‌دهند.

📖 کتاب تست:

کوچک‌ترین واحد یادگیری در کنکور، تست است.

شما می‌توانید برای این‌که سطح یادگیری خود را پس از مطالعه بسنجید از کتاب‌های تست مجموعه (تست کنکور) و ماطراحان (تست‌های تألیفی) استفاده کنید. این کتاب‌ها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده‌اند و می‌توانند نحوه‌ی طرح سوالات کنکور و سطح آن‌ها را به‌صورت واضح به شما نشان دهند.

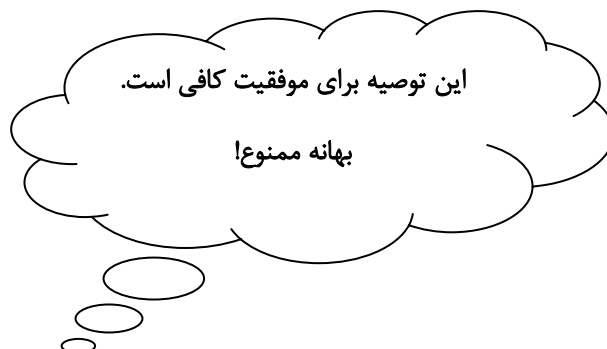
📖 درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم مناسب‌ترین منابع برای دوران مرور و جمع‌بندی:

بیش‌تر داوطلبان حین مطالعه نگران خلاصه‌نویسی و مرور آموخته‌های خود هستند و برای خلاصه‌نویسی زمان زیادی را صرف می‌کنند. اینک به شما مژده می‌دهیم که این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است و دیگر با استفاده از درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم نیاز به خلاصه‌نویسی ندارید.

شما می‌توانید نظرات، انتقادات و پیشنهادهای سازنده خود را در مورد بسته‌های آموزشی به شماره‌تلفن همراه ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ فقط و فقط پیامک نمایید.

مشاور و مدیر تولید

امیرحسین خلیلی



در بین دروس کنکور کارشناسی ارشد ارگونومی، ریاضی و فیزیک از دروسی هستند که جایگاه ویژه‌ای دارد، چرا که تمامی داوطلبان برای دروس اصلی برنامه‌ریزی دارند. اما درصد ریاضی و فیزیک این گروه بسیار پایین است و از آن‌جا که کنکور رقابتی است؛ داوطلبانی که برنامه قوی برای این دروس داشته باشند در کنار درصد قابل قبولی در سایر دروس، می‌توانند موفقیت خود را در کنکور تضمین کنند.

در نتیجه در وهله اول، ذهنیت خود را نسبت به دروس ریاضی و فیزیک تغییر دهید و به‌جای ناامید شدن و کنار گذاشتن دروس مهمی چون ریاضی و فیزیک، سعی کنید روی مباحث پرتکرار و مهم آن خوب سرمایه‌گذاری کنید و آینده خود را تغییر دهید.

این درسنامه کاملاً منطبق به نیازهای یک داوطلب کنکور ارشد ارگونومی نگاشته شده و ۹۰٪ مباحث ریاضی را پوشش داده است.

لذا با مطالعه این درسنامه و مرور سوالات ریاضی سال‌های گذشته امید است بتوانید درصد بالایی از سوالات را پاسخ دهید.

با آرزوی موفقیت روزافزون شما

زهره بیگزاده

فهرست مطالب

صفحه

فصل و عنوان

فصل اول: توابع و معادلات.....	۹
فصل دوم: حد و پیوستگی.....	۳۵
فصل سوم: مشتق.....	۸۱
فصل چهارم: کاربرد مشتق (نقاط بحرانی، نقاط اکسترمم نسبی و مطلق).....	۱۱۰
فصل پنجم: انتگرال.....	۱۴۷
فصل ششم: دنباله‌های نامتناهی و سری‌های نامتناهی.....	۱۷۵
فصل هفتم: ماتریس.....	۱۸۰
منابع.....	۱۸۵

مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که دو عضو متفاوت آن دارای مؤلفه‌های یکسان نباشند، تابع نامیده می‌شود. به عبارت دیگر اگر زوج‌های مرتب (x, y) و (x, y') متعلق به تابع f باشند داریم:

$$(x, y'), (x, y) \in f \Rightarrow y = y'$$

تذکر: این بدان معنی است که اگر دو زوج مرتب که دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند باید مؤلفه‌های دوم آن نیز با هم برابر باشند.

مثال ۱: به ازای کدام مقدار a ، $f = \{(1, 2), (a, 2), (4, 0), (4, a^2 - 1)\}$ ضابطه‌ی یک تابع است؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad -1$$

$$(3) \quad 1 \text{ یا } -1 \quad (4) \quad \text{صفر}$$

پاسخ: گزینه (۲)

$$a^2 - 1 = 0 \rightarrow a = \pm 1$$

اگر $a = 1$ به آن‌گاه $(1, 2) \in f$ و $(1, 3) \in f$ که در این صورت f تابع نمی‌باشد، بنابراین فقط $a = -1$ قابل قبول است در نتیجه گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۲: به ازای کدام مقدار a رابطه زیر بیانگر یک تابع است؟

$$f = \{(2, 5), (3, -1), (2a + 4, 5), (6, 7)\}$$

$$(1) \quad a \in \{-1\} \quad (2) \quad a \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

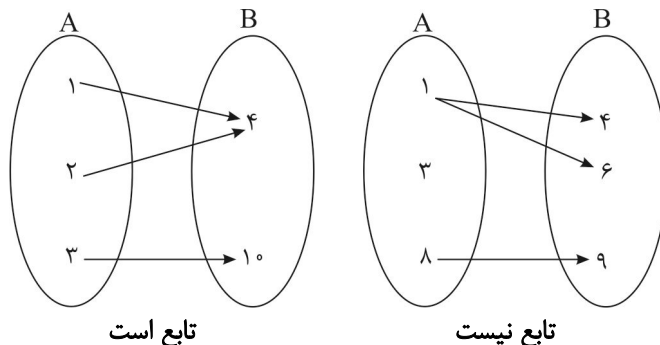
$$(3) \quad a \in \{-\frac{1}{4}, 1\} \quad (4) \quad a \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{4}, 1\}$$

پاسخ: گزینه (۴)

نمایش‌های گوناگون یک تابع

۱. تابع از دید نمودار پیکانی

در نمودار پیکانی تابع، از هر عضو مجموعه‌ی اول نایبستی بیش از یک پیکان خارج شود.



۲. تابع از دید نمودار مختصاتی

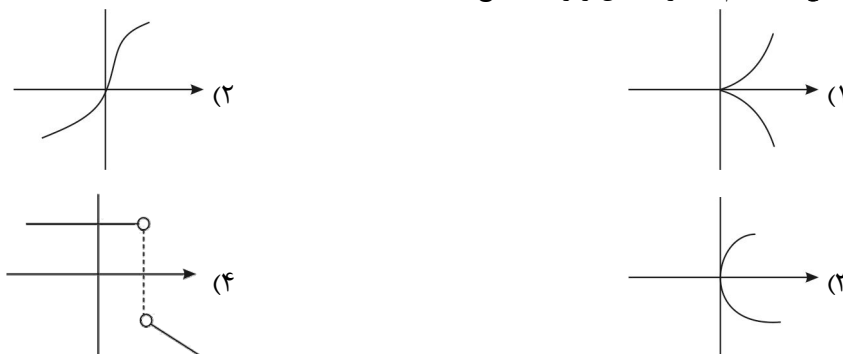
در نمودار مختصاتی تابع، هر خط موازی محور y ها نایبستی نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

۳. تابع از دید ضابطه

هرگاه ضابطه‌ی رابطه‌ی f مفروض باشد برای تشخیص تابع بودن آن با استفاده از ضابطه، y را بر حسب x به دست می‌آوریم. اگر به ازای هر x یک y حاصل شود، ضابطه‌ی یک تابع است و در غیر این صورت تابع نیست (x متغیر و y تابع است).

۱۰

مثال ۱: کدامیک از اشکال زیر یک تابع است؟



پاسخ: گزینه (۲)

برای تشخیص تابع از روی نمودار باید یک خط موازی محور y ها رسم کنیم که این خط باید حداکثر نمودار را در یک نقطه قطع کند بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مثال ۲: کدامیک از روابط زیر یک تابع است؟

۱) $y^2 - 2y + 1 = \cos x$

۲) $5x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 4 = 0$

پاسخ: از روابط اتحاد استفاده کرده و y را به دست می‌آوریم.

۱) $y^2 - 2y + 1 = \cos x$

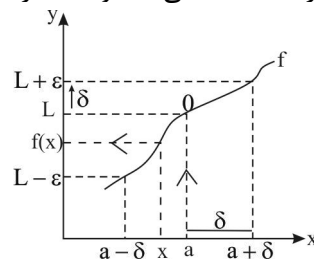
$(y-1)^2 - \cos x \rightarrow y = 1 \pm \sqrt{\cos x} \xrightarrow{x=0} y = 2, y = 0$

به ازای $x = 0$ دو مقدار $y = 0$ و $y = 2$ به دست آمده لذا رابطه‌ی فوق تابع نیست.

۲) $5x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 4 = 0$

قسمت اول: تعریف دقیق حد

به نمودار زیر دقت کنید در این نمودار تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده است.



حالا فرض کنید به ازای هر همسایگی متقارن غیرمحذوف بر مرکز L و شعاع ϵ ، بتوانیم حداقل یک همسایگی متقارن محذوف بر مرکز a و شعاع δ پیدا کنیم، به طوری که x هایی که داخل این همسایگی قرار می گیرند، مقادیر تابع به ازای آن ها داخل همسایگی به مرکز L و شعاع ϵ قرار گیرد.

براساس تعریف هرگاه تابعی دارای چنین ویژگی باشد، می گویند: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. این مطلب به زبان ریاضی به

این صورت است:

اگر تابع f به یک همسایگی محذوف $x = a$ تعریف شده باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

منظور از $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن است که بتوانیم به هر اندازه‌ی دلخواه، $f(x)$ را به L نزدیک کنیم به شرط آن که x را

به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

نمودار تابع f در $x = a$ ناپیوسته است زیرا تعریف شدن یا نشدن f در a هیچ تأثیری در داشتن حد تابع f در این نقطه ایجاد نمی کند، بلکه مهم آن است که تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شود.

روش حل مسائل تعریف دقیق حد تابع

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد و بخواهیم δ مناسبی پیدا کنیم، برای آن که تعریف دقیق حد برقرار باشد، ابتدا تعریف دقیق حد را به صورت:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

می‌نویسیم و با ساده کردن $|f(x) - L| < \varepsilon$ خودمان را به $|x - a| < g(\varepsilon)$ می‌رسانیم و بنابراین مقادیر قابل قبول $\delta \leq g(\varepsilon)$ عبارت است از:

مثال ۱: در تابع $f(x) = \frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)}$ بیش‌ترین مقدار δ برای آن که: اگر $0 < |x-2| < \delta$

آن گاه $|f(x) - 5| < \frac{4}{1000}$ چقدر است؟

$$\frac{1}{1000} \quad (۴) \qquad \frac{1}{250} \quad (۳) \qquad \frac{1}{500} \quad (۲) \qquad \frac{1}{100} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه (۲)

ریشه‌ی داخل قدر مطلق $|x-2|$ یعنی $x=2$ همان a و ریشه‌ی داخل قدر مطلق $|f(x)-5|$ یعنی 5 همان L است. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ پس:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - 2| < \delta \rightarrow \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \xrightarrow{|x-2| > 0 \rightarrow x \neq 2} \left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$|(2x+1) - 5| < \varepsilon \rightarrow |2x-4| < \varepsilon \rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\xrightarrow{|x-2| < \delta} \delta \leq \frac{\varepsilon}{2} \xrightarrow[\varepsilon = \frac{4}{1000}]{\text{براساس اطلاعات تست}} \delta \leq \frac{4}{2000} \rightarrow \delta \leq \frac{1}{500}$$

پس کافی است که $\delta \leq \frac{1}{500}$ باشد تا از $|x-2| < \delta$ نتیجه بگیریم که $|f(x)-5| < \frac{4}{1000}$ است. بنابراین بیش‌ترین

مقدار δ عبارت است از: $\frac{1}{500}$.

برای توضیح بیش‌تر فرض کنید $\delta = \frac{1}{1000} < \frac{1}{500}$ داریم: پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$\text{اگر } |x-2| < \frac{1}{1000} \rightarrow |2x-4| < \frac{1}{500} \rightarrow |(2x+1)-5| < \frac{1}{500} \rightarrow |f(x)-5| < \frac{4}{1000}$$

مثال ۲: اگر از $|x + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ نتیجه حاصل شود که $\left| \frac{4x^2-1}{2x+1} + 2 \right| < \frac{1}{2}$ ، آن گاه کم‌ترین مقدار ε کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۱) \qquad \frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۳) \qquad \text{نمی‌توان تعیین کرد.} \quad (۴)$$

مشتق یکی از مهم‌ترین مفاهیم ریاضی است. به‌وسیله مشتق می‌توان برخی از مفاهیم فیزیکی (مانند سرعت و شتاب) با تعاریف ریاضی بیان نمود. یک تابع را در نقطه‌ای مانند x مشتق‌پذیر گویند اگر در آن نقطه، مشتق موجود باشد و برای مشتق‌پذیری تابع در یک بازه لازم است تابع در هر نقطه دلخواه از بازه مشتق‌پذیر باشد.

فرمول‌های مشتق‌گیری توابع جبری

تابع	مشتق توابع
a عدد ثابت	0
ax^n	anx^{n-1}
u	u'
v	v'
uv	$u'v + v'u$
مثال: $(x^3 - 2)(x^4 + x)$	$3x^2(x^4 + x) + (4x^3 + 1)(x^3 - 2)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
مثال: $\frac{(x^2 - x)^4}{(x^2 + 1)^5}$	$\frac{4(2x - 1)(x^2 - x)^3(x^2 + 1)^5 - 5(2x)(x^2 + 1)^4(x^2 - x)^4}{(x^2 + 1)^{10}}$
u^m	$mu'u^{m-1}$
$(4x^3 - x^2)^8$	$8(12x^2 - 2x)(4x^3 - x^2)^7$

تابع	مشتق توابع
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sqrt{x^3 - 3x}$	$\frac{3x^2 - 3}{2\sqrt{x^3 - 3x}}$
$\sqrt[p]{u^m}$	$\frac{mu'}{p\sqrt[p]{u^{p-m}}}$
$\sqrt[6]{(x^3 - 2x)^5}$	$\frac{5(3x^2 - 2)}{6\sqrt[6]{(x^3 - 2x)^5}}$
$\sqrt[4]{x^3}$	$\frac{3}{4\sqrt[4]{x^4}}$

فرمول‌های مشتق‌گیری توابع مثلثاتی

تابع	مشتق تابع
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
tgu	$u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$
$\cot gu$	$-u'(1 + \cot^2 g^2 u)$
$\sin \sqrt{x}$: مثال	$\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$
$\cot g(\sin x)$	$-\cos(1 + \cot^2 g(\sin x))$
$\sin^m u$	$mu' \cos u \sin^{m-1} u$
$\cos^m u$	$-mu' \sin u \cos^{m-1} u$
$\cot g^m u$	$-mu'(1 + \cot^2 g^2 u) \cot g^{m-1} u$
$\cos^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}$: مثال	$\frac{-\frac{1}{2}}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} \cos^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}$
$\cot g^2(x^2 + 3x)$	$-3(2x + 3)(1 + \cot^2 g^2(x^2 + 3x)) \cot g^2(x^2 + 3x)$
$\frac{1}{\cos u} = \sec u$	$u' \cdot \operatorname{tgu} \cdot \sec u$
$\frac{1}{\sin u} = \csc u$	$-u' \cdot \cot gu \cdot \csc u$
$\operatorname{tg}^m u$	$mu'(1 + \operatorname{tg}^2 m) \operatorname{tg}^{m-1} u$
$\csc \sqrt[3]{x^2}$: مثال	$-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cot g(\sqrt[3]{x^2}) \csc \sqrt[3]{x^2}$

کاربرد مشتق

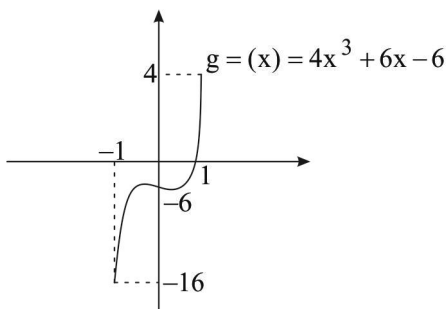
(نقاط بحرانی، نقاط اکسترمم نسبی و مطلق)

تعریف نقطه بحرانی

نقطه $C \in D$ را نقطه بحرانی تابع f گوییم، هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. پس برای تعیین نقاط بحرانی یک تابع، از آن مشتق می‌گیریم و نقاطی که مشتق صفر می‌شود، یا وجود نداشته باشد را می‌یابیم، البته حواسمان هست که این نقاط باید جزو دامنه تابع باشند. مثال ۱: تعداد نقاط بحرانی توابع زیر را تعیین کنید.

$$1) x^4 + 3x^2 - 6x + 1, [-1, 1]$$

پاسخ: در $x = -1$ و $x = 1$ (کرانه‌های دامنه‌ی تابع) مشتق یک‌طرفه وجود دارد. یعنی تابع در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. پس تا این‌جا دو تا نقطه بحرانی داریم حال به سراغ ریشه‌های $y' = 0$ می‌رویم، $y' = 4x^3 + 6x - 6$ ، اما حل این معادله در وقت و حوصله کنکور، کار ما نیست پس فقط با استفاده از نمودار آن سعی می‌کنیم تعداد ریشه‌های $y' = 0$ را معلوم کنیم تابع $g(x) = 4x^3 + 6x - 6$ صعودی اکید است، زیرا مشتق آن همواره مثبت است، یعنی $g'(x) = 12x^2 + 6 > 0$. پس محور x ها را به‌صورت مقابل در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع مزبور در بازه $[-1, 1]$ دارای سه نقطه بحرانی است، در یک نقطه در بازه $(0, 1)$ مشتقش صفر است و در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ مشتقش وجود ندارد.



$$۲) y = x^2 + |x|$$

پاسخ: ابتدا تابع را بدون قدر مطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 0 \\ x^2 - x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{f'(x)=0}$$

$$\begin{cases} 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} & x > 0 \\ 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} & x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{غ. ق. ق.} \\ \text{غ. ق. ق.} \end{matrix}$$

پس $f'(x) = 0$ با توجه به دامنه ضوابط، فاقد ریشه است، حال باید ببینیم که مشتق در چه نقاطی وجود ندارد. بله، فقط در $x = 0$ ($f'_-(0) \neq f'_+(0)$) یادتان هست که در تابع $|x - a|$ ، $x = a$ نقطه مشتق‌ناپذیر تابع هست.

ریشه‌های مرتبه یک درون قدر مطلق‌ها، نقاط مشتق‌ناپذیر تابع هستند.

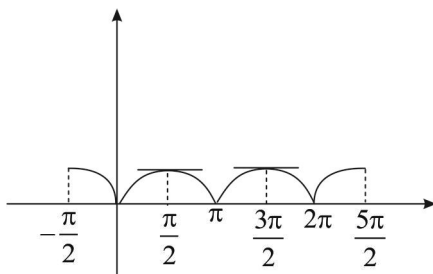
پس این تابع فقط یک نقطه بحرانی $x = 0$ را دارد.

$$۳) y = |\sin x|, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$$

پاسخ: چون ترسیم نمودار تابع در بازه مزبور خیلی ساده است، بهتر است با استفاده از نمودار، نقاط بحرانی را تعیین

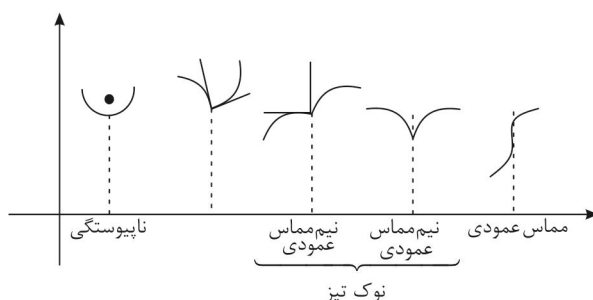
کنیم: همان‌طور که می‌بینید، تابع در $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ مماس افقی دارد، یعنی مشتق مساوی صفر است و در 0 و π و 2π فاقد

مشتق است (این نقاط، نقاط زاویه‌دار تابع هستند که در ادامه بیش‌تر به آن‌ها پرداخته می‌شود)، یعنی این تابع در بازه مزبور دارای پنج نقطه بحرانی است.



✚ اگر نمودار تابع f در $x = a$ ، ناپیوستگی، نوک تیز یا مماس یا نیم‌مماس عمودی داشته باشد، تابع f در نقطه مزبور مشتق‌ناپذیر است.

تابع f در هیچ‌کدام از نقاط زیر مشتق‌پذیر نیست.



انتگرال مشتق و انتگرال دیفرانسیل

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، از انتگرال یک تابع برای عمومیت دادن به محاسبه مساحت، حجم، جرم یک تابع استفاده می‌شود. فرآیند پیدا کردن جواب انتگرال را انتگرال گیری گویند.

$$\int f'(x)dx = f(x) + c \quad \text{الف}$$

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + c \quad \text{ب}$$

فکر نمی‌کنم نیاز به هیچ توضیح اضافی باشد، موضوع به روشنی آفتاب است! درواقع (الف) همان تعریف انتگرال نامعین است که ما به صورت $\int f(x)dx = F(x) + c$ نمایش دادیم. یادتان هست که $F'(x) = f(x)$ ، یعنی $\int F'(x)dx = f(x) + c$ خب حالا ما اسم F را به f تبدیل کردیم همین!

مثال ۱: اگر $f'(x) = g'(6-3x)$ و $f(2) = g(0) = 3$ ، آن گاه $g(6-3x)$ بر حسب $f(x)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 3f(x) - 12 & (۱) & -3f(x) - 12 & (۲) \\ -3f(x) + 12 & (۳) & -3f(x) & (۴) \end{array}$$

پاسخ: گزینه (۳)

این بار از طرفین رابطه ارائه شده انتگرال می‌گیریم:

$$\int f'(x)dx = \int g'(6-3x)dx \Rightarrow f(x) = \int g'(6-3x)dx$$

حال با $\int g'(6-3x)dx$ چه کار کنیم. حال این انتگرال مساوی تابعی است که اگر از آن مشتق بگیریم $g'(6-3x)$ حاصل شود.

نظرتان راجع به $-\frac{1}{3}g(6-3x) + c$ چیست؟

$$\left[-\frac{1}{3}g(6-3x) + c \right]' = g'(6-3x) \Rightarrow \int g'(6-3x)dx = -\frac{1}{3}g(6-3x) + c$$

پس:

$$f(x) = \int g'(6-3x)dx = -\frac{1}{3}g(6-3x) + c \xrightarrow{x=2} f(2) = -\frac{1}{3}g(0) + c$$

$$\xrightarrow{f(2)=g(0)=2} 2 = -\frac{1}{3} \times 3 + c \Rightarrow \boxed{c=4}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

$$\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b) + c$$

اثبات: مشتق سمت راست، همان $f'(ax+b)$ است.

اگر این فرمول را از قبل می‌دانستیم، در تست قبل سرعت بیش‌تری داشتیم و بی‌درنگ می‌توانستیم پاسخ دهیم که:

$$\int g'(6-3x)dx = -\frac{1}{3}g(6-3x) + c$$

مثال ۲: اگر $f(ax+b) = \int 2f'(ax-3)dx$ ، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) -۱

پاسخ: گزینه (۱)

براساس آن‌چه گفته شد، $\int f'(ax+3)dx = \frac{1}{a}f(ax+3) + c$ ، بنابراین:

$$f(ax+b) = \int 2f'(ax-3)dx = 2 \left[\frac{1}{a}f(ax-3) + c \right] \Rightarrow f(ax+b) = \frac{2}{a}f(ax-3) + 2c$$

بایستی $\frac{2}{a}=1$ و $b=-3$ و $2c=0$ باشد، یعنی $a=2$ ، $b=-3$ ، $c=0$ و در نتیجه $a+b=-1$ ، یعنی گزینه‌ی (۱)

صحیح است.

روش دوم: البته می‌توانستیم این تست را از همان روش سابق یعنی گرفتن مشتق از طرفین نیز حل کرد.

$$(f(ax+b))' = (\int 2f'(ax-3)dx)' \Rightarrow af'(ax+b) = 2f'(ax-3) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1$$

به نظر راه مشتق‌گیری ساده‌تر بود.

روش‌های انتگرال‌گیری

فرمول‌های اصلی انتگرال‌گیری همراه با مثال

(۱)

$$\int 6x\sqrt{3x^2+5}dx, u=3x^2+5$$

$$du=6xdx$$

حل:

$$\int 6x\sqrt{3x^2+5}dx = \int \sqrt{3x^2+5} \cdot 6xdx = \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \rightarrow \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

پس:

$$\int 6x\sqrt{3x^2+5}dx = \frac{2}{3}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}} + c$$

دنباله‌های نامتناهی و سری‌های نامتناهی

دنباله‌های نامتناهی و سری‌های نامتناهی

دنباله‌ای از اعداد، تابعی است که دامنه‌اش مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت است. مقدار تابع در نقطه $x = n$ را معمولاً با a_n نمایش می‌دهیم و آن را جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامیم.

مثال

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

دنباله‌ی اعداد صحیح زوج

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$$

- دنباله‌ی عکس اعداد صحیح مثبت

دنباله‌ها مانند توابع دیگر با قاعده‌هایی تعریف می‌شوند.

مجموعه‌ی اعداد	قاعده‌ی دنباله
$0, 1, 2, \dots, n-1$	$a_n = n-1$
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$	$a_n = \frac{1}{n}$
$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$	$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$
$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}$	$a_n = \frac{n-1}{n}$
$0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots, (-1)^{n+1} \left(\frac{n-1}{n}\right)$	$a_n = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)}{n}$
$3, 3, \dots, 3$	$a_n = 3$

- ✓ نماد دنباله‌ای را که جمله‌ی n ام آن a_n است به صورت دنباله‌ی $\{a_n\}$ بیان می‌کنیم.
- ✓ دنباله‌ی a_n را صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر n داشته باشیم $a_{n+1} > a_n$ و یا حذف علامت تساوی تعریف اکیداً صعودی به دست می‌آید.
- ✓ دنباله‌ی a_n را نزولی می‌نامیم هرگاه برای هر n داشته باشیم $a_{n+1} \leq a_n$ و با حذف علامت تساوی تعریف نزولی اکیداً به دست می‌آید.
- ✓ دنباله‌ی a_n را یکنوا می‌نامیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

بررسی یکنوایی دنباله‌ها

۱. قرار می‌دهیم $L = a_{n+1} - a_n$.
اگر $L \geq 0$ باشد دنباله صعودی و اگر $L \leq 0$ باشد دنباله نزولی است.
۲. اگر جملات دنباله a_n علامت ثابت داشته باشند قرار می‌دهیم $L = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
الف) اگر $a_n > 0$ و $L \geq 1$ باشد آن‌گاه دنباله صعودی است و اگر $L \leq 1$ باشد آن‌گاه دنباله نزولی است.
ب) اگر $a_n < 0$ و $L \geq 1$ باشد آن‌گاه دنباله نزولی است و اگر $L \leq 1$ باشد آن‌گاه دنباله صعودی است.

همگرایی یا واگرایی دنباله

دنباله $\{a_n\}$ به حد L همگراست اگر به هر عدد مثبت ε یک اندیس N نظیر شود به طوری که:

$$\forall n > N \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

برای بررسی همگرایی دنباله، حد دنباله را در بی‌نهایت بررسی می‌کنیم، اگر این حد عدد منحصر به فرد شود، دنباله همگراست.

۱۷۶

- ✓ در محاسبه همگرایی دنباله می‌توانیم از هم‌ارزی حد در بی‌نهایت استفاده کنیم.

$$\sqrt{n^2 + an} \approx n + \frac{a}{2} \quad n^2 + 2n \approx n^2$$

- ✓ برای بررسی واگرایی یک دنباله سه حالت کلی را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \text{مثال: } \{n^2\} : \text{حد } 1) \\ \text{مثال: } \{(-1)^n\} : \text{حد } 2) \text{ دو یا چند عدد} \\ \text{مثال: } \{\sin n\} : \text{حد } 3) \text{ عددی سرگردان} \end{cases}$$

- ✓ در محاسبه‌ی حد دنباله‌ی $\{c^n\}$ حالت‌های زیر را داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \begin{cases} \infty, & |c| > 1 \rightarrow \{2^n\} \\ 0, & |c| < 1 \rightarrow \{(\log 2)^n\} \\ (-1)^n, & c = -1 \rightarrow \{(-1)^n\} \\ 1, & c = 1 \end{cases}$$

مثال ۱:

دنباله‌ی $a_n = n - 1$ ، واگراست:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n - 1 = \infty$$

دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{n}$ همگراست:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ جدول مستطیلی از اعداد شامل m سطر و n ستون است که به صورت زیر آن را نمایش می‌دهیم.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} عنصر سطر i ام است و ستون j ام است را درایه‌های i و j ام ماتریس A می‌نامیم.

ماتریس‌های مساوی: دو ماتریس را مساوی گویند هرگاه مرتبه‌های آن‌ها با هم برابر باشد و درایه‌های متناظر آن‌ها با هم مساوی باشد.

انواع ماتریس

ماتریس مربعی: ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن‌ها با هم برابر باشد.

مثال ۱:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

ماتریس سطری: ماتریسی است که یک سطر دارد.

ماتریس ستونی: ماتریسی است که یک ستون دارد.

ماتریس $|x|$: ماتریسی است که فقط یک عضو دارد.

ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد.

ماتریس واحد (یکه یا همانی): ماتریسی است مربعی که عضوهای قطر اصلی آن همگی برابر با یک و بقیه عضوهای

آن برابر صفر باشد و آن را با I نشان می‌دهند.

ماتریس قرینه: اگر ماتریسی را در عدد -1 ضرب کنیم قرینه آن ماتریس به دست می‌آید به عبارت دیگر قرینه یک

ماتریس، ماتریسی است که عضوهای آن قرینه عضوهای ماتریس اصلی باشند.

ماتریس قطری: ماتریسی است مربعی که قطر اصلی آن اعداد حقیقی بوده و سایر اعضای آن برابر صفر باشد.

ماتریس عددی یا اسکالر: ماتریسی است قطری که عضوهای قطر اصلی آن برابر باشند.

ماتریس بالامثلثی: ماتریسی مربعی که همه‌ی درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر هستند.

ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر هستند.

اثر (تریس)، ماتریس: در هر ماتریس مربعی مجموع عناصر واقعی بر قطر اصلی را اثر (تریس) A نامیده و با $\text{tr}A$

نمایش می‌دهیم.

✓ اگر A بالا مثلثی باشد A^T پایین مثلثی خواهد بود.

✓ اگر A پایین مثلثی باشد A^T بالا مثلثی خواهد بود.

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \checkmark$$

✓ اگر λ اسکالر باشد $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \checkmark$$

$$(A^T)^T = A \quad \checkmark$$

ماتریس متعامد: اگر در ماتریس مربعی A داشته باشیم $AA^T = A^T A = I$ به آن ماتریس متعامد می‌گویند.

ماتریس متقارن: اگر در ماتریس‌های سطرها و ستون‌ها عوض شود ماتریس تغییر نکند ماتریس متقارن گویند

به عبارت دیگر ماتریسی متقارن است که $A = A^t$

ماتریس پاد متقارن: ماتریسی که عناصر متقارن نسبت به قطر اصلی یکدیگر باشند به عبارت دیگر $A = -A^t$

اگر A یک ماتریس مربعی باشد آن را به صورت یکتا به شکل مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن

می‌توان نوشت.

۱۸۱

$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$$

اعمال جبری روی ماتریس‌ها

جمع: اگر A و B دو ماتریس از مرتبه $m \times n$ باشند، جمع آن‌ها ماتریسی $m \times n$ است که درایه‌های آن‌ها نظیر به

نظیر با هم جمع می‌شوند.

مثال ۱:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+4 & 3+6 \\ 4+3 & 5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

تفریق: اگر A و B دو ماتریس از مرتبه $m \times n$ باشند، تفاضل آن‌ها ماتریسی $m \times n$ است.

مثال ۲:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 4-2 & 6-3 \\ 5-1 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ضرب اسکالر (عدد) در ماتریس: ضرب یک ماتریس در یک عدد، ساده است به این ترتیب که عدد در تک‌تک

درایه‌های ماتریس ضرب می‌شود.

مثال ۳:

$$2 \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -18 \end{bmatrix}$$

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

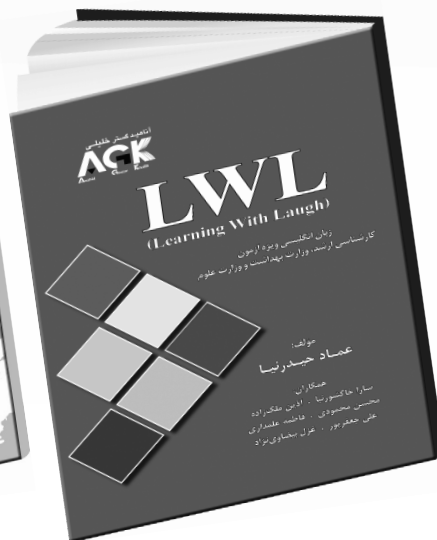
جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

شماره تماس با نمایندگی‌های فعال و رسمی آناهید گستر خلیلی

شماره تماس	نمایندگی	شماره تماس	نمایندگی
۰۹۱۰۱۷۱۱۸۷۲	سبزوار (آقای شریفان)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۵۰	اراک (آقای حسینی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۱	شاهرود (آقای سلمانی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۸	اردبیل (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۹	شهرکرد (خانم تقی‌پور)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۱	ارومیه (آقای آرمیون)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	شیراز (آقای فروردین / خانم هوشمندی)	۰۹۱۹۶۳۲۱۸۵۲	اسفراین (خانم اسماعیل‌زاده)
۰۹۱۹۳۷۱۳۷۴۲	فسا (خانم شعبانی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۰	اصفهان (آقای کیانی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۹	قزوین (خانم چگینی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۴	اهواز (آقای دکتر رضازاده)
۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۷۱	کرج (آقای دکتر علیرضاپور)	۰۹۱۹۰۹۸۰۳۱۸	ایلام (آقای دکتر بوچانی)
۰۹۱۳۱۹۸۱۲۷۰	کرمان (خانم ضمانتی‌یار)	۰۹۱۹۶۸۵۳۱۱۶	بروجرد (آقای احمدی‌صدر)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کرمانشاه (آقای ابراهیمی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۹	بم (خانم سرحدی‌نژاد)
۰۹۱۹۵۳۷۱۸۹۰	کوهدشت (خانم یاریان)	۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۳	بیرجند (آقای دکتر بهروان)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۷	گرگان (آقای شاه‌علی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۷	تبریز (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	مراغه (آقای صمدی)	۰۹۰۱۳۷۳۷۸۹۶	جهرم (آقای یاعلی جهرمی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۴	مشهد (خانم دکتر شجاعی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۰	جیرفت (خانم دکتر محمدی)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	میاندوآب (آقای صمدی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۸	خرم‌آباد (خانم میر)
۰۹۱۹۶۳۵۰۷۶۸	نیشابور (آقای موسوی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۳	رشت (خانم تنها)
۰۹۱۹۵۷۳۳۲۸۴	هرمزگان (آقای زارعی)	۰۹۱۹۶۸۲۹۲۸۰	رفسنجان (آقای یوسفی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۵	همدان (آقای سوری)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۵	زاهدان (آقای مهمان‌دوست)
۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۴	یاسوج (آقای مرتضوی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۱	زنجان (خانم دکتر هوشیار)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۳	یزد (خانم آزاد)	۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۴	ساری (آقای دکتر اکبری)

بانک کتاب ناهید



«هر کتابی، از هر انتشاراتی را از ما بخواهید»

✓ جامع‌ترین بانک کتاب

✓ تحویل روزانه

✓ ارسال به تمامی نقاط کشور

✓ سفارش کتاب به صورت تلفنی و آنلاین

www.NIBS.ir



کتاب دانشگاهی، فنی و مهندسی، علوم پزشکی، علوم انسانی، عمومی،
ادبی، مذهبی، کمک آموزشی، کودک و نوجوان و کتاب نفیس

فروشگاه: تهران - خیابان انقلاب - روبه روی درب اصلی دانشگاه تهران

پاساژ فروزنده - طبقه همکف - پلاک ۳۳۱

تلفن: ۶۶۴۸۹۳۷۵ - ۰۲۱ - ۶۶۴۸۹۳۴۹ - ۰۲۱