

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دعای پیش از مطالعه

اَللّٰهُمَّ اَخْرِجْنِيْ مِنْ ظُلُمَاتِ الْوَهْمِ وَاكْرِمْنِيْ بِنُورِ الْفَهْمِ
اَللّٰهُمَّ افْتَحْ عَلَيْنَا اَبْوَابَ رَحْمَتِكَ وَاَنْشُرْ عَلَيْنَا خَزَائِنَ عُلُوْمِكَ
بِرَحْمَتِكَ يَا اَرْحَمَ الرَّاحِمِيْنَ

پروردگارا، خارج کن مرا از تاریکی های فکر و گرامی بدار به نور فهم
پروردگارا، بگشای بر ما در های رحمت را و بگستران کنج های دانشت را به امید رحمت
تو ای مهربان ترین مهربانان

بیایید به حقوق دیگران احترام بگذاریم

دوست عزیز، این کتاب حاصل دسترنج چندین ساله ی مؤلف، مترجم و ناشر آن است. تکثیر و فروش آن به هر شکلی بدون اجازه از پدیدآورنده کاری غیراخلاقی، غیرقانونی، غیرشرعی و کسب درآمد از دسترنج دیگران است، نتیجه ی این عمل نادرست، موجب رواج بی اعتمادی در جامعه و بروز پی آمدهای ناگوار در زندگی و محیط ناسالم برای خود و فرزندانمان می گردد.



درسنامه سیستم‌ها و سیگنال‌ها

ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی پزشکی «بیوالکتریک»

تألیف و گردآوری:

امین ابوطالبی

سرشناسه

: ابوطالبی، امین، ۱۳۶۴-، گردآورنده

عنوان و نام پدیدآور

: AGK درسنامه سیستم‌ها و سیگنال‌ها: ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی پزشکی «بیوالکتریک»/

تألیف و گردآوری امین ابوطالبی

مشخصات نشر

: تهران: آناهید گستر خلیلی، ۱۴۰۴.

مشخصات ظاهری

: ۳۴۷ص: جدول، نمودار؛ ۲۹×۲۲ س.م.

شابک

: 978-622-4907-76-9

وضعیت فهرست‌نویسی

: فیپا

موضوع

: تجزیه و تحلیل سیستم‌ها -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

System analysis -- Study and teaching -- Examinations, questions (Higher)

مهندسی پزشکی -- راهنمای آموزشی -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (عالی)

Biomedical engineering -- Study and teaching -- Examinations, questions, etc (Higher)

رده‌بندی کنگره

: QA۴۰۲

رده‌بندی دیویی

: ۶۲۱/۳۸۲۲۳

شماره کتابشناسی ملی

: ۹۹۰۲۸۴۸



انتشارات آناهید گستر خلیلی

نام: AGK درسنامه سیستم‌ها و سیگنال‌ها

(ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی پزشکی «بیوالکتریک»)

تألیف و گردآوری: امین ابوطالبی

ناشر: آناهید گستر خلیلی

نوبت و سال چاپ: اول. ۱۴۰۴

شمارگان: ۱۰۰۰

چاپ و صحافی: گیلان

مدیر تولید: امیرحسین خلیلی

مدیر فنی و هنری: مریم آرده

تایپ و صفحه‌آرایی: آرزو راضی

بهاء: ۴۵۰۰۰۰ تومان

آموزشگاه/فروشگاه: ۰۲۱۶۶۵۶۸۶۲۱

مرکز پخش: ضلع جنوب غربی میدان انقلاب . جنب بانک پارسیان . مجتمع تجاری پارس . طبقه اول

مدیر فروش: ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ (ارتباط از طریق پیامک)

 agkpublisher@gmail.com

 www.agkins.com

طلیحه سخن مدیر تولید:

سپردن کار به اهلش نشانه‌ی خردمندی است.

برای تولید بسته‌های آموزشی تمام تلاش خود را به کار گرفته‌ایم تا محصولی شایسته را تقدیم شما عزیزان نماییم.

مجموعه‌ای که پیش روی شماست براساس معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور و به قلم مجرب‌ترین اساتید تألیف شده است و مطالعه آن موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه شما خواهد شد. ارائه بالاترین آمار قبولی در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری در دهه اخیر بیان‌گر توانایی این مجموعه در راستای اهداف آموزشی خود می‌باشد. اینک با اتکا به تجربه‌ای ۱۷ ساله می‌توانیم ادعا کنیم که مجموعه حاضر، بی‌شک از جمله کامل‌ترین و به‌روزترین بسته‌های آموزشی موجود در عرصه کنکور می‌باشد.

❧ برخی از ویژگی‌های بسته‌های آموزشی:

- منطبق با معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور
- گردآوری و تألیف توسط مجرب‌ترین اساتید کنکور
- تدریس مطالب از سطح پایه تا پیشرفته به بیان ساده و روان
- انتقال بهتر مفاهیم با استفاده از شکل، جدول و نمودار
- تألیف مبتنی بر نحوه‌ی طراحی سوالات کنکور
- مطالعه یک منبع منسجم به جای مطالعه چندین منبع مختلف
- منبعی خودآموز و بدون نیاز به مدرس

اینک علاوه بر مطالعه بسته‌های آموزشی استفاده از خدمات و محصولات زیر را به عنوان ضمانتی برای قبولی به شما داوطلبان عزیز توصیه می‌کنم؛

❧ آزمون‌های آزمایشی: خوش بود گر محک تجربه آید به میان

داوطلب شجاع کیست؟ داوطلبی است که خود را مورد سنجش (خود را با خود) و ارزیابی (خود را با دیگران) قرار دهد تا پیش از کنکور به نقاط ضعف خود پی ببرد و آن‌ها را تقویت نماید. آزمون‌های آزمایشی دارای یک برنامه‌ریزی منسجم است و به شما اولتیماتوم می‌دهد. یعنی شما باید در یک زمان معین مطالب معینی را مطالعه نمایید.

آزمون‌های آزمایشی مجموعه دارای سوالات استاندارد، پاسخنامه تشریحی و کارنامه تحلیلی می‌باشد. صادقانه شرکت در آزمون‌های آزمایشی را به شما عزیزان توصیه می‌کنم.

❧ مشاوره تخصصی و برنامه‌ریزی: زیر نظر حرفه‌ای‌ها درس بخوانید ...

در صورتی که نمی‌توانید با توجه به زمان آزادتان برنامه‌ی مطالعاتی استاندارد را برای خود تدوین کنید حتماً از افراد متخصص کمک بخواهید. افرادی که تجربیات خود را صادقانه در اختیار شما قرار می‌دهند و برنامه‌ریزی مناسب با شرایط شما را انجام می‌دهند.

📖 کتاب تست:

کوچک‌ترین واحد یادگیری در کنکور، تست است.

شما می‌توانید برای این‌که سطح یادگیری خود را پس از مطالعه بسنجید از کتاب‌های تست مجموعه (تست کنکور) و ماطراحان (تست‌های تألیفی) استفاده کنید. این کتاب‌ها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده‌اند و می‌توانند نحوه‌ی طرح سوالات کنکور و سطح آن‌ها را به‌صورت واضح به شما نشان دهند.

📖 درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم مناسب‌ترین منابع برای دوران مرور و جمع‌بندی:

بیش‌تر داوطلبان حین مطالعه نگران خلاصه‌نویسی و مرور آموخته‌های خود هستند و برای خلاصه‌نویسی زمان زیادی را صرف می‌کنند. اینک به شما مژده می‌دهیم که این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است و دیگر با استفاده از درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم نیاز به خلاصه‌نویسی ندارید.

شما می‌توانید نظرات، انتقادات و پیشنهادهای سازنده خود را در مورد بسته‌های آموزشی به شماره‌تلفن همراه ۰۹۱۹۱۶۸۵۹۷۰ فقط و فقط پیامک نمایید.

مشاور و مدیر تولید

امیرحسین خلیلی

طلیحه سخن مؤلف:

رشته‌ی نسبتاً نوپای مهندسی پزشکی که امروزه با سرعتی بسیار زیاد در حال فراگیر شدن است، نه فقط به دلیل عمر کم، بلکه علاوه بر آن به خاطر ماهیت بین رشته‌ای آن نیز دچار کم‌لطفی‌ای بسیاری گشته و علی‌رغم تلاش‌ای گوناگون متخصصان، استادان و دانشجویان آن، هنوز تا کسب جایگاه واقعی خود در دانشگاه، جامعه، صنعت و حوزه سلامت فاصله زیادی دارد.

درس «سیگنال‌ها و سیستم‌ها» یکی از دروس تخصصی دانشجویان مهندسی پزشکی محسوب می‌شود که از مجموعه دروس پایه رشته مهندسی برق می‌باشد. این درس پایه و اساس رشته مهندسی پزشکی بوده که به تجزیه و تحلیل انواع سیگنال‌ها و سیستم‌های مورد استفاده در رشته مهندسی پزشکی (بیوالکتریک) پرداخته و نحوه عملکرد آن‌ها را به صورت تئوری و با استفاده از روابط ریاضی بیان می‌دارد که دانستن این مفاهیم پایه، لازمه کار با این سیگنال‌ها و شناخت سیستم‌های مربوطه می‌باشد. از سوی دیگر این درس یکی از مواد امتحانی مهم مورد نیاز دانشجویان مهندسی پزشکی در آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری محسوب می‌گردد و به همین خاطر ضرورت وجود منبعی مناسب و کامل برای این درس به خوبی محسوس است. درسنامه پیش رو که برای پاسخ به همین ضرورت و نیاز ارائه گردیده است، حاصل تجربه‌ی تدریس نویسنده درسنامه در دانشگاه‌ها و مراکز آموزش عالی مختلف در رشته مهندسی برق و مهندسی پزشکی و آنالیز سؤالات آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری در رشته‌های مختلف مهندسی برق، مهندسی کامپیوتر، مهندسی پزشکی و ... می‌باشد.

در تألیف این درسنامه سعی شده با استفاده از جدیدترین و بروزترین روش‌ها، مباحث مربوطه توضیح داده شوند و در بیان مسائل آزمونی حداکثر ساده‌سازی و نکات مهم و کلیدی بیان شوند.

همچنین مطالب این درسنامه به صورتی کامل و در عین حال خلاصه و مختصر و مفید جمع‌آوری و سعی شده است تا علاوه بر این که شامل کلیه سرفصل‌های یک درس دانشگاهی باشد، تمامی نکات مورد نیاز داوطلبان آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری را نیز پوشش دهد.

استقبال کم‌نظیر دانشجویان، استادان و علاقه‌مندان از کتاب‌های «سیگنال‌ها و سیستم‌ها» در طی این چند سال، همواره انگیزه بخش نگارنده این کتاب در تألیف کتابی جامع و کامل با بیانی ساده و مورد نیاز آزمون‌های تحصیلات تکمیلی بوده است.

البته ناگفته نماند که هیچ‌گاه چاپ این درسنامه امکان‌پذیر نمی‌شد مگر با پیگیری مداوم و مستمر دست‌اندرکاران انتشارات آن‌اهیدگستر خلیلی به ویژه جناب آقای دکتر احمد خلیلی، جناب آقای امیرحسین خلیلی و سرکار خانم مریم آرده که بی‌شک سزاوار ادای احترام خالصانه مؤلف درسنامه سیگنال‌ها و سیستم‌ها هستند.

نگارنده درسنامه دست تمامی منتقدان و صاحب‌نظران مهندسی پزشکی را می‌فشارند و بی‌صبرانه مہیای شنیدن هرگونه نظر و پیشنهادی به منظور افزایش کیفیت این اثر ناقابل می‌باشد.

با احترام

امین ابوطالبی

aminabutalebi@gmail.com

۹	فصل اول: سیگنال‌ها.....
۳۹	فصل دوم: سیستم‌ها
۷۹	فصل سوم: سیستم‌های LTI خطی تغییرناپذیر با زمان
۱۱۵	فصل چهارم: حوزه فرکانس
۱۲۶	فصل پنجم: تبدیل فوریه
۱۷۰	فصل ششم: سری فوریه
۱۹۸	فصل هفتم: تبدیل لاپلاس.....
۲۱۷	فصل هشتم: تبدیل Z.....
۲۳۸	فصل نهم: تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه زمان و فرکانس
۳۳۴	فصل دهم: شناسایی سیستم‌ها
۳۴۱	فصل یازدهم: مقدمه‌ای بر نمونه‌برداری

فصل

۱

سیگنال‌ها

در این فصل به تعریف سیگنال‌ها و بیان مشخصات آن‌ها می‌پردازیم و تعدادی از سیگنال‌های مهم که با آن‌ها سروکار خواهیم داشت را معرفی می‌کنیم.

۱-۱- تعاریف و نمایش ریاضی

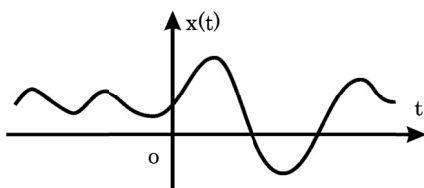
تابعی از یک یا چند متغیر مستقل که حاوی اطلاعاتی از یک فرآیند فیزیکی باشد را سیگنال می‌نامند. به عبارت دیگر، سیگنال قطعه‌ای از اطلاعات است که با توابع ریاضی مدل می‌شود.

در این مبحث، سیگنال‌های تک متغیره بررسی می‌شوند و متغیر مستقل آن‌ها نیز معمولاً زمان است.

سیگنال از نظر پیوستگی به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

۱. سیگنال زمان پیوسته یا آنالوگ

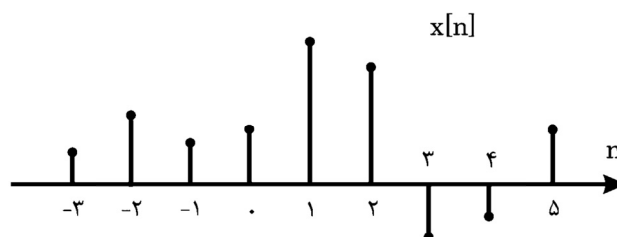
۲. سیگنال زمان گسسته یا دیجیتال



در سیگنال پیوسته متغیر مستقل یعنی زمان، یک متغیر پیوسته است و سیگنال در همه زمان‌ها تعریف می‌شود؛ یعنی متغیر مستقل آن که با t نمایش داده می‌شود، همه مقادیر حقیقی را به خود می‌گیرد در شکل زیر سیگنال زمان پیوسته $x(t)$ نشان داده شده است که در تمام زمان‌ها از $t = -\infty$ تا $t = +\infty$ به‌طور پیوسته مقدار دارد.

در سیگنال گسسته متغیر مستقل یعنی زمان، یک متغیر گسسته است. به عبارت دیگر، سیگنال فقط در لحظاتی گسسته از زمان تعریف می‌شود. متغیر مستقل در این حالت معمولاً با n نمایش داده می‌شود.

در شکل زیر سیگنال گسسته $x[n]$ نشان داده شده است که فقط در زمان‌های صحیح n مقدار دارد. ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)



۱-۱-۱- سیگنال‌های حقیقی و مختلط

به سیگنالی که مقادیر آن در همه زمان‌ها حقیقی باشد، سیگنال حقیقی می‌گویند؛ مانند سیگنال $x(t) = e^{-t} \sin t$. سیگنال مختلط سیگنالی است که حداقل در یک لحظه مقداری مختلط داشته باشد، مانند سیگنال $x(t) = 3te^{jt}$.

در دستگاه دکارتی، سیگنال مختلط $x(t)$ برحسب قسمت حقیقی و موهومی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$x(t) = a(t) + jb(t) = \operatorname{Re}[x(t)] + j\operatorname{Im}[x(t)]$$

سیگنال $x^*(t)$ را مزدوج سیگنال $x(t)$ تعریف می‌کنیم و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$x^*(t) = a(t) - jb(t)$$

$$\operatorname{Re}[x(t)] = \frac{x(t) + x^*(t)}{2} \quad \operatorname{Im}[x(t)] = \frac{x(t) - x^*(t)}{2j}$$

بنابراین می‌توان گفت:

در دستگاه قطبی سیگنال مختلط $x(t)$ برحسب قسمت اندازه و فاز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x(t) = r(t)e^{j\theta(t)} = |x(t)|e^{j\angle x(t)}$$

$$x(t) = r(t)e^{-j\theta(t)}$$

مزدوج سیگنال $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$$

که در آن

$$|x(t)| = r(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} \quad \angle x(t) = \theta(t) = \tan^{-1} \left[\frac{b(t)}{a(t)} \right]$$

همچنین:

براساس روابط فوق می‌توان گفت، فاز یک سیگنال حقیقی برابر صفر یا π است و فاز یک سیگنال موهومی برابر $\frac{\pi}{2}$ یا $-\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

۱-۲- انرژی و توان سیگنال

انرژی و توان سیگنال پیوسته $x(t)$ در بازه $[t_1, t_2]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

$$P = \frac{E}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

انرژی و توان کل یک سیگنال به معنی انرژی و توان سیگنال در کل بازه زمانی از $-\infty$ تا $+\infty$ است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt$$

در این روابط منظور از $|x(t)|$ اندازه سیگنال $x(t)$ است.

همچنین انرژی و توان سیگنال گسسته $x[n]$ در بازه زمانی $[n_1, n_2]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

$$P = \frac{E}{n_2 - n_1 + 1} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

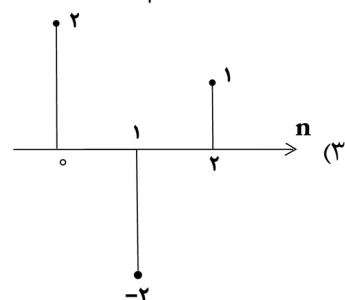
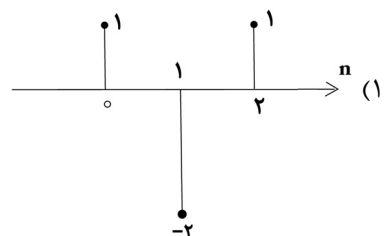
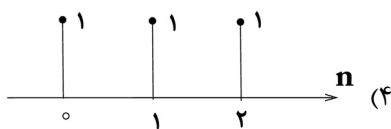
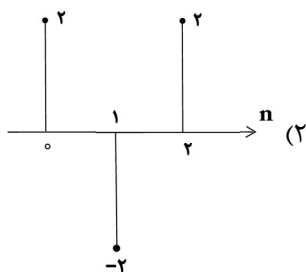
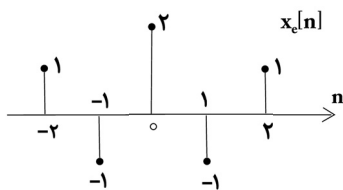
انرژی و توان کل یک سیگنال گسسته به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

فصل اول

۹. $x_e[n]$ قسمت زوج تابع $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است. اگر برای $n < 0$ داشته باشیم $x[n] = 0$ ، کدام یک از شکل‌های زیر است؟



۱۰. دوره تناوب اصلی سیگنال پیوسته $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|6t+n|}$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{6}$

(۴) 1

(۱) 6

(۳) سیگنال متناوب نیست.

در فصل‌های گذشته، روابط سیگنال‌ها و سیستم‌های مختلف را در حوزه زمان بررسی کریم. در این فصل قصد داریم حوزه جدیدی به نام حوزه فرکانس را معرفی نماییم. معمولاً برای هر سیگنال یا سیستمی که در حوزه زمان مطرح است، می‌توان معادلی در حوزه فرکانس در نظر گرفت و چه بسا تحلیل آن سیگنال یا سیستم در حوزه فرکانس به مراتب ساده‌تر از حوزه زمان باشد.

۴-۱- تعریف فرکانس

سیگنال نمایی مختلط e^{at} را در نظر بگیرید که a در حالت کلی یک ثابت مختلط است (یعنی $a = \sigma + j\omega$ ثابت a را فرکانس این سیگنال می‌نامیم. فرکانس a می‌تواند در حالت‌های خاص، حقیقی یا موهومی محض نیز باشد. فرض کنید می‌خواهیم فرکانس‌های سیگنال $x(t) = \cos 2t + e^{3t} + e^{-t} \sin t + 2e^{(0)t}$ را مشخص نماییم. ابتدا باید این سیگنال را به فرم سیگنال‌های نمایی e^{at} بنویسیم:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{2jt} + \frac{1}{2}e^{-2jt} + e^{3t} + \frac{1}{2j}e^{(-1+j)t} - \frac{1}{2j}e^{(-1-j)t} + 2e^{(0)t}$$

این سیگنال حاوی فرکانس‌های $2j, -2j, 3, -1+j, -1-j$ و 0 می‌باشد، پس وزن فرکانس $2j$ در این سیگنال برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد. مثلاً ضریب نمایی e^{2jt} برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد، پس وزن فرکانس $2j$ در این سیگنال برابر $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

۴-۲- مفهوم فیزیکی فرکانس

سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ را در نظر بگیرید. این سیگنال دارای فرکانس موهومی $j\omega_0$ می‌باشد. حال با استفاده از فرمول اویلر داریم:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

قسمت‌های حقیقی و موهومی سیگنال فوق به ترتیب برابر $\cos \omega_0 t$ و $\sin \omega_0 t$ می‌باشند که سیگنال‌هایی نوسانی هستند. مقدار ω_0 تعیین‌کننده میزان نوسانات این سیگنال‌هاست. بنابراین فرکانس موهومی نشان‌دهنده نوسانات یک سیگنال می‌باشد.

حال سیگنال $e^{\sigma t}$ را (با فرض σ حقیقی) در نظر بگیرید. این سیگنال دارای فرکانس حقیقی σ است. اگر $\sigma > 0$ باشد، سیگنال افزایشی و اگر $\sigma < 0$ باشد، سیگنال کاهشی (میرا) خواهد بود؛ بنابراین فرکانس حقیقی نشان‌دهنده میزان رشد یا میرایی سیگنال می‌باشد.

فصل چهارم

اکنون سیگنال e^{st} را (با فرض $s = \sigma + j\omega_0$ مختلط) در نظر بگیرید. این سیگنال دارای فرکانس مختلط s است. با ساده کردن این سیگنال به قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم:

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega_0)t} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega_0 t} = e^{\sigma t} \cos \omega_0 t + j e^{\sigma t} \sin \omega_0 t$$

قسمت‌های حقیقی و موهومی سیگنال فوق به ترتیب برابر $e^{\sigma t} \cos \omega_0 t$ و $e^{\sigma t} \sin \omega_0 t$ می‌باشند. این سیگنال‌ها، سیگنال‌های نوسانی افزایشی یا کاهشی می‌باشند. مقدار ω_0 تعیین‌کننده میزان نوسانات و مقدار σ نیز تعیین‌کننده میزان رشد یا میرایی سیگنال خواهد بود؛ بنابراین قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس مختلط s (یعنی σ و ω_0)، به ترتیب نشان‌دهنده میزان نوسانات و میزان رشد یا میرایی سیگنال می‌باشند.

در سیستم‌های LTI، ورودی نمایی به شکل $e^{\sigma t}$ (ورودی در فرکانس a) از اهمیت خاصی برخوردار است.

۴-۳ پاسخ سیستم‌های LTI زمان پیوسته به نمایی‌های مختلط

یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ را در نظر بگیرید.

$$x(t) = e^{at} \xrightarrow{\text{LTI}} \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

به این سیستم ورودی $e^{\sigma t}$ را اعمال می‌کنیم.

خروجی برابر کانولوشن پاسخ ضربه و ورودی می‌باشد:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{a(t-\tau)} d\tau = e^{at} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-a\tau} d\tau}_{H(a)}$$

$$= H(a) \cdot e^{at}$$

ملاحظه می‌کنید که خروجی برابر مضربی ثابت از همان ورودی است. $H(a)$ ضریب ثابت اضافه شده در خروجی می‌باشد که مقدار آن به $h(t)$ (پاسخ ضربه سیستم) و فرکانس a بستگی دارد. $H(a)$ در حالت کلی ثابتی مختلط است و صفر نیز می‌تواند باشد.

$$x(t) = e^{at} \xrightarrow{\text{LTI}} \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = H(a) e^{at}$$

پاسخ یک سیستم LTI به فرکانس a برابر همان فرکانس اما با یک وزن جدید ($H(a)$) که از سیستم ناشی شده است، می‌باشد. به $H(a)$ ، پاسخ فرکانسی یا تابع تبدیل سیستم می‌گوییم که برای هر سیستم، یکتا و منحصر به فرد است. اگر $H(a)$ یک سیستم، به ازای همه a ها معلوم و مشخص باشد، پاسخ آن سیستم به همه ورودی‌های نمایی با هر فرکانس دلخواه a ، به راحتی قابل محاسبه خواهد بود. در نتیجه اهمیت فرکانس و ورودی‌های نمایی در سیستم‌های LTI از این جهت است که اولاً پاسخ آن‌ها به راحتی و یا کم‌ترین محاسبات، به دست خواهد آمد؛ ثانیاً با توجه به این‌که در خروجی، تنها یک ضریب به ورودی اضافه می‌شود، تأثیر سیستم بر روی این ورودی‌ها به وضوح قابل مشاهده و بررسی می‌باشد. ممکن است به نظر آید که این ویژگی سیستم‌های LTI کاربرد چندانی در عمل ندارد؛ زیرا ورودی‌های ما معمولاً به فرم نمایی e^{at} نمی‌باشند و در نتیجه نمی‌توانیم از این خاصیت سیستم‌های LTI استفاده کنیم؛ اما جای نگرانی نیست؛ زیرا این مشکل را سری فوریه، تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس حل کرده‌اند. سری فوریه، یک سیگنال متفاوت را به نمایی‌هایی به فرم $e^{jk\omega_0 t}$ (فرکانس‌های موهومی $j\omega_0$) تجزیه می‌کند؛ تبدیل فوریه، یک سیگنال [در حالت کلی] نامتناوب را به نمایی‌هایی به فرم $e^{j\omega t}$ (فرکانس‌های موهومی $j\omega$) تجزیه می‌نماید. تبدیل لاپلاس نیز یک سیگنال نامتناوب را به نمایی‌هایی به فرم e^{st} (فرکانس‌های مختلط $s = \sigma + j\omega$) تجزیه می‌کند. بنابراین تقریباً همه سیگنال‌هایی که ما در عمل با آن‌ها سروکار داریم را می‌توان به سیگنال‌های نمایی تجزیه کرد و از این خاصیت سیستم‌های LTI بهره برد.

۴-۴ پاسخ سیستم‌های LTI زمان گسسته به نمایی‌های مختلط

در حالت زمان گسسته نیز به مقدار ثابت β در سیگنال β^n ، فرکانس می‌گوییم که β می‌تواند مختلط، موهومی یا حقیقی باشد.

سیگنال‌های نمایی در حالت زمان گسسته، در حالت کلی معمولاً به صورت α^n نمایش داده می‌شوند. می‌خواهیم پاسخ یک سیستم LTI

$$x[n] = \alpha^n \xrightarrow{\text{LTI}} \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = ?$$

با پاسخ ضربه $h[n]$ را به ورودی α^n محاسبه نماییم:

تبدیل فوریه

روابط تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه زمان پیوسته و زمان گسسته به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\text{C.T: } X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\text{D.T: } X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

به شباهت‌ها و تفاوت‌های فرمول‌ها در حالت زمان پیوسته ((C.T) و زمان گسسته ((D.T) دقت کنید. تفاوت اصلی تبدیل فوریه زمان پیوسته و زمان گسسته در این است که تبدیل فوریه زمان گسسته حتماً با دوره تناوب متناوب 2π است (زیرا فرکانس‌ها با فاصله یکسان 2π هستند)، ولی تبدیل فوریه زمان پیوسته لزوماً متناوب نیست.

۵-۱- تبدیل فوریه سیگنال‌های مهم

ابتدا تبدیل فوریه سیگنال‌های زمان پیوسته و زمان گسسته‌ای که معمولاً با آن‌ها سروکار داریم را ارائه می‌کنیم. یک سیگنال و تبدیل فوریه‌اش را با نمادهای زیر نمایش می‌دهند. $\{F\}$ عملکرد تبدیل فوریه است.

$$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega) \quad \text{یا} \quad F\{x(t)\} = X(\omega)$$

۱) سیگنال نمایی یک‌طرفه

سیگنال زمان پیوسته $e^{at}u(t)$ و سیگنال زمان گسسته $\alpha^n u[n]$ را سیگنال‌های نمایی یک‌طرفه می‌نامند؛ زیرا فقط برای زمان‌های مثبت مقدار دارند. توجه کنید که a و α در حالت کلی ثابت‌هایی مختلط می‌باشند. تبدیل فوریه این سیگنال‌ها با فرض $\text{Re}[a] < 0$ و $|\alpha| < 1$ برابر هستند با:

$$e^{at}u(t), \text{Re}[a] < 0 \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega - a} \quad \alpha^n u[n], |\alpha| < 1 \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

سیگنال‌های فوق به ازای $\text{Re}[a] > 0$ و $|\alpha| > 1$ تبدیل فوریه ندارند. تبدیل فوریه در حالت زمان گسسته با دوره تناوب 2π متناوب است. دو فرمول زیر با استفاده از خواص تبدیل فوریه به دست می‌آیند.

$$te^{at}u(t), \text{Re}[a] < 0 \xrightarrow{F} \frac{1}{(j\omega - a)^2} \quad n\alpha^n u[n], |\alpha| < 1 \xrightarrow{F} \frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^2}$$

۹) قطار ضربه با دوره تناوب T

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \xrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \xrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

۱۰) سیگنال نمایی دوطرفه متقارن

$$e^{-a|t|} \quad , \quad a > 0 \xrightarrow{F} \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

$$\alpha^{|n|} \quad , \quad |\alpha| < 1 \xrightarrow{F} \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \omega + \alpha^2}$$

سیگنال‌های نمایی فوق، برای همه زمان‌های مثبت و منفی مقدار دارند و به دلیل داشتن قدر مطلق، سیگنال‌هایی زوج هستند و نسبت به محور عمودی متقارن می‌باشند. توجه شود که a و α در این‌جا حقیقی هستند.

$$\delta^{(n)}(T) \xrightarrow{F} (j\omega)^n$$

۱۱) مشتق n ام ضربه زمان پیوسته

$$\operatorname{sgn} t \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}$$

۱۲) سیگنال علامت

تبدیل فوریه سیگنال‌های مهم در حالت زمان پیوسته و زمان گسسته در جدول‌های زیر ارائه شده است:

جدول تبدیل فوریه زمان پیوسته

حوزه فرکانس	حوزه زمان
$\frac{1}{j\omega - a}$	$e^{at}u(t) \quad , \quad \operatorname{Re}[a] < 0$
$\frac{1}{(j\omega - a)^2}$	$te^{at}u(t) \quad , \quad \operatorname{Re}[a] < 0$
$e^{j\omega t_0} \quad , \quad 1$	$\delta(t + t_0) \quad , \quad \delta(t)$
$2\pi(\omega - \omega_0) \quad , \quad 2\pi\delta(\omega)$	$e^{j\omega_0 t} \quad , \quad 1$
$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	$u(t)$
$\Pi(\frac{\omega}{2W})$	$\frac{\sin Wt}{\pi t}$
$\frac{2\sin T\omega}{\omega}$	$\Pi(\frac{t}{2T})$
$\frac{1}{2T}(\frac{2\sin T\omega}{\omega})^2$	$\Lambda(\frac{t}{2T})$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega k - \omega_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$
$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$	$e^{-a t } \quad , \quad a > 0$
$(j\omega)^n$	$\delta^{(n)}(t)$
$\frac{1}{j\omega}$	$\operatorname{sgn} t$

تبدیل Z

در این فصل به خواص و کاربرد تبدیل Z در تحلیل سیگنال‌های زمان گسسته خواهیم پرداخت. تبدیل Z سیگنال $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

متغیر Z یک متغیر مختلط است و آن را به صورت $z = re^{j\omega}$ در نظر می‌گیرند. سیگمای فوق بسته به سیگنال $x[n]$ به ازای بعضی مقادیر Z، همگرا و به ازای بقیه Zها واگرا می‌شود. مقادیری از Z که به ازای آن تبدیل Z همگرا می‌شود را ناحیه همگرایی یا به طور مختصر ROC می‌گویند.

$x[n]$ را می‌توان بر حسب $X(z)$ به صورت زیر نوشت و محاسبه کرد:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(z)z^n d\omega = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz, \quad z = re^{j\omega}$$

انتگرال فوق را تبدیل Z معکوس یا عکس تبدیل Z می‌نامند.

مثال: تبدیل Z سیگنال $x[n] = 3^n u[n]$ را به دست آورید.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 3^n \underbrace{u[n]}_{n \geq 0} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (3z^{-1})^n$$

حل:

سیگمای فوق به ازای $|3z^{-1}| < 1$ یا به طور معادل به ازای $|z| > 3$ همگرا می‌باشد. با محاسبه سیگمای فوق با

$$X(z) = \frac{1 - (3z^{-1})^{+\infty+1}}{1 - 3z^{-1}}$$

استفاده از فرمول کلی تصاعد هندسی داریم:

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad |z| > 3$$

با فرض $|3z^{-1}| < 1$ یا $|z| > 3$ ، $(3z^{-1})^{+\infty+1} = 0$ می‌شود؛ بنابراین داریم:

توجه شود که اگر $|z| < 3$ باشد، سیگمای فوق و در نتیجه $X(z)$ نامحدود می‌شود، پس در واقع $X(z)$ برابر است با:

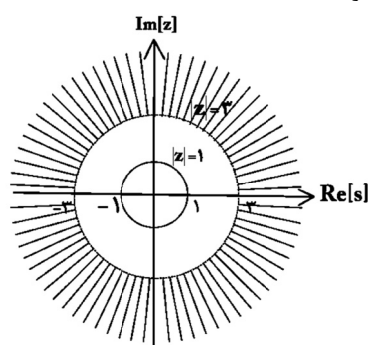
$$X(z) = \begin{cases} \frac{1}{1 - 3z^{-1}}, & |z| > 3 \\ \infty, & |z| < 3 \end{cases}$$

شرط $|z| > 3$ را ناحیه همگرایی $X(z)$ به دست آمده، می‌نامیم؛ زیرا $X(z)$ فقط به ازای z هایی که در ناحیه $|z| > 3$ قرار دارند، همگرا و محدود می‌شود. ما معمولاً برای راحتی تبدیل، Z فوق را با همان ضابطه اول نمایش می‌دهیم و ناحیه همگرایی آن را نیز در کنار آن مشخص می‌کنیم. یعنی می‌گوییم تبدیل Z سیگنال $x[n] = 3^n u[n]$ برابر

$$X(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1}}, \quad |z| > 3$$

است با:

با توجه به این که $z = re^{j\omega}$ و در نتیجه $|z| = r$ می‌باشد، ناحیه همگرایی $|z| > 3$ را می‌توان به صورت $r > 3$ نیز بیان کرد. حال می‌خواهیم ناحیه همگرایی $|z| > 3$ را بر روی صفحه Z نمایش دهیم. صفحه Z ، یک صفحه مختلط است که محور افقی آن $\text{Re}[z]$ و محور عمودی آن $\text{Im}[z]$ می‌باشد و هر مقدار مختلط z را می‌توان روی آن نشان داد. در صفحه Z ، معمولاً مقادیر را به صورت افقی (با اندازه و فاز) نمایش می‌دهند. هم‌چنین دایره $|z| = 1$ (یعنی $z = e^{j\omega}$) را نیز معمولاً روی محور مشخص می‌کنند و به آن دایره یک‌ه یا واحد می‌گویند. ناحیه $|z| > 3$ به شکل زیر نشان داده می‌شود:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید ناحیه $|z| > 3$ شامل همه

z هایی است که اندازه آن‌ها ($|z| = r$) بزرگ‌تر از سه می‌باشد و

فاز آن‌ها ($\angle z = \omega$) هر چه می‌تواند باشد.

ناحیه همگرایی (ROC) در تبدیل Z همیشه به صورت دایره هم‌مرکز می‌باشد. یعنی ناحیه همگرایی از داخل یا خارج (اندازه) ممکن است محدود شود، ولی از نظر فاز محدود نمی‌شود و حتماً به صورت دایره می‌باشد. یعنی اگر مثلاً نقطه z_0 در ROC باشد، هر

نقطه دیگری که اندازه آن برابر $|z_0|$ است نیز حتماً در ROC خواهد بود. دلیل این موضوع این است که ناحیه همگرایی در تبدیل Z

همیشه براساس $|z| = r$ تعیین می‌شود و $\angle z = \omega$ نقشی در آن ندارد.

۸-۱- تبدیل سیگنال‌های مهم

یک سیگنال و تبدیل Z آن را با نمادهای زیر نمایش می‌دهیم. $\{ \cdot \}$ عملگر تبدیل Z است.

$$x[z] \xrightarrow{Z} X(z) \quad \text{or} \quad Z\{x[n]\} = X(z)$$

۱- سیگنال نمایی یک‌طرفه (سمت راستی یا سمت چپی)

سیگنال‌های زمان گسسته $\alpha^n u[n]$ و $\alpha^n u[-n-1]$ را به ترتیب سیگنال‌های نمایی یک‌طرفه سمت راستی و سمت چپی می‌نامند؛ زیرا فقط برای زمان‌های مثبت یا منفی مقدار دارند. توجه کنید که در حالت کلی ثابت α مختلط می‌باشد. تبدیل Z این سیگنال‌ها برابر است با:

$$\alpha^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|$$

$$-\alpha^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| < |\alpha|$$

همگرایی تبدیل Z آن‌ها با هم متفاوت است.

هم‌چنین می‌توان گفت:

$$n\alpha^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}, \quad |z| > |\alpha|$$

$$-n\alpha^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} \frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}, \quad |z| < |\alpha|$$

برای این کار از $n = 0$ شروع می‌کنیم:

$$n = n_0 : y[n_0] = x[n_0] + x[n_0 - 1] + x[n_0 - 2] + x[n_0 - 3] + x[n_0 - 4]$$

$$n = 0 : y[0] = \underbrace{x[0]}_1 + \underbrace{x[-1]}_? + \underbrace{x[-2]}_0 + \underbrace{x[-3]}_0 + \underbrace{x[-4]}_0 \rightarrow x[0] = 1$$

$$n = 1 : y[1] = \underbrace{x[1]}_1 + \underbrace{x[0]}_? + \underbrace{x[-1]}_1 + \underbrace{x[-2]}_0 + \underbrace{x[-3]}_0 \rightarrow x[1] = 1$$

$$n = 2 : y[2] = \underbrace{x[2]}_2 + \underbrace{x[1]}_? + \underbrace{x[0]}_1 + \underbrace{x[-1]}_1 + \underbrace{x[-2]}_0 \rightarrow x[2] = 1$$

$$n = 3 : y[3] = \underbrace{x[3]}_3 + \underbrace{x[2]}_? + \underbrace{x[1]}_1 + \underbrace{x[0]}_1 + \underbrace{x[-1]}_0 \rightarrow x[3] = 0$$

محاسبه $x[n]$ تا همین جا کفایت می‌کند تا از بین گزینه‌های ۲ و ۴، گزینه ۴ را انتخاب نماییم.

۲۶. گزینه «۴» صحیح است.

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k]$$

با باز کردن سیگمای فوق داریم:

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + \dots + h[N-1]x[n-N+1] \quad (1)$$

برای تعیین $h[n]$ باید N مجهول $h[0]$, $h[1]$, $h[2]$, ... و $h[N-1]$ را از رابطه (۱) به‌دست آوریم؛ بنابراین به N معادله مانند رابطه (۱) نیاز داریم. پس رابطه (۱) را باید برای N تا n مختلف بازنویسی کنیم تا یک دستگاه « N معادله N -مجهول» ایجاد شود و با حل این معادلات، N مجهول مورد نظر را به‌دست آوریم. اگر رابطه (۱) را برای N تا n مختلف بازنویسی کنیم، به N نقطه از خروجی نیاز خواهیم داشت. پس داشتن N نقطه از خروجی برای محاسبه مجهولات، هم لازم است و هم کافی.

حال اگر این N نقطه از خروجی متوالی باشند، به $2N-1$ نقطه متوالی از ورودی نیازمندیم؛ زیرا با جای‌گذاری N تا n متوالی در رابطه (۱) مثلاً از $n=0$ تا $n=N-1$ به ورودی از $n=-N+1$ تا $n=N-1$ نیاز خواهیم داشت. هم‌چنین اگر N نقطه از خروجی متوالی نباشند، بسته به نقاط انتخاب شده، به نقاطی از ورودی نیاز خواهیم داشت و در حالت‌های مختلف باید جداگانه بررسی شود؛ بنابراین گزینه ۴ می‌تواند به‌عنوان پاسخ صحیح این تست در نظر گرفته شود.

۲۷. گزینه «۴» صحیح است.

روش‌های مختلفی برای حل این تست هم در حوزه زمان و هم در حوزه Z وجود دارد. ما در این‌جا بهترین و سریع‌ترین راه‌حل را ارائه می‌کنیم:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad Z\{X(z)\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}} = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)Y(z) = Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$$

حال از دو طرف رابطه فوق با استفاده از خاصیت انتقال زمانی عکس تبدیل Z می‌گیریم:

$$h[n] = y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] \xrightarrow{n=3} h[3] = y[3] - \frac{1}{2}y[2] = 4 - \frac{1}{2}(3) = \frac{5}{2}$$

شناسایی سیستم‌ها

منظور از شناسایی یک سیستم، شناسایی رابطه ورودی-خروجی آن است به نحوی که بتوان پاسخ به هر ورودی دلخواه را محاسبه کرد. آیا می‌توان با داشتن یک یا چند زوج ورودی-خروجی از یک سیستم مجهول، آن سیستم را کاملاً شناسایی کرد و در واقع پاسخ به هر ورودی دلخواه دیگر را به‌دست آورد؟ برای شناسایی یک سیستم در حالت کلی باید پاسخ به همه ورودی‌ها را داشته باشیم، ولی اگر سیستمی خواص مشخصی داشته باشد، تحت شرایطی که می‌توان آن را با یک یا چند زوج ورودی-خروجی، کاملاً شناسایی کرد. سیستم‌هایی که امکان شناسایی آن‌ها با تعدادی ورودی-خروجی وجود دارد، سیستم‌های LTI، سیستم‌های خطی بدون حافظه، سیستم‌های LTI و بدون حافظه، سیستم‌های بدون حافظه و TI و سیستم‌های خطی می‌باشند.

۱۰-۱- شناسایی سیستم‌های LTI

رابطه کلی یک سیستم LTI در حوزه زمان به صورت $y(t)=x(t)*h(t)$ و در حوزه فرکانسی به صورت $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$ می‌باشد. از رابطه سیستم در حوزه فرکانسی مشخص است که برای شناسایی این سیستم کافی است که پاسخ فرکانسی آن یعنی $H(\omega)$ را به‌دست آوریم؛ در این صورت رابطه سیستم کاملاً شناسایی می‌شود. بنابراین باید ببینیم که چگونه و تحت چه شرایطی با داشتن ورودی-خروجی از این سیستم می‌توان $H(\omega)$ را به‌دست آورد. داریم:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

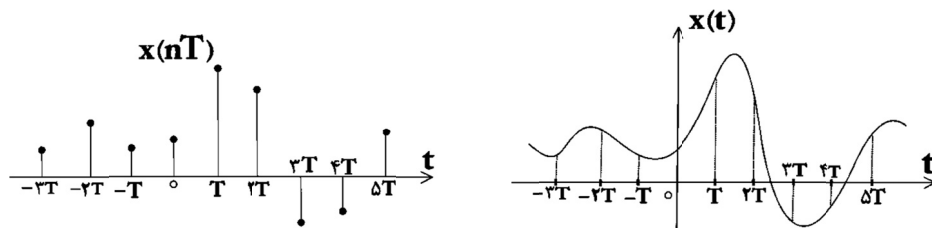
یعنی برای محاسبه $H(\omega)$ ، کافی است که طیف خروجی را بر طیف ورودی تقسیم نماییم. اما این کار در صورتی مجاز است که طیف ورودی یعنی $X(\omega)$ در هیچ فرکانسی صفر نباشد. در غیراین صورت مخرج کسر فوق صفر می‌شود و در محاسبه $H(\omega)$ ابهام خواهیم داشت.

یک سیستم LTI زمان پیوسته یا زمان گسسته را می‌توان با داشتن یک زوج ورودی-خروجی از آن کاملاً شناسایی کرد. به شرطی که طیف ورودی (تبدیل فوریه) در هیچ فرکانسی صفر نباشد.

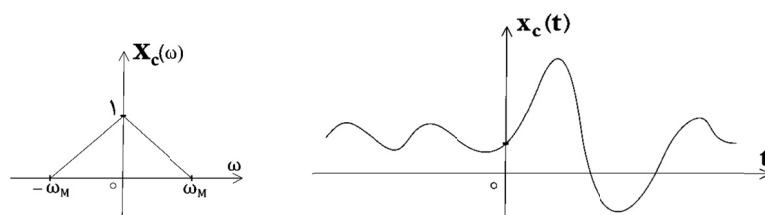
$$\forall \omega : X(\omega) \neq 0 \rightarrow \text{شرایط لازم و کافی برای شناسایی یک سیستم LTI با ورودی } x(t)$$

مقدمه‌ای بر نمونه‌برداری

در شرایطی خاص، یک سیگنال زمان پیوسته، با نمونه‌هایی از آن در نقاط متساوی‌فاصله در زمان، کاملاً قابل نمایش و بازیابی است. این شرایط خاص به نوع و مقدار نوسانات سیگنال مربوط می‌شود. در واقع اگر سیگنالی دارای باند فرکانسی محدود باشد، می‌توان فقط با نمونه‌هایی از مقادیر آن در حوزه زمان، کل سیگنال را دقیقاً بازیابی نمود. مثلاً فرض کنید سیگنال $x(t)$ که در شکل زیر نشان داده شده است، دارای باند فرکانسی محدودی باشد. آنگاه می‌توان این سیگنال را فقط با داشتن نمونه‌هایی با فاصله T (یعنی مقادیر $x(nT)$ به ازای $(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$) دقیقاً بازیابی کرد، یعنی می‌توان از اطلاعات شکل سمت راست، دقیقاً $x(t)$ را به دست آورد.



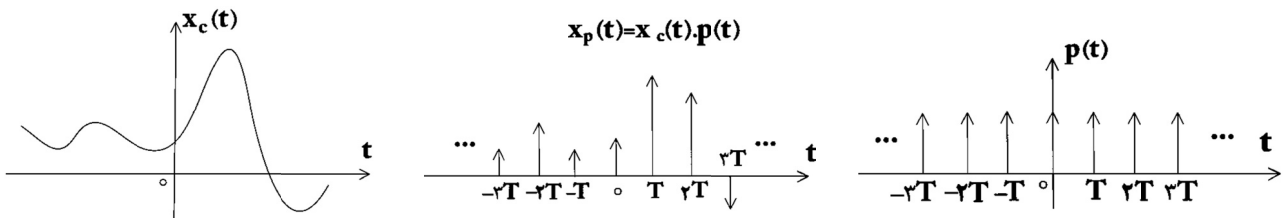
البته مقدار T (فاصله بین نمونه‌ها) هر مقداری نمی‌تواند باشد و بستگی به پهنای باند فرکانسی $x(t)$ دارد و باید از یک حد معینی کوچکتر باشد. یکی از روش‌های نمونه‌برداری از یک سیگنال زمان پیوسته، نمونه‌برداری با یک قطار ضربه متناوب با دوره تناوب T می‌باشد. در ادامه این روش را بررسی و قضیه نمونه‌برداری را به‌طور دقیق اثبات و بیان می‌کنیم. فرض کنید سیگنال زمان پیوسته $x_c(t)$ که آن را سیگنال اصلی می‌نامیم، دارای طیفی با باند فرکانسی محدود و ماکزیمم فرکانس ω_M به شکل زیر باشد:



$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

قطار ضربه متناوب با دوره تناوب T را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

برای نمونه‌برداری از سیگنال $x_c(t)$ آن را در $P(t)$ ضرب می‌کنیم، در این صورت شکل $x_c(t) \cdot P(t)$ به صورت شکل زیر (سمت راست) به دست خواهد آمد. که تنها شامل نمونه‌هایی با دامنه T از سیگنال $x_c(t)$ می‌باشد و به آن سیگنال نمونه‌برداری شده می‌گوییم و آن را با $x_p(t)$ نمایش می‌دهیم. اندازه ضربه‌ها در سیگنال $x_p(t)$ ، در واقع مقدار نمونه‌های سیگنال $x_c(t)$ را تعیین کنید.



عبارت ریاضی $x_p(t)$ (سیگنال نمونه‌برداری شده) را می‌توان با ضرب قطار ضربه $P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ و سیگنال $x_c(t)$ به صورت زیر به دست آورد:

$$x_p(t) = x_c * p_t = x_c(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT) \quad (1)$$

ملاحظه می‌کنید که در رابطه فوق، اندازه ضربه‌ها برابر $x_c(nT)$ است که به ازای n های مختلف، مقدار نمونه‌های سیگنال $x_c(t)$ را تعیین می‌کند. هدف ما در این جا پیدا کردن مقداری مناسب برای T است. به طوری که بتوان از روی $x_p(t)$ ، دقیقاً $x_c(t)$ را بازیابی کرد. برای این کار $x_p(t)$ را در حوزه فرکانس بررسی می‌کنیم، یعنی از رابطه (۱) با استفاده از خاصیت ضرب، تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$x_p(t) = x_c * p_t \xrightarrow{F} X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(\omega) * P(\omega)$$

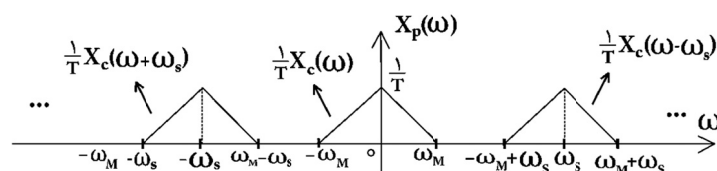
$P(\omega)$ تبدیل فوریه قطار ضربه $P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ می‌باشد؛ بنابراین با استفاده از جدول تبدیل فوریه، $P(\omega)$ برابر $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right)$ خواهد بود. در نتیجه $X_p(\omega)$ برابر می‌شود با:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}n\right) = \frac{1}{T} X_c(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s), \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

عبارت فوق بیان می‌کند که برای محاسبه $X_p(\omega)$ باید طیف سیگنال اصلی یعنی $X_c(\omega)$ را در $\frac{1}{T}$ ضرب کرده و سپس با مضربی از ω_s به چپ و راست شیفت دهیم و با هم جمع نماییم. در واقع $X_p(\omega)$ را به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} X_c(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

T را دوره تناوب یا پریود نمونه‌برداری (فاصله نمونه‌ها) با واحد s (ثانیه) و $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ را فرکانس نمونه‌برداری با واحد rad/s (رادیان بر ثانیه) می‌نامیم. با توجه به شکل $X_c(\omega)$ و رابطه فوق می‌توان $X_p(\omega)$ را به صورت زیر رسم کرد:



بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

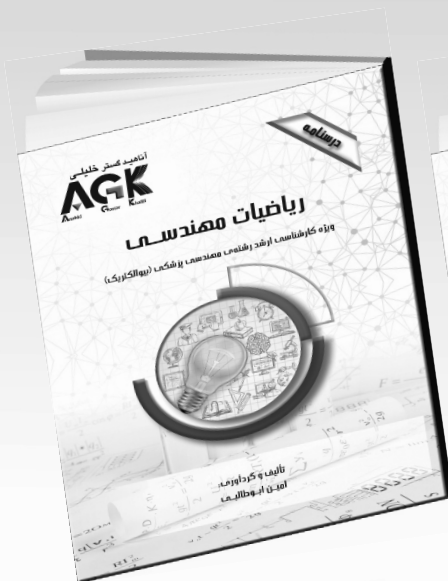
تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

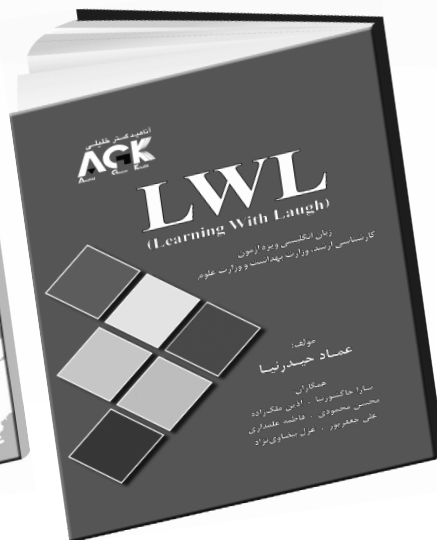
جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

بانک سوالات

جمع آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به صورت فصل بندی شده

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور

جامع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

الگوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع



دریافت نمونه‌ی کتاب به صورت رایگان



www.agkins.com

شماره تماس با نمایندگی‌های فعال و رسمی آناهید گستر خلیلی

شماره تماس	نمایندگی	شماره تماس	نمایندگی
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	شیراز (آقای فروردین/ خانم هوشمندی)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۵۰	اراک (آقای حسینی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۲	فسا (خانم شعبانی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۸	اردبیل (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۹	قزوین (خانم چگینی)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۱	ارومیه (آقای آرمیون)
۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۷	کرج (آقای دکتر علیرضاپور)	۰۹۱۹۶۳۲۱۸۵۲	اسفراین (خانم اسماعیل‌زاده)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۶	کاشان (خانم صادق‌پور)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۰	اصفهان (آقای نصری)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کردستان (آقای ابراهیمی)	۰۹۱۹۰۹۸۰۳۱۸	ایلام (آقای دکتر بوچانی)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۸	کرمانشاه (آقای ابراهیمی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۴	اهواز (آقای امین‌فر)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۲	کهکیلویه (آقای فروردین/ خانم هوشمندی)	۰۹۱۹۵۹۰۷۲۰۳	بیرجند (آقای دکتر بهروان)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۷	گرگان (آقای شاه‌علی)	۰۹۱۹۵۷۳۰۱۴۷	تبریز (خانم عاصمی‌زاده)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	مراغه (آقای صمدی)	۰۹۰۱۳۷۳۷۸۹۶	جهرم (آقای یاعلی جهرمی)
۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۴	مشهد (خانم دکتر شجاعی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۸	خرم‌آباد (خانم میر)
۰۹۱۹۵۷۳۳۱۷۹	میاندوآب (آقای صمدی)	۰۹۱۹۲۷۰۵۸۷۱	زنجان (خانم دکتر هوشیار)
۰۹۱۹۵۷۳۳۲۸۴	هرمزگان (آقای زارعی)	۰۹۱۹۷۷۸۱۹۴۴	ساری (آقای دکتر اکبری)
۰۹۱۹۵۷۳۰۱۵۵	همدان (آقای سوری)	۰۹۹۱۳۷۱۳۷۴۱	سمنان (آقای دکتر سلمانی)
۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۳	یزد (خانم مهندس آزاد)	۰۹۱۹۹۱۰۱۲۴۹	شهرکرد (خانم تقی‌پور)

بانک کتاب ناهید



«هر کتابی، از هر انتشاراتی را از ما بخواهید»

✓ جامع‌ترین بانک کتاب

✓ تحویل روزانه

✓ ارسال به تمامی نقاط کشور

✓ سفارش کتاب به صورت تلفنی و آنلاین

www.NIBS.ir



کتاب دانشگاهی، فنی و مهندسی، علوم پزشکی، علوم انسانی، عمومی،
ادبی، مذهبی، کمک آموزشی، کودک و نوجوان و کتاب نفیس

فروشگاه: تهران - خیابان انقلاب - روبه روی درب اصلی دانشگاه تهران

پاساژ فروزنده - طبقه همکف - پلاک ۳۳۱

تلفن: ۶۶۴۸۹۳۷۵ - ۰۲۱ - ۶۶۴۸۹۳۴۹ - ۰۲۱