

مبانی نظریہ الکترومغناطیس

جان آر. ریتس، فردریک جی. میلفورد، رابرٹ دبلیو. کریستی

ترجمہ

جلال صمیمی، ابوالقاسم جمشیدی

مسیب جمشیدی پور، ناصر علیزادہ قمصری



Foundations of Electromagnetic Theory

John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy

Third Edition

Addison-Wesley, 1979

مبانی نظریه الکترومغناطیس
تألیف جان ار. ریتس، فردریک جی. میلفورد، رابرت دبلیو. کریستی
ترجمه دکتر جلال صمیمی، دکتر ابوالقاسم جمشیدی، مسیب جمشیدی پور، ناصر علیزاده قمصری
ویراسته دکتر جلال صمیمی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۸
چاپ دهم ۱۳۸۳
تعداد ۲۰۰۰
حروفچینی: بینش نو
لیتوگرافی: تندیس
چاپ و صحافی: مازیار
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

ریتس، جان
مبانی نظریه الکترومغناطیس / جان ار. ریتس، فردریک جی. میلفورد، رابرت دبلیو. کریستی؛ ترجمه جلال صمیمی... [و دیگران]. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.
سیزده، ۶۹۵ ص. : مصور، جدول، نمودار. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۴۷۷. فیزیک؛ ۴۰)
فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.
عنوان اصلی: Foundations of electromagnetic theory, 3rd ed.
این کتاب در سال ۱۳۵۵ تحت عنوان «اصول تئوری الکترومغناطیس» توسط دانشگاه فردوسی مشهد منتشر شده است.
نمایه.

چاپ دهم: ۱۳۸۳.
ISBN 964-01-0477-9
۱. نظریه الکترومغناطیس. الف. میلفورد، فردریک ج. Christy, Robert W. صمیمی، جلال، ۱۳۱۹. — مترجم. د. کریستی، رابرت W. Christy, Robert W. ج. صمیمی، جلال، ۱۳۱۹. — مترجم. د. مرکز نشر دانشگاهی. ه. عنوان. و. عنوان: اصول تئوری الکترومغناطیس.
۶الف ۷۰/ر ۱۳۶۸
۵۲۰/۱۴۱
۱۳۶۸
کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان پیشگفتار
۱	
۵	۱. آنالیز برداری
۵	۱.۱ تعریفها
۶	۲.۱ جبر برداری
۱۰	۳.۱ شیب
۱۴	۴.۱ انتگرال گیری برداری
۱۶	۵.۱ واگرایی
۱۹	۶.۱ تاو
۲۲	۷.۱ عملگر دیفرانسیلی برداری ▽
۲۲	۸.۱ عملیات تکمیلی
۲۸	۹.۱ خلاصه مطالب
۲۹	مسائل
۳۳	۲. الکتروستاتیک
۳۳	۱.۲ بار الکتریکی

۳۴	۲۰۲ قانون کولن
۳۷	۳۰۲ میدان الکتریکی
۴۰	۴۰۲ پتانسیل الکتروستاتیکی
۴۳	۵۰۲ رساناها و عایقها
۴۴	۶۰۲ قانون گاوس
۴۷	۷۰۲ کاربرد قانون گاوس
۵۰	۸۰۲ دوقطبی الکتریکی
۵۳	۹۰۲ بسط میدانهای الکتریکی برحسب چند قطبیهها
۵۶	۱۰۰۲ تابع دلتای دیراک
۵۸	۱۱۰۲ خلاصه مطالب
۶۱	مسائل
۶۶	۳. حل مسائل الکتروستاتیک
۶۷	۱۰۳ معادله پواسون
۶۸	۲۰۳ معادله لاپلاس
۷۰	۳۰۳ معادله لاپلاس بایک متغیر مستقل
۷۱	۴۰۳ حل معادله لاپلاس درمختصات کروی. هماهنگهای منطقه ای
۷۴	۵۰۳ کره رسانا در میدان الکتریکی یکنواخت
۷۶	۶۰۳ هماهنگهای استوانه ای
۷۷	* ۷۰۳ معادله لاپلاس درمختصات قائم
۷۹	* ۸۰۳ معادله لاپلاس در فضای دوبعدی. جواب عمومی
۸۰	۹۰۳ تصویرهای الکتروستاتیکی
۸۳	۱۰۰۳ بار نقطه ای و کره رسانا
۸۵	۱۱۰۳ بارهای خطی و تصویرهای خطی
۸۷	۱۲۰۳ دستگاه رساناها. ضرایب پتانسیل
۸۹	۱۳۰۳ جوابهای معادله پواسون

۹۰	۱۴.۳ خلاصه مطالب
۹۱	مسائل
۹۲	منابع
۹۶	۴. میدان الکتروستاتیک در محیطهای دی الکتریک
۹۷	۱۰.۴ قطبش
۹۸	۲.۴ میدان خارجی يك محیط دی الکتریک
۱۰۲	۳.۴ میدان الکتریکی در داخل يك دی الکتریک
۱۰۶	۴.۴ قانون گاوس در دی الکتریکها. جابه جایی الکتریکی
۱۰۸	۵.۴ پذیرفتاری الکتریکی و ثابت دی الکتریک
۱۱۱	۶.۴ بار نقطه ای در يك شاره دی الکتریک
۱۱۳	۷.۴ شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان
۱۱۶	۸.۴ مسائل مربوط به مقادیر مرزی در دی الکتریکها
۱۱۷	۹.۴ کره دی الکتریک در يك میدان الکتریکی یکنواخت
۱۱۹	* ۱۰.۴ نیروی وارد بر يك بار نقطه ای واقع در يك دی الکتریک
۱۲۲	۱۱.۴ خلاصه مطالب
۱۲۴	مسائل
۱۲۸	۵. نظریه میکروسکوپی دی الکتریکها
۱۲۸	۱.۵ میدان مولکولی در دی الکتریک
۱۳۲	۲.۵ دو قطبیهای القایی. يك مدل ساده
۱۳۴	۳.۵ مولکولهای قطبی. فرمول لانژون - دی
۱۳۷	* ۴.۵ قطبش دائمی. فروالکتریسته
۱۴۰	۵.۵ خلاصه مطالب
۱۴۲	مسائل

۱۴۳	۶. انرژی الکتروستاتیکی
۱۴۴	۱۰.۶ انرژی پتانسیل گروهی از بارهای نقطه‌ای
۱۴۶	۲۰.۶ انرژی الکتروستاتیکی يك توزيع بار
۱۴۹	۳۰.۶ چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی
۱۵۱	۴۰.۶ انرژی دستگاه رساناهای باردار. ضرایب پتانسیل
۱۵۴	۵۰.۶ ضرایب ظرفیت و ضرایب القا
۱۵۴	۶۰.۶ خازنها
۱۵۷	۷۰.۶ نیروها و گشتاور نیروها
۱۶۱	* ۸۰.۶ نیروی وارد بر توزیع بار
۱۶۲	* ۹۰.۶ تعبیر ترمودینامیکی انرژی الکتروستاتیکی
۱۶۳	۱۰۰.۶ خلاصهٔ مطالب
۱۶۵	مسائل
۱۷۰	۷. جریان الکتریکی
۱۷۱	۱۰.۷ ماهیت جریان
۱۷۳	۲۰.۷ چگالی جریان. معادلهٔ پیوستگی
۱۷۵	۳۰.۷ قانون اهم. رسانندگی
۱۷۹	۴۰.۷ جریانهای پایا در محیطهای پیوسته
۱۸۳	۵۰.۷ نزدیک شدن به تعادل الکتروستاتیکی
۱۸۵	۶۰.۷ شبکه‌های مقاومت و قوانین کیرشهوف
۱۹۰	۷۰.۷ نظریهٔ میکروسکوپی رسانش
۱۹۴	۸۰.۷ خلاصهٔ مطالب
۱۹۷	مسائل
۲۰۲	۸. میدان مغناطیسی جریانهای پایا

۲۰۸ نیروهای وارد بر رساناهای حامل جریان

۲۰۶

۳۰۸ قانون بیو و ساوار

۲۱۰

۴۰۸ کاربردهای مقدماتی قانون بیو و ساوار

۲۱۲

۵۰۸ قانون مداری آمپر

۲۱۸

۶۰۸ پتانسیل برداری مغناطیسی

۲۲۱

۷۰۸ میدان مغناطیسی یک مدار در فواصل دور

۲۲۳

۸۰۸ پتانسیل نردهای مغناطیسی

۲۲۵

۹۰۸ شار مغناطیسی

۲۲۷

۱۰۰۸ خلاصه مطالب

۲۲۸

مسائل

۲۳۱

۹. خواص مغناطیسی ماده

۱۰۹ مغناطش

۲۳۶

۲۰۹ میدان مغناطیسی ناشی از ماده مغناطیده

۲۴۰

۳۰۹ پتانسیل مغناطیسی نردهای و چگالی قطب مغناطیسی

۲۴۴

۴۰۹ چشمه‌های میدان مغناطیسی. شدت مغناطیسی

۲۴۵

۵۰۹ معادلات میدان

۲۴۷

۶۰۹ پذیرفتاری و تراوایی مغناطیسی. پسماند

۲۴۸

۷۰۹ شرایط مرزی برای بردارهای میدان

۲۵۵

۸۰۹ مسائل مقادیر مرزی شامل مواد مغناطیسی

۲۵۸

۹۰۹ مدارهای جریان شامل محیطهای مغناطیسی

۲۶۴

* ۱۰۰۹ مدارهای مغناطیسی

۲۶۸

* ۱۱۰۹ مدارهای مغناطیسی شامل آهنرباهای دائم

۲۷۱

۱۲۰۹ خلاصه مطالب

۲۷۴

مسائل

۲۷۶

۲۸۱	۱۰*. نظریه میکروسکوپی مغناطیس
۲۸۲	۱.۱۰ میدان مولکولی در درون ماده
۲۸۴	۲.۱۰ منشأ دیامغناطیس
۲۸۶	۳.۱۰ منشأ پارامغناطیس
۲۸۸	۴.۱۰ نظریه فرومغناطیس
۲۹۱	۵.۱۰ حوزه‌های فرومغناطیسی
۲۹۴	۶.۱۰ فریتها
۲۹۵	۷.۱۰ خلاصه مطالب
۲۹۶	مسائل
۲۹۸	۱۱. القای الکترومغناطیسی
۲۹۹	۱.۱۱ القای الکترومغناطیسی
۳۰۴	۲.۱۱ خودالقا
۳۰۷	۳.۱۱ القای متقابل
۳۰۹	۴.۱۱ فرمول نویمان
۳۱۰	۵.۱۱ القاگرها در اتصالات متوالی و موازی
۳۱۳	۶.۱۱ خلاصه مطالب
۳۱۴	مسائل
۳۱۹	۱۲. انرژی مغناطیسی
۳۲۰	۱.۱۲ انرژی مغناطیسی مدارهای جفت شده
۳۲۳	۲.۱۲ چگالی انرژی در میدان مغناطیسی
۳۲۵	۳.۱۲ نیروها و گشتاور نیروهای وارد بر مدارهای صلب
۳۲۹	۴.۱۲* اتلاف پسماند
۳۳۳	۵.۱۲ خلاصه مطالب
۳۳۴	مسائل

۳۳۸	۱۳. جریانهای کند تغییر
۳۳۸	۱۰۱۳ مقدمه
۳۴۰	۲۰۱۳ رفتار گذرا و رفتار حالت پایا
۳۴۰	۳۰۱۳ قوانین کیرشهوف
۳۴۲	۴۰۱۳ رفتار گذرای مقدماتی
۳۴۶	۵۰۱۳ رفتار حالت پایای يك مدار ساده متوالی
۳۴۹	۶۰۱۳ اتصالهای متوالی و موازی مقاومتهای ظاهری
۳۵۱	۷۰۱۳ توان و ضرایب توان
۳۵۲	۸۰۱۳ تشدید
۳۵۵	* ۹۰۱۳ القاهای متقابل در مدارهای AC
۳۶۰	* ۱۰۰۱۳ معادلات حلقه‌ای و گره‌ای
۳۶۴	* ۱۱۰۱۳ مقاومت ظاهری نقطه تحريك و مقاومت ظاهری انتقال
۳۶۴	۱۲۰۱۳ خلاصه مطالب
۳۶۷	مسائل
۳۷۱	۱۴. فیزیک پلاسما
۳۷۳	۱۰۱۴ خنثایی الکتریکی در پلاسما
۳۷۵	۲۰۱۴ مدارهای ذره و حرکت رانشی (سوقی) در پلاسما
۳۸۱	۳۰۱۴ آینه‌های مغناطیسی
۳۸۲	۴۰۱۴ معادلات هیدرومغناطیسی
۳۸۶	۵۰۱۴ اثر تنگش
۳۸۹	۶۰۱۴ دستگاههای محصور سازی مغناطیسی برای گداخت گرما هسته‌ای
	کنترل شده
۳۹۰	۷۰۱۴ نوسانهای پلاسما و حرکت موجی
۳۹۵	۸۰۱۴ کاربرد کاوه‌ها برای اندازه‌گیریهای پلاسما
۴۰۱	۹۰۱۴ خلاصه مطالب

۲۰۲ مسائل

۲۰۴ ۱۵. خواص الکترومغناطیسی ابررساناها

۲۰۴ ۱۰۱۵ تاریخ ابررسانایی

۲۰۷ ۲۰۱۵ رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل ابررساناها

۲۰۹ ۳۰۱۵ مثالهایی شامل طرد کامل شار

۲۱۳ ۴۰۱۵ معادلات لندن

۲۱۷ ۵۰۱۵* مثالهایی شامل معادلات لندن

۲۲۲ ۶۰۱۵ خلاصه مطالب

۲۲۳ مسائل

۲۲۴ ۱۶. معادلات ماکسول

۲۲۴ ۱۰۱۶ تعمیم قانون آمپر. جریان جابه جایی

۲۲۷ ۲۰۱۶ معادلات ماکسول و مبانی تجربی آنها

۲۲۸ ۳۰۱۶ انرژی الکترومغناطیسی

۲۳۲ ۴۰۱۶ معادله موج

۲۳۷ ۵۰۱۶ شرایط مرزی

۴۴۲ ۶۰۱۶ معادله موج با چشمه ها

۴۲۹ ۷۰۱۶ خلاصه مطالب

۴۵۱ مسائل

۴۵۶ ۱۷. انتشار امواج الکترومغناطیسی

۴۵۶ ۱۰۱۷ امواج تخت تکفام در محیطهای نارسانا

۴۶۲ ۲۰۱۷ قطبش

۴۶۵ ۳۰۱۷ چگالی و شار انرژی

۴۶۸ ۴۰۱۷ امواج تخت تکفام در محیطهای رسانا

۴۷۵ ۵۰۱۷* امواج کروی

۲۸۲	۶.۱۷ خلاصه مطالب
۴۸۶	مسائل

۴۸۹	۱۸. امواج درناحیه‌های مرزدار
۴۸۹	۱.۱۸ انعکاس و شکست در مرز دومحیط نارسانا. فرود عمودی
۴۹۳	۲.۱۸ انعکاس و شکست در مرز دومحیط نارسانا. فرود مایل
۵۰۱	۳.۱۸ زاویه بروستر. زاویه حد
۵۰۳	۴.۱۸ ضرایب فرنل مختلف. انعکاس از یک سطح رسانا
۵۱۴	۵.۱۸ انعکاس وانتقال توسط یک لایه نازک. تداخل
۵۲۲	۶.۱۸ انتشار بین دو صفحه رسانای موازی
۵۲۸	۷.۱۸ موجبرها
۵۳۲	۸.۱۸ مشددهای حفره‌ای
۵۳۴	۹.۱۸ خلاصه مطالب
۵۳۷	مسائل

۵۴۱	۱۹. پاشندگی نوری در مواد
۵۴۱	۱.۱۹ مدل نوسانگر هماهنگ درود - لورنتس
۵۴۸	۲.۱۹ جذب تشدید توسط بارهای مقید
۵۵۷	۳.۱۹ نظریه الکترون آزاد درود
۵۶۴	* ۴.۱۹ واهلش دی الکتریکی. رسانش الکترولیتی
۵۷۰	۵.۱۹ روابط کرامرز - کرونیگ
۵۷۶	۶.۱۹ خلاصه مطالب
۵۷۷	مسائل

۵۸۱	۲۰. گسیل تابش
۵۸۱	۱.۲۰ تابش از یک دو قطبی نوسان کننده
۵۸۶	۲.۲۰ تابش از یک آنتن نیم موج

۵۸۸	۳۰۲۰ تابش از يك گروه بارمتحرك
۵۹۳	۴۰۲۰* میدانهای منطقه‌های نزدیک و بینابین
۵۹۶	۵۰۲۰ میرایی تابشی. سطح مقطع تامسون
۶۰۰	۶۰۲۰ خلاصه مطالب
۶۰۲	مسائل
۶۰۵	۲۱. الکترودیناميك
۶۰۵	۱۰۲۱ پتانسیلهای لینارد - ویشرت
۶۰۸	۲۰۲۱ میدان يك بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت
۶۱۳	۳۰۲۱ میدان بار نقطه‌ای شتابدار
۶۱۶	۴۰۲۱ میدانهای تابش برای سرعتهای کم
۶۱۹	۵۰۲۱ خلاصه مطالب
۶۱۹	مسائل
۶۲۱	۲۲. نظریه خاص نسبیت
۶۲۲	۱۰۲۲ فیزیک قبل از سال ۱۹۰۰
۶۲۵	۲۰۲۲ تبدیل لورنتس و اصول موضوعی نسبیت خاص انیشتین
۶۳۰	۳۰۲۲ هندسه زمان - مکان
۶۳۲	۴۰۲۲ تبدیل لورنتس به عنوان يك تبدیل متعامد
۶۳۴	۵۰۲۲ شکل هموردای معادلات الکترومغناطیس
۶۳۹	۶۰۲۲ قانون تبدیل برای میدان الکترومغناطیسی
۶۴۱	۷۰۲۲ میدان يك بار نقطه‌ای با حرکت یکنواخت
۶۴۳	۸۰۲۲ خلاصه مطالب
۶۴۵	مسائل
۶۴۷	پیوست ۱ تبدیل مختصات، بردارها، و تانسورها
۶۵۴	پیوست ۲ دستگاههای یکاها

پیوست ۳	عملگرهای دیفرانسیلی برداری	۶۵۹
پیوست ۴	تابع دلتای دیراک	۶۶۱
پیوست ۵	الکتریسیته‌دار کردن ساکن	۶۶۴
جواب مسائل شماره فرد		۶۶۶
فهرست راهنما		۶۷۹

پیشگفتار

با اینکه معادلات ماکسول حدود يك صد سال پیش فرمولبندی شده است، ولی مبحث الکترومغناطیس همچنان در حال تغییر است. امروزه دانشجویان سالهای آخر دوره‌های کارشناسی علوم، که روی سخن ما با آنهاست، با درکی کیفی از پدیده‌های اتمی مطالعه این مبحث را شروع می‌کنند. درعین حال، این دانشجویان در ریاضیات نیز زمینه خوبی کسب کرده‌اند و برای اولین بار در موقعیتی هستند که بتوانند بعضی مسائل مهم فیزیک کلاسیک را حل کنند. این کتاب حاصل تدریس درس‌هایی درباره الکتروسیسته و مغناطیس به دانشجویان رشته فیزیک در انستیتوی تکنولوژی کیس و کالج دارتموث است. درس الکترومغناطیس برای گسترش مفاهیم آنالیز برداری، معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای، و مسائل مقادیر مرزی بسیار مناسب است. بخشهایی از کتاب که به این مسائل مربوط می‌شود طوری نوشته شده‌اند که به معلومات قبلی چندانی نیاز ندارند.

به اعتقاد ما روش صحیح آموزش در این سطح تکیه بیشتر بر آزمایش‌های تجربی است، و ما نیز با ارائه دقیق مبانی، همین روش را دنبال کرده‌ایم. همچنین، برای ایجاد ارتباط میان جنبه‌های صوری مبحث و مسائل، تعدادی مثال مناسب منظور کرده‌ایم. درک کامل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در داخل ماده تنها پس از درک ماهیت اتمی مواد امکان پذیر است. از اینرو، در تکوین نظریه ما کروسکوپی مفاهیم مقدماتی اتمی را آزادانه به کار برده‌ایم. میدان الکتریکی ایستا در محیطهای مادی را بلافاصله پس از میدان الکتریکی در خلأ آورده‌ایم، و همین‌طور در مورد میدان مغناطوساتاتیکی، ولی خواننده می‌تواند هر دو مورد خلأ را با هم قبل از مطالعه میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در ماده مطالعه کند. برای این منظور می‌توان فصلهای ۴، ۵، ۶، ۷ (بجز بخشهای ۱۰.۷ و ۲.۷)، ۹، و ۱۰ را بعد از فصل ۸، یا حتی بعد از فصل ۱۱ مطالعه کرد. رفتار الکترومغناطیسی ما کروسکوپی دی - الکتریکها، رساناها، مواد مغناطیسی، پلاسماها، و ابررساناها به ترتیب در فصلهای ۴، ۷، ۹، ۱۴، و ۱۵ بررسی شده‌اند. بحث ساده‌ای از نظریه میکروسکوپی این مواد (بجز ابررساناها) نیز در فصلهای ۵، ۷، ۱۰، و ۱۴ آمده است.

کتاب در این ویرایش با افزودن مطالب بیشتری درباره امواج الکترومغناطیسی تغییرات اساسی کرده است. دو فصل مربوط به معادلات ماکسول در کتاب قبل در اینجا به

پنج فصل افزایش یافته است. از اینرو این کتاب را هم می‌توان در يك نیمسال تدریس کرد و هم به‌عنوان يك درس دو نیم‌ساله که در نیمسال دوم آن بیشتر انتشار و تولید تابش مورد نظر باشد.

قسمت عمده‌ای از فیزیک نوین (و مهندسی) را میدانهای الکترومغناطیسی وابسته به‌زمان که در آنها جریان جا به جایی ماکسول نقش مهمی ایفا می‌کند تشکیل می‌دهد. فصلهای ۱۶ تا ۲۵ مربوط می‌شوند به کاربرد امواج، مخصوصاً در ارتباط با نورشناسی که هم اکنون از احاطه فنی از میکروموج پیشی گرفته‌است. در فصلهای ۱۶ و ۱۷ معادلات موج کتاب قبلی با تفصیل بیشتر ارائه و مفهوم تبدیلات پیمانه‌ای معرفی شده‌است. بر مفاهیم تابع دی‌الکتریک مختلط و ضریب شکست مختلط تأکید بیشتری شده و در نتیجه فرمولها ساده‌تر و مفاهیم روشنتر شده‌اند. در فصل ۱۸ مسائل با مقادیر مرزی به تفصیل بررسی و مثالهای جالبی دربارهٔ صافیهای نوری و موجبرها منظور شده‌است. در فصل ۱۹ نظریهٔ میکروسکوپی کلاسیک انتشار موج عرضی در ماده (دی‌الکتریکها، رساناها، پلاسماها) آمده‌است. در این فصل، فصلهای ۵ و ۷ به میدانهای وابسته به‌زمان تعمیم داده می‌شود و روابط باشندگی کرامرز - کرونیگ برای تابع پاسخ خطی نیز به‌اختصار بررسی می‌شود. در فصل ۲۵ که مربوط به تولید تابش توسط آنتنها و بارهای شتابدار است، مطالب جدیدی دربارهٔ میدانهای القا، میرایی تابشی، و پراکندگی تامسون اضافه شده‌است.

ترتیب مطالب در بقیه کتاب کمی تغییر کرده‌است به‌طوری که مبحث میدانهای ایستا و جریانهای پایا قبل از معرفی قانون القای فاراده در فصل ۱۱ می‌آید، و کاربرد این قانون در مورد جریانهای کند تغییر در مدارهای AC، پلاسماها، و ابررساناها به دنبال آن در فصلهای ۱۳، ۱۴، و ۱۵ توضیح داده می‌شود. فرمولبندی نسبیتی الکترومغناطیس در آخر کتاب آمده‌است، هرچند که در هر مرحله‌ای پس از فصل ۱۶ می‌توان آن را مطالعه کرد. به بعضی از جنبه‌های نسبیتی در بررسیهای جدید نیروی مغناطیسی (در فصل ۸) و قانون فاراده (در فصل ۱۱) از پیش اشاراتی شده‌است.

از جمله تغییرات دیگر نسبت به ویرایشهای قبلی این کتاب معرفی تابع دلتای دیراک در فصل ۲ است و استفاده از آن برای ساده کردن بعضی از اثباتهای بعدی. تبدیلات متعامد به مطالب پیوست منتقل شده‌است که خواننده می‌تواند آن را در صورت تمایل همراه با فصل ۱ مطالعه کند. از نمادگذاری عملگر دل برای مشتق‌گیری برداری استفاده شده‌است. تمام جدولهای داده‌ها و همچنین ارجاعات به سایر کتب روزآمد شده، و در سر تا سر کتاب از نمادگذاری و یکاهای بین‌المللی (SI) استفاده شده‌است. (با وجود این، به یکاهای گاوسی نیز ارجاع شده‌است، زیرا از این یکاها در کتب و نشریات جاری فیزیک به‌طور گسترده استفاده می‌شود.) در بخش خلاصهٔ مطالب در انتهای هر فصل ایده‌ها و فرمولهای اساسی آن فصل مشخص شده‌اند. حدود صدوسی مسئله به مسائل افزوده شده‌است که به گسترش و کاربرد بیشتر مفاهیم کمک می‌کند.

برای کمک به خواننده، مسائل مشکلتر با ستاره مشخص شده‌اند. بخشها و فصلهایی

از کتاب که با ستاره مشخص شده‌اند برای تکوین مطالب بعدی آن ضروری نیستند و می‌توان در مطالعه فشرده کتاب آنها را حذف کرد.

ج. ر. ریتس دیربورن، میشیگان

ف. ج. میلفورد کلومبوس، اوهایو

ر. و. کریستی هانوور، نیو هامشایر

ژانویه ۱۹۷۹

آنالیز برداری

در مطالعه الکتریسته و مغناطیس می‌توانیم با به‌کار بردن نمادهای آنالیز برداری تا حد زیادی پیچیدگی نمادگذاریها را کاهش دهیم. آنالیز برداری، علاوه بر این کوتاه‌نویسی با ارزش، مفاهیم فیزیکی موجود در معادلات را هم نشان می‌دهد. در این فصل مبانی آنالیز برداری را به‌طور مختصر، اما جامع، توضیح می‌دهیم و مقدمات لازم برای مطالعه مبحث الکتریسته و مغناطیس را فراهم می‌کنیم. برای کسانی که با آنالیز برداری آشنا هستند این فصل مرور خوبی است و آنها را با نمادگذاریهای کتاب نیز آشنا می‌کند.

۱.۱ تعریفها

در فیزیک مقدماتی معمولاً با چند نوع کمیت مخصوصاً با تقسیم‌بندی کمیتها به دو دسته برداری و نردهای آشنا می‌شویم. در اینجا کافی است که کمیت نردهای را به صورت زیر تعریف کنیم

کمیت نردهای کمیتی است که با استفاده از بزرگی آن کاملاً مشخص می‌شود.

جرم، زمان، حجم، و مانند آن چند نمونه از کمیتهای نردهای اند. میدان نردهای که از تعمیم ساده مفهوم کمیت نردهای نتیجه می‌شود، تابعی است از مکان که در هر نقطه از فضا با بزرگی اش در آن نقطه کاملاً مشخص می‌شود.

بردار را می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم

بردار کمیتی است که با استفاده از بزرگی و جهت آن کاملاً مشخص می‌شود.

به عنوان مثالهایی از بردار می توان از بردار مکان نسبت به يك نقطه ثابت، شتاب، نیرو، و مانند آن نام برد. میدان برداری، که از تعمیم بردار نتیجه می شود، تابعی است از مکان که در هر نقطه از فضا با بزرگی و جهت کاملاً مشخص می شود.

این تعریفها را می توان دقیقتر و کاملتر ارائه کرد؛ در واقع، ما در پیوست ۱ تعریفهای دقیقتری مبتنی بر خواص تبدیل ارائه کرده ایم. به علاوه، گاهی به کمیتهای پیچیده تری چون تانسورها نیز بر می خوریم. ولی برای منظور ما تا فصل ۲۲ کمیتهای نرده ای و برداری کاملاً مناسب و کافی اند.

۲.۱ جبر برداری

چون خواننده با جبر کمیتهای نرده ای آشناست، برای گسترش جبر برداری از آن استفاده می کنیم. برای این کار ابتدا نمایشی از بردارها ارائه می دهیم. به همین دلیل دستگاه مختصات سه بعدی دکارتی (قائم) را معرفی می کنیم. این دستگاه سه بعدی را با سه متغیر x, y, z ، و یا بر حسب مورد با x_1, x_2, x_3 و نمایش خواهیم داد. در این دستگاه هر بردار با مؤلفه های x, y, z مشخص می شود. از اینرو، بردار V با مؤلفه های V_x, V_y, V_z اش مشخص می شود، که در آن $V_x = |V| \cos \alpha_x, V_y = |V| \cos \alpha_y, V_z = |V| \cos \alpha_z$ و $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ها زاویه میان بردار V و هر یک از محاوره های مختصات اند. کمیت نرده ای $|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ ، برابر است با بزرگی یا طول بردار V . در میدانهای برداری هر يك از مؤلفه ها را باید تابعی از x, y, z در نظر گرفت. در اینجا باید تأکید کنیم که فقط به منظور سادگی در فهم مطلب بردارها را در دستگاه مختصات دکارتی نمایش می دهیم. در واقع، کلیه تعریفها و عملیاتی که روی آنها انجام می دهیم به انتخاب دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارند.

حاصل جمع دو بردار طبق تعریف برداری است که مؤلفه های آن عبارت اند از مجموع مؤلفه های مربوط به دو بردار اصلی. اگر حاصل جمع A و B را با C نشان دهیم، داریم

$$C = A + B \quad (۱.۱)$$

و

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z \quad (۲.۱)$$

این تعریف کاملاً معادل است با قاعده متوازی الاضلاع در جمع بردارها.

تفریق برداری را با استفاده از بردار منفی بردار تعریف می کنیم. بردار منفی هر بردار، برداری است که مؤلفه های آن با منفی مؤلفه های بردار اصلی برابرند. بنابرین، اگر A يك بردار باشد، $-A$ به صورت زیر تعریف می شود

$$(-\mathbf{A})_x = -A_x, \quad (-\mathbf{A})_y = -A_y, \quad (-\mathbf{A})_z = -A_z \quad (۳.۱)$$

بنابراین، عمل تفریق برداری را به کمک جمع يك بردار بامنفی بردار دیگر تعریف می کنیم و به صورت زیر می نویسیم

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (۴.۱)$$

از شرکت پذیری و جابه جایی پذیری اعداد حقیقی نتیجه می شود که جمع (و تفریق) برداری نیز شرکت پذیر و جابه جایی پذیر است. این مطلب بانماذگذاری برداری به صورت زیر نوشته می شود

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad (۵.۱)$$

به عبارت دیگر، همان طور که در طرف راست رابطه بالا دیده می شود، وجود پرانتزها غیر ضروری است.

اکنون به فرایند ضرب می پردازیم و ملاحظه می کنیم که ساده ترین ضربها عبارت است از ضرب يك کمیت نرده ای در يك بردار. نتیجه این عمل، برداری است که هر مؤلفه آن برابر است با حاصل ضرب آن کمیت نرده ای در مؤلفه متناظر از بردار اصلی. اگر c کمیت نرده ای و $\mathbf{A}$ بردار باشد، حاصل ضرب $c\mathbf{A}$ بردار $\mathbf{B} = c\mathbf{A}$ است که به صورت زیر تعریف می شود

$$B_x = cA_x, \quad B_y = cA_y, \quad B_z = cA_z \quad (۶.۱)$$

واضح است که هر گاه $\mathbf{A}$ يك میدان برداری و c يك میدان نرده ای باشد، آنگاه $\mathbf{B}$ يك میدان جدید برداری است که الزاماً مضرب ثابتی از میدان اصلی نخواهد بود. حال اگر بخواهیم دو بردار را در یکدیگر ضرب کنیم، دو امکان پیش می آید که ضرب برداری و ضرب نرده ای نامیده می شوند. ابتدا ضرب نرده ای را بررسی می کنیم. توجه کنید که این نام از ماهیت نرده ای حاصل ضرب گرفته شده است، اگر چه گاهی ضرب داخلی و ضرب نقطه ای نیز به آن گفته می شود. تعریف ضرب نرده ای، که به صورت $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ نوشته می شود، چنین است

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (۷.۱)$$

این تعریف معادل است با حاصل ضرب بزرگی دو بردار در کسینوس زاویه میان آنها، که تعریف دیگر و شاید آشناتری است. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برهم عمود باشند داریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

ضرب نرده ای جابه جایی پذیر است. طول $\mathbf{A}$ برابر است با

$$|A| = \sqrt{A \cdot A}$$

حاصل ضرب برداری دو بردار يك بردار است و به همین دلیل آن را ضرب برداری می گویند. نامهای دیگر آن ضرب خارجی و ضرب ضرب برداری است. ضرب برداری را به صورت $A \times B$ می نویسند. هر گاه C حاصل ضرب برداری A و B باشد، آنگاه $C = A \times B$ ، یا

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x \quad (۸.۱)$$

لازم به تذکر است که ضرب برداری دو بردار به ترتیب قرار گرفتن دو عامل ضرب بستگی دارد و با تعویض ترتیب آنها حاصل ضرب منفی می شود

$$B \times A = -A \times B$$

در نتیجه

$$A \times A = 0$$

این تعریف با تعریف زیر هم ارز است. بزرگی حاصل ضرب برداری برابر است با حاصل ضرب بزرگی دو بردار در سینوس زاویه میان آنها، و جهت آن با قاعده پیچ راستگرد مشخص می شود.^۱

ضرب برداری را می توان به کمک دترمینان به راحتی به خاطر سپرد. اگر i, j و k بردارهای یکد، یعنی بردارهایی با بزرگی واحد و به ترتیب در جهات x, y و z باشند، داریم

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (۹.۱)$$

اگر این دترمینان را با قواعد معمولی حساب کنیم، نتیجه دقیقاً همان تعریف ما از ضرب برداری خواهد بود.

عملیات جبری بالا را می توان به صورت مختلف با یکدیگر ترکیب کرد. اکثر نتایجی که بدین طریق به دست می آیند بدیهی اند، اما دونوع ضرب سه گانه برداری وجود دارد که به خاطر اهمیتشان لازم است از آنها صریحاً یاد کنیم. به راحتی می توان نشان داد که

۱. A را از طریق کوچکترین زاویه ای که با B می سازد به طرف B می چرخانیم. اگر پیچ راستگردی به همین ترتیب پیچد، در جهتی عمود بر دو بردار A و B پیش می رود. این راستا راستای $A \times B$ است.

حاصل ضرب سه گانه نرده ای $D = A \cdot B \times C$ با دترمینان زیر برابر است

$$D = A \cdot B \times C = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -B \cdot A \times C \quad (10.1)$$

این حاصل ضرب با تعویض جای علائم ضرب نرده ای و برداری و یا تعویض جای بردارها با جایگشت دوری تغییر نمی کند؛ به پرانترها نیازی نیست زیرا ضرب برداری کمیت نرده ای در بردار تعریف نشده است. ضرب سه گانه جالب توجه دیگتر عبارت است از ضرب سه گانه برداری $D = A \times (B \times C)$. با به کار بردن مکرر تعریف حاصل ضرب برداری، یعنی معادله (۸.۱)، نتیجه می گیریم

$$D = A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (11.1)$$

که غالباً به قاعده «بك - كب» مشهور است. توجه کنید که در ضرب سه گانه برداری وجود پرانترها ضروری است، زیرا بدون آنها نمی توانیم ضرب را درست تعریف کنیم. در اینجا ممکن است این پرسش مطرح شود که آیا تقسیم برداری امکان پذیر است یا نه. بدیهی است که تقسیم يك بردار بر يك کمیت نرده ای را می توانیم به صورت ضرب بردار در عکس آن کمیت نرده ای تعریف کنیم. ولی تقسیم يك بردار بر بردار دیگر تنها وقتی ممکن است که دو بردار با هم موازی باشند. از طرف دیگر، می توانیم با نوشتن جوابهای عمومی برای معادلات برداری عملیاتی خیلی شبیه به تقسیم انجام دهیم. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$c = A \cdot X \quad (12.1)$$

که در آن c يك کمیت نرده ای معلوم، A يك بردار معلوم، و X يك بردار مجهول است. حل عمومی این معادله به صورت زیر است

$$X = \frac{cA}{A \cdot A} + B \quad (13.1)$$

که در آن B برداری است با بزرگی اختیاری و عمود بر A ؛ یعنی، $A \cdot B = 0$. عملیاتی که انجام دادیم خیلی شبیه است به عملیات تقسیم c بر A ، به عبارت درست تر ما صورت کلی بردار X را طوری پیدا کرده ایم که در معادله (۱۲.۱) صدق کند. در اینجا جواب منحصر به فردی وجود ندارد، و این واقعیت وجود بردار B را توجیه می کند. به همین طریق می توانیم معادله برداری زیر را در نظر بگیریم

$$C = A \times X \quad (14.1)$$

که در آن A و C دو بردار معلوم و X برداری مجهول است. هرگاه $C \cdot A = 0$ باشد جواب عمومی این معادله عبارت خواهد بود از

$$X = \frac{C \times A}{A \cdot A} + kA \quad (15.1)$$

که در آن k يك كمیت نروده‌ای اختیاری است. ولی، اگر $C \cdot A \neq 0$ ، جوابی وجود ندارد. این نتیجه نیز تقریباً همان خارج قسمت C بر A است؛ ضریب k حاکی از آن است که جواب معادله منحصر به فرد نیست. اگر X الزاماً هم در معادله (۱۲.۱) و هم در معادله (۱۴.۱) صدق کند، آن وقت جواب (چنانچه جوابی وجود داشته باشد) منحصر به فرد است و به صورت زیر خواهد بود

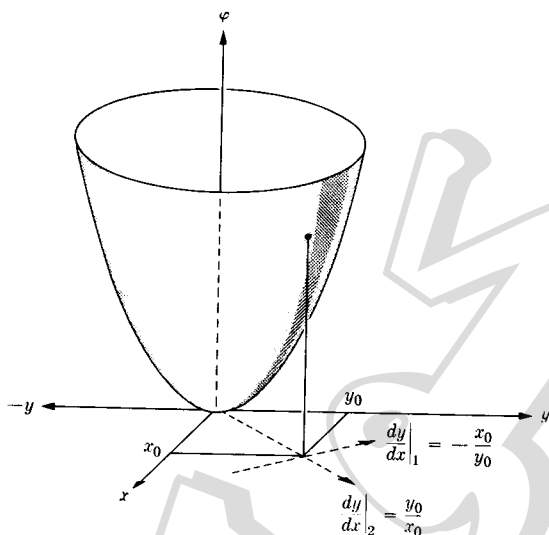
$$X = \frac{C \times A}{A \cdot A} + \frac{cA}{A \cdot A} \quad (16.1)$$

۳.۱ شیب

اکنون مطالب بالا را به مشتق گیری و انتگرال گیری، یعنی به حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری تعمیم می‌دهیم. ساده ترین تعمیم، رابطه میان يك میدان برداری خاص و مشتقهای يك میدان نروده‌ای است. ابتدا بهتر است با مفهوم مشتق جهتی يك تابع چند متغیری آشنا شویم. مشتق جهتی عبارت است از آهنگ تغییر تابع در يك جهت مشخص، و برای تابع نروده‌ای φ معمولاً آن را به صورت $d\varphi/ds$ نمایش می‌دهند؛ باید توجه کرد که ds تغییر مکان بی‌تهایت کوچکی است در جهت مورد نظر، و ds بزرگی نروده‌ای ds است. هرگاه dx ، dy ، و dz مؤلفه‌های ds باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta s} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \end{aligned}$$

برای روشن شدن مفهوم مشتق جهتی، يك تابع نروده‌ای دو متغیری را در نظر بگیرید. مثلاً، $\varphi(x, y)$ يك میدان نروده‌ای دو بعدی را نمایش می‌دهد. φ را می‌توانیم به صورت تابعی از x و y رسم کنیم، همان طور که تابع $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ را در شکل ۱۰.۱ رسم کرده ایم. مقدار مشتق جهتی در نقطه x_0, y_0 به جهت بستگی دارد. اگر جهت متناظر با $dy/dx = -x_0/y_0$ را انتخاب کنیم، نتیجه زیر به دست می‌آید



شکل ۱۰۱ نمایش تابع $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ بر حسب x و y در نمودار سه بعدی.

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{x_0, y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \left[2x_0 - 2y_0 \cdot \frac{x_0}{y_0} \right] \frac{dx}{ds} = 0 \quad (الف \ ۱۷.۱)$$

و چنانچه جهت متناظر با $dy/dx = y_0/x_0$ را انتخاب کنیم خواهیم داشت

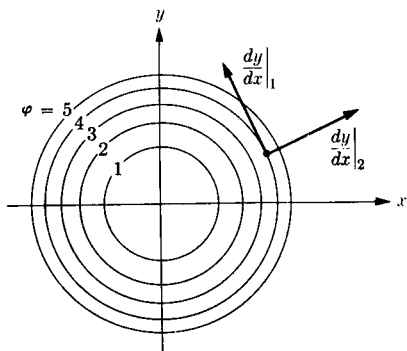
$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{x_0, y_0} = \left(2x_0 + 2 \frac{y_0^2}{x_0} \right) \sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2 + y_0^2}} = 2\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (ب \ ۱۷.۱)$$

زیرا $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ به عنوان سومین امکان $dy/dx = \alpha$ را انتخاب می‌کنیم، در این صورت

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{x_0, y_0} = (2x_0 + 2\alpha y_0)(1 + \alpha^2)^{-1/2} \quad (ج \ ۱۷.۱)$$

اگر از این عبارت نسبت به α مشتق بگیریم و نتیجه را مساوی صفر قرار دهیم، مقدار α که به ازای آن مقدار مشتق جهتی بیشینه یا کمینه می‌شود، به دست می‌آید. پس از انجام عملیات رابطه $\alpha = y_0/x_0$ به دست می‌آید، یعنی جهتی که آهنگ تغییرات تابع $\varphi = x^2 + y^2$ بیشینه می‌شود جهت شعاعی است. اگر جهت شعاعی به سمت خارج باشد این بیشینه، بیشینه آهنگ افزایش و اگر به طرف داخل باشد بیشینه آهنگ کاهش یا کمینه آهنگ افزایش است. در جهتی که با $dy/dx = -x_0/y_0$ مشخص می‌شود آهنگ تغییر $x^2 + y^2$ برابر صفر است. این جهت بر دایره $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ مماس است. واضح است که روی

این منحنی، تابع $\varphi = x^2 + y^2$ تغییر نمی‌کند. جهتی که در آن $d\varphi/ds$ صفر است جهت منحنی $\varphi = \text{const.}$ را در نقطه مورد نظر معین می‌کند. این خطوط، که در مورد تابع $x^2 + y^2$ دایره‌ای هستند با خطوط تراز یا خطوط ارتفاع ثابتی که در نقشه‌های توپوگرافی دیده می‌شود کاملاً شبیه‌اند. شکل ۲.۱ تابع $\varphi = x^2 + y^2$ را نشان می‌دهد که به صورت نقشه خطوط تراز ترسیم شده است.



شکل ۲.۱ تابع $\varphi(x, y)$ مربوط به شکل ۱.۱ که به صورت نقشه خطوط تراز دوبعدی رسم شده است.

مفهوم خطوط تراز را می‌توانیم به یک تابع سه متغیری که در آن سطوح $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ سطوح تراز یا سطوح هم‌پتانسیل نامیده می‌شوند تعمیم دهیم. قیاس سه بعدی شکل ۲.۱ تنها راه عملی ترسیم میدان نرده‌ای برای فضای سه بعدی است. اکنون می‌توانیم شیب تابع نرده‌ای را به صورت زیر تعریف کنیم

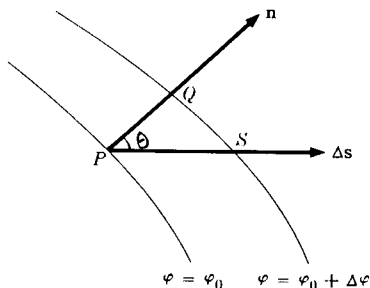
شیب تابع نرده‌ای φ برداری است که بزرگی آن برابر بیشینه مشتق جهتی در نقطه مورد نظر و جهت آن جهت بیشینه مشتق جهتی در آن نقطه است.

واضح است که جهت شیب در هر نقطه عمود است بر سطح تراز φ در آن نقطه. متداولترین نمادهای شیب ∇ و grad است، که از این دو ما غالباً دومی را به کار خواهیم برد. مشتق جهتی بر حسب شیب با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\text{grad } \varphi| \cos \theta \quad (۱۸.۱)$$

که در آن θ زاویه میان جهت ds و جهت شیب است. این رابطه مستقیماً از روی شکل ۳.۱ نتیجه می‌شود. اگر ds را بردار تغییر مکانی که بزرگی آن ds است بگیریم، معادله (۱۸.۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{d\varphi}{ds} = \text{grad } \varphi \cdot \frac{ds}{ds} \quad (۱۹.۱)$$



شکل ۳.۱ قسمتهایی از دو سطح ترا تابع $\varphi(x, y, z)$ در اینجا $|\text{grad } \varphi|$ در نقطه P مساوی است با حد $\Delta\varphi/\overline{PQ}$ وقتی که $\overline{PQ} \rightarrow 0$ و $d\varphi/ds$ برابر است با حد متناظر $\Delta\varphi/\overline{PS}$.

به کمک این معادله می توان شکل صریح شیب را در هر دستگاه مختصاتی که در آن شکل ds معلوم باشد، پیدا کرد. در دستگاه مختصات قائم می دانیم که $ds = i dx + j dy + k dz$ همچنین می دانیم که

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

از این معادله و معادله (۱۹.۱) نتیجه می شود که

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = (\text{grad } \varphi)_x dx + (\text{grad } \varphi)_y dy + (\text{grad } \varphi)_z dz$$

اگر ضرایب دیفرانسیلهای متغیرهای مستقل در دو طرف این معادله را مساوی هم قرار دهیم، در مختصات قائم خواهیم داشت

$$\text{grad } \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (20.1)$$

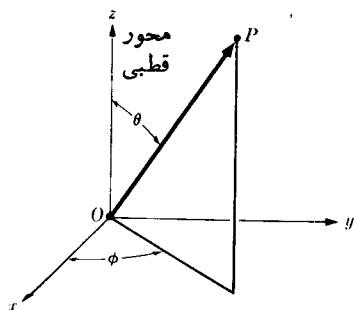
در موارد پیچیده تر هم روش کار همین است. در مختصات قطبی کروی، که در آن r ، θ ، و ϕ مطابق شکل ۴.۱ تعریف می شوند، داریم

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi, \quad (21.1)$$

و

$$ds = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\phi r \sin \theta d\phi, \quad (22.1)$$

که در آن a_r ، a_θ ، و a_ϕ به ترتیب بردارهای یکه در جهات r ، θ ، و ϕ اند. با استفاده از معادله (۱۹.۱) و مساوی قرار دادن ضرایب متغیرهای مستقل، نتیجه می گیریم که در مختصات



شکل ۴.۱ تعریف مختصات قطبی
 θ, ϕ, r .

کروی

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{a}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \quad (۲۳.۱)$$

۴.۱ انتگرال گیری برداری

البته، جنبه‌های دیگری ازمشتق گیری وجود دارد که در آنها نیز سروکار ما با بردار است، با وجود این بهتر است ابتدا انتگرال برداری را بررسی کنیم. در اینجا بسته به نوع دیفرانسیلی که در انتگرال ظاهر می‌شود می‌توانیم سه نوع انتگرال را در نظر بگیریم که عبارت‌اند از انتگرال‌های خطی، سطحی، و حجمی. انتگرال‌دهی می‌تواند بردار یا یک کمیت نرده‌ای باشد؛ اما، بعضی ترکیب‌های انتگرال‌دهی و دیفرانسیل‌ها سبب پیدایش انتگرال‌هایی می‌شوند که جالب توجه نیستند. انتگرال‌هایی که در اینجا مورد نظرند عبارت‌اند از انتگرال خطی بردار، انتگرال سطحی بردار، و انتگرال‌های حجمی بردار و کمیت‌های نرده‌ای هر دو. اگر $\mathbf{F}$ بردار باشد، انتگرال خطی $\mathbf{F}$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (۲۴.۱)$$

که در آن C منحنی است که انتگرال در امتداد آن محاسبه می‌شود، و a و b نقاط مبدأ و انتها در روی این منحنی‌اند، و $d\mathbf{l}$ بردار تغییر مکان بی نهایت کوچکی است در امتداد منحنی C . چون $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ کمیتی نرده‌ای است، واضح است که نتیجه انتگرال گیری نیز کمیتی نرده‌ای خواهد بود. تعریف انتگرال خطی با تعریف ریمانی انتگرال معین مشابه است. قطعه‌ای از منحنی C میان a و b را به تعداد زیادی عنصر کوچک Δl تقسیم می‌کنیم؛ در داخل هر عنصر نقطه‌ای را انتخاب می‌کنیم و مقدار $\mathbf{F}$ را در آن نقطه به دست می‌آوریم. حاصل ضرب نرده‌ای هر عنصر در $\mathbf{F}$ متناظر با آن را تعیین، و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها را محاسبه می‌کنیم. سپس انتگرال خطی را به صورت حد این مجموع وقتی تعداد عناصر بی نهایت زیاد شود و هر عنصر به سمت صفر میل کند تعریف می‌کنیم. این تعریف را به طور

فشرده می توان به صورت زیر نوشت

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i$$

لازم به تذکر است که معمولاً انتگرال خطی نه تنها به نقاط حدی a و b بلکه به خود منحنی C ، که عمل انتگرال گیری روی آن انجام می شود نیز بستگی دارد. انتگرال خطی روی يك منحنی بسته آنقدر مهم است که نماد خاصی، به صورت زیر، برای نمایش آن در نظر گرفته شده است

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (25.1)$$

انتگرال روی يك منحنی بسته ممکن است صفر باشد یا نباشد؛ آن بردارهایی که برای آنها انتگرال خطی روی هر منحنی بسته ای صفر است از اهمیت ویژه ای برخوردارند. از اینرو غالباً به انتگرال های خطی روی منحنی های بسته نامشخص برمی خوریم، به عنوان مثال

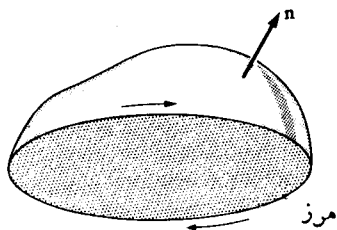
$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (26.1)$$

این نمادگذاری فقط در مواردی مفید است که انتگرال، در محدوده نسبتاً وسیعی، به شکل منحنی C بستگی نداشته باشد. در صورت وجود ابهام، بهتر است منحنی مسیر را مشخص کنیم. روش اساسی برای محاسبه انتگرال های خطی پیدا کردن يك توصیف يك پارامتری از منحنی و آنگاه استفاده از این توصیف برای بیان انتگرال خطی به صورت مجموع سه انتگرال يك بعدی معمولی است. بجز در موارد بسیار ساده، این روش بسیار طولانی و پردردسر است، لیکن خوشبختانه محاسبه انتگرال ها با این روش به ندرت ضرورت پیدا می کند. همچنان که بعداً خواهیم دید، اغلب می توان نشان داد که انتگرال خطی به مسیر میان دو حد انتگرال بستگی ندارد. در صورت اخیر می توان برای سهولت انتگرال گیری مسیر ساده ای اختیار کرد.

اگر باز هم $\mathbf{F}$ بردار باشد، انتگرال سطحی $\mathbf{F}$ به صورت زیر نوشته می شود

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \quad (27.1)$$

که در آن S سطحی است که انتگرال گیری روی آن انجام می شود، da سطح بی نهایت کوچکی است از S و $\mathbf{n}$ بردار یکه عمود بر da است. در مورد انتخاب جهت $\mathbf{n}$ ابهام دو گانه ای وجود دارد که چنانچه سطح S بسته باشد با انتخاب $\mathbf{n}$ در راستای عمود بر سطح و در جهت خارج



شکل ۵.۱ رابطه بردار عمود بر سطح، $\mathbf{n}$ ، و جهت گردش روی مرز.

آن، این ابهام از بین می‌رود. هر گاه S بسته نباشد اما متناهی باشد، در آن صورت يك خط مرزی دارد و سوی عمود تنها نسبت به سوی مثبت دلخواهی که برای پیمودن این خط مرزی انتخاب می‌شود مهم است. در این صورت سوی مثبت عمود، جهت پیشروی يك پیچ راستگرد است چنانچه پیچ در جهت سوی مثبت انتخابی روی منحنی مرزی بچرخد. این مطلب در شکل ۵.۱ نشان داده شده است. انتگرال سطحی $\mathbf{F}$ روی سطح بسته S را گاهی به صورت زیر می‌نویسند

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

آنچه را درباره انتگرال خطی گفتیم عیناً می‌توانیم برای انتگرال سطحی نیز تکرار کنیم. انتگرال سطحی کمیتی نرده‌ای است؛ مقدار آن معمولاً به سطح S بستگی دارد، و مواردی که در آنها این بستگی وجود ندارد از اهمیت خاصی برخوردارند. انتگرال سطحی را دقیقاً همانند انتگرال خطی تعریف می‌کنیم. فرمول‌بندی کامل آن را به عنوان تمرین به عهده دانشجو واگذار می‌کنیم.

هر گاه $\mathbf{F}$ بردار φ يك کمیت نرده‌ای باشد، دو انتگرال حجمی مورد نظر عبارت‌اند از

$$J = \int_V \varphi \, dv, \quad \mathbf{K} = \int_V \mathbf{F} \, dv \quad (28.1)$$

بدیهی است که J يك کمیت نرده‌ای، و $\mathbf{K}$ بردار است. تعریف این انتگرال‌ها مستقیماً به انتگرال ریمانی در فضای سه بعدی تبدیل می‌شود؛ اما توجه داشته باشید که در مورد $\mathbf{K}$ به ازای هر مؤلفه $\mathbf{F}$ يك انتگرال وجود دارد. با این انتگرال‌ها به حد کافی آشنا هستیم و نیازی به توضیح بیشتر نیست.

۵.۱ واگرایی

عملگر مهم دیگری که اساساً نوعی مشتق‌گیری است واگرایی است. واگرایی بردار $\mathbf{F}$ ، که به صورت $\text{div } \mathbf{F}$ نوشته می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود

واگرایی هر بردار حد انتگرال سطحی آن بردار در واحد حجم است هرگاه حجم محصور شده توسط آن سطح به سمت صفر میل کند، یعنی

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

واضح است که واگرایی، يك تابع نرده‌ای نقطه‌ای (میدان نرده‌ای) است، و در نقطه‌ی حدی سطح انتگرال‌گیری تعریف می‌شود. تعریف بالا چندین خاصیت دارد: به انتخاب خاصی از دستگاه محورهاى مختصات بستگی ندارد، و از آن می‌توان برای یافتن صورت صریح عملگر واگرایی در هر دستگاه مختصات خاصی استفاده کرد.

در مختصات قائم، عنصر حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ مبنای مناسبی برای یافتن صورت صریح واگرایی به دست می‌دهد. هرگاه یکی از گوشه‌های این مکعب مستطیل در نقطه x_0, y_0, z_0 و z قرار داشته باشد، آنگاه

$$F_x(x_0 + \Delta x, y, z) = F_x(x_0, y, z) + \Delta x \left. \frac{\partial F_x}{\partial x} \right|_{x_0, y, z}$$

$$F_y(x, y_0 + \Delta y, z) = F_y(x, y_0, z) + \Delta y \left. \frac{\partial F_y}{\partial y} \right|_{x, y_0, z} \quad (29.1)$$

$$F_z(x, y, z_0 + \Delta z) = F_z(x, y, z_0) + \Delta z \left. \frac{\partial F_z}{\partial z} \right|_{x, y, z_0}$$

که در آن جمله‌هایی که نسبت به $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ از مرتبه‌های بالاترند حذف شده‌اند. چون عنصرهای سطح $\Delta y \Delta z$ بر محور x و $\Delta x \Delta z$ بر محور y و $\Delta x \Delta y$ بر محور z عمودند، تعریف واگرایی به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \bigg\{ & \int F_x(x_0, y, z) \, dy \, dz \\ & + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_x}{\partial x} + \int F_y(x, y_0, z) \, dx \, dz \\ & + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_y}{\partial y} + \int F_z(x, y, z_0) \, dx \, dy \\ & + \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial F_z}{\partial z} - \int F_x(x_0, y, z) \, dy \, dz \\ & - \int F_y(x, y_0, z) \, dx \, dz - \int F_z(x, y, z_0) \, dx \, dy \bigg\} \end{aligned} \quad (30.1)$$

علامت منفی در سه انتگرال آخر بدین دلیل آمده است که در این حالتها بردار عمودی که به سمت خارج از حجم کشیده می‌شود، در جهت منفی محورهاست. این حد به راحتی محاسبه می‌شود و در نتیجه واگرایی در مختصات قائم به صورت زیر درمی‌آید

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (31.1)$$

در مختصات کروی نیز روش کار به همین طریق است. حجم محصور توسط بازه‌های مختصاتی Δr , $\Delta \theta$, $\Delta \phi$ را به عنوان حجم انتگرال گیری انتخاب می‌کنیم. این حجم مساوی است با $r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi$. چون سطح محصور توسط این بازه‌های مختصاتی به مقادیر مختصات بستگی دارد (توجه کنید که در مورد مختصات قائم چنین نیست) بهتر است که $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \Delta a$ را به صورت صریح آن

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \Delta a = F_r r^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi + F_\theta r \sin \theta \Delta \phi \Delta r + F_\phi r \Delta r \Delta \theta \quad (32.1)$$

بنویسیم. از این رابطه آشکارا پیسداست که به جای F_r باید $r^2 F_r \sin \theta$ را به صورت سری تایلور بسط دهیم. به همین ترتیب، در جمله‌های دیگر نیز باید ضریب حاصل ضربهای بازه‌های مختصاتی بسط داده شود. پس از انجام این بسطها و استفاده از آنها در محاسبه انتگرال سطحی موجود در تعریف واگرایی، نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (F_r r^2 \sin \theta) \Delta r \Delta \theta \Delta \phi \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta r \sin \theta) \Delta \theta \Delta r \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi r) \Delta \phi \Delta r \Delta \theta \right\} \end{aligned} \quad (33.1)$$

بعد از محاسبه حد، صورت صریح واگرایی در مختصات کروی چنین خواهد بود

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \quad (34.1)$$

این روش یافتن صورت صریح واگرایی در هر دستگاه مختصاتی قابل استفاده است مشروط بر اینکه شکل عنصرهای حجم و سطح یا عنصرهای طول معلوم باشند.

معنی فیزیکی واگرایی را می‌توان با ذکر مثالی از مکانیک شاره‌ها به راحتی توضیح داد. اگر $\mathbf{V}$ ، سرعت شاره، تابعی از مکان و ρ چگالی شاره باشد، $\oint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} da$ مقدار کل شاره‌ای است که در واحد زمان، حجم محصور به وسیله سطح S را ترك می‌کند. اگر شاره تراکم ناپذیر باشد، انتگرال سطحی مقدار کل چشمه شاره در درون سطح بسته را

به دست می دهد. تعریف بالا برای واگرایی نشان می دهد که واگرایی را می توان به معنی حد قدرت چشمه در واحد حجم یا چگالی چشمه يك شاره تراکم ناپذیر در نظر گرفت. اکنون می توانیم قضیه فوق العاده مهمی را در مورد واگرایی بیان و اثبات کنیم.

قضیه واگرایی. انتگرال واگرایی يك بردار در حجم V برابر است با انتگرال سطحی مؤلفه قائم آن بردار روی سطحی که V را محصور می کند؛ یعنی

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

حجم مورد نظر را به تعداد بسیار زیادی سلول كوچك تقسیم می کنیم. فرض کنید حجم سلول i ام برابر ΔV_i و به وسیله سطح S_i محصور شده باشد. آنگاه واضح است که

$$\sum_i \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \quad (35.1)$$

که در آن در هر انتگرال طرف چپ، جهت عمود به سمت خارج از حجم مورد نظر است. چون جهت به سمت خارج يك سلول برای سلول مجاور جهت به سمت داخل است، جمع تمام جمله های طرف چپ معادله (35.1) صفر می شود (مسگر آن جمله هایی که از سطح S به وجود می آیند) و معادله (35.1) در اساس ثابت می شود. اکنون برای اثبات قضیه واگرایی تعداد سلولها را به بینهایت میل می دهیم به طوری که حجم هر سلول به سمت صفر میل کند

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \left\{ \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \right\} \Delta V_i \quad (36.1)$$

در حد، جمع روی i به انتگرال روی حجم V تبدیل می شود و نسبت انتگرال سطحی روی S_i به ΔV_i به واگرایی $\mathbf{F}$ تبدیل خواهد شد. بنابراین

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \cdot dv \quad (37.1)$$

که همان قضیه واگرایی است. ما از این قضیه در فرمهای دیگری هم در توسعه جنبه های نظری الکتروسیسته و مغناطیس و هم به هنگام محاسبه انتگرالها استفاده خواهیم کرد.

$\text{curl } \mathbf{F}$ نوشته می‌شود، چنین تعریف می‌کنند

تاو هر بردار عبارت است از حد نسبت انتگرال سطحی ضرب برداری آن بردار در بردار یکه عمود بر سطح بسته (در جهت خارج آن سطح)، به حجم محصور به وسیله آن سطح، وقتی که حجم به سمت صفر میل کند؛ یعنی

$$\text{curl } \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} da \quad (38.1)$$

این تعریف و تعریف واگرایی کاملاً بهم شبیه‌اند، با این تفاوت که به جای ضرب نرده‌ای بردار در بردار یکه عمود بر سطح در جهت خارج، از ضرب برداری استفاده شده است. غیر از این مورد، از هر جهت دیگری این دو تعریف یکسان‌اند. تعریف متفاوت ولی هم‌ارز دیگری از تاو وجود دارد که بیشتر مفید است. این تعریف به صورت زیر است

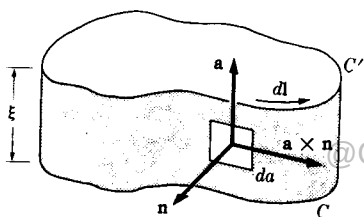
مؤلفه $\text{curl } \mathbf{F}$ در راستای بردار یکه $\mathbf{a}$ برابر است با حد انتگرال خطی در واحد سطح هنگامی که سطح محصور به خط (که بر $\mathbf{a}$ عمود است) به سمت صفر میل کند؛ یعنی

$$\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (39.1)$$

که در آن منحنی C که مرز سطح S است در صفحه عمود بر $\mathbf{a}$ قرار دارد. همان‌طور که در شکل ۶.۱ دیده می‌شود، با انتخاب منحنی تخت C و حجمی که در اثر تغییر مکان این منحنی در فاصله ξ در راستای عمود بر صفحه خودش به وجود می‌آید، می‌توان به راحتی نشان داد که دو تعریف بالا هم‌ارزند. اگر $\mathbf{a}$ بر این صفحه عمود باشد، از ضرب نرده‌ای $\mathbf{a}$ در تعریف اول تاو، معادله (۳۸.۱) به دست می‌آید

$$\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{F} da \quad (40.1)$$

چون $\mathbf{a}$ با عمود بر تمام سطوح مرزی، بجز سطح نوار باریک محصور میان منحنیهای C و C' ، موازی است فقط انتگرال روی سطح اخیر به محاسبه نیاز دارد. توجه کنید که برای



شکل ۶.۱ حجمی که در اثر تغییر مکان منحنی C در راستای بردار یکه عمودش، $\mathbf{a}$ ، به وجود می‌آید.

این سطح $\mathbf{a} \times \mathbf{n}$ درست برابر است با $d\mathbf{l}$ ، که در آن $d\mathbf{l}$ تغییر مکان بی نهایت کوچکی روی منحنی C است. علاوه بر این، چون $V = \oint_S \xi$ ، بنابراین، حد انتگرال حجمی درست برابر است با

$$\mathbf{a} \cdot \text{curl } \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \xi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

که با حذف ξ ها این رابطه به صورت تعریف دوم تاو درمی آید. این هم ارزی را می توان بدون استفاده از حجم خاصی که در اینجا به کار بردیم نیز نشان داد، اما در این صورت بسیاری از سادگی راه حل بالا از بین خواهد رفت.

صورت های مختلف تاو در دستگاه های مختصات مختلف را می توان با روشی خیلی شبیه به همان روشی که در مورد واگرایی به کار بردیم محاسبه کرد. در دستگاه مختصات قائم راحت تر است که از حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ استفاده کنیم. برای مؤلفه x تاو فقط سطوح عمود بر محورهای y و z دخالت دارند. بایادآوری $\mathbf{i} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{k}$ ، جمله های غیر صفر مؤلفه x تاو از سطوح مکعب مستطیل چنین نتیجه می دهند

$$(\text{curl } \mathbf{F})_x = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \{ [-F_y(x, y, z + \Delta z) + F_y(x, y, z)] \Delta x \Delta y + [F_z(x, y + \Delta y, z) - F_z(x, y, z)] \Delta x \Delta z \} \quad (41.1)$$

با استفاده از بسط سری تایلور و محاسبه حد، مؤلفه x تاو به دست می آید

$$(\text{curl } \mathbf{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad (42.1)$$

مؤلفه های y و z درست به همین ترتیب محاسبه می شوند

$$(\text{curl } \mathbf{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad (\text{curl } \mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (43.1)$$

تاو در مختصات قائم برابر بسط دترمینان سه در سه زیر است. با توجه به این موضوع، شکل تاو در مختصات قائم را می توانیم به راحتی به خاطر بسپاریم

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (44.1)$$

مسئله پیدا کردن شکل تاو در سایر دستگاههای مختصات فقط اندکی پیچیده تر است و آن را به عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار می کنیم.

مانند قضیه واگرایی، در اینجا نیز به قضیه مفید و مهمی در مورد تاو برمی خوریم که به قضیه استوکس معروف است.

قضیه استوکس. انتگرال خطی يك بردار روی يك منحنی بسته برابر است با انتگرال سطحی مؤلفه قائم تاو آن بردار روی هر سطحی که توسط این منحنی محصور شده باشد؛ یعنی

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \quad (۴۵.۱)$$

که در آن C منحنی بسته پیرامون سطح S است. اثبات این قضیه کاملاً شبیه است به اثبات قضیه واگرایی. سطح S را به تعداد زیادی سلول تقسیم می کنیم. مساحت سلول i ام را ΔS_i ، و منحنی محصورکننده آن را C_i می نامیم. چون همه این منحنیها را باید در يك جهت دور زد، واضح است که جمع کل انتگرالهای خطی روی C_i ها درست معادل است با انتگرال خطی روی منحنی مرزی اصلی، و سایر مقادیر با همدیگر حذف می شوند. بنابراین

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

آنچه باقی می ماند تعیین حد است وقتی که تعداد سلولها نامتناهی شود به نحوی که سطح هر سلول به سمت صفر میل کند. نتیجه فرایند تعیین حد به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \Delta S_i \\ &= \int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \end{aligned}$$

که همان قضیه استوکس است. این قضیه، مانند قضیه واگرایی، هم در توسعه نظریه الکترومغناطیس مفید است و هم در محاسبه انتگرالها به کار می آید. لازم به تذکر است که قضایای واگرایی و استوکس، هر دو، اساساً انتگرال گیری پاره ای هستند.

بحث کردیم، نماد گذاری دیگری را معرفی می کنیم. این نماد جدید، عملگر دیفرانسیلی برداری ∇ نام دارد و در دستگاه مختصات قائم به صورت زیر تعریف می شود

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (۴۶.۱)$$

دل، از يك طرف عملگر دیفرانسیلی است، زیرا تنها در جلو تابعی از (x, y, z) که بر روی آن عمل مشتق گیری انجام می شود قرار می گیرد و از طرف دیگر بردار است زیرا از قوانین جبر برداری پیروی می کند.^۱ معادله های (۲۵.۱)، (۳۱.۱)، و (۴۴.۱)، بر حسب دل، به صورت زیر نوشته می شوند

$$\text{grad} = \nabla$$

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad [۲۵.۱]$$

$$\text{div} = \nabla \cdot$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad [۳۱.۱]$$

$$\text{curl} = \nabla \times$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad [۴۴.۱]$$

عملیاتی که با دل بیان می شوند خود به انتخاب دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارند. هراتحادی که با استفاده از نمایش دکارتی قابل اثبات باشد، مستقل از دستگاه مختصات برقرار است. دل را می توان در دستگاه مختصات متعامد و غیر دکارتی (منحنی الخط) به صورتی مشابه با معادله (۴۶.۱) با عناصر فاصله مناسب بیان کرد، اما باید توجه کرد که بردارهای یکه در چنین دستگاه مختصاتی خود تابعی از مکان اند و باید از آنها مشتق گرفته شود.^۲ قضیه های انتگرالی مهم، بر طبق معادلات (۱۹.۱)، (۴۵.۱)، و (۳۷.۱)،

۱. همچنان که در پیوست ۱ نشان داده شده است، دل از لحاظ خواص تبدیل نیز بردار محسوب می شود.

۲. برای يك بحث مقدماتی در این باره رجوع کنید به:

عبارت اند از

$$\int_a^b \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b d\varphi = \varphi \Big|_a^b = \varphi_b - \varphi_a \quad (۴۷.۱)$$

$$\int_s \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad [۴۵.۱]$$

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \quad [۳۷.۱]$$

از این معادلات، انتگرال مشتق يك تابع در يك ناحیه n بعدی، بر حسب مقادیر خود تابع در مرز $(n-1)$ بعدی آن ناحیه، به ازای n برابر با ۱، ۲، و ۳، به دست می آید. چون عملگر دل از قواعد برداری پیروی می کند، بهتر است آن را در محاسباتی که شامل آنالیز برداری اند به کار ببریم، و از این به بعد شیب، و اگرایی، و تاو را بر حسب ∇ بیان می کنیم. همچنین لازم به تذکر است که ∇ يك عملگر خطی است و اگر a و b کمیت های نرده ای ثابت باشند، داریم

$$\nabla(a\varphi + b\psi) = a\nabla\varphi + b\nabla\psi$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \cdot \mathbf{F} + b\nabla \cdot \mathbf{G}$$

$$\nabla \times (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a\nabla \times \mathbf{F} + b\nabla \times \mathbf{G}$$

۸.۱ عملیات تکمیلی

عملیات مربوط به تعیین شیب، و اگرایی، و تاو از میدانهای مناسب را می توان به طور تکراری انجام داد. به عنوان مثال می توانیم و اگرایی شیب يك میدان نرده ای را حساب کنیم. نتیجه بعضی از این عملیات تکراری بر روی میدانهای خوش رفتار صفر است. یکی از این عملیات آنقدر اهمیت دارد که نام خاصی برای آن انتخاب شده است؛ بقیه را بر حسب عملیات ساده تری می توان بیان کرد. يك عملیات دو گانه مهم عبارت است از و اگرایی شیب يك میدان نرده ای. این عملگر مرکب به عملگر لاپلاسی معروف است و معمولاً آن را با نماد ∇^2 نمایش می دهند

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

@Quark_Book
H--M

در مختصات قائم داریم

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (۴۸.۱)$$

این عملگر در مبحث الکتروستاتیک بسیار پراهمیت است و در فصل ۳ به تفصیل درباره آن صحبت خواهیم کرد.

تاو شیب هر میدان نرده ای صفر است. صحت این حکم را می توان با نوشتن آن در دستگاه مختصات قائم به راحتی تحقیق کرد. اگر میدان نرده ای را با φ نمایش دهیم، آنگاه

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) + \dots = 0 \quad (۴۹.۱)$$

که درستی حکم اصلی را اثبات می کند. بر حسب نماد گذاری عملگرها

$$\nabla \times \nabla = 0$$

و اگرایی هر تاو نیز برابر صفر است. درستی این مطلب در دستگاه مختصات قائم با نوشتن

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \dots = 0 \quad (۵۰.۱)$$

یا

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

مستقیماً ثابت می شود. عملیات مرتبه دوم دیگری نیز امکان پذیر است و آن محاسبه تاو یک میدان برداری است. به عنوان تمرین می توانید نشان دهید که در دستگاه مختصات قائم

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \quad (۵۱.۱)$$

که در آن لاپلاسی هر بردار، برداری است که مؤلفه های قائم آن لاپلاسیهای مؤلفه های قائم بردار اصلی اند. در هر دستگاه مختصاتی غیر از مختصات قائم، لاپلاسی یک بردار با معادله (۵۱.۱) تعریف می شود.

راه دیگری که به کمک آن می توان کاربرد عملگرهای دیفرانسیلی برداری را تعمیم داد استفاده از آنها در ضربهای مختلف دو بردار و کمیت های نرده ای است. ترکیب عملگرهای دیفرانسیلی و حاصل ضربها به شش صورت مختلف امکان پذیر است، که در جدول ۱۰.۱ آمده اند. این اتحادها را می توان در مختصات قائم به راحتی اثبات کرد و این خود تضمینی خواهد

جدول ۱۰.۱ اتحادهای دیفرانسیلی برداری

$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$	(۱.۱.۱)
$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$	(۲.۱.۱)
$\nabla \times \nabla \varphi = 0$	(۳.۱.۱)
$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$	(۴.۱.۱)
$\nabla(\varphi \psi) = (\nabla \varphi) \psi + \varphi \nabla \psi$	(۵.۱.۱)
$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F})$	(۶.۱.۱)
$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{F} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{F}$	(۷.۱.۱)
$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}$	(۸.۱.۱)
$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = (\nabla \varphi) \times \mathbf{F} + \varphi \nabla \times \mathbf{F}$	(۹.۱.۱)
$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G}) \mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}$	(۱۰.۱.۱)

بود برای صحت اعتبار آنها در هر دستگاه مختصات دیگر. با کاربرد مکرر اتحادهای جدول ۱۰.۱، مشتق ضرب بیش از دو تابع، یا مشتق درجه دوم یا بالاتر تابع را می‌توان محاسبه کرد. بنابراین، جدول ۱۰.۱ کامل است. از روی قواعد جبر برداری و مشتق‌گیری عادی، فرمولهای این جدول را می‌توان به راحتی به خاطر سپرد. تنها مورد ابهام ممکن است در (۶.۱.۱) باشد که در آن $\mathbf{F} \cdot \nabla$ ظاهر می‌شود (نه $(\nabla \cdot \mathbf{F})$).

چند نوع تابع خاص غالباً در نظریه الکترومغناطیس به کار می‌روند و در اینجا مشتقهای مختلف آنها را بررسی می‌کنیم. برای تابع $\mathbf{F} = \mathbf{r}$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (52.1)$$

$$\mathbf{G} \cdot \nabla \mathbf{r} = \mathbf{G}$$

$$\nabla^2 \mathbf{r} = 0$$

برای تابعی که تنها به فاصله $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ بستگی دارد

$$\nabla F(r) \text{ یا } \nabla \varphi(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr} \quad (53.1)$$

برای تابعی که به شناسه $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ بستگی دارد، و در آن $\mathbf{A}$ بردار ثابتی است

$$\nabla \varphi(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) \text{ یا } \nabla F(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{A} \frac{d}{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})} \quad (54.1)$$

برای تابعی که به شناسه $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ بستگی دارد، و در آن $\mathbf{r}'$ به عنوان یک مبدأ ثابت تلقی می‌شود

$$\nabla = \nabla_R \quad (55.1)$$

$$\nabla_R = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial Z}$$

که در آن $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$. اگر $\mathbf{r}$ به جای $\mathbf{r}'$ به عنوان مبدأ ثابت در نظر گرفته شود

$$\nabla = -\nabla' \quad (56.1)$$

که در آن

$$\nabla' = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z'}$$

چندین امکان برای بسط قضیه واگرایی و قضیه استوکس وجود دارد، جالبترین آنها قضیه گرین است که به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dv = \oint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} da \quad (57.1)$$

این قضیه نتیجه کاربرد قضیه واگرایی در مورد بردار زیر است

$$\mathbf{F} = \psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi$$

با قراردادن $\mathbf{F}$ در قضیه واگرایی، به دست می‌آوریم

$$\int_V \nabla \cdot [\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi] dv = \oint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} da \quad (58.1)$$

با استفاده از اتحاد مربوط به قضیه واگرایی برای ضرب يك كميت نرده‌ای در يك بردار (جدول ۱۰۱) نتیجه می‌شود

$$\nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) - \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi \quad (۵۹.۱)$$

از ترکیب روابط (۵۸.۱) و (۵۹.۱) قضیه گرین به دست می‌آید. چند قضیه انتگرالی دیگر در جدول ۲۰۱ آمده است.

جدول ۲۰۱ قضیه‌های انتگرالی برداری

$$\int_s \mathbf{n} \times \nabla \varphi \, da = \oint_c \varphi \, d\mathbf{l} \quad (۱.۲.۱)$$

$$\int_v \nabla \varphi \, dv = \oint_s \varphi \mathbf{n} \, da \quad (۲.۲.۱)$$

$$\int_v \nabla \times \mathbf{F} \, dv = \oint_s \mathbf{n} \times \mathbf{F} \, da \quad (۳.۲.۱)$$

$$\int_v (\nabla \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} \, dv = \oint_s \mathbf{F} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}) \, da \quad (۴.۲.۱)$$

در اینجا بحث کوتاه آنالیز برداری را به پایان می‌بریم. برای سهولت، اثبات بسیاری از نتایج را به صورت تمرین در پایان فصل آورده‌ایم. روش ما مبتنی بر سودمندی نتایج بوده است تا دقت فوق‌العاده زیاد. آنچه را که لازم نبوده است حذف کرده‌ایم.

۹.۱ خلاصه مطالب

سه نوع مشتق‌گیری برداری مختلف شبیه، واگرایی، و تاو رامی توان با عملگر دیفرانسیلی برداری دل، ∇ ، بیان کرد

$$\nabla \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

دل عملگری خطی است. کاربرد مکرر آن، یا کاربرد آن در حاصل ضرب توابع، فرمولهایی را به دست می‌دهد که می‌توان آنها را در مختصات قائم به دست آورد؛ اما این فرمولها به دستگاه مختصات بستگی ندارند. این فرمولها را می‌توان به کمک قواعد جبر برداری و مشتق گیری عادی به خاطر سپرد. به خاطر سپردن مشتق چند تابع خاص سودمند است. مهمترین قضایای انتگرالی در مورد مشتقها عبارت‌اند از

$$\int_a^b \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = \varphi \Big|_a^b$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{قضیه استوکس})$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{قضیه واگرایی})$$

اینها تعمیمهایی از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال‌اند.

مسائل

۱.۱ بردارهای زیر از مبدأ مختصات تا نقاط A ، B ، C ، D داده شده‌اند.

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

$$\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{k} - \mathbf{j}$$

نشان دهید که خطوط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ موازی‌اند و نسبت طول آنها را پیدا کنید.

۲.۱ ثابت کنید که بردارهای زیر برهم عمودند

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

۳.۱ نشان دهید که بردارهای زیراضلاع يك مثلث قائم الزاویه هستند

$$A = 2i - j + k$$

$$B = i - 2j - 5k$$

$$C = 2i - 2j - 2k$$

۴.۱ با به توان ۲ رساندن طرفین معادله زیر و تعمیم نتیجه حاصل «قانون کسینوسها» را ثابت کنید

$$A = B - C$$

۵.۱ نشان دهید که

$$A = i \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$B = i \cos \beta + j \sin \beta$$

بردارهای یکه‌ای هستند که در صفحه xy قرار دارند و بامحور x زوایای α و β می‌سازند. به کمک ضرب نرده‌ای فرمول مثلثاتی $\cos(\alpha - \beta)$ را به دست آورید.

۶.۱ اگر A برداری ثابت و r برداری از مبدأ مختصات تا نقطه (x, y, z) باشد، نشان دهید که رابطه زیر معادله يك صفحه است

$$(r - A) \cdot A = 0$$

۷.۱ با تعریفی که از A و r در مسئله ۶.۱ داده شد، ثابت کنید که رابطه زیر معادله يك کره است

$$(r - A) \cdot r = 0$$

۸.۱ با استفاده از ضرب نرده‌ای، کسینوس زاویه میان قطر مکعب با یکی از اضلاع آن را پیدا کنید.

۹.۱ با استفاده از ضرب برداری برای معادله برداری $A + C = B$ ، قانون سینوسها در مثلث ثابت کنید.

۱۰.۱ اگر A, B, C بردارهایی از مبدأ مختصات تا نقاط A, B, C باشند، نشان دهید که عبارت زیر بر صفحه ABC عمود است

$$(A \times B) + (B \times C) + (C \times A)$$

۱۱.۱ با جا نشانی مستقیم ثابت کنید که معادله (۱۵.۱) جواب معادله (۱۴.۱) است. [توجه کنید که معادله (۱۴.۱) مستلزم عمود بودن C بر A است.]

۱۲.۱ ثابت کنید که هر گاه

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = 0$$

باشد، بردارهای $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ نسبت به هم استقلال خطی ندارند. آیا بردارهای زیر به طور خطی از یکدیگر مستقل اند؟

$$\mathbf{A} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

۱۳.۱ نشان دهید که بردار یک‌ه عمود بر سطح $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const.}$ عبارت است از

$$\mathbf{n} = \nabla\varphi / |\nabla\varphi|$$

برای بیضیوار زیر $\mathbf{n}$ را پیدا کنید

$$\varphi = ax^2 + by^2 + cz^2$$

۱۴.۱ شیب φ را در مختصات استوانه‌ای، با توجه به رابطه $ds = dr\mathbf{a}_r + r d\theta\mathbf{a}_\theta + dz\mathbf{k}$ پیدا کنید. باید توجه داشت که معانی r و θ در اینجا با آنچه در معادلات (۲۱.۱) و (۲۲.۱) آمده است متفاوت اند. در مختصات کروی r بزرگی بردار شعاعی از مبدأ و θ زاویه قطبی است. در مختصات استوانه‌ای r فاصله عمودی از محور استوانه و θ زاویه سمت حول این محور است.

۱۵.۱ با استفاده از تعریف واگرایی رابطه‌ای برای $\nabla \cdot \mathbf{F}$ در مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

۱۶.۱ واگرایی و تاو بردار زیر را به دست آورید

$$\mathbf{i}(x^2 + yz) + \mathbf{j}(y^2 + zx) + \mathbf{k}(z^2 + xy)$$

۱۷.۱ آیا $\nabla \times \mathbf{F}$ برای هر تابع برداری $\mathbf{F}$ الزاماً بر $\mathbf{F}$ عمود است؟ توضیح دهید.۱۸.۱ برای دو تابع نرده‌ای φ و ψ ثابت کنید که

$$\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\varphi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi$$

۱۹.۱ اگر $\mathbf{r}$ بردار از مبدأ مختصات تا نقطه (x, y, z) باشد، روابط زیر را ثابت کنید

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3 \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{u}$$

[توجه: $\mathbf{u}$ می‌تواند هر برداری باشد.]۲۰.۱ اگر $\mathbf{A}$ برداری ثابت باشد نشان دهید که

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{A}$$

۲۱.۱ اتحادهای (۷.۱.۱) و (۹.۱.۱) از جدول ۱.۱ را ثابت کنید.

۲۲.۱ اگر r بزرگی بردار از مبدأ تا نقطه (x, y, z) ، و $f(r)$ تابع اختیاری بر حسب r باشد، ثابت کنید که

$$\nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{df}{dr}$$

۲۳.۱ ثابت کنید که

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{d\mathbf{F}}{dr}$$

۲۴.۱ ثابت کنید که اگر $\xi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ باشد داریم

$$\nabla \varphi(\xi) = \mathbf{A} \frac{d\varphi}{d\xi}$$

۲۵.۱ صحت معادله (۵۱.۱) را در مختصات قائم تحقیق کنید. در این مختصات $\nabla^2 \mathbf{F}$ به صورتی است که در متن کتاب تعریف شده است.

۲۶.۱ اتحادهای (۲.۲.۱) و (۴.۲.۱) در جدول ۲.۱ را ثابت کنید. (داهنمایی: از قضیه واگرایی و یک یا چند اتحاد از جدول ۱.۱ استفاده کنید.)

الکتروستاتیک

۱۰۲ بار الکتریکی

الکتریسیته دار شدن اجسام بر اثر مالش اولین بار در دوران باستان مشاهده شد و تاریخ دقیق آن معلوم نیست؛ اما این يك تجربه عادی است که وقتی يك شانه کائوچویی سخت را با پارچه پشمی مالش دهیم شانه ریزه های كوچك كاغذ را جذب كند. در اثر مالش این دو جسم به یکدیگر (به عبارت دقیقتر، در اثر ایجاد تماس نزدیک میان این دو جسم) هم کائوچو و هم پشم خاصیت جدیدی پیدا می کنند؛ یعنی باردار می شوند. از این آزمایش برای معرفی مفهوم بار الکتریکی استفاده می شود. اما، در این فرایند بار آفریده نمی شود، بار کل، یا مجموع بارهای دو جسم هنوز همان قدر است که پیش از الکتریسیته دار شدن بوده است. اکنون با مطالعه فیزیک نوین می دانیم که ذره های باردار میکروسکوپی، یعنی الکترونها، از پشم به کائوچو منتقل می شوند، پشم را به طور مثبت و شانه کائوچویی را به طور منفی باردار می کنند.

بار، یکی از خواص اساسی و سرشتی ذره های بنیادی سازنده ماده است. در واقع، تمام مواد از پروتون، نوترون و الکترون درست شده اند و دو تا از این ذره ها باردارند. گرچه در مقیاس میکروسکوپی، ماده از تعداد بسیار زیادی ذره باردار درست شده است ولی در مشاهدات ماکروسکوپی نیروهای الکتریکی قوی وابسته به این ذره ها کاملاً از نظر پنهان است. دلیل این مطلب آن است که دو نوع بار مثبت و منفی وجود دارد و در یک قطعه ماده معمولی از هر دو نوع تقریباً به يك اندازه موجود است. بنابراین، از دیدگاه ماکروسکوپی لفظ بار به بار خالص یا بار اضافی اطلاق می شود. وقتی می گوییم جسمی باردار است، منظور ما این است که جسم بار اضافی، یعنی الکترون (بار منفی) یا پروتون (بار مثبت)

اضافی دارد. در این فصل و فصلهای بعد، معمولاً بار الکتریکی را با نماد q نشان می‌دهیم. مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که بار نه به وجود می‌آید و نه نابود می‌شود. بار کل دستگاه بسته تغییر نمی‌کند. از دیدگاه ماکروسکوپی بارها را می‌توان به راههای مختلف دسته‌بندی و ترکیب کرد، اما به هر حال می‌توان حکم کرد که در یک دستگاه بسته بار خالص بقا دارد.

۲.۲ قانون کولن

در اواخر قرن هجدهم علوم تجربی به درجه‌ای از رشد و پیشرفت رسیده بود که بتوان مشاهدات دقیقی دربارهٔ نیروهای میان بارهای الکتریکی به عمل آورد. نتایج این مشاهدات را، که در آن زمان فوق‌العاده مجادله‌آمیز بودند، می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد: (الف) دونوع، و فقط دونوع بار الکتریکی وجود دارد که اکنون به بارهای مثبت و منفی معروف‌اند. (ب) دو بار نقطه‌ای نیروهایی بر یکدیگر وارد می‌کنند؛ خط اثر این نیروها در امتداد خطی واقع است که آن دو بار را به هم وصل می‌کند و بزرگی این نیروها با عکس مجذور فاصلهٔ آنها متناسب است. (ج) این نیروها با حاصل ضرب بارها نیز متناسب، برای بارهای همنام دافعه، و برای بارهای ناهمنام جاذبه‌اند. دو حکم آخر، به اضافهٔ حکم اول به عنوان مقدمه، به افتخار شارل آگوستن کولن (۱۱۱۵-۱۱۸۵/۱۷۳۶-۱۸۰۶) که از پیشروان الکتریسته در قرن هجدهم بود، به نام قانون کولن معروف‌اند. قانون کولن برای بارهای نقطه‌ای را می‌توان به کمک نمادهای برداری فصل اول به صورت زیر فرمولبندی کرد

$$F_1 = C \frac{q_1 q_2 r_{12}}{r_{12}^2 r_{12}} \quad (۱۰۲)$$

$$r_{12} = r_1 - r_2$$

که در آن F_1 نیروی وارد بر بار q_1 ، r_{12} بردار از q_2 به q_1 ، r_{12} بزرگی این بردار، و C ضریب ثابت تناسب است که دربارهٔ آن بعداً به تفصیل صحبت خواهد شد. در معادله (۱۰۲) با تقسیم بردار r_{12} بر بزرگیش بردار یکه‌ای در جهت r_{12} درست کرده‌ایم که به کرات از آن استفاده خواهیم کرد. اگر بخواهیم نیروی وارد بر q_2 را به دست آوریم فقط لازم است شاخصهای پایین ۱ را به ۲ و ۲ را به ۱ تبدیل کنیم. درک این روش نماد گذاری مهم است، زیرا در آینده می‌توانیم به کمک آن متغیرهای میدان و چشمه را به طور جدا گانه دنبال کنیم.

قانون کولن در مورد بارهای نقطه‌ای به کار می‌رود. از لحاظ معنای ماکروسکوپی «بار نقطه‌ای» باری است که ابعاد فضایی آن در مقایسه با هر طول دیگری در مسئله مورد نظر بسیار کوچک است و ما نیز «بار نقطه‌ای» را به همین معنی به کار می‌بریم. تا آنجا که می‌دانیم،

قانون کولن در مورد برهم کنشهای ذرات بنیادی، مانند پروتونها و الکترونها نیز صادق است. معادله (۱.۲) در مورد دفع الکتروستاتیکی میان هستهها در فواصل بیش از 10^{-14} نیز صدق می کند، در فواصل کمتر نیروهای بر قدرت و کوتاه برد هسته ای عمل می کنند. معادله (۱.۲) یک قانون تجربی است. با وجود این شواهد نظری و تجربی هر دو نشان می دهند که قانون عکس مجذور فاصله دقیق است، یعنی نمای 2 دقیقاً 2 است. در یک تجربه غیر مستقیم^۱ معلوم شده است که نمای 2 با 2 نمی تواند بیش از یک در 10^5 اختلاف داشته باشد.

مقدار ثابت C در معادله (۱.۲) به بحث مختصری نیازمند است، زیرا دستگاه یکاهای توسط آن مشخص می شود. فرض کنید یکاهای نیرو و طول همانهایی هستند که به یکی از دستگاههای متداول در مکانیک تعلق دارند؛ در اینجا مستقیمترین روش آن است که C را برابر با 1 قرار دهیم و یکای بار الکتریکی را طوری انتخاب کنیم که معادله (۱.۲) با تجربه سازگار باشد. این روشی است که در دستگاه یکاهای گاوسی به کار می رود. از روشهای دیگری نیز می توان استفاده کرد و احتمالاً مزایایی هم خواهند داشت؛ مثلاً می توان یکای بار را از قبل مشخص کرد. در $1901/1280$ جورجی نشان داد که تمام یکاهای معمولی الکتریکی نظیر آمپر، ولت، اهم، هنری، و مانند آنها را می توان با یکی از دستگاه یکاهای مکانیکی (مثلاً با دستگاه mks یا متر - کیلوگرم - ثانیه) ترکیب کرد و دستگاه یکاهایی برای کلیه مسائل الکتریکی و مغناطیسی تشکیل داد. مزیت این دستگاه آن است که نتایج محاسبات مدارهای الکتریکی بر حسب همان یکاهای الکتریکی که در آزمایشگاهها به کار می روند به دست می آید. در این کتاب ما دستگاه یکاهای گویا شده mks یا دستگاه جودجی را به آن صورتی که به نام SI (دستگاه بین المللی) معروف است به کار خواهیم برد. چون در این دستگاه q بر حسب کولن (C)، r بر حسب متر، و F بر حسب نیوتون (N) اندازه گیری می شود واضح است که C باید ابعاد $C^2/N \cdot m$ را داشته باشد. اندازه یکای بار، یعنی کولن، با آزمایشهای مغناطیسی تعیین می شود؛ با توجه به اندازه کولن لازم است که

$$C = 8.9875 \times 10^9 N \cdot m^2 / C^2$$

باشد. برای آنکه بعضی از معادلات دیگر ساده شوند به جای ثابت C مقدار به ظاهر پیچیده $1/4\pi\epsilon_0$ را قرار می دهیم. ثابت ϵ_0 که گذردهی خلأ نام دارد کراراً در معادلات ظاهر خواهد شد. مقدار عددی آن برابر است با $8.854 \times 10^{-12} C^2 / N \cdot m^2$ در پیوست

1. E. R. Williams, J. E. Faller, and H. A. Hill: 1971, *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 721.

قبلاً نیز آزمایشهای مشابهی انجام شده است. ماکسول نمای 2 را با تقریب 1 در 20000 محرز ساخت.

۲ ما تعاریف کولن، آمپر، تراوایی، و گذردهی خلا را به صورتی منطقی به یکدیگر و به سرعت نور مربوط کرده ایم. چون فرمولبندی منطقی این تعاریف به شناخت پدیده های مغناطیسی و انتشار امواج الکترومغناطیسی احتیاج دارد، فعلاً داخل در بحث آنها نمی شویم. در پیوست ۲ ما درباره دستگاه گاوسی بحث کرده ایم. تافصل ۴، هر فرمولی را می توانیم به راحتی با قراردادن $1/4\pi$ به جای ϵ_0 به فرمولی در یکاهای گاوسی تبدیل کنیم. اگر بیش از دو بار نقطه ای وجود داشته باشند، نیروهای متقابل را با به کار بردن مکرر معادله (۱.۲) به دست می آوریم. مخصوصاً اگر دستگاهی با N بار داشته باشیم نیروی وارد بر بار i ام از رابطه زیر به دست می آید

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^2} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$$

که در آن جمع سمت راست مربوط است به تمام بارها به استثنای بار i ام. البته، این همان اصل برهمه نیروهاست که بنابه آن کل نیروی وارد بر یک جسم بزا بر است با حاصل جمع برداری تک تک نیروهای وارد بر آن.

برهم کنش یک بار نقطه ای با یک توزیع پیوسته بار تعمیم ساده ای است از ایده N بار نقطه ای در حال برهم کنش. ما این پیکربندی را عمداً انتخاب می کنیم تا از برخی اشکالات موجود در بررسی برهم کنش دو توزیع بار پیوسته احتراز کنیم. قبل از اینکه در این بحث بیشتر پیش برویم باید مفهوم بار پیوسته را بررسی کنیم. می دانیم که بار - الکتریکی به صورت مضربهایی از یک بار پایه، یعنی بار الکترون، یافت می شود. به عبارت دیگر، اگر هر بار الکتریکی را به دقت مطالعه کنیم معلوم می شود که مقدار آن مضرب درستی است از مقدار بار الکترون. در مطالعات فیزیک ما کروسکوپی، گسستگی بار هیچ اشکالی ایجاد نمی کند زیرا مقدار بار الکترون 1.6×10^{-19} است، که مقداری است فوق العاده کوچک. کوچکی این واحد مبنا بدین معنی است که بارهای ما کروسکوپی بدون استثنا از تعداد فوق العاده زیادی بار الکترونی تشکیل شده اند. و این به نوبه خود به این معناست که در یک توزیع بار ما کروسکوپی هر عنصر بسیار کوچک حجم، تعداد بسیار زیادی الکترون دارد. پس می توان توزیع بار را با یک تابع چگالی بار توصیف کرد که تعریف آن عبارت است از حد بار در واحد حجم، وقتی که حجم بی نهایت کوچک باشد. با وجود این در کاربرد چنین تعریفی در مورد مسائل اتمی باید دقت کرد، زیرا در این موارد فقط تعداد کمی الکترون دخالت دارند و فرایند محاسبه حد بی معنی است. چنانچه این موارد اتمی را کنار بگذاریم، می توانیم فرض کنیم که هر قطعه از بار را می توان بینهایت مرتبه تقسیم و سپس توزیع بار را به کمک توابع نقطه ای زیر توصیف کرد:

چگالی بارحجمی که بارابطه زیر

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (۳.۲)$$

وچگالی بار سطحی که با رابطه زیر تعریف می شود

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (۳.۲)$$

از آنچه درباره q گفته شد معلوم می شود که ρ و σ چگالیهای بارخالص یا باراضافی اند. لازم به یادآوری است که درمواد جامد نوعی حتی چگالی بار بسیار بزرگ ρ ، تنها با تغییر چگالی موضعی الکترون به اندازه تقریباً یک قسمت در 10^9 قسمت به دست می آید. اگر بار در حجم V با چگالی حجمی ρ ، و در روی سطح S که حجم V را محصور می کند با چگالی سطحی σ توزیع شده باشد آنگاه نیروی وارد از طرف این توزیع بار بر بار نقطه ای q واقع در نقطه $\mathbf{r}$ با استفاده از معادله (۳.۲)، و پس از قراردادن $\rho_j dv'_j$ (یا $\sigma_j da'_j$) به جای q_j و محاسبه حد به دست می آید

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da'. \quad (۵.۲)$$

در این معادله متغیر $\mathbf{r}'$ برای تعیین موضع نقطه ای در درون توزیع بار به کار رفته است، یعنی این متغیر نقش نقطه چشمه $\mathbf{r}_j$ در معادله (۲.۲) را به عهده دارد. در نظر اول ممکن است چنین به نظر برسد که اگر نقطه $\mathbf{r}$ در داخل توزیع بار باشد اولین انتگرال معادله (۵.۲) باید واگرا شود. اما اینطور نیست؛ سهم ناحیه انتگرال گیری در نزدیکی $\mathbf{r}$ قابل چشمپوشی است و در نتیجه انتگرال خوش رفتار است (مسئله ۵.۲).

واضح است که نیروی وارد بر بار q که با معادله (۵.۲) داده شده است با مقدار q متناسب است؛ همین مطلب نیز در مورد معادله (۲.۲) صادق است. این نکته سبب می شود که ما یک میدان برداری مستقل از بار q ، یعنی نیروی وارد بر واحد بار، را تعریف کنیم. این میدان برداری، که به میدان الکتریکی معروف است، در بخش زیر به تفصیل بررسی می شود.

۳.۲ میدان الکتریکی

میدان الکتریکی در هر نقطه به صورت زیر تعریف می شود: حد نسبت نیروی وارد بر بار آزمون که در آن نقطه قرار داده شود به اندازه این بار، وقتی که مقدار بار آزمون به سمت صفر میل کند. نماد متداول برای میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ است. با نماد گذاری برداری، تعریف

E به صورت زیر است

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F_q}{q} \quad (۶.۲)$$

در تعریف E عمل حدگیری به این دلیل منظور می شود که اطمینان حاصل شود بار آزمون بر توزیع بار مولد E اثر نمی گذارد. مثلاً، اگر بار مثبت روی سطح جسم رسانایی توزیع شده باشد (رسانا جسمی است که در آن بار به آزادی حرکت می کند)، آوردن بار آزمون به نزدیکی این رسانا موجب می شود که بار به صورت جدیدی روی رسانا توزیع شود. اگر میدان الکتریکی را به کمک نسبت نیرو به بار برای یک بار آزمون متناهی محاسبه کنیم، میدان حاصل به توزیع جدید بار مربوط می شود نه به توزیع بار اصلی. در حالت خاص وقتی یکی از بارهای موجود در توزیع بار را بتوان به عنوان بار آزمون در نظر گرفت، عمل حدگیری دیگر ضرورتی نخواهد داشت. در این حالت میدان الکتریکی در محل بار آزمون میدانی است که سایر بارهای این توزیع بار تولید می کنند. البته در این حالت هیچگونه تغییری در توزیع بار ایجاد نمی شود، زیرا توزیع بار مناسب همان است که تحت تأثیر تمامی توزیع بار، و از جمله خود باری که به عنوان بار آزمون انتخاب شده است به وجود می آید. در برخی موارد خاص دیگر، مخصوصاً وقتی که توزیع بار مشخص شده باشد، نیرو با اندازه بار آزمون متناسب خواهد بود. در این موارد نیز محاسبه حد غیر ضروری است. اما اگر تردیدی وجود داشته باشد همیشه برای حصول اطمینان بهتر است که از عمل حدگیری استفاده شود.

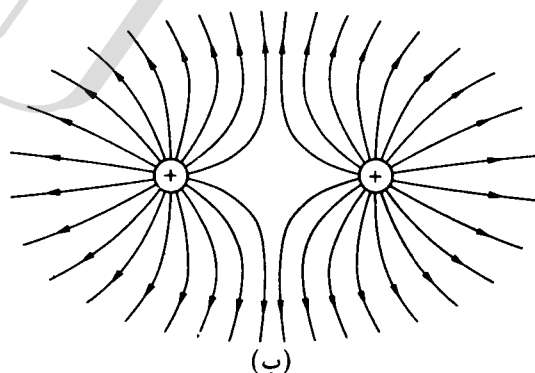
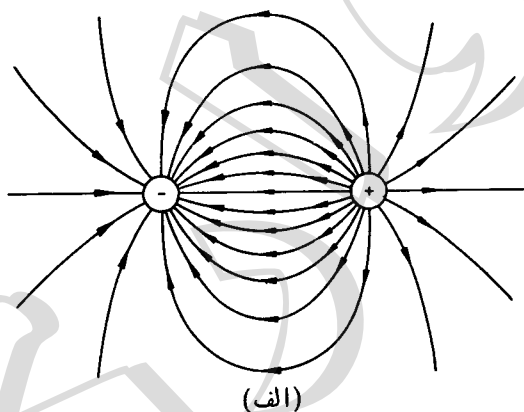
معادله های (۲.۲) و (۵.۲) روش ساده ای برای محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک توزیع بار مفروض به دست می دهند. فرض کنید که توزیع بار عبارت باشد از N بار نقطه ای $q_1, q_2, \dots, q_N$ که به ترتیب در نقاط $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ قرار دارند و یک توزیع حجمی بار با چگالی بار $\rho(\mathbf{r}')$ در حجم V ، و یک توزیع سطحی بار که با چگالی سطحی $\sigma(\mathbf{r}')$ در روی سطح S مشخص شده است. اگر بار آزمون q در نقطه $\mathbf{r}$ قرار داشته باشد، نیروی وارد بر آن از طرف این توزیع بارهای معلوم عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \end{aligned} \quad (۷.۲)$$

میدان الکتریکی در $\mathbf{r}$ عبارت است از حد نسبت این نیرو بر مقدار بار آزمون q . چون این نسبت مستقل از q است، میدان الکتریکی در $\mathbf{r}$ عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (۸.۲)$$

معادله (۸.۲) خیلی کلی است. در اغلب موارد به يك یا چند جمله از آن احتیاجی نخواهد بود. کمیتی که هم اکنون تعریف کردیم را می توان در هر نقطه از فضا در نزدیکی يك دستگاه بار یا يك توزیع بار محاسبه کرد. بدین ترتیب $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ يك تابع برداری نقطه ای یا يك میدان برداری است. این میدان چند خاصیت ریاضی جالب توجه دارد که



ما آنها را در بخشهای بعد از این و در فصل بعد بررسی خواهیم کرد، مایکل فاراده (۱۷۷۵-۱۸۶۷) برای کمک به تجسم ساختار میدان الکتریکی وابسته به یک توزیع بار خاص مفهوم خطوط نیرو را مطرح کرد. خط نیرو یک خط (یا یک منحنی) فرضی است که طوری رسم می شود که جهت آن در هر نقطه معرف جهت میدان الکتریکی در آن نقطه است.

به عنوان مثال، ساختار میدان الکتریکی مربوط به یک بار نقطه ای مثبت منفرد q_1 را در نظر بگیرید. خطوط نیرو، خطوطی شعاعی اند که از q_1 به طور شعاعی خارج می شوند. به همین طریق، خطوط نیروی مربوط به یک بار نقطه ای منفی منفرد نیز خطوطی شعاعی اند، ولی در این مورد جهت خطوط به سمت داخل (یعنی به سمت بار منفی) است. این دو مثال خیلی ساده اند ولی به هر حال خاصیت مهمی از خطوط میدان را نشان می دهند: خطوط نیرو به چشمه های میدان الکتریکی، یعنی به بارهایی که میدان را تولید می کنند، ختم می شوند. شکل ۱۰۲ دو میدان الکتریکی ساده را که به کمک خطوط نیرو رسم شده اند نشان می دهد.

۴.۲ پتانسیل الکتروستاتیکی

در فصل ۱ دیدیم که اگر تاو یک بردار صفر شود، آن بردار را می توان به صورت شیب یک تابع نرده ای نوشت. میدان الکتریکی که با معادله (۸.۲) داده شده است واجد این شرط است. برای تحقیق این مطلب باید توجه کرد که محاسبه تاو معادله (۸.۲) مستلزم مشتق گیری نسبت به r است. این متغیر در معادله فقط در توانی به صورت $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ ظاهر می شود، پس کافی است که نشان دهیم توابعی که به این صورت اند تاو شان صفر است. با استفاده از فرمول تاو حاصل ضرب (ضرب بردار در کمیت نرده ای) از جدول ۱۰.۱ به دست می آید

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \times [\mathbf{r} - \mathbf{r}'] \quad (9.2)$$

یک محاسبه مستقیم (مسئله ۹.۱) نشان می دهد

$$\nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0 \quad (10.2)$$

و نیز (مسئله ۲۲.۱)

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \quad (11.2)$$

@Quark_Book

این نتایج، همراه با در نظر گرفتن اینکه حاصل ضرب برداری هر بردار در یک بردار موازی

با آن صفر است، برای اثبات رابطه زیر کافی است

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0 \quad (۱۲.۲)$$

چون سهم هر جمله از معادله (۸.۲) در ایجاد میدان الکتریکی به صورت تابع $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ است، بنابراین ثابت می‌شود که تاو میدان الکتریکی صفر است. معادله (۱۲.۲) نشان می‌دهد که یک تابع نرده‌ای وجود دارد که شیب آن با میدان الکتریکی برابر است. آنچه باید انجام داد پیدا کردن این تابع است. یعنی، اکنون می‌دانیم که تابعی وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) \quad (۱۳.۲)$$

اما هنوز باید شکل این تابع φ را پیدا کنیم. بنا به قرارداد، علامت منها را در معادله (۱۳.۲) منظور می‌کنند و تابع φ را تابع پتانسیل الکتروستاتیکی می‌نامند. محاسبه پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از بار نقطه‌ای q_1 راحت است؛ این پتانسیل به صورت تابع زیر است

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (۱۴.۲)$$

که صحت آن با مشتق‌گیری مستقیم به راحتی قابل تحقیق است. به کمک این تابع می‌توان به راحتی حدس زد که پتانسیلی که میدان الکتریکی (۸.۲) را به وجود می‌آورد به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \end{aligned} \quad (۱۵.۲)$$

که صحت آن را هم با مشتق‌گیری مستقیم می‌توان تحقیق کرد. شاید اینطور به نظر برسد که معادله‌های (۱۴.۲) و (۱۵.۲) را به نحوی نسبتاً دلخواه به دست آورده‌ایم. اما چون تنها چیزی که از φ می‌خواهیم این است که در معادله (۱۳.۲) صدق کند، و چون صحت این مطلب هم مستقیماً تحقیق شده است، بنابراین روش پیدا کردن φ اهمیت چندانی ندارد. به مجرد آنکه موجودیت پتانسیل الکتروستاتیکی φ محرز شد، می‌توان آن را مستقیماً به دست آورد. چون می‌دانیم φ وجود دارد، می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r}' \quad (۱۶.۲)$$

که در آن ref معرف نقطه مرجعی است که در آن مقدار φ برابر صفر است. بر طبق تعریف شیب

$$\nabla \varphi \cdot d\mathbf{r}' = d\varphi \quad (۱۷.۲)$$

با قراردادن معادله (۱۷.۲) در معادله (۱۶.۲)، انتگرال سمت راست معادله (۱۶.۲) به انتگرال يك دیفرانسیل کامل تبدیل می شود که به راحتی قابل محاسبه است. نتیجه عبارت خواهد بود از

$$- \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r}' = -\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (۱۸.۲)$$

که در واقع معکوس معادله (۱۳.۲) است. چنانچه میدان الکتروستاتیکی ناشی از بار نقطه ای را در معادله (۱۸.۲) به کار بریم و نقطه مرجع یا حد پایین انتگرال را در بینهایت فرض کنیم، و مقدار پتانسیل را در آنجا صفر اختیار کنیم، نتیجه می شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (۱۹.۲)$$

البته، این معادله حالت خاصی از معادله (۱۴.۲) است، یعنی حالتی که در آن $\mathbf{r}_1$ برابر صفر است. این اثبات را برای به دست آوردن معادله (۱۵.۲) نیز می توان به کار برد، ولی این روش بسیار پیچیده تر از آن است که در اینجا توضیح داده شود.

جنبه جالب و مفید دیگر پتانسیل الکتروستاتیکی رابطه نزدیک آن با انرژی پتانسیل وابسته به نیروی الکتروستاتیکی پایستار است. انرژی پتانسیل وابسته به هر نیروی پایستار دلخواه به صورت زیر است

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (۲۰.۲)$$

که در آن $U(\mathbf{r})$ انرژی پتانسیل نقطه $\mathbf{r}$ است نسبت به مرجعی که انرژی پتانسیل آن را به اختیار صفر گرفته ایم. چون در مورد الکتروستاتیک $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ ، نتیجه می شود که اگر نقطه مرجع برای پتانسیل الکتروستاتیکی و برای انرژی پتانسیل یکی فرض شود، آنگاه پتانسیل الکتروستاتیکی درست برابر با انرژی پتانسیل در واحد بار الکتریکی خواهد بود. گاهی از این ایده برای معرفی پتانسیل الکتروستاتیکی استفاده می شود. با وجود این، به نظر ما با تعریف پتانسیل الکتروستاتیکی با معادله (۱۳.۲) اهمیت پتانسیل الکتروستاتیکی در محاسبه میدان الکتروستاتیکی تأکید می شود. البته شکی نیست که هر دو روش در تحلیل

نهایی یکسان اند.

سودمندی پتانسیل الکتروستاتیکی در محاسبه میدانهای الکتریکی از مقایسه معادلات (۸.۲) و (۱۵.۲) معلوم می شود. معادله (۸.۲) يك معادله برداری است و برای پیدا کردن میدان الکتریکی با استفاده از آن باید برای هر جمله سه مجموع، یا سه انتگرال، را محاسبه کرد. حتی در ساده ترین موارد، این روش مشکل و پردردسراست و در برخی موارد محاسبه انتگرالها تقریباً کاری است ناممکن. از سوی دیگر، معادله (۱۵.۲) يك معادله نرده ای است و هر جمله آن شامل تنها يك مجموع یا يك انتگرال است. به علاوه، تمام مخرجها در این معادله به صورت $|r - r'|$ اند که محاسبه انتگرالها را در مقایسه با مخرجهای معادله (۸.۲) ساده می کند. این ساده کردن گاهی به اندازه تفاوت میسان محاسبه کردن یا محاسبه نکردن انتگرالهاست. ممکن است ایراد گرفته شود که بعد از محاسبه انتگرالهای معادله (۱۵.۲) هنوز لازم است که از نتیجه حاصل مشتق گرفته شود؛ ولی با توجه به این نکته که اگر تابعی مشتق داشته باشد مشتق گیری از آن همیشه ممکن است و در واقع مشتق گیری عموماً از انتگرال گیری به مراتب راحت تر است، به این ایراد پاسخ داده می شود. در فصل ۳ خواهیم دید که در مسائلی که در آنها توزیع بار الکتریکی مشخص نیست، بلکه باید آن را در جریان مسئله پیدا کرد، اهمیت پتانسیل الکتروستاتیکی حتی بیشتر خواهد بود. در دستگاه mks یکای انرژی نیوتون متر یا ژول است. یکای پتانسیل ژول بر کولن است، اما به دلیل آنکه این یکا زیاد به کار می رود نام ویژه ولت (V) را به آن داده اند. یکای میدان الکتریکی نیوتون بر کولن یا ولت بر متر است.

۵.۲ رساناها و عایقها

تا آنجا که به رفتار الکتروستاتیکی مربوط می شود مواد را می توان به دو دسته تقسیم کرد. رساناها و عایقها (دی الکتریکها). رساناها، مثل فلزها، موادی هستند که تعداد بسیار زیادی حامل بار اساساً آزاد دارند. این حاملهای بار (که در اکثر موارد الکترون اند) می توانند در سرتاسر جسم رسانا آزادانه حرکت کنند. میدانهای الکتریکی (حتی بی نهایت کوچک) بر این حاملها اثر می کنند و مادامی که میدان بر آنها اثر می کند به حرکت خود ادامه می دهند. وقتی به كمك يك چشمه انرژی خارجی میدان الکتریکی پایا در رسانا برقرار می شود، این حاملهای آزاد جریان الکتریکی را حمل می کنند.

دی الکتریکها موادی هستند که در آنها تمام ذرات باردار به نحوی نسبتاً محکم به مولکولهای تشکیل دهنده این مواد مقید شده اند. این ذرات باردار ممکن است تحت تأثیر میدان الکتریکی اندکی جابه جا شوند، اما از مجاورت مولکولهایی که به آنها مقیدند دور نمی شوند. به بیان دقیقتر، این تعریف فقط در مورد يك دی الکتریک ایده آل یعنی دی - الکتریکی که در حضور میدان الکتریکی خارجی به هیچ وجه رسانایی از خود نشان ندهد صادق است. دی الکتریکهای فیزیکی واقعی رسانایی ضعیفی از خود نشان می دهند، هر چند در يك دی الکتریک واقعی معمولی رسانایی تقریباً 10^{20} مرتبه از رسانایی دريك رسانای

خوب کمتر است. چون 10^{20} ضریب فوق‌العاده بزرگی است، بنابراین غالباً کافی است بگوییم که دی‌الکتریکها نارسانا هستند.

خواص الکتریکی برخی مواد (نیم‌رساناها و الکترولیتها) در حد فاصل میان رساناها و دی‌الکتریکها قرار دارد. رفتار این مواد در یک میدان الکتریکی ایستا خیلی به رفتار اجسام رسانا شبیه است. اما پاسخ‌گذاری آنها از پاسخ رساناها اندکی کندتر است، برای این مواد مدت بیشتری طول می‌کشد تا در یک میدان الکتریکی ایستا به حالت تعادل برسند.

در این فصل و نیز در چهار فصل بعد رفتار مواد در میدانهای الکتروستاتیکی را بررسی می‌کنیم. قطبش دی‌الکتریکها، هر چند در اصل پدیده ساده‌ای است، ولی اثرات نسبتاً پیچیده‌ای تولید می‌کند. بنابراین، بحث درباره آن را تا فصل ۴ به عقب می‌اندازیم. اما رساناها را می‌توان بر حسب مفاهیمی که تا کنون بسط داده‌ایم مطالعه کرد.

چون بار می‌تواند آزادانه در جسم رسانا حرکت کند، حتی تحت تأثیر میدانهای الکتریکی بسیار ضعیف نیز حاملهای بار (الکترونها یا یونها) آنقدر به حرکت خود ادامه می‌دهند تا به مواضعی برسند که در آنجا برابند نیروهای وارد بر آنها صفر شود. وقتی این ذرات به حالت سکون رسیدند، در داخل جسم میدان الکتریکی وجود ندارد. این بدان علت است که داخل جسم هیچگاه از تجمع حاملهای بار نهی نمی‌شود، و چنانچه میدانی وجود داشته باشد، حاملهای بار به حرکت خود ادامه خواهند داد. از اینرو در شرایط ایستا میدان الکتریکی در درون جسم رسانا صفر است. به علاوه، چون در درون جسم رسانا $E=0$ است، پتانسیل الکتریکی در تمام نقاط درون جسم رسانا یکسان است. به عبارت دیگر، در شرایط ایستا، هر جسم رسانی یک ناحیه هم‌پتانسیل را در فضا تشکیل می‌دهد.

۶.۲ قانون گاوس

میان انتگرال مؤلفه عمودی میدان الکتریکی بر روی یک سطح بسته و مقدار کل بارهای درون این سطح رابطه مهمی وجود دارد. اکنون این رابطه را، که به قانون گاوس معروف است، به تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم. میدان الکتریکی که بار نقطه‌ای q واقع در مبدأ مختصات در نقطه $\mathbf{r}$ تولید می‌کند برابر است با

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (21.2)$$

اگر انتگرال سطحی مؤلفه عمودی این میدان الکتریکی را بر روی سطح بسته‌ای (نظیر سطحی که در شکل ۲.۲ نشان داده شده است) که مبدأ مختصات، و در نتیجه بار q ، را دربر می‌گیرد حساب کنیم، خواهیم داشت

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} da \quad (22.2)$$

مقدار $(\mathbf{r}/r) \cdot \mathbf{n} da$ تصویر سطح da است بر صفحه‌ای عمود بر $\mathbf{r}$. از تقسیم تصویر سطح da بر زاویه فضایی که da را در بر می‌گیرد به دست می‌آید. این زاویه فضایی را با $d\Omega$ نشان می‌دهیم. به طوری که از شکل ۳.۲ پیداست، زاویه فضایی که da را در بر می‌گیرد برابر است با زاویه فضایی که da' را در بر می‌گیرد. در اینجا da' عنصری از سطح کره S' ، به شعاع r' و به مرکز مبدأ مختصات، است. بنا بر این، می‌توان نوشت

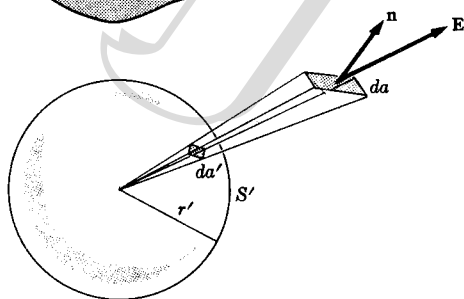
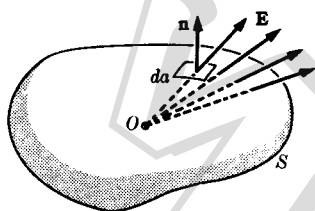
$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} da = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{r'^3} da' = 4\pi$$

که نشان می‌دهد در حالت خاصی که در بالا توصیف شد نتیجه می‌شود

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (23.2)$$

اگر q در خارج از سطح S باشد، از شکل ۳.۲ پیداست که می‌توان S را به دو ناحیه S_1 و S_2 تقسیم کرد، به طوری که هریک از آن دو نسبت به بار نقطه‌ای q با زاویه فضایی یکسانی فرا گرفته شوند. اما برای S_2 جهت بردار عمود بر سطح به سمت q است، در حالی که برای S_1 به سمت دور از q است. بنا بر این، در انتگرال سطحی سهمهای مربوط به S_1 و S_2 مساوی ولی مختلف‌العلامه‌اند، و در نتیجه مقدار کل انتگرال صفر می‌شود. پس اگر

شکل ۳.۲ سطح بسته فرضی S که یک بار نقطه‌ای واقع در مبدأ مختصات را در بر گرفته است.



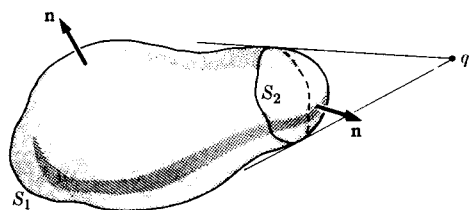
شکل ۳.۲ رسم سطح کره‌ای S' برای کمک به محاسبه زاویه فضایی که سطح da را در بر می‌گیرد.

سطحی بار نقطه‌ای q را احاطه کند، انتگرال سطحی مؤلفه عمودی میدان الکتریکی برابر q/ϵ_0 است، درحالی که اگر q در خارج از سطح قرار گیرد، مقدار این انتگرال سطحی صفر خواهد بود. حکم بالادرمورد هر نوع سطح بسته‌ای، حتی سطوح کاو، نیز صادق است. شکل ۵.۲ صحت این گفته را نشان می‌دهد.

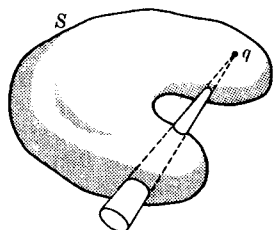
اگر سطح بسته S چندین بار نقطه‌ای $q_1, q_2, \dots, q_N$ را دربرگیرد، آنگاه میدان الکتریکی کل توسط جمله اول معادله (۸.۲) داده می‌شود. هر یک از بارها يك زاویه فضایی کامل (4π) را دربرمی‌گیرد و بنا بر این معادله (۲۳.۲) به صورت زیر درمی‌یابد

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \quad (24.2)$$

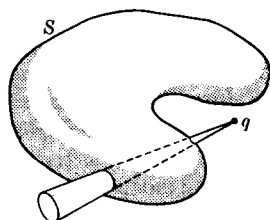
این نتیجه را می‌توان به راحتی به توزیع پیوسته‌ای از بارها، که با يك چگالی بار مشخص شده است، نیز تعمیم داد. اگر هر عنصر pdv از بار را به منزله يك بار نقطه‌ای در نظر بگیریم، در این صورت سهم چنین باری در انتگرال سطحی مؤلفه عمودی میدان الکتریکی روی هر سطح بسته برابر است با pdv/ϵ_0 ، مشروط بر آنکه این بار در داخل سطح قرار داشته باشد. بنابراین، انتگرال سطحی کل مساوی است با جمع کلیه جمله‌هایی بدین صورت که از بارهای واقع در داخل سطح ناشی می‌شوند. از اینرو، اگر S سطح



شکل ۴.۲ سطح بسته S را می‌توان به دو سطح S_1 و S_2 تقسیم کرد، به طوری که هر يك از آن دو با زاویه فضایی يكسانی به رأس q فرا گرفته شوند.



(الف)



(ب)

@Quark_Book

H--M

شکل ۵.۲ عنصر زاویه فضایی که سطح S را بیش از يك بار قطع می‌کند.

بسته‌ای باشد که حجم V را دربرگیرد، داریم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \quad (25.2)$$

معادله‌های (۲۴.۲) و (۲۵.۲) به قانون گاوس معروف‌اند. جمله سمت چپ، یعنی انتگرال مؤلفه عمودی میدان الکتریکی بر روی سطح S ، را گاهی شلاد میدان الکتریکی از سطح S می‌نامند.

با استفاده از قضیه واگرایی، قانون گاوس را می‌توان به صورت دیسگری نیز بیان کرد. قضیه واگرایی، معادله (۳۷.۱)، حاکی از آن است که

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dv$$

اگر این قضیه را در مورد انتگرال سطحی مؤلفه عمودی $\mathbf{E}$ به کار ببریم، نتیجه می‌شود

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv \quad (26.2)$$

و با قراردادن آن در معادله (۲۵.۲) به دست می‌آید

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv \quad (27.2)$$

معادله (۲۷.۲) باید برای همه حجمها، یعنی برای هر حجم V که انتخاب می‌کنیم، صادق باشد. این مطلب تنها در صورتی صادق است که انتگرالده‌های طرف راست و طرف چپ این معادله برابر باشند. بنابراین، برای آنکه معادله (۲۷.۲) برای هر حجمی که انتخاب شود معتبر باشد باید داشته باشیم

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (28.2)$$

این نتیجه را می‌توان شکل دیفرانسیلی قانون گاوس در نظر گرفت.

۷.۲ کاربرد قانون گاوس

معادله (۲۸.۲)، یا دقیقتر گفته باشیم، شکل تعمیم یافته‌ای از آن، که در فصل ۴ به دست خواهیم آورد یکی از معادلات اساسی الکتریسیته و مغناطیس است. قانون گاوس در این

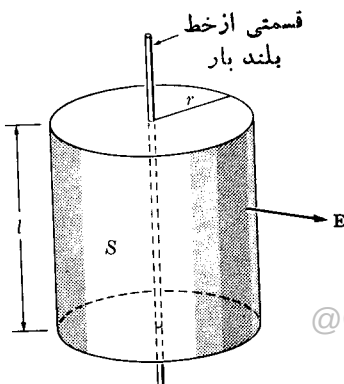
نقش مهم است، ولی اهمیت آن به همینجا ختم نمی‌شود بلکه فایده عملی نیز دارد. جنبه عملی این قانون به‌طور عمده در آن است که در وضعیتهایی که تقارن کافی دارند، روش بسیار راحتی برای محاسبه میدان الکتریکی فراهم می‌آورد. به عبارت دیگر، در برخی وضعیتهای بسیار متقارن که از لحاظ فیزیکی حائز اهمیت‌اند میدان الکتریکی را می‌توان به‌جای انتگرالهایی که در بالا داده شد یا روشهای فصل ۳، با استفاده از قانون گاوس محاسبه کرد. محاسبه میدان الکتریکی با استفاده از قانون گاوس بسیار راحت است.

برای آنکه بتوانیم از قانون گاوس در محاسبه میدان الکتریکی استفاده کنیم، باید آنچنان سطح بسته‌ای انتخاب کنیم که مؤلفه عمودی میدان الکتریکی در تمام نقاط آن سطح صفر یا یک یک مقدار ثابت باشد. به‌عنوان مثال، یک خط بار بسیار بلند که چگالی بار آن در یکای واحد طول λ است، (شکل ۶.۲) را در نظر می‌گیریم. تقارن وضعیت به‌وضوح نشان می‌دهد که میدان الکتریکی شعاعی است و به‌مکان در امتداد سیم و نیز به‌مکان زاویه‌ای حول سیم بستگی ندارد. این مطالب سبب می‌شوند تا سطحی مانند شکل ۶.۲ را انتخاب کنیم. محاسبه انتگرال مؤلفه عمودی میدان الکتریکی برای این سطح آسان است. دو سطح مستدیر در دو انتهای در مقدار انتگرال سهمی ندارند، زیرا میدان الکتریکی با این سطوح موازی است. چون $\mathbf{E}$ شعاعی است و به‌مکان سطح استوانه‌ای بستگی ندارد، سهم سطح جانبی استوانه در مقدار انتگرال برابر $2\pi r l E_r$ است. بنابراین، قانون گاوس به‌صورت زیر درمی‌آید

$$2\pi r l E_r = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (29.2)$$

از معادله (۲۹.۲) می‌توانیم E_r را محاسبه کنیم

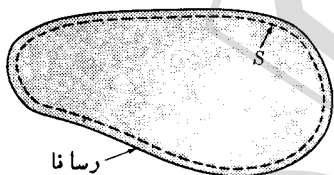
$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (30.2)$$



شکل ۶.۲ سطح استوانه‌ای که به کمک قانون گاوس برای محاسبه میدان الکتریکی ناشی از یک خط بلند بار به کار می‌رود.

باحل مسئله ۴.۲، که متضمن کاربرد مستقیم معادله (۸.۲) است، می‌توانیم به‌مزیت استفاده از قانون گاوس برای صرفه جویی در کار پی‌ببریم.

نتیجه مهم دیگری که از قانون گاوس بدست می‌آید، آن است که بار (بارخالص) در يك جسم رسانای باردار روی سطح خارجی آن قرار می‌گیرد. در بخش ۵.۲ دیدیم که میدان الکتریکی در داخل اجسام رسانا صفر است. در هر جایی در درون جسم رسانا می‌توان يك سطح گاوسی رسم کرد؛ مطابق قانون گاوس، بارخالص محصور در هر يك از این سطوح صفر است. سطح گاوسی S را مطابق شکل ۷.۲ رسم می‌کنیم. بار خالص درون این سطح نیز صفر است. تنها جایی که بارها می‌توانند بدون نقض قانون گاوس در آنجا قرار گیرند، سطح جسم رسانا است. چون در داخل باری وجود ندارد، می‌توانیم قسمتی از ماده را بدون آنکه چیزی تغییر کند حذف کنیم. بنا بر این، بار يك پوسته رسانا باید تماماً در سطح خارجی آن قرار بگیرد.

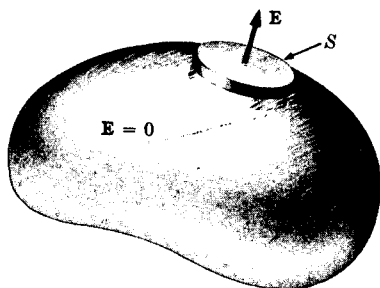


شکل ۷.۲ سطح گاوسی S که در داخل جسم رسانای باردار رسم شده است.

میدان الکتریکی درست در خارج از يك جسم رسانای باردار باید بر سطح رسانا عمود باشد. این مطلب از آنجا ناشی می‌شود که سطح رسانا يك سطح هم پتانسیل است، و $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. فرض کنید σ تابع چگالی سطحی بار در سطح جسم رسانا باشد. اگر قانون گاوس را برای سطح کوچک S ، در شکل ۸.۲ به کار ببریم داریم

$$E\Delta S = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)\Delta S$$

که در آن ΔS سطح یکی از قاعده‌های قرص کوچک است. در نتیجه میدان الکتریکی درست



شکل ۸.۲ کاربرد قانون گاوس برای سطح بسته S که سطح جسم رسانای باردار را قطع می‌کند.

در خارج جسم رسانا برابر است با

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (۳۱.۲)$$

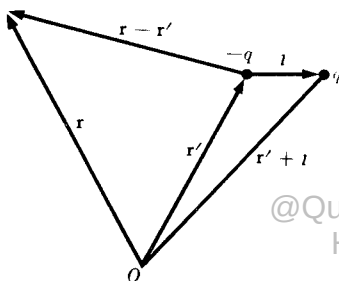
۸.۲ دوقطبی الکتریکی

دو بار الکتریکی مساوی و مختلف‌العلامه که در فاصله کمی از یکدیگر قرار گیرند یک دوقطبی الکتریکی تشکیل می‌دهند. توزیع میدان الکتریکی و پتانسیل ناشی از چنین پیکربندی باری را می‌توان با استفاده از فرمول‌های بخش‌های ۳.۲ و ۴.۲ به دست آورد. فرض کنید، مطابق شکل ۹.۲، بار $-q$ در نقطه $\mathbf{r}'$ و بار q در نقطه $\mathbf{r}' + \mathbf{l}$ قرار گرفته است؛ در این صورت میدان الکتریکی در نقطه اختیاری $\mathbf{r}$ را می‌توان با کاربرد مستقیم معادله (۸.۲) به دست آورد. میدان الکتریکی در $\mathbf{r}$ عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} \quad (۳۲.۲)$$

معادله (۳۲.۲) شکل صحیح میدان الکتریکی به ازای هر مقدار از q و هر مقدار از فاصله $\mathbf{l}$ است؛ اما، تعبیر آن چندان راحت نیست. آنچه مورد نظر ما است میدان دوقطبی است، و در دوقطبی فاصله $\mathbf{l}$ در مقایسه با $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ کوچک است؛ بنابراین، می‌توان معادله (۳۲.۲) را بسط داد و تنها اولین جمله غیر صفر آن را نگه داشت. چون استفاده از این شیوه عمومیت دارد، به تفصیل آن را بررسی می‌کنیم. اشکال عمده در بسط این عبارت از مخرج اولین جمله معادله (۳۲.۲) ناشی می‌شود. معکوس این مخرج را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{l}|^{-2} &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l}^2]^{-1/2} \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2} \left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{l}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-1/2} \end{aligned}$$



شکل ۹.۲ شکل هندسی لازم برای محاسبه $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ، میدان الکتریکی ناشی از دو بار نقطه‌ای.

شکل اخیر این عبارت را به راحتی می توان با استفاده از قضیه دو جمله ای بسط داد و فقط جمله هایی از آن را که بر حسب $\mathbf{l}$ خطی اند نگه داشت. نتیجه این بسط به صورت زیر است

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{l}|^{-2}=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-2}\left\{1+\frac{2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}+\dots\right\} \quad (33.2)$$

که در آن از جمله هایی که شامل $\mathbf{l}^2$ اند صرف نظر شده است. با قرار دادن معادله (۳۳.۲) در معادله (۳۲.۲) و دو باره با نگه داشتن جمله هایی که بر حسب $\mathbf{l}$ خطی اند، نتیجه می گیریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}+\dots\right\} \quad (34.2)$$

این معادله آن قسمت از میدان الکتریکی يك دوقطبی الکتریکی متناهی را به دست می دهد که با فاصله میان دو بار متناسب است. جمله های دیگری نیز وجود دارند که با توانهای دوم، سوم، و بالاتر فاصله متناسب اند. اما چنانچه فاصله میان دو بار کوچک باشد، سهم مربوط به جمله های توانهای بالاتر بسیار کم خواهد بود. در حد، وقتی $\mathbf{l}$ به سمت صفر میل می کند تمام جمله ها صفر می شوند، مگر آنکه باری نهایی شود. در حد، وقتی $\mathbf{l}$ به صفر نزدیک شود و در عین حال q بی نهایت شود، ولی به طریقی که مقدار $q\mathbf{l}$ ثابت بماند، تمام جمله ها بجز آنهایی که بر حسب $\mathbf{l}$ خطی اند صفر می شوند. در این حد يك دوقطبی نقطه ای تشکیل می شود. دوقطبی نقطه ای بار خالص ندارد، درضا گسترش ندارد و فقط با گشتاور دوقطبی اش به طور کامل مشخص می شود؛ این گشتاور برابر است با حد $q\mathbf{l}$ وقتی $\mathbf{l}$ به سمت صفر میل کند. برای نمایش گشتاور دوقطبی الکتریکی نماد $\mathbf{p}$ را به کار می بریم و می نویسیم

$$\mathbf{p}=q\mathbf{l} \quad (35.2)$$

می توانیم معادله (۳۴.۲) را، بر حسب گشتاور دوقطبی به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right\} \quad (36.2)$$

توزیع پتانسیل ناشی از يك دوقطبی نقطه ای نیز حائز اهمیت است. برای به دست آوردن این پتانسیل می توانیم تابعی پیدا کنیم که شیب آن با سمت راست معادله (۳۶.۲) برابر باشد. اما، راه ساده تر آن است که معادله (۱۵.۲) را در مورد توزیع بار متشکل از دو بار نقطه ای، که به فاصله کمی از یکدیگر قرار دارند، به کار ببریم. با استفاده از نماد گذاری معادله (۳۲.۲)، توزیع پتانسیل با رابطه زیر داده می شود

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{l}|}-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] \quad (37.2)$$

باسبط جمله اول، درست به همان طریقی که در مورد جمله اول معادله (۳۲.۲) انجام شد، و نگه داشتن فقط آن جمله‌هایی که بر حسب $\mathbf{l}$ خطی اند، معادله (۳۷.۲) به صورت زیر درمی آید

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (38.2)$$

این معادله با همان درجه تقریب معادله (۳۴.۲) معتبر است؛ یعنی از جمله‌های متناسب با $\mathbf{l}^2$ و توانهای بالاتر $\mathbf{l}$ صرف نظر شده است. برای دوقطبی نقطه‌ای $\mathbf{p}$ ، معادله (۳۸.۲) دقیق است؛ ولی بهتر است آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (39.2)$$

معادله (۳۹.۲) پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ حاصل از یک دوقطبی الکتریکی را به دست می‌دهد؛ به کمک این پتانسیل می‌توانیم میدان الکتریکی [معادله (۳۶.۲)] را حساب کنیم. پیدا کردن انرژی پتانسیل یک دوقطبی الکتریکی که در یک میدان الکتریکی خارجی قرار گرفته است، نیز جالب توجه است. در مورد دوبار $-q$ در نقطه $\mathbf{r}$ و q در نقطه $\mathbf{r} + \mathbf{l}$ واقع در میدان الکتریکی که با تابع پتانسیل $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ توصیف می‌شود، انرژی پتانسیل برابر است با

$$U = -q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + q\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) \quad (40.2)$$

چنانچه $\mathbf{l}$ در مقایسه با $\mathbf{r}$ کوچک باشد، تابع $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{l})$ را می‌توان بر حسب $\mathbf{l}$ بسط داد و فقط دو جمله اول را نگه داشت. نتیجه این بسط عبارت است از

$$\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = \varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \mathbf{l} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} \quad (41.2)$$

که در آن باید مقدار شیب در نقطه $\mathbf{r}$ منظور شود. اگر حاصل این بسط را در معادله (۴۰.۲) به کار ببریم، نتیجه می‌شود

$$U = q\mathbf{l} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} \quad (42.2)$$

در حالت حدی، برای یک دوقطبی نقطه‌ای داریم

$$U(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_{\text{ext}} \quad (43.2)$$

که، البته رابطه دقیقی است. با توجه به اینکه میدان الکتریکی برابر است با منفی شیب

پتانسیل الکتروستاتیکی، شکل دیگر معادله (۴۳.۲) به صورت زیر است

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (44.2)$$

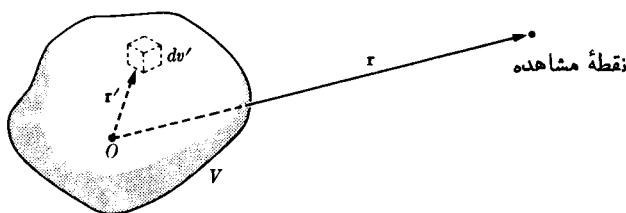
بنابراین، این انرژی، انرژی پتانسیل دوقطبی $\mathbf{p}$ در میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ است، که در آن $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ در محل دوقطبی محاسبه می شود.

لازم به تذکر است که در این بخش ما در مورد دو پتانسیل متفاوت بحث کردیم. در معادله های (۳۷.۲)، (۳۸.۲) و (۳۹.۲) درباره پتانسیل الکتروستاتیکی حاصل از یک دو قطبی الکتریکی بحث شد. در معادله های (۴۰.۲) تا (۴۳.۲) فرض کردیم که دو قطبی در میدان الکتریکی موجودی که با تابع پتانسیل $\varphi_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ توصیف می شود، قرار گرفته است. این میدان الکتریکی از بارهای دیگری غیر از بارهای تشکیل دهنده دوقطبی ناشی می شود. در واقع برای اینکه از نتیجه بی نهایت احتراز کنیم، باید از میدان حاصل از خود دو قطبی چشمپوشی شود. این مطلب ممکن است ما را به مسائل پیچیده مربوط به خود نیروها و خود انرژیها بکشاند که فعلاً نمی توانیم درباره آنها بحث کنیم. اما باید توجه داشت که انرژی پتانسیل حاصل از برهم کنش یک دو قطبی الکتریکی با میدان خودش از اثر نیروهای وارد بر دوقطبی از جانب خود دو قطبی ناشی می شود. این گونه نیروها، که در مبحث دینامیک به نیروهای داخلی معروف اند، در حرکت کلی دوقطبی تأثیر نمی گذارند. فعلاً بررسی بیشتر این موضوع برای ما ضروری نیست.

۹.۲ بسط میدانهای الکتریکی بر حسب چند قطبیهها

از تعریفی که در بالا برای گشتاور دو قطبی الکتریکی به دست دادیم پیداست که برخی از جنبه های توزیع پتانسیل ناشی از یک توزیع بار مشخص را می توان بر حسب گشتاور دوقطبی الکتریکی آن به راحتی بیان کرد. برای انجام این کار، البته ضروری است که گشتاور دو قطبی الکتریکی یک توزیع بار دلخواه را تعریف کنیم. به جای اینکه بدون هیچ منظور خاصی تعریفی به دست بدهیم، بهتر است بسط معینی از پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از یک توزیع بار دلخواه را در نظر بگیریم. برای کاستن از تعداد مختصات مکانی، توزیع باری را در حوالی مبدأ مختصات در نظر می گیریم. شرط دیگری که منظور خواهیم کرد این است که توزیع بار کلاً در کره ای به شعاع a احاطه شده است و در آن مقدار a در مقایسه با فاصله مبدأ تا نقطه مشاهده کوچک است. یک نقطه اختیاری در داخل توزیع بار را با $\mathbf{r}'$ ، چگالی بار در آن نقطه را با $\rho(\mathbf{r}')$ ، و نقطه مشاهده را با $\mathbf{r}$ نشان می دهیم (شکل ۱۰.۲). پتانسیل در نقطه $\mathbf{r}$ عبارت است از

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (45.2)$$



شکل ۱۰.۲ بار در حجم V با چگالی $\rho(\mathbf{r}')$ جایگزین شده است، میدان الکتریکی را باید در نقطه $\mathbf{r}$ محاسبه کرد.

که در آن dv' برای نمایش عنصر حجم در توزیع بار به کار رفته است و V کل حجمی است که توزیع بار اشغال کرده است. با توجه به شرطی که در بالا قائل شدیم، مبنی بر آنکه نقطه مشاهده دور از مبدأ مختصات قرار دارد، مقدار $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ را می توان به صورت رشته ای از توانهای صعودی r'/r بسط داد. نتیجه این بسط عبارت است از

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[-\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \left[\quad \right]^2 + \dots \right\} \quad (46.2)$$

که در اینجا تنها سه جمله اول را صریحاً نوشته ایم. توجه کنید که هر چند $(r'/r)^2$ در مقایسه با $2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r^2$ قابل چشمپوشی است، با وجود این نمی توان آن را از داخل کروشه اول حذف کرد، زیرا که مرتبه آن با مرتبه بزرگترین جمله در کروشه بعدی یکی است. با اقرار دادن معادله (46.2) در معادله (45.2) و حذف جمله های با توان سوم و بالاتر $\mathbf{r}'$ نتیجه می شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] + \dots \right\} \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (47.2)$$

چون $\mathbf{r}$ به متغیر انتگرال گیری یعنی به $\mathbf{r}'$ بستگی ندارد، همه آنچه را که به $\mathbf{r}$ وابسته است می توان از زیر نماد انتگرال بیرون آورد. در نتیجه خواهیم داشت

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dv' \right\} \quad (48.2)$$

که در آن x_i و x_j مؤلفه‌های قائم $\mathbf{r}$ و x'_i و x'_j مؤلفه‌های قائم $\mathbf{r}'$ اند و δ_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

تعبیر معادله (۴۸.۲) آسان است. اولین انتگرال در این معادله عبارت است از بار کل، و اولین جمله عبارت است از پتانسیلی که اگر بار کل در مبدأ مختصات متمرکز بود، حاصل می‌شد. دومین انتگرال خیلی شبیه به گشتاور دو قطبی الکتریکی است که در بخش ۸.۲ تعریف شد، و در نتیجه آن را گشتاور دو قطبی توزیع بار می‌نامند. به عنوان یک تعریف، این انتگرال بیانگر تعمیمی است از تعریف دوبار نقطه‌ای مساوی و مختلف علامه که قبلاً به آن اشاره کردیم. اما به راحتی می‌توان نشان داد که هر دو تعریف در مورد دوبار نقطه‌ای مساوی و مختلف علامه نتیجه یکسانی به دست می‌دهند. جمله دوم در معادله (۴۸.۲) پتانسیلی است که از یک دو قطبی نقطه‌ای، چنانچه در مبدأ مختصات قرار داشته و گشتاور آن با گشتاور دو قطبی توزیع بار برابر باشد حاصل می‌شود. توجه به این نکته جالب است که اگر بار کل صفر باشد، گشتاور دو قطبی توزیع بار به مبدأ مختصات بستگی نخواهد داشت. برای تحقیق صحت این مطلب دستگاه مختصات جدیدی را در نظر بگیرید که مبدأ آن نسبت به دستگاه مختصات قدیم در $\mathbf{R}$ قرار داشته باشد. اگر نقطه‌ای را نسبت به دستگاه قدیم با $\mathbf{r}'$ و همان نقطه را نسبت به دستگاه جدید با $\mathbf{r}''$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'' + \mathbf{R} \quad (۴۹.۲)$$

گشتاور دو قطبی نسبت به دستگاه قدیم برابر می‌شود با

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' = \int_V (\mathbf{r}'' + \mathbf{R}) \rho(\mathbf{r}') dv' = \int_V \mathbf{r}'' \rho dv' + \mathbf{R} Q \quad (۵۰.۲)$$

که صحت حکم بالا را ثابت می‌کند.

جمله سوم معادله (۴۸.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} \quad (۵۱.۲)$$

که در آن

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (۵۲.۲)$$

Q_i نه مؤلفه متناظر با x و z (برابر با ۱، ۲، ۳) دارد. از این نه مؤلفه، شش مؤلفه آن دو به دو برابرند و بنابراین فقط شش مؤلفه متمایز باقی می ماند. مجموعه این کمیتها تانسور گشتاور چهار قطبی^۱ را تشکیل می دهد که معرف بسط مفهوم گشتاور دوقطبی است. البته گشتاورهای از مرتبه های بالاتر نیز وجود دارند که از نگه داشتن جمله های مرتبه بالاتر در بسط معادله (۴۸.۲) به دست می آیند. این چند قطبیهای مرتبه بالاتر در فیزیک هسته ای اهمیت دارند، اما در این کتاب بیش از این درباره آنها گفتگو نخواهد شد.

چنانکه معادله (۴۸.۲) نشان می دهد، چند قطبیهای الکتریکی برای محاسبه تقریبی میدان الکتریکی توزیع بار به کار می روند. با وجود این کاربردهای متعدد دیگری نیز دارند، ولی همه این کاربردها بر این اساس اند که یک توزیع بار گسترده واقعی را با بارهای نقطه ای، دوقطبیهای نقطه ای و غیره به طور تقریبی برابر بگیریم. این تقریبها غالباً حل مسائل بسیار مشکل را ممکن می سازند.

۱۰.۲ تابع دلتای دیراک

در عبارتهای کلی مربوط به میدان و پتانسیل الکتریکی، در معادله های (۸.۲) و (۱۵.۲)، میان بارهای نقطه ای و توزیعهای پیوسته بار تمایز قائل شده ایم. به خاطر صرفه جویی در نمادگذاری، حتی اگر دلیل دیگری هم نباشد، بهتر است بارهای نقطه ای را بدصورت حالت خاصی از تابع چگالی بار کلی $\rho(\mathbf{r})$ بیان کنیم. تابع دلتای دیراک، $\delta(\mathbf{r})$ ، از عهدۀ انجام این کار برمی آید، و علاوه بر آن این تابع ابزار ریاضی با ارزشی است برای انجام بسیاری از محاسبات. برای این منظور می نویسیم

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}) \quad (\text{بار نقطه ای}) \quad (۵۳.۲)$$

که در آن

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{برای } \mathbf{r} \neq 0$$

$$\int \delta(\mathbf{r}') dv' = 1 \quad (۵۴.۲)$$

واضح است که این رابطه یک بیان ریاضی برای مفهوم فیزیکی بار نقطه ای در $\mathbf{r} = 0$ به دست می دهد؛ جمع کلی چگالی بار برابر q است، اما تمامی بار درست در مبدأ قرار دارد. اگر تابع دلتا، همه جا، بجز در یک تک نقطه صفر باشد و در عین حال انتگرال غیر

۱. تانسورها تعمیمی از بردارها هستند و در پیوست ۱ بحثی مقدماتی درباره آنها ارائه شده است.

صفر^۱ داشته باشد، یک تابع ریاضی کاملاً تکین است. بسا وجود این، این تسامع یک شیء ریاضی مجاز است که کاربرد آن به مشکلاتی نمی انجامد، به شرط آنکه دقت کنیم و از آن، مثلاً، مثل یک تابع پیوسته مشتق گیری نکنیم. یک نوع از این تابع می تواند چگالی سطحی بار $\sigma(\mathbf{r})$ ، یعنی توزیع باری که بجز در روی سطحی معین همه جا صفر است، را نمایش دهد. با این تعمیمها، گرفتن انتگرال تنها بر روی $\rho(\mathbf{r})$ در معادله های (۸.۲) و (۱۵.۲) کافی است. برای این کاربرد توجه کنید که

$$\int F(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}') dv' = F(\mathbf{0}) \quad (۵۵.۲)$$

که در آن F تابعی برداری یا نرده ای است، زیرا انتگرالده جز در $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ صفر می شود، به علاوه

$$\int F(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) dv' = F(\mathbf{r}_0) \quad (۵۶.۲)$$

بنابراین اگر $\rho(\mathbf{r}') = q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$ باشد، برای بار نقطه ای q_i در $\mathbf{r}_i$ داریم

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

خواص دیگری از تابع دلتا را می توان به عنوان نتایجی از صورت دیفرانسیلی قانون گاوس به دست آورد

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad [۲۸.۲]$$

برای بار نقطه ای q در $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ با استفاده از معادله (۲۱.۲)، داریم

$$\nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{\epsilon_0} q \delta(\mathbf{r})$$

یا

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (۵۷.۲)$$

۱. انتگرال ریمانی چنین تابعی، اگر وجود داشته باشد، صفر است ولی انتگرال گیری را می توان توسط انتگرال کلیتر لیبک (Lebesgue) انجام داد. برای خواص دیگر تابع دلتا به پیوست ۴ مراجعه کنید.

همچنین، چون

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}) \quad (58.2)$$

معادله‌های (57.2) و (58.2) آنقدر مهم‌اند که ارزش دارد آنها را به‌طور مستقیمتری به‌دست آوریم. مشتق‌گیری مستقیم نشان می‌دهد که واگرایی همه جا صفر است مگر در مبدأ، یعنی به‌ازای $r \neq 0$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} \\ &= -\frac{3}{r^4} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} + \frac{3}{r^3} = 0 \end{aligned}$$

و به‌ازای $r = 0$ نتیجه برابر است با $-\infty + \infty$ که نامعین است. ولی از کاربرد قضیه واگرایی در مورد یک کره کوچک به‌شعاع R در اطراف مبدأ به‌دست می‌آید

$$\int_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv = \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} da = \frac{1}{R^3} \oint_S da = 4\pi$$

چون شعاع R هر قدر هم که کوچک باشد انتگرال حجمی 4π است، انتگرالده را می‌توان به‌صورت $4\pi \delta(\mathbf{r})$ نمایش داد و این امر با معادله (57.2) سازگار است. به بیان دیگر، تابع دلتا این امکان را فراهم می‌کند که قضیه واگرایی را در مورد $\mathbf{r}/r^3$ به کار ببریم، حتی در ناحیه‌ای که حاوی نقطه تکین در مبدأ است. هر جا که با انتگرال روی واگرایی $\mathbf{r}/r^3$ ، یاروی لاپلاسی $1/r$ ، برمی‌خوریم تابع دلتا بسیار سودمند خواهد بود.

۱۱.۲ خلاصه مطالب

الکتروستاتیک بر قانون کولن مبتنی است. طبق این قانون نیروی الکتروستاتیکی وارد بر بار نقطه‌ای q در $\mathbf{r}$ ، از طرف بار نقطه‌ای q_1 در مبدأ، به‌صورت زیر است

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

که در آن ϵ_0 دزدستگاه یكاهای mks برابر $10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ و دزدستگاه گاوسی برابر $1/4\pi$ است. بهتر آن است كه بار q را به عنوان بار آزمون در نظر بگیریم و میدان الكتریكی $\mathbf{E}$ ، متناظر بانیروی الكتریكی $\mathbf{F}_e$ ، را به كمك آن از رابطه زیر تعریف كنیم

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$$

میدان الكتروستاتیكی ناشی از بار نقطه‌ای q_1 واقع در $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ ، در نقطه $\mathbf{r}$ ، عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

تاو و واگرایی $\mathbf{E}$ هر دو حائز اهمیت اساسی اند

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r})$$

كه در آن تابع دلتای دیراك بار وابط زیر تعریف می شود

$$\delta(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \neq 0 \quad \text{به ازای}$$

$$\int \delta(\mathbf{r}) dv = 1$$

تابع دلتا این خاصیت را دارد كه برای هر تابع F داریم

$$\int F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = F(\mathbf{r}_0)$$

از این رو برای يك بار نقطه‌ای به دست می آید

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} q_1 \delta(\mathbf{r})$$

۱. قانون كولن را می توان به دستگاههایی كه چندین بار نقطه‌ای دارند، یسا به توزیع

پیوسته‌ای با چگالی بار $\rho(\mathbf{r})$ تعمیم داد. در اینجا $\rho(\mathbf{r})$ به صورتی تعریف می‌شود که در آن عنصر بار در عنصر حجم dv عبارت خواهد بود از

$$dq = \rho(\mathbf{r}) dv$$

برای بار نقطه‌ای q_i در $\mathbf{r}_i$ داریم

$$\rho(\mathbf{r}) = q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

چون نیروها و میدانها جمع پذیرند، بنا براین

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv'$$

از آنجا که ∇ عملگری خطی است، داریم

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

اینها معادلات دیفرانسیلی اساسی اند که باید همه میدانهای الکتروستاتیکی در هر نقطه به طور موضعی در آنها صدق کنند. (درواقع، معادله واگرایی حتی برای میدانهای وابسته به زمان نیز صادق است، و یکی از چهار معادله اساسی ماکسول به حساب می‌آید.)

۴. قانون گاوس با انتگرال گرفتن از دو طرف معادله واگرایی روی حجم اختیاری V ، و به کار بردن قضیه واگرایی به دست می‌آید و به صورت زیر است

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

که در آن

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$$

و Q بار کل موجود در داخل حجم V است، حجمی که توسط S محصور شده است. در موارد خاصی که بتوان با دلایل کافی استدلال کرد که بزرگی و راستای $\mathbf{E}$ نسبت به سطح انتخابی S ثابت است، این قانون عملاً برای محاسبه E به کار می‌رود، و همچنین نشان می‌دهد که بار یک رسانا باید روی سطح بیرونی آن قرار گیرد.

۳. تابع پتانسیل الکتروستاتیکی $\varphi(\mathbf{r})$ از معادلهٔ تساوی نتیجه می‌شود، به طوری که

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

برای میدان مفروض $\mathbf{E}$

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

درمورد یک توزیع بار مشخص

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

محاسبهٔ این انتگرال از محاسبهٔ انتگرال مربوط به $\mathbf{E}$ راحت‌تر است. پتانسیل نرده‌ای φ با رابطهٔ زیر به انرژی پتانسیل U ، مربوط به نیروی الکتروستاتیکی پایستار، ربط پیدا می‌کند

$$U = q\varphi$$

۴. در فاصلهٔ دور از ناحیه‌ای که در آن بارهای چشمه ρ قرار گرفته‌اند، بسط φ بر حسب چند قطبیه‌ها مفید است

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \dots \right]$$

که در آن

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv'$$

گشتاور دوقطبی توزیع بار است. معمولاً اولین جملهٔ غیر صفر در بسط بیشترین اهمیت را دارد. ما تنها دو جملهٔ اول را بررسی می‌کنیم.

مسائل

۱.۲ دو ذره هریک به جرم m و بار q ، بادونخ هریک به طول l از نقطه‌ای مشترک آویزان شده‌اند. زاویهٔ θ را که هر نخ با خط قائم می‌سازد پیدا کنید.

۲.۲ بار دو کرهٔ رسانای کوچک همسان به ترتیب برابر است با $10^{-9} \times 20$ و $10^{-9} \times 50$ - . وقتی این دو کره در فاصلهٔ ۴ سانتیمتری از یکدیگر قرار گیرند چه نیرویی به یکدیگر وارد می‌کنند؟ اگر آنها را به هم نزدیک کنیم تا تماس حاصل کنند و بعد به اندازهٔ ۴ سانتیمتر آنها را از یکدیگر دور کنیم، چه نیرویی به یکدیگر وارد خواهند کرد؟

۳.۲ سه بار نقطه‌ای که بار هر یک از آنها $10^{-9} \times 3$ است در سه رأس مربعی بد ضلع 15cm قرار گرفته‌اند. مقدار و جهت میدان الکتریکی را در رأس بدون بار این مربع پیدا کنید.

۴.۲ خط بار بسیار طولی با چگالی بار یکنواخت λ در واحد طول مفروض است. با انتگرال گیری مستقیم میدان الکتریکی را در فاصلهٔ r از این خط بار پیدا کنید.

۵.۲ (الف) قرصی مدور به شعاع R چگالی سطحی بار یکنواخت σ دارد. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای واقع بر محور قرص و در فاصلهٔ z از صفحهٔ آن پیدا کنید. (ب) استوانه‌ای قائم به شعاع R و ارتفاع L در امتداد محور z قرار دارد. چگالی حجمی بار این استوانه نسبت به مبدئی واقع در مرکز آن نایکنواخت است و به صورت تابع $\rho(z) = \rho_0 + \beta z$ داده می‌شود. نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q را که در مرکز این استوانه قرار گرفته است محاسبه کنید.

۶.۲ یک پوستهٔ کروی رسانای نازک به شعاع R به طور یکنواخت باردار شده است و بار کل آن Q است. با انتگرال گیری مستقیم، پتانسیل را در نقطه‌ای اختیاری واقع در (الف) داخل پوسته و (ب) خارج پوسته پیدا کنید.

۷.۲ دوبار نقطه‌ای q و $-q$ با $1/2$ به ترتیب در مبدأ مختصات و در نقطهٔ $(a, 0, 0)$ قرار گرفته‌اند. درجه نقطه‌ای روی محور x میدان الکتریکی صفر می‌شود؟ در صفحهٔ $x - y$ سطح هم پتانسیلی را که از این نقطه می‌گذرد رسم کنید. آیا این نقطه، نقطهٔ کمیتهٔ واقعی پتانسیل است؟

۸.۲ نشان دهید که سطح هم پتانسیل $\varphi = 0$ در مسئلهٔ قبل کروی شکل است. مختصات مرکز این کره را پیدا کنید.

۹.۲ استوانه‌ای قائم به شعاع R و ارتفاع L ، با چگالی بار یکنواخت ρ ، مفروض است. پتانسیل الکتروستاتیکی را در نقطه‌ای واقع بر محور استوانه ولی خارج از توزیع بار محاسبه کنید.

۱۰.۲ میدان الکتریکی در تمام نقاط یک ناحیه از فضا موازی محور x است. ثابت کنید که در این ناحیه میدان الکتریکی به مختصات y و z بستگی ندارد. اگر در این ناحیه از فضا باری وجود نداشته باشد ثابت کنید که میدان به متغیر x نیز بستگی نخواهد داشت.

۱۱.۲ با فرض اینکه قدرت دی الکتریکی هوا (یعنی آن مقدار میدان الکتریکی که در بالاتر

از آن هوارسانا می‌شود) مساوی $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ باشد، (الف) حداکثر پتانسیلی را که يك کرهٔ رسانای منزوی به شعاع 10 cm می‌تواند داشته باشد چقدر است؟ (ب) شعاع رسانایی که بتواند يك کولن بار داشته باشد چقدر است؟

۱۲.۲ حفره‌ای در درون يك جسم رسانا موجود است. اگر بار نقطه‌ای q را در داخل حفره قرار دهیم، ثابت کنید باری به مقدار $-q$ — در سطح آن القا می‌شود (از قانون گاوس استفاده کنید).

۱۳.۲ میدان الکتریکی در جو در نزدیکی سطح زمین تقریباً 200 V/m و جهت آن به طرف پایین است. در ارتفاع 1400 m میدان الکتریکی در جو فقط 20 V/m و به سمت پایین است. چگالی متوسط بار در جو در ارتفاع کمتر از 1400 m چقدر است؟ آیا این بار بیشتر از یونهای مثبت تشکیل شده است یا از یونهای منفی؟

۱۴.۲ دو صفحهٔ رسانای نامتناهی و موازی به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار دارند. اگر چگالی سطحی بار در سطوح داخلی این صفحات به ترتیب σ و $-\sigma$ — و یکنواخت باشد، میدان الکتریکی را در فضای میان دو صفحه به دست آورید. ثابت کنید که میدان الکتریکی در فضای خارج دو صفحه صفر است. [میدان الکتریکی که دو صفحهٔ رسانای باردار موازی و متناهی در فضای میان دو صفحه تولید می‌کنند اساساً با میدان الکتریکی که در بالا به دست آمد یکسان است، مشروط به آنکه ابعاد سطوح این صفحه‌ها در مقایسه با فاصلهٔ d میان آنها بزرگ باشند؛ چنین آرایشی را خازن می‌نامند (رک فصل ۶).]

۱۵.۲ چگالی حجمی بار در يك توزیع بار کروی تابعی است که فقط به r ، فاصلهٔ از مرکز توزیع، بستگی دارد. به عبارت دیگر $\rho = \rho(r)$. اگر $\rho(r)$ به صورت تابعی که در زیر می‌آید باشد، میدان الکتریکی را به صورت تابعی از r به دست آورید. با فرض اینکه پتانسیل الکتریکی در بینهایت صفر است، یعنی $\varphi(\infty) = 0$ ، با انتگرال‌گیری از نتیجهٔ بالا پتانسیل الکروستاتیکی، $\varphi(r)$ را پیدا کنید.

(الف) به ازای $0 \leq r \leq R$ و $\rho = A/r$ مقدار ثابتی است؛

به ازای $r > R$ ، $\rho = 0$

(ب) به ازای $0 \leq r \leq R$ ، $\rho = \rho_0$ (یعنی ثابت است)؛

به ازای $r > R$ ، $\rho = 0$

۱۶.۲ میله‌ای گرد با طول بینهایت و شعاع R دارای چگالی بار یکنواخت ρ است. با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را در فواصل $r < R$ و $r > R$ به دست آورید.

۱۷.۲ تاو و واگرایی بردار $\mathbf{r}/r^3$ را حساب کنید. کدام چگالی باری، $\rho(r)$ ، میدان الکتریکی زیر را تولید می‌کند

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

پتانسیل این میدان کدام است؟

۱۸.۲ فرض کنید که نما در میدان کولنی دقیقاً ۳ نیست بلکه برابر است با $a = 3 - \delta$ ، که در آن $\delta \ll 1$. انتگرال $\nabla \cdot \mathbf{E}$ را در حجم کره‌ای به شعاع R که بار q در مرکز آن قرار دارد، حساب کنید.

۱۹.۲ پتانسیل استاندارد کولنی، که به صورت زیر است

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

معمولاً در محیط رسانا پدیدار می‌شود. میدان الکتریکی و چگالی بار مربوط به این پتانسیل را به دست آورید.

۲۰.۲ با استفاده از معادله (۳۹.۲) برای پتانسیل حاصل از دوقطبی $\mathbf{p}$ ، طرحی از مقاطع سطوح هم‌پتانسیل را در صفحه‌ای که حاوی دوقطبی باشد، رسم کنید. برای سهولت می‌توان دوقطبی را در مبدأ مختصات قرارداد. با استفاده از نتایج به دست آمده بعضی از خطوط نیرو را رسم کنید. نتیجه را با شکل ۱۰.۲ مقایسه کنید.

۲۱.۲ (الف) نشان دهید که برد دوقطبی $\mathbf{p}$ ، که در میدان خارجی $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ قرار گرفته است، نیرویی برابر با $\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}_{\text{ext}}$ وارد می‌شود. (ب) نشان دهید که گشتاور نیروی وارد بر این دو قطبی در این میدان عبارت است از

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times [\mathbf{p} \cdot \nabla \mathbf{E}_{\text{ext}}] + \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$$

که در آن $\mathbf{r}$ فاصله برداری دوقطبی است از نقطه‌ای که گشتاور نیرو نسبت به آن محاسبه می‌شود. کمیت $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$ ، که به مختصات نقطه‌ای که گشتاور نیرو نسبت به آن محاسبه می‌شود بستگی ندارد، جفت چرخشی وارد بر دوقطبی نامیده می‌شود.

۲۲.۲ سه بار در یک آرایش خطی قرار گرفته‌اند. بار $2q$ — در مبدأ مختصات و دو بار دیگر که مقدار هر یک $+q$ است، به ترتیب در نقاط $(0, 0, l)$ و $(0, 0, -l)$ واقع‌اند. رابطه نسبتاً ساده‌ای برای پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ که در فواصل $|\mathbf{r}| \gg l$ صادق باشد پیدا کنید و سطوح هم‌پتانسیل آن را در صفحه $z-x$ رسم کنید.

۲۳.۲ تانسور گشتاور چهار قطبی توزیع بار مسئله ۲۲.۲ را پیدا کنید.

۲۴.۲ با استفاده از توابع δ در مورد توزیع بارهای نقطه‌ای، نشان دهید که گشتاور دوقطبی

يك زوج بار نقطه‌ای، یعنی $p = ql$ ، از تعریف کلی زیر نتیجه می‌شود

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv'$$

۲۵.۲ فرض کنید مولکولی عبارت است از بار $2q$ — در مبدأ مختصات و دو بار $+q$ که در نقاط l_1 و l_2 قرار دارند و $l_1 = l_2 = l$ است.

(الف) گشتاور دوقطبی مولکول را پیدا کنید.

(ب) برای مولکول H_2O ، $l = 0.958 \times 10^{-10} m$ و زاویه میان l_1 و l_2 برابر 105° است. اگر $|\mathbf{p}| = 6.14 \times 10^{-30} C \cdot m$ باشد، بار مؤثر q را به دست آورید.

۲۶.۲ میدان الکتریکی دوقطبی نقطه‌ای را با محاسبه شیب تابع زیر به دست آورید

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

حل مسائل الکتروستاتیک

برای حالتی که در آن توزیع بار در همه جا مشخص شده است حل مسائل الکتروستاتیک کاملاً ساده است زیرا، همان‌طور که دیدیم، پتانسیل و میدان الکتریکی مستقیماً با انتگرالهایی بر روی این توزیع بار محاسبه می‌شوند

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۱.۳)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۲.۳)$$

ولی بسیاری از مسائل که در عمل به آنها بر می‌خوریم از این نوع نیستند. چنانچه توزیع بار از قبل مشخص نشده باشد، ممکن است لازم شود قبل از تعیین توزیع بار ابتدا میدان الکتریکی را محاسبه کنیم. مثلاً یک مسئله الکتروستاتیک ممکن است شامل چند جسم رسانا باشد که پتانسیل یا بار کل هر یک از آنها معلوم باشد، اما توزیع بارهای سطحی به‌طور کلی معلوم نخواهد بود و قبل از حل کامل مسئله به‌دست نخواهد آمد.

هدف ما در این فصل معرفی راه دیگری است برای حل مسائل الکتروستاتیک. برای این کار نخست معادله دیفرانسیل اصلی را که پتانسیل φ می‌باید در آن صدق کند به‌دست می‌آوریم. در اینجا از بحث درباره اجسام دی‌الکتریک چشم می‌پوشیم. این گونه مسائل را در فصل ۴ حل خواهیم کرد.

۱.۳ معادله پواسون

کلیه روابط اساسی لازم برای مطالعه این فصل را در فصل گذشته به دست آورده ایم. یکی از این روابط اساسی شکل دیفرانسیلی قانون گاوس است که به صورت زیر است

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (۳.۳)$$

به علاوه، در یک میدان الکتروستاتیکی محض، $\mathbf{E}$ را می توان به صورت منفی شیب پتانسیل φ نوشت

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (۴.۳)$$

از ترکیب روابط (۳.۳) و (۴.۳) نتیجه می شود

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (۵.۳ \text{ الف})$$

بهتر است واگرایی شیب را به صورت یک عملگر دیفرانسیلی مثلاً به صورت $\nabla \cdot \nabla$ یا ∇^2 در نظر بگیریم. نماد ∇^2 بیشتر به کار می رود و به عملگر لاپلاس معروف است:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (۵.۳ \text{ ب})$$

بدیهی است که لاپلاسی، یک عملگر نرده ای است. معادله (۵.۳ ب) یک معادله دیفرانسیلی است که به معادله پواسون مشهور است. عملگر ∇^2 شامل مشتق گیری نسبت به بیش از یک متغیر است. بنا بر این، معادله پواسون معادله ای است با مشتقات پاره ای که با در دست داشتن بستگی تابعی $\rho(x, y, z)$ و شرایط مرزی مناسب می توان آن را حل کرد.

عملگر ∇^2 درست نظیر $\nabla \cdot$ و $\nabla \times$ به دستگاه مختصات خاصی بستگی ندارد. برای حل یک مسئله معین باید عملگر ∇^2 را بر حسب x, y, z یا r, θ, ϕ و یا مانند آنها نوشت. انتخاب هر دستگاه به خصوصی از مختصات اختیاری است، اما چنانچه با در نظر گرفتن تقارن خاص موجود در مسئله، دستگاه مختصات مناسبی انتخاب شود حل آن بسیار راحت خواهد بود. شکل $\nabla^2 \varphi$ در دستگاه های مختصات مختلف را می توانیم به راحتی با تأثیر دادن عملگر ∇ بر شیب φ پیدا کنیم. با به کار بردن عبارات مربوط فصل ۱ نتایج زیر به دست می آید:

در دستگاه مختصات قائم:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (۶.۳)$$

در دستگاه مختصات کروی:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \quad (۷.۳)$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (۸.۳)$$

برای یافتن شکل لاپلاسی در دستگاه‌های مختصات پیچیده تر خواننده می‌تواند به منابع پایان این فصل مراجعه کند. باید توجه داشت که r و θ در معادلات (۷.۳) و (۸.۳) معانی متفاوتی دارند؛ در مختصات کروی، r بزرگی بردار شعاعی نسبت به مبدأ مختصات و θ زاویه قطبی است. در مختصات استوانه‌ای r فاصله عمود از محور استوانه و θ زاویه سمت در حول این محور است.

۲.۳ معادله لاپلاس

در بعضی مسائل الکتروستاتیک که شامل رساناها هستند، تمام بارها یا در روی سطح رساناها یافت می‌شوند و یا به صورت بارهای نقطه‌ای ثابت‌اند. در این موارد ρ در اکثر نقاط فضا مساوی صفر است، و هر جا که چگالی بار صفر باشد معادله پواسون به صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (۹.۳)$$

که به معادله لاپلاس معروف است.

فرض کنید N رسانا در پتانسیلهای $\varphi_I, \varphi_{II}, \dots, \varphi_N$ قرار دارند. مسئله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم پیدا کردن پتانسیل در تمام نقاط فضای خارج از رساناهاست. برای انجام این کار باید جوابی برای معادله لاپلاس پیدا کنیم که مقدار آن در روی سطح رساناها به $\varphi_I, \varphi_{II}, \dots, \varphi_N$ تبدیل شود. می‌توان نشان داد که چنین جوابی برای معادله لاپلاس جوابی یکتاست، یعنی هیچ جواب دیگری برای معادله لاپلاس وجود ندارد که در همان شرایط مرزی صدق کند. اثبات این حکم در زیر خواهد آمد. جواب معادله لاپلاس که بدین طریق به دست می‌آید در درون رساناها صدق نمی‌کند، زیرا رساناها بار سطحی دارند، و این بدان معناست که شیب φ از یک طرف به طرف دیگر سطح ناپوستگی دارد (بخش ۷.۲). اما قبلاً دیدیم که فضای داخل هر رسانا ناحیه‌ای است با پتانسیل ثابت و بنابر این جواب

مسئله ما کامل است.

دو روش را برای حل معادله لاپلاس به تفصیل شرح می‌دهیم. روش اول پیدا کردن يك جواب کلی برای معادله (۹.۳) است به وسیله ترکیب جوابهای خصوصی معادله در دستگاه مختصاتی که تقارن موجود در مسئله آن را ایجاب می‌کند؛ روش دوم روش تصویرهاست. علاوه بر این، جواب کلی مسئله را، در فضای دو بعدی، به دست می‌آوریم. ولی قبل از پرداختن به این روشهای خاص به اثبات بعضی خواص مهم جواب معادله لاپلاس می‌پردازیم.

قضیه اول. اگر $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ همگی جوابهای معادله لاپلاس باشند آنگاه

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_n \varphi_n \quad (10.3)$$

که در آن C ها ثابتهای اختیاری اند نیز جواب این معادله خواهد بود.

اثبات این مطلب مستقیماً از تساویهای زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \nabla^2 C_1 \varphi_1 + \nabla^2 C_2 \varphi_2 + \dots + \nabla^2 C_n \varphi_n \\ &= C_1 \nabla^2 \varphi_1 + C_2 \nabla^2 \varphi_2 + \dots + C_n \nabla^2 \varphi_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه اول می‌توان دویا چند جواب از معادله لاپلاس را طوری باهم ترکیب کرد که جواب حاصل در مجموعه‌ای از شرایط مرزی صدق کند. در بخشهای آینده مثالهایی در این مورد خواهید دید.

قضیه دوم (قضیه یکتایی). دو جواب معادله لاپلاس که در شرایط مرزی یکسانی صدق کنند یا باهم برابرند یا اختلافشان عدد ثابتی است.

برای اثبات این قضیه ناحیه بسته‌ای به حجم V را که در خارج از سطوح رساناهای گوناگون موجود در مسئله، یعنی $S_I, S_{II}, \dots, S_N$ قرار گرفته و توسط سطح S مسدود شده است در نظر می‌گیریم. سطح اخیر می‌تواند یا در بینهایت قرار داشته باشد یا سطحی واقعاً فیزیکی باشد که حجم V را در میان گرفته است. فرض کنید φ_1 و φ_2 دو جواب معادله لاپلاس در فضای V اند و علاوه بر این شرایط مرزی یکسانی بر روی سطوح $S_I, S_{II}, \dots, S_N$ دارند. این شرایط مرزی با تعیین مقدار φ و یا $\partial \varphi / \partial n$ بر روی این سطوح مرزی مشخص می‌شوند.

تابع جدید $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ را تعریف می‌کنیم. بدیهی است که در فضای V ,

$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = 0$ است. به علاوه یا Φ و یا $\nabla \Phi \cdot \mathbf{n}$ در روی سطوح مرزی صفر می شود. اکنون قضیه واگرایی را در مورد بردار $\Phi \nabla \Phi$ به کار می بریم

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) dv = \int_{S+S_1+\dots+S_N} \Phi \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} da = 0$$

نتیجه صفر است زیرا انتگرال دوم مساوی صفر می شود. واگرایی را می توان بر طبق معادله (۷.۱.۱) از جدول ۱.۱ طوری بسط داد که نتیجه زیر به دست بیاید

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \Phi \nabla^2 \Phi + (\nabla \Phi)^2$$

اما $\nabla^2 \Phi$ در تمام نقاط V_0 صفر است، پس قضیه واگرایی در این حالت به صورت زیر در می آید

$$\int_{V_0} (\nabla \Phi)^2 dv = 0$$

اما $(\nabla \Phi)^2$ در هر نقطه در V_0 باید صفر یا مثبت باشد، و چون انتگرال آن مساوی صفر است، واضح است که فقط $(\nabla \Phi)^2 = 0$ امکان پذیر خواهد بود.

قضیه در اساس ثابت شده است. تا بقی که شیب آن در تمام نقاط صفر باشد نمی تواند تغییر کند؛ پس در تمام نقاط V_0 مقدار Φ همان مقداری است که در روی سطوح مرزی دارد. اگر شرایط مرزی با مشخص کردن φ_1 و φ_2 در روی سطوح مرزی $S, S_1, \dots, S_N$ داده شده باشند، آنگاه چون Φ در روی این سطوح صفر است مقدار آن در سراسر V_0 مساوی صفر خواهد بود. چنانچه شرایط مرزی بر حسب $\partial \varphi_1 / \partial n$ و $\partial \varphi_2 / \partial n$ داده شده باشند، آنگاه در همه نقاط V_0 برابر صفر است و در روی مرزها، $\nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = 0$. تنها جواب موافق با حکم اخیر این است که Φ برابر با عدد ثابتی باشد.

۳.۳ معادله لاپلاس بایک متغیر مستقل

اگر φ فقط تابعی از یک متغیر باشد، معادله لاپلاس به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود. حالتی را در نظر بگیرید که φ به صورت $\varphi(x)$ ، یعنی تابعی از یک مختص قائم x باشد. در این صورت معادله لاپلاس و جواب عمومی آن عبارت است از

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \quad \text{و} \quad \varphi(x) = ax + b \quad (۱۱.۳)$$

که در آن a و b ثابت‌هایی اند که بادر نظر گرفتن شرایط مرزی انتخاب می‌شوند. این همان نتیجه‌ای است که در فصل قبل برای پتانسیل میان دو صفحه رسانای بساردار که بر محور x عمود بودند پیدا کردیم.

درسایر دستگاهاهی مختصات، وقتی φ تابعی از یک متغیر باشد، وضع از این بفرنجتر نخواهد بود. در مختصات کروی که در آن φ به صورت $\varphi(r)$ است، معادله لاپلاس وجواب عمومی آن چنین می‌شود

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \Rightarrow \varphi(r) = -\frac{a}{r} + b \quad (12.3)$$

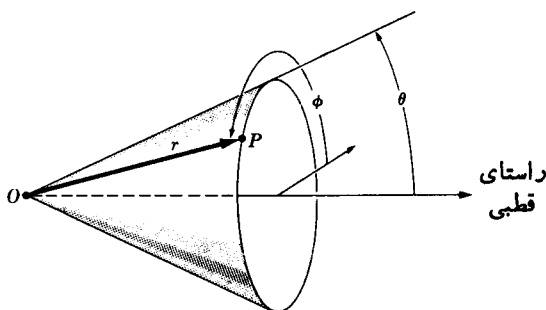
حل عمومی معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای را برای تابعی که مستقل از θ و z است، یعنی برای $\varphi(r)$ ، به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

۴.۳ حل معادله لاپلاس در مختصات کروی. هماهنگهای منطقه‌ای

اکنون به حل معادله لاپلاس که در آن φ تابعی از بیش از یک متغیر است بر می‌گردیم. بسیاری از مسائل مورد علاقه ما رساناهایی به شکل کره یا استوانه هستند، و بنابراین به جوابهای معادله لاپلاس در مختصات کروی یا استوانه‌ای نیاز دارند. ابتدا مسئله را در مختصات کروی حل می‌کنیم، اما بهتر است این بحث را به مواردی محدود کنیم که در آنها φ به زاویه سمت ϕ بستگی نداشته باشد. چنین محدودیتی رده مسائلی را که می‌توانیم حل کنیم محدود می‌کند، اما بسیاری از مسائل جالب فیزیک در این رده قرار می‌گیرند و مسائل پیچیده‌تر نیز در واقع از محدوده این کتاب خارج‌اند.

برای مورد کروی، φ به صورت $\varphi(r, \theta)$ است که در آن r بردار شعاع از مبدأ ثابت O و θ زاویه قطبی است (دک شکل ۱۰.۳). در این مورد، با استفاده از معادله (۷.۳)، معادله لاپلاس به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (13.3)$$



شکل ۱۰.۳ محل نقطه
P بر حسب مختصات
کروی r, θ, ϕ .

این معادله با مشتقات پاره‌ای به روشی حل می‌شود که به جدا سازی متغیرها معروف است. جوابی را به صورت $\varphi(r, \theta) = Z(r)P(\theta)$ فرض می‌کنیم و آن را در معادله (۱۳.۳) قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{r^2} P(\theta) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) + \frac{Z(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0 \quad (14.3)$$

توجه کنید که مشتقات پاره‌ای با مشتقات کلی جایگزین شده‌اند، زیرا Z و P هر یک تابعی از یک متغیرند. معادله (۱۴.۳) را، پس از تقسیم کردن آن بر $\varphi(r, \theta)$ و ضرب کردن آن در r^2 ، به صورت زیر درمی‌آوریم

$$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \quad (15.3)$$

سمت چپ این معادله فقط تابعی از r و سمت راست آن فقط تابعی از θ است. تنها راه برای آنکه تابعی از r بتواند با تابعی از θ به‌ازای همه مقادیر r و θ برابر باشد این است که هر دو تابع ثابت باشند. پس هر یک از دو طرف معادله (۱۵.۳) را مساوی k قرار می‌دهیم؛ k «ثابت جدا سازی» است.

همه مقادیر k لزوماً جوابهایی که از نظر فیزیکی قابل قبول باشند به دست نمی‌دهند. ابتدا معادله θ را در نظر بگیریم

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + kP = 0 \quad (16.3)$$

این معادله به معادله لژاندر معروف است و تنها جوابهای قابل قبول فیزیکی تعریف شده آن در گستره کامل θ (از صفر تا π)، به $k = n(n+1)$ مربوط می‌شوند، که در آن n عددی درست و مثبت است. جواب مربوط به مقدار خاص n را با $P_n(\theta)$ نشان خواهیم داد. جوابهای معادله (۱۶.۳) به‌ازای مقادیر دیگر k ، درحالی که $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ بد رفتارند و به‌ازای این مقادیر بینهایت یا مبهم می‌شوند.^۱ این جوابها با شرایط مرزی فیزیکی سازگار نیستند و باید آنها را کنار گذاشت.^۲

۱. بحث اینجا خیلی خلاصه بود. خواننده علاقه‌مند به بحث مفصل معادله لژاندر می‌تواند به کتبی که بیشتر جنبه ریاضی دارند مثلاً، به کتابهایی که در فهرست پایان این فصل آمده است مراجعه کند. معادله لژاندر، با تغییر متغیر $x = \cos \theta$ معمولاً به صورتی متفاوت نوشته می‌شود، و در این صورت جوابهای آن را با $P_n(x)$ یا $P_n(\cos \theta)$ نمایش می‌دهند.

۲. این حکم نیازمند توضیح بیشتری است. در برخی مسائل الکتروستاتیکی ناحیه اطراف $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ را می‌توان به‌طور طبیعی، مثلاً به کمک سطوح رسانای مخروطی شکل، کنار گذارد. تحت این شرایط ممکن است جوابهای معادله (۱۶.۳) به‌ازای سایر مقادیر k قابل استفاده باشند. این قبیل مسائل را در اینجا بررسی نمی‌کنیم.

جوابهای قابل قبول (یعنی، $P_n(\theta)$) چند جمله‌ایهایی اند بر حسب $\cos \theta$ که معمولاً چند جمله‌ایهای لژاندر نامیده می‌شوند. چهار تابع اول لژاندر در جدول ۱۰.۳ آمده است. از معادله (۱۶.۳) پیداست که می‌توان P_n را در هر عدد ثابت دلخواهی ضرب کرد.

جدول ۱۰.۳ چند جمله‌ایهای لژاندر به ازای $n = 0, 1, 2, 3$

n	$P_n(\theta)$
0	1
1	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

اکنون به معادله شعاعی برمی‌گردیم

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n+1)Z \quad (17.3)$$

در این معادله ماصورت صریح k را که به جوابهای قابل قبولی برای θ منجر می‌شود، به کار برده‌ایم. بررسی معادله (۱۷.۳) نشان می‌دهد که دو جواب مستقل آن عبارت‌اند از

$$Z_n = r^n \quad \text{و} \quad Z_n = r^{-(n+1)}$$

جوابهای معادله لاپلاس به صورت حاصل ضرب $\varphi_n(r, \theta) = Z_n(r) \times P_n(\theta)$ به دست می‌آیند، که در آن باید دقت شود Z و P هر دو مربوط به یک مقدار n باشند. رعایت این امر الزامی است، زیرا هر دو طرف معادله (۱۵.۳) با یک مقدار ثابت، یعنی $n(n+1)$ ، برابرند.

در نتیجه بحث بالا، ما معادله لاپلاس را در دستگاه مختصات کروی حل کرده‌ایم و جوابهایی را که به هماهنگهای منطقه‌ای معروف‌اند به دست آورده‌ایم

$$\varphi_n = r^n P_n(\theta) \quad \text{یا} \quad \varphi_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad (18.3)$$

در این جوابها $P_n(\theta)$ یکی از چند جمله‌ایهای جدول ۱۰.۳ است و n عدد صحیح مثبت یا صفر است. هماهنگهای منطقه‌ای مجموعه کاملی از توابع را تشکیل می‌دهند؛ یعنی جواب عمومی معادله لاپلاس را می‌توان بر طبق قضیه اول با برهم نهی این جوابها به دست آورد،

مشروط به اینکه مسئله فیزیکی مفروض تقارن سمتی مناسب را داشته باشد. اکنون چندتایی از این هماهنگها را به خوبی می‌شناسیم: یکی از جوابهای مربوط به $n = 0$ (یعنی $\varphi = \text{const.}$) جواب بدیهی معادله لاپلاس است که در هر دستگاه مختصاتی معتبر است. هماهنگ منطقه‌ای r^{-1} پتانسیل بار نقطه‌ای است؛ و $r^{-2} \cos \theta$ پتانسیل دوقطبی است.

۵.۳ کره رسانا در میدان الکتریکی یکنواخت

مفید بودن هماهنگهای منطقه‌ای برای حل مسائل الکتروستاتیکی با تقارن سمتی را با حل مسئله کره رسانای بی‌بار در میدان الکتریکی $\mathbf{E}_0$ ، که در آغاز یکنواخت است، نشان می‌دهیم. خطوط میدان یکنواخت موازی یکدیگرند، لیکن حضور جسم رسانا میدان را طوری تغییر می‌دهد که خطوط میدان بر سطح جسم رسانا، که یک سطح هم پتانسیل است، عمود شوند. اگر راستای میدان الکتریکی یکنواخت آغازی را راستای قطبی (راستای z) اختیار کنیم، و مبدأ مختصات را بر مرکز کره منطبق بگیریم، آنگاه از تقارن مسئله پیداست که پتانسیل به زاویه سمتی ϕ بستگی ندارد و می‌توان آن را به صورت مجموعه‌ای از هماهنگهای منطقه‌ای نوشت.

رسانای کروی، به شعاع a ، یک سطح هم پتانسیل است؛ پتانسیل آن را با φ نشان می‌دهیم. مسئله ما یافتن جوابی است برای معادله لاپلاس در ناحیه خارجی این کره، که مقدار آن در روی خود کره به φ تبدیل شود، و در فواصل خیلی دور صورت حدی صحیح پیدا کند. این جواب را به طور صوری می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\varphi(r, \theta) = A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta + \frac{1}{3} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{5} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (۱۹.۳)$$

که در آن A ها و C ها ثابتهای دلخواه‌اند. وقتی که r بزرگ باشد، میدان الکتریکی تنها اندکی نسبت به صورت اولیه خود تغییر شکل می‌یابد، و پتانسیل آن همان پتانسیل مربوط به میدان الکتریکی یکنواخت خواهد بود.

$$[\mathbf{E}(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{k}$$

$$[\varphi(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} = -E_0 z + \text{const.}$$

$$\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \text{const.} \quad (۲۰.۳)$$

بنابراین، برای آنکه معادله‌های (۱۹.۳) و (۲۰.۳) به ازای مقادیر بزرگ r در توافق

باشند، باید $A_2 = -E_0$ باشد؛ به علاوه تمام A ها، از A_3 به بالا باید مساوی صفر قرار داده شوند.

جمله $C_1 r^{-1}$ يك میدان الکتریکی شعاعی تولید می کند که، همان طوری که انتظار می رود، فقط با جسم رسانای کروی دارای بارخالص در توافق است. چون در این مسئله با جسم کروی بی بار سروکار داریم، ثابت C_1 را بساید مساوی صفر قرار دهیم. روی سطح کره، $\varphi = \varphi_0$ و پتانسیل باید از زاویه θ مستقل باشد. می توان کاری کرد که دوجمله ای که شامل $\cos \theta$ هستند یکدیگر را خنثی کنند، لیکن جمله هایی را که شامل توانهای معکوس بالاتری از r هستند نمی توان بسایکدیگر حذف کرد زیرا توابع لژاندر متفاوتی دارند. تنها امکان آن است که تمام C_i ها به ازای $i \geq 3$ مساوی صفر قرار داده شوند. در این صورت معادله (۱۹.۳) به صورت زیر درمی آید

$$\varphi(r, \theta) = A_1 - E_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad r \geq a \quad \text{برای}$$

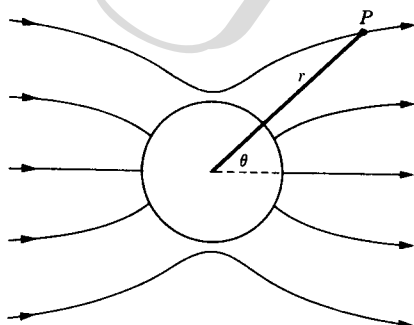
$$\varphi(a, \theta) = \varphi_0. \quad (21.3)$$

چون هر دو عبارت باید به ازای $r = a$ مساوی شوند، پس $A_1 = \varphi_0$ و $C_2 = E_0 a^3$. از رابطه هایی پتانسیل نه تنها می توان میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا حساب کرد (شکل ۲.۳) بلکه چگالی سطحی بار روی کره رسانا را نیز می توان محاسبه کرد

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad r \geq a \quad \text{به ازای} \quad (22.3)$$

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (23.3)$$

جمع کل بار روی سطح کره، یعنی



شکل ۲.۳ خطوط شار الکتریکی برای موردی که در آن کره رسانا در میدان الکتریکی یکنواخت قرار دارد.

$$Q = a^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta$$

آشکارا مساوی صفر است، و این با فرض اولیه ما سازگاری دارد.

۶.۳ هماهنگهای استوانه‌ای

معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای را نیز می‌توانیم با روش جداسازی متغیرها حل کنیم. در اینجا هم مناسب خواهد بود که فقط به یافتن جوابهای رده محدودی از مسائل پردازیم، یعنی به مسائلی که در آنها پتانسیل به متغیر z بستگی ندارد. این جوابها برای مسائلی که شامل رسانا یا سیم استوانه‌ای خیلی درازند مناسب اند نه برای مسائلی که شامل يك قطعه کوتاه استوانه‌ای هستند.

چنانچه پتانسیل به z بستگی نداشته باشد، معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (24.3)$$

با قراردادن $\varphi = Y(r) S(\theta)$ معادله بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{r}{Y} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) = - \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = k \quad (25.3)$$

که در اینجا نیز k نقش ثابت جداسازی را ایفا می‌کند. معادله θ بسیار ساده است؛ جوابهای آن عبارت‌اند از $\cos k^{1/2} \theta$ و $\sin k^{1/2} \theta$. اما برای اینکه این جوابها از لحاظ فیزیکی معنی داشته باشند، هر يك باید تابعی تك مقداری از متغیر θ باشند در نتیجه

$$\cos k^{1/2} (\theta + 2\pi) = \cos k^{1/2} \theta$$

$$\sin k^{1/2} (\theta + 2\pi) = \sin k^{1/2} \theta$$

یا، به عبارت دیگر، پس از آنکه θ همه گستره خود از صفر تا 2π را طی کرد، تابع باید به طوری هموار به مقدار خود در $\theta = 0$ برگردد. این در صورتی امکان‌پذیر است که $k = n^2$ و n عددی صحیح باشد. به علاوه می‌توانیم n را مثبت (یا صفر) قرار دهیم بی‌آنکه هیچ يك از این جوابها را از دست بدهیم.

حال به معادله r برمی‌گردیم، به راحتی می‌توانیم تحقیق کنیم که $Y(r)$ مساوی r^n یا r^{-n} است، جز در حالت $n = 0$ ، که در این صورت $Y(r) = \ln r$ یا $Y(r) = \text{const.}$

بنابراین، جوابهای لازم برای معادله لاپلاس، یا به اصطلاح هماهنگهای استوانه‌ای، عبارتند از

$$\begin{aligned} & 1 \quad \ln r \\ & r^n \cos n\theta \quad r^{-n} \cos n\theta \\ & r^n \sin n\theta \quad r^{-n} \sin n\theta \end{aligned}$$

این توابع مجموعه کاملی برای متغیرهای r و θ در مختصات استوانه‌ای تشکیل می‌دهند، و پتانسیل $\varphi(r, \theta)$ را می‌توان مطابق قضیه اول به صورت برهم نهی هماهنگهای استوانه‌ای نوشت.

۷.۳* معادله لاپلاس در مختصات قائم

در مختصات قائم می‌توان باقراردادن

$$\varphi(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$$

متغیرها را از یکدیگر جدا کرد که بدین وسیله معادله لاپلاس به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = - \frac{1}{f_3(z)} \frac{d^2 f_3}{dz^2} \quad (۲۶.۳ \text{ الف})$$

طرف چپ این معادله تابعی است از x و y ، و طرف راست آن فقط تابع z است. در نتیجه هر دو طرف باید مساوی یک مقدار ثابت، k ، باشند. این اولین ثابت جدا سازی است. دو معادله‌ای که از معادله (۲۶.۳ الف) به دست می‌آیند عبارت‌اند از

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2} + k f_2 = 0 \quad (۲۶.۳ \text{ ب})$$

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2} = k - \frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2}$$

معادله دوم طوری نوشته شده است که در آن متغیرهای x و y از هم جدا شده‌اند. اینک هر یک از دو طرف این معادله را مساوی m — (ثابت دوم جدا سازی) قرار می‌دهیم. بنابراین، داریم

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2} + m f_2 = 0 \quad (ج ۲۶.۳)$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} - (k+m) f_1 = 0 \quad (د ۲۶.۳)$$

معادلات (۲۶.۳ ب)، و (ج ۲۶.۳) و (د ۲۶.۳) به راحتی قابل حل اند. یکی از جوابهای نوعی $\varphi(x, y, z)$ به صورت زیر است

$$\varphi(x, y, z) = A e^{-(k+m)^{1/2} x} \cos m^{1/2} y \cos k^{1/2} z \quad (۲۷.۳)$$

هفت جواب مستقل دیگر برای زوج ثابت جداسازی (k, m) را بایکی از جانشانیهای زیر می توان به دست آورد: $+(k+m)^{1/2} x$ به جای $-(k+m)^{1/2} x$ ؛ $\sin m^{1/2} y$ به جای $\cos m^{1/2} y$ ؛ $\sin k^{1/2} z$ به جای $\cos k^{1/2} z$.

تاکنون محدودیتی برای k و m قائل نشده ایم، ولی شرایط مرزی مسئله معمولا k (یا m) را به مجموعه گسسته ای از مقادیر مثبت یا منفی، محدود می کند. لازم به توضیح است که این شرایط مرزی اند که در واقع جوابهای مناسب برای معادله با مشتقات پاره ای را تعیین می کنند، تابع

$$\varphi(x, y, z) = \sum_p \sum_q A_{pq} e^{-(p^2+q^2)^{1/2} x} \cos py \cos qz$$

به ازای مقادیر ثابت x و y ، بسط رشته فوریه تابع زوج دلخواهی از z است. جوابهای خصوصی، یعنی معادله (۲۷.۳)، نمایانگر پتانسیلهای ساده ای نیستند و ما نیز سعی نداریم آنها را با وضعیتهای فیزیکی ارتباط دهیم. حالتی که هر دو ثابت جداسازی صفر باشند جالبتر است. لذا توجه خود را به این حالت معطوف می کنیم. از معادله (د ۲۶.۳) روشن است که $f_1(x) = a_1 x$ ، یا $f_1(x) = \text{const.}$ جوابی برای آن معادله است. از معادله (ج ۲۶.۳)، جواب $f_2(y)$ را به دست می آوریم و به همین ترتیب تا به آخر. بدین ترتیب

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & A_1 x y z + A_2 x y + A_3 y z + A_4 x z \\ & + A_5 x + A_6 y + A_7 z + A_8 \end{aligned} \quad (\text{الف } ۲۸.۳)$$

که در آن A ها اعداد ثابت دلخواهی اند. این جواب را می توانیم برای حالتی که سه صفحه رسانا یکدیگر را با زاویه قائمه قطع می کنند به کار ببریم. هر گاه این سه صفحه، صفحات مختصات xy ، yz ، و zx و هر سه در پتانسیل یکسانی باشند، آنگاه

$$\varphi(x, y, z) = A_1 x y z + A_8 \quad (\text{ب } ۲۸.۳)$$

تعیین چگالی سطحی بار روی صفحات مختصات، به طوری که با معادله (۲۸.۳) سازگار باشد، به صورت تمرین به خواننده واگذار می شود.

۸.۳* معادله لاپلاس در فضای دوبعدی. جواب عمومی

اگر بتانسیل فقط تابعی از دو مختص قائم باشد، معادله لاپلاس به صورت زیر نوشته می شود

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (۲۹.۳ \text{ الف})$$

جواب عمومی این معادله را می توانیم از طریق تبدیل به مجموعه جدیدی از متغیرهای مستقل به دست آوریم. درعین حال، باید تأکید کرد که چنین تبدیلی فقط در حالت دوبعدی به ساده شدن معادله منجر می شود. فرض کنید

$$\xi = x + iy \quad \eta = x - iy$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ عدد موهومی واحد است. بر حسب این متغیرها

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

و

$$\nabla^2 \varphi = 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (۲۹.۳ ب)$$

بدیهی است که جواب عمومی معادله (۲۹.۳ ب) عبارت است از

$$\varphi = F_1(\xi) + F_2(\eta) = F_1(x + iy) + F_2(x - iy) \quad (۳۰.۳)$$

که در آن F_1 و F_2 توابعی دلخواه اند. توابع F_1 و F_2 به طور کلی کمیات مختلطی هستند. ولی به کمک آنها می توان به طریق زیر دو تابع حقیقی به دست آورد: اول فرض می کنیم $F_2(x - iy) = F_1(x - iy)$ ، یعنی فرض می کنیم وابستگی دو تابع F_1 و F_2 به شناسه های شان یکسان باشد. در این صورت

$$\varphi = F_1(x + iy) + F_1(x - iy) = 2 \operatorname{Re} [F_1(x + iy)]$$

که Re نمایش «قسمت حقیقی» تابع است. به علاوه، دومین تابع پتانسیل حقیقی عبارت است از

$$\varphi_r = -i[F_\lambda(x+iy) - F_\lambda(x-iy)] = 2\text{Im}[F_\lambda(x+iy)]$$

که در آن Im «قسمت موهومی» تابع است. پس هم قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی هر تابع مختلط $F(x+iy)$ جوابهای معادله لاپلاس اند.

جوابهایی که بدین طریق پیدامی شوند به هیچ دستگاه مختصات خاصی منحصر نیستند. مثلاً هماهنگهای استوانه‌ای بخش (۷.۳) از توابع مختلط $1 = r^n e^{in\theta} = (x+iy)^n$ و $\ln(x+iy) = \ln r + i\theta$ به دست می‌آیند. از طرف دیگر وقتی لازم شود که مسئله خاصی را در فضای دوبعدی حل کنیم، هیچ روش استاندارد برای پیدا کردن تابع مختلط مناسب نداریم. این روش آن قدر جوابهای متعدد تولید می‌کند که نمی‌توان همه را بر شمرد و جوابهایی را که در شرایط مرزی مسئله صدق نمی‌کنند جدا کرد و کنار گذاشت. در موارد ساده توابع مورد لزوم را می‌توان به روش آزمایش و خطا به دست آورد؛ در موارد دیگر، روش نگاشت همدیسی می‌تواند مفید باشد (بررسی این روش از محدوده این کتاب خارج است).

۹.۳ تصویرهای الکتروستاتیکی

برای مجموعه‌ای از شرایط مرزی مفروض جواب معادله لاپلاس یکتاست، به طوری که اگر بتوانیم به هر طریق جوابی به صورت $\varphi(x, y, z)$ پیدا کنیم، و چنانچه این φ در تمام شرایط مرزی صدق کند، آنگاه جواب کامل معادله به دست آمده است. روش تصویرها بی آنکه به طور مشخص معادله دیفرانسیلی را حل کند راهی برای به دست آوردن این جواب به دست می‌دهد. این روش به طور کلی در حل تمام مسائل الکتروستاتیک قابل استفاده نیست، اما آن قدر مسائل جالب در محدوده آن قرار می‌گیرد که جا دارد در اینجا در مورد آن بحث کنیم.

فرض کنیم بتوان پتانسیل را به صورت

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_\lambda(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (31.3)$$

نوشت، که در آن φ_λ یا تابعی است مشخص و یا به راحتی قابل محاسبه است، و انتگرال

۱. مختصات استوانه‌ای و قائم، به طریق معمول، بسا روابط زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$y = r \sin \theta, \quad x = r \cos \theta$$

معرف پتانسیلی است که بارهای سطحی تمام رساناهای موجود در مسئله به وجود می آورند. تابع σ مجهول است. در مواردی ممکن است بتوان به جای جمله آخر معادله (۳۱.۳) پتانسیل φ_p را، که به توزیع بار مشخصی مربوط می شود، قرارداد و اساس روش بار تصویر همین است. این امر وقتی امکان پذیر است که سطح تمام رساناها برسطوح هم پتانسیل حاصل از ترکیب $\varphi_p + \varphi_+$ منطبق باشند. بارهای مشخصی که φ_p را ایجاد می کنند به بارهای تصویری معروف اند. بدیهی است، این بارها وجود خارجی ندارند. مکان ظاهری آنها در داخل رساناهای مختلف است و پتانسیل $\varphi = \varphi_p + \varphi_+$ فقط برای ناحیه خارج از این رساناها جواب قابل قبول مسئله است.

به عنوان مثالی از این روش، مسئله بار نقطه ای q که در نزدیکی يك صفحه رسانای نامتناهی قرارداد را حل می کنیم. برای فرمولبندی ریاضی مسئله فرض کنید که صفحه نامتناهی بر صفحه yz منطبق و بار نقطه ای روی محور x و به فاصله $x = d$ از مبدأ مختصات قرارداد شده باشد (شکل ۳.۳ الف). پتانسیل این مسئله به ازای رابطه زیر با معادله (۳۱.۳) سازگار است

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \quad (32.3)$$

حال مسئله دیگری را در نظر می گیریم، و آن مسئله دوبار نقطه ای (q و $-q$) است که به فاصله $2d$ از یکدیگر قرارداد دارند (شکل ۳.۳ ب) پتانسیل مربوط به این دوبار، یعنی

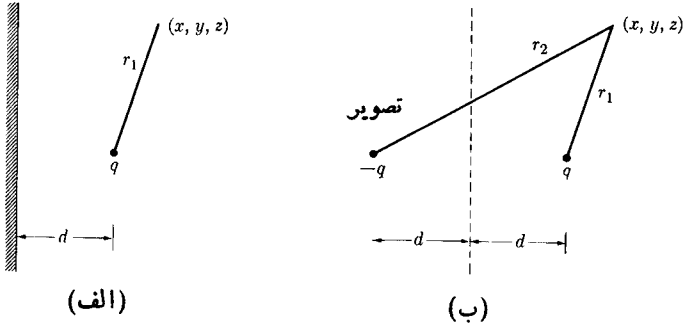
$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (33.3)$$

نه تنها در همه نقاط خارج از بارها در معادله لاپلاس صدق می کند، بلکه مقدار آن روی صفحه عمود منصف خط واصل میان دوبار به مقدار ثابتی (یعنی صفر) تبدیل می شود. پس معادله (۳۳.۳) در شرایط مرزی مسئله اصلی صدق می کند. چون جوابهای معادله لاپلاس منحصر به فردند، معادله (۳۳.۳) پتانسیل صحیح برای سراسر نیم فضای خارج از صفحه رساناست. بار $-q$ که پتانسیل

$$\varphi_2(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \quad (34.3)$$

را تولید می کند، تصویر بار نقطه ای q نامیده می شود. طبعاً این تصویر واقعیت خارجی ندارد و معادله (۳۳.۳) پتانسیل مربوط به فضای داخل و یا سمت چپ صفحه رسانای شکل ۳.۳ الف را به درستی به دست نمی دهد.

در فضای خارج از رسانا میدان الکتریکی E را می توان با محاسبه منفی شیب معادله



شکل ۳.۳ مسئله بار نقطه‌ای و صفحه رسانا که به روش تصویری حل شده است؛ (الف) مسئله اصلی، (ب) مکان بار تصویری، (ج) خطوط نیرو (خط چینها) و سطوح هم‌پتانسیل (خطوط پیوسته).

(۳.۳.۳) به دست آورد. از آنجا که سطح صفحه رسانا معرف فصل مشترکی است که دو جواب معادله لاپلاس، یعنی $\varphi = 0$ و معادله (۳.۳.۳)، را به یکدیگر مربوط می‌کند، ناپیوستگی میدان الکتریکی توسط چگالی بار سطحی σ در روی این صفحه نامین می‌شود

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.5.3)$$

خطوط نیرو و سطوح هم‌پتانسیل مربوط به مسئله اصلی در شکل (۳.۳ ج) نشان داده شده‌اند. اینها درست همان خطوط نیرو و سطوح هم‌پتانسیل مربوط به مسئله دو بار نقطه‌ای (شکل ۳.۳ ب) اند، با این تفاوت که در مورد مسئله اخیر خطوط شار در فضای سمت چپ صفحه نیز

ادامه دارند. از روی شکل پیداست که تمام خطوط شار الکتریکی که در شرایط عادی می‌بایست روی بار تصویری متمرکز شوند به وسیلهٔ صفحهٔ رسانای شکل ۳.۳ ج قطع می‌شوند. بنا براین، کل بار واقع بر صفحهٔ رسانا با $-q$ — یعنی با بار بار تصویری برابر است. همین نتیجه را می‌توان از طریق ریاضی، با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۳۵.۳) روی تمامی سطح، به دست آورد (مسئلهٔ ۱۴.۳).

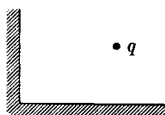
بدیهی است که بارنقطه‌ای q نیروی جاذبه‌ای بر صفحه وارد می‌کند، زیرا علامت بار سطحی القایی مخالف با علامت بارنقطه‌ای q است. مطابق قانون کنش و واکنش نیوتون، این نیرو را می‌توان مقدار برابر با نیرویی که صفحه بر بار q وارد می‌کند، از آنجا که میدان ناشی از بارنقطه‌ای برخورد این بار نیرویی وارد نمی‌کند، در نتیجه

$$\mathbf{F} = -q\nabla\varphi \quad (۳۶.۳)$$

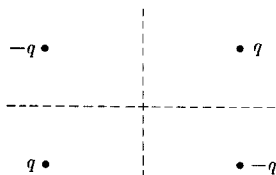
که این درست همان نیرویی است که از طرف بار تصویری به بارنقطه‌ای وارد می‌شود. مسئلهٔ دیگری که با روش تصویری به راحتی قابل حل است تعیین میدان الکتریکی بارنقطه‌ای q است که در نزدیکی تقاطع دو صفحهٔ رسانای عمود بر هم قرار گرفته است. (شکل ۴.۳ الف). مکان بارهای تصویری لازم در شکل ۴.۳ ب نشان داده شده است. به راحتی مشاهده می‌شود که دو صفحهٔ نقطه چین در این شکل سطوح با پتانسیل صفرند که از ترکیب پتانسیل‌های بار q و سه بار تصویری ناشی می‌شوند.

۱۰.۳ بارنقطه‌ای و کرهٔ رسانا

مشکل اساسی در حل مسائل به روش تصویری پیدا کردن گروهی از بارهای تصویری است که همراه با بارهای مشخص شدهٔ اصلی بتوانند سطوح هم‌پتانسیلی را بر روی رساناها تشکیل بدهند. این روش فقط در مواردی که شکل هندسی آنها ساده است سراسر است. مسئلهٔ بارنقطه‌ای q در نزدیکی کرهٔ رسانا یکی از این موارد است؛ در این مورد فقط یک بار تصویری منفرد لازم است تا سطح کره را به سطح پتانسیل صفر تبدیل کند. برای آنکه پتانسیل کره به مقدار ثابت دیگری تبدیل شود، به بار تصویری دیگری احتیاج است.

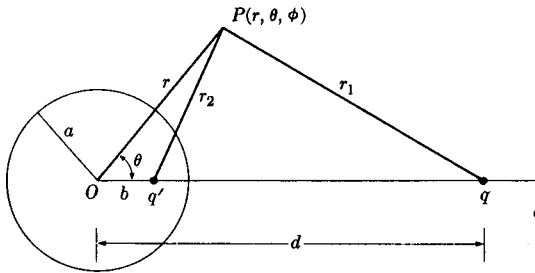


(الف)



(ب)

شکل ۴.۳ بارنقطه‌ای در داخل گوشهٔ قائمه.



شکل ۵.۳ بار نقطه‌ای q در نزدیکی کره رسانا. q' بار تصویری است.

ابتدا ما مقدار و مکان بار تصویری q' را به دست می آوریم که همراه با بار نقطه‌ای در همه نقاط سطح کره پتانسیل صفر را تولید کند. در شکل ۵.۳ وضع هندسی مسئله نشان داده شده است. بار نقطه‌ای q در فاصله d از مرکز کره‌ای به شعاع a قرار گرفته است. از تقارن مسئله پیداست که بار تصویری q' باید بر روی خطی که بار نقطه‌ای q را به مرکز کره وصل می کند قرار بگیرد.

با استفاده از مختصات کروی، با قرار دادن مبدأ در مرکز کره، نتایج مطلوب به دست می آید. محور قطبی را خطی می گیریم که بار نقطه‌ای q را به مبدأ وصل می کند. فاصله بار تصویری q' تا مرکز کره، یعنی b ، مقدار بار q' را باید بر حسب مقادیر معلوم q ، d ، و a پیدا کنیم. پتانسیلی که بارهای q و q' در نقطه دلخواه P تولید می کنند برابر است با

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta, \phi) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \right] \quad (37.3)\end{aligned}$$

در روی سطح کره، $r = a$ ، و برای تمام مقادیر θ و ϕ ، پتانسیل $\varphi(a, \theta, \phi) = 0$ است. اما بنا بر معادله (۳۷.۳)، $\varphi(a, \theta, \phi)$ فقط وقتی می تواند به ازای تمام مقادیر صفر شود که دوجذر بایکدیگر متناسب باشند، و این در صورتی ممکن است که $b = a^2/d$ ، زیرا در این صورت

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = \frac{a}{d} \sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}$$

در نتیجه

$$b = \frac{a^2}{d} \quad (38.3)$$

و به علاوه

$$q' = -\frac{a}{d} q \quad (39.3)$$

از این معادلات می‌توان برای مشخص کردن مکان و مقدار بار تصویری اول استفاده کرد. می‌توان بی‌آنکه ماهیت هم‌پتانسیل بودن سطح کروی برهم بخورد، بار تصویری دیگری، q'' ، را در مرکز کره قرارداد. مقدار q'' اختیاری است و می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که با شرایط مرزی مسئله سازگار باشد. لذا جواب کاملی برای مسئله بار نقطه‌ای و کره رسانا به دست آمده است؛ پتانسیل در همه نقاط خارج کره عبارت است از

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r} \right] \quad (40.3)$$

پتانسیل خود کره رسانا عبارت است از

$$\varphi(a, \theta, \phi) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (41.3)$$

و چگالی بار سطحی روی کره برابر است با

$$\sigma(\theta, \phi) = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (42.3)$$

همه خطوط میدان، که به طور عادی می‌بایست روی بارهای تصویری متمرکز شوند، به وسیله کره قطع می‌شوند؛ بنابراین بار کل Q روی سطح کره، با جمع بارهای تصویری برابر است

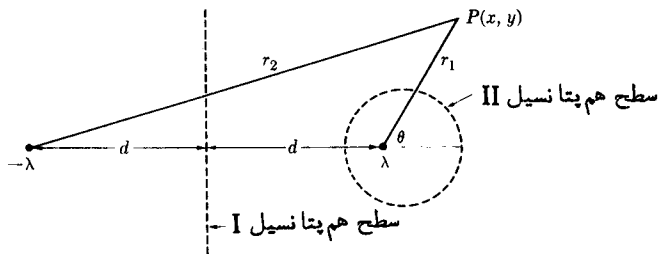
$$Q = q' + q'' \quad (43.3)$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً با اننگرال گیری از معادله (42.3) تحقیق کرد.

دومورد خاص و جالب این مسئله عبارت‌اند از کره رسانای متصل به زمین، یعنی موردی که $q'' = 0$ ، $\varphi(a) = 0$ است؛ و کره رسانای بدون بار، یعنی موردی که $q' = -q''$ است.

۱۱.۳ بارهای خطی و تصویرهای خطی

تاکنون روش تصویری ما به مسائل مربوط به بارهای نقطه‌ای، و در نتیجه تصویرهای نقطه‌ای، محدود بود. در این بخش چند مسئله را بررسی می‌کنیم که در حل آنها می‌توان از روش بارهای تصویری خطی استفاده کرد. دو خط موازی و بی‌نهایت دراز در نظر می‌گیریم که بار در واحد طول آنها به ترتیب برابر λ و $-\lambda$ است (شکل ۶.۳). در هر نقطه پتانسیل از معادله زیر به دست می‌آید



شکل ۶.۳ در اینجا دو خط بار موازی و بی نهایت دراز (با بارهای λ و $-\lambda$ در واحد طول) که بر صفحه کاغذ عمودند نشان داده شده اند.

$$g = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln r_1 - \ln r_2] = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (۴۴.۳)$$

که در آن r_1 و r_2 فواصل عمودی نقطه مورد نظر از دو خط بارند. برای پیدا کردن سطوح هم پتانسیل معادله (۴۴.۳) را مساوی مقدار ثابتی قرار می دهیم، که مستلزم برقراری شرط زیر است

$$\frac{r_1}{r_2} = M \quad (۴۵.۳)$$

که در آن M مقداری است ثابت. پس سطوح هم پتانسیل را می توان با معادله (۴۵.۳) مشخص کرد.

سطح هم پتانسیل متناظر با $M=1$ صفحه ای است که درست در وسط فاصله میان دو بار خطی قرار گرفته است و در شکل ۶.۳ به صورت سطح هم پتانسیل I نشان داده شده است. پتانسیل این صفحه صفر است. بنابراین، مسئله مربوط به خط بار بسیار درازی که موازی يك صفحه رسانا قرار گرفته است حل شده تلقی می شود. در نیم فضای مقابل صفحه رسانا پتانسیل به درستی از معادله (۴۴.۳) به دست می آید. فرض کنید خط باری که درست راست شکل دیده می شود همان خط باری باشد که به فاصله d از صفحه رسانا قرار گرفته است. در این صورت خط بار سمت چپ در حکم تصویر آن است. در اینجا نیز بار کل روی صفحه رسانا مساوی است با بار بار تصویر.

حال سطوح هم پتانسیلی را بررسی می کنیم که با سایر مقادیر M متناظرند. صورت عمومی چنین سطوحی با نوشتن r_1 و r_2 در دستگاه مختصات قائم به دست می آید. برای سهولت، مبدأ مختصات را روی خط بار مثبت می گیریم و فرض می کنیم که این بار بر محور z منطبق است، و خط بار دیگر در $x = -2d$ و $y = 0$ قرار دارد. در این صورت

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r^2 = (x + yd)^2 + y^2$$

بنابراین معادله (۴۵.۳) پس از کمی عملیات جبری به صورت زیر درمی آید

$$x^2 + y^2 - \frac{2M^2xd}{1-M^2} = \frac{2M^2d^2}{1-M^2} \quad (46.3)$$

این معادله، معادله يك استوانه مستدیر است که به موازات محور z قرار گرفته است. اگر M کمتر از يك باشد، آنگاه استوانه خط بار مثبت را در میان می گیرد، درست مانند سطح هم پتانسیل II در شکل ۶.۳. محور استوانه از نقطه ای با مختصات زیر می گذرد

$$x = \frac{2M^2d}{1-M^2}, \quad y = 0 \quad (47.3)$$

و شعاع استوانه مساوی است با

$$R_c = \frac{2Md}{1-M^2} \quad (48.3)$$

اکنون ما می توانیم مسائل جالب توجه متعددی را که بارساناهای استوانه ای سروکار دارند حل کنیم، ولی در اینجا فقط به بحث درباره یکی از آنها می پردازیم. مسئله ای را در نظر می گیریم که در آن رسانای استوانه ای طولی در نزدیکی يك صفحه رسانا و موازی با آن قرار گرفته است. بار استوانه در واحد طول λ است. از شکل ۶.۳ می توان برای نمایاندن این مسئله استفاده کرد؛ در اینجا دو جسم رسانا بر سطوح نقطه چین منطبق اند. در این مورد هر دو خط بار بارهای تصویری اند و پتانسیل در ناحیه خارج از استوانه درست راست صفحه رسانا از معادله (۴۴.۳) به دست می آید. واضح است که بارالقایی در صفحه برابر است با $-\lambda$ — در واحد طول در امتداد محور z .

۱۲.۳ دستگاه رساناها. ضرایب پتانسیل

در بخشهای گذشته درباره چند روش مهم برای پیدا کردن جوابهای معادله لاپلاس بحث کردیم. این روشها، با همه کلتی که دارند، در عمل به مسائلی محدود می شوند که در آنها رساناها شکلهای نسبتاً ساده ای دارند. وقتی شکل رساناها پیچیده باشد، موضوع حل کامل ریاضی آنها متفی است؛ با وجود این تنها به این دلیل که پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می کند، می توان برخی نتایج درباره دستگاه به دست آورد. در واقع، در اینجا نشان خواهیم

داد که رابطه‌ای خطی میان پتانسیل هریک از رساناها و بارهای رساناهای مختلف دستگاه وجود دارد. ضرایب این رابطه، که به ضرایب پتانسیل مشهورند، فقط تابع شکل هندسی دستگاه‌اند، و با اینکه همیشه قابل محاسبه نیستند، ولی می‌توان آنها را به‌طور عددی یا مستقیماً به‌وسیله آزمایش تعیین کرد.

فرض کنید N رسانا با وضع هندسی ثابت وجود دارند. همچنین فرض کنید تمام رساناها بدون بارند، بجز رسانای z ام که دارای بار Q_z است، جواب مناسب معادله لاپلاس را در فضای خارج از سطوح رساناها با نماد $\varphi^{(j)}(x, y, z)$ و پتانسیل هریک از رساناها را با $\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}, \dots, \varphi_z^{(j)}, \dots, \varphi_N^{(j)}$ نشان می‌دهیم. حال باررسانای z ام را به λQ_z تغییر می‌دهیم. چون λ عددی ثابت است تابع $\lambda \varphi^{(j)}(x, y, z)$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند؛ این تابع در شرایط مرزی جدید نیز صدق می‌کند و این نکته را می‌توان از استدلال زیر نتیجه گرفت: پتانسیل در تمام نقاط فضا در λ ضرب شده‌است؛ پس تمام مشتقات پتانسیل (و به‌خصوص شیب آن) در λ ضرب شده‌اند. چون $\sigma = \epsilon_0 E_n$ ، نتیجه می‌شود که تمام چگالی‌های بار در λ ضرب شده‌اند. بنابراین باررسانای z ام λQ_z است و بقیه رساناها همچنان بی‌بار می‌مانند.

جوابی از معادله لاپلاس که با شرایط مرزی خاص تطبیق کند یکتاست؛ پس جواب صحیح را، $\lambda \varphi^{(j)}(x, y, z)$ ، برای مسئله تغییر یافته خود پیدا کرده‌ایم. نتیجه جالب توجهی که از این بحث می‌گیریم این است که پتانسیل هر رسانا متناسب است با Q_z ، بار رسانای z ، یعنی

$$\varphi_i^{(j)} = p_{ij} Q_z, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (49.3)$$

که در آن p_{ij} ثابتی است که فقط به شکل هندسی بستگی دارد. همین استدلال را می‌توان برای موردی که رسانای k ام باردار باشد، یعنی $Q_k = v Q_z$ ، و بقیه رساناها بی‌بار باشند به‌کاربرد. در اینجا جواب مناسب معادله لاپلاس $v \varphi^{(k)}(x, y, z)$ است که در آن $\varphi^{(k)}$ جواب برای مورد $v = 1$ است. بنابراین آشکار است که

$$\lambda \varphi^{(j)}(x, y, z) + v \varphi^{(k)}(x, y, z) \quad (50.3)$$

جواب مناسبی است برای موردی که هر دو رسانای z ام و k ام باردار باشند. بار دیگر به یکتا بودن جواب معادله لاپلاس برای مجموعه مفروض از شرایط مرزی برمی‌گردیم. از این رو، معادله (50.3) جواب منحصر به فرد این مورد است، و پتانسیل هر رسانا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\varphi_i = p_{ij} Q_z + p_{ik} Q_k, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (51.3)$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً به‌موردی که در آن همه N رسانا باردار باشند تعمیم داد

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j \quad (52.3)$$

این همان رابطه خطی میان پتانسیل و بار است که در جستجویش بودیم؛ ضرایب p_{ij} را ضرایب پتانسیل می‌نامند. در فصل ۶ نشان خواهیم داد که آرایه (ماتریس) این ضرایب متقارن است، یعنی $p_{ji} = p_{ij}$.

۱۳.۳ جوابهای معادله پواسون

در بخشهای گذشته منحصرأ درباره معادله لاپلاس و جوابهای آن گفتگو کردیم. معادله لاپلاس در مورد آن دسته از مسائل الکتروستاتیک به کار می‌رود که در آنها همه بار روی سطوح رساناها قرار گرفته، یا به صورت بارهای نقطه‌ای یا بارهای خطی متمرکز است. (در فصل آینده خواهیم دید که هر گاه ناحیه میان رساناها با یک یا چند محیط دی‌الکتریک ساده پر شده باشد، در این صورت نیز معادله لاپلاس در این محیطها صادق خواهد بود.)

اینک به مسئله‌ای از الکتروستاتیک می‌پردازیم که در آن قسمتی از بار (بار مشخص شده از قبل) با تابع معلوم $\rho(x, y, z)$ داده شده است و بقیه بار (بار القایی) روی سطوح رساناها قرار دارد. چنین مسئله‌ای احتیاج به حل معادله پواسون دارد. جواب عمومی این معادله را می‌توان به صورت حاصل جمع انتگرالی از نوع معادله (۱۰.۳) روی بار مشخص شده از قبل و جواب عمومی معادله لاپلاس نوشت. اما جواب معادله لاپلاس را باید طوری انتخاب کرد که کل پتانسیل در تمام شرایط مرزی مسئله صدق کند.

وقتی که همه بار از قبل مشخص شده باشد، یعنی وقتی که $dq = \rho(x, y, z)dv$ در همه نقاط فضا معلوم باشد، آنگاه معادله (۱۰.۳) نماینده جواب کامل معادله پواسون است، و این انتگرال را می‌توان (یا به صورت تحلیلی یا به صورت عددی) محاسبه کرد. اما موردی وجود دارد که در آن معادله پواسون را می‌توان به طریقی مستقیم‌تر از حل کردن معادله (۱۰.۳) به دست آورد؛ این مورد وقتی پیش می‌آید که هم ρ و هم φ فقط توابعی از یک متغیر مستقل باشند. به عنوان مثالی از این مورد، فرض می‌کنیم در دستگاه مختصات کروی ρ فقط تابعی از متغیر r است و فرض می‌کنیم تمامی بار با تقارن کروی توزیع شده است. در این صورت معادله (۵.۳) ب) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r) \quad (53.3)$$

فرض می‌کنیم که بار کل محدود است، یعنی یا بار تا بی‌نهایت ادامه ندارد و یا چگالی بار برای مقادیر بزرگ r سریعأ به سمت صفر میل کند. در این صورت، با در دست داشتن $\rho(r)$ ، می‌توان از معادله (۵۳.۳) مستقیماً انتگرال گرفت و دو ثابت انتگرال‌گیری را به کمک دو

مطلب زیر معین کرد: (۱) استفاده از قانون گاوس برای میدان الکتریکی در شعاع معین، (۲) استفاده از این واقعیت که $\varphi \rightarrow 0$ وقتی که $r \rightarrow \infty$.

۱۴.۳ خلاصه مطالب

معادلات دیفرانسیل برداری مرتبه اول اساسی، یعنی $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ را می‌توان با هم ادغام کرد و به صورت یک معادله دیفرانسیل نرده‌ای مرتبه دوم، یعنی معادله پواسون، درآورد

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

که در آن $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ ، اگر $\rho(\mathbf{r})$ تابعی مفروض در ناحیه V باشد، معادله پواسون دارای جواب خصوصی زیر است

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

و این موضوع را می‌توان با عمل کردن ∇^2 بر سمت راست این عبارت در زیر انتگرال ملاحظه کرد. به این جواب خصوصی می‌توان هر جوابی از معادله همگن متناظر آن، یعنی معادله لاپلاس

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

را افزود. جواب مناسب معادله لاپلاس جوابی است که سبب برآورده شدن شرایط مرزی مفروض در مرز V بشود. اگر φ یا $\partial\varphi/\partial n$ در یک مرز بسته مشخص شده باشد، جواب یکتاست.

۱. اگر ناحیه V همه فضا را دربرگیرد، شرط مرزی مناسب عبارت است از $\varphi = 0$ در $r = \infty$. جواب معادله لاپلاس که در این شرط صدق کند صفر است، لذا جواب خصوصی جواب کامل است.

۲. اگر همه جا در داخل V ، $\rho = 0$ باشد، جواب کامل آن عبارت است از آن جوابی از معادله لاپلاس که در داخل V پیوسته باشد و در مرز V در شرایط تعیین شده صدق کند. در صورتی که مرز از رساناها تشکیل شده باشد، شرایط تعیین شده در روی مرز به صورت $\varphi = \text{const.}$ است.

۳. جوابهای تحلیلی معادله لاپلاس ممکن است از ترکیبهای خطی مجموعه‌ای از توابع پایه ساخته شوند، که این توابع با در نظر گرفتن تقارنهای موجود در مسئله به خصوص

انتخاب می‌شوند. مجموعه هماهنگهای منطقه‌ای برای مرزهای کروی و تقارن سمتی مفیدند، و هماهنگهای استوانه‌ای برای مرزهای استوانه‌ای و تقارن محوری. قضیهٔ یکتایی نشان خواهد داد که چه وقت توابعی به تعداد کافی از مجموعه نامتناهی توابع، مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

۴. روش تصویرها شگردی است که به کمک آن یک پیکربندی از بارهای تصویری مجازی در خارج از V چنان طرح‌ریزی می‌شود که میدان پتانسیل ناشی از این بارها و بارهای واقعی داخل V ، روی مرزهای مفروض V در شرایط مرزی مربوط به φ صدق کند. قضیهٔ یکتایی تضمین می‌کند که میدان داخل V میدان صحیحی است. این روش را تنها می‌توان در موارد معدودی به کار برد که در آنها تقارن مناسب وجود داشته باشد. ساده‌ترین مثال عبارت است از بار نقطه‌ای در مقابل صفحه‌ای رسانا.

۵. وقتی همهٔ بارها روی سطوح رسانا قراردارند، معادلهٔ لاپلاس حکم می‌کند که پتانسیل رساناها توابعی خطی از بار رساناها باشند

$$\varphi_i = \sum_j P_{ij} Q_j$$

مسائل

۱.۳ دو پوستهٔ رسانای باردار کروی هم مرکز به شعاعهای r_a و r_b به ترتیب پتانسیلهای φ_a و φ_b دارند. اگر $r_b > r_a$ باشد، مطلوب است پتانسیل در نقاط واقع میان دو پوسته، و در نقاط $r > r_b$.

۲.۳ دو پوستهٔ طویل استوانه‌ای باردار و هم محور به شعاعهای r_a و r_b به ترتیب پتانسیلهای φ_a و φ_b دارند. پتانسیل را در نقاط میان دو پوسته پیدا کنید.

۳.۳ اگر φ_1 یکی از جوابهای معادلهٔ لاپلاس باشد. ثابت کنید که مشتق پاره‌ای φ_1 نسبت به یک یا چند مختصه از مختصات قائم (نظیر $\partial\varphi_1/\partial x^2$ ، $\partial\varphi_1/\partial x^2$ ، $\partial^2\varphi_1/\partial x\partial y$ و مانند آنها) نیز جواب معادلهٔ لاپلاس است.

۴.۳ فرض کنید که در تمامی ناحیهٔ V ، φ در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. ثابت کنید که مقدار φ در هر نقطهٔ O برابر است با میانگین مقادیر آن بر روی سطح کره‌ای به مرکز O که تماماً در V قرار داشته باشد

$$\varphi(O) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint \varphi da$$

در این رابطه R شعاع کره است. (داهنمای: در معادلهٔ (۵۷.۱) فرض کنید که $1/r = \psi$.)

نشان دهید که در نتیجه φ در V_0 هیچ بیشینه یا کمینه‌ای ندارد.

۵.۳ تابع

$$F(u) = (1 - 2xu + u^2)^{-1/2}$$

را تاجمله u^2 ، به صورت رشته تیلور بر حسب u بسط دهید. توجه کنید که ضرایب این بسط، چهارچند جمله‌ای نخستین از چند جمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ اند. در واقع $F(u)$ تابع مولد تمام چند جمله‌ایهای لژاندر است:

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n$$

۶.۳ نشان دهید که نیمی از هماهنگهای منطقه‌ای با مشتق گیری پی در پی r^{-1} نسبت به مختصه قائم z تولید می‌شوند ($z = r \cos \theta$).

۷.۳ $\nabla^2 \varphi$ در مختصات استوانه‌ای (معادله ۸.۳) را از صورت آن در مختصات قائم (معادله ۶.۳) به کمک تغییر متغیر $y = r \sin \theta$ ، $x = r \cos \theta$ به دست آورید.

۸.۳ یک چهارقطبی محوری متشکل است از مجموعه بارهای نقطه‌ای q ، $-2q$ ، q واقع بر محور z ، در فواصل l ، 0 ، $-l$ از مبدأ مختصات. پتانسیل این چهارقطبی را حساب کنید. پتانسیل را فقط در فواصل $l \gg r$ حساب کنید و نشان دهید که این پتانسیل بایکی از هماهنگهای منطقه‌ای متناسب است.

۹.۳ فرض کنید که یک دوقطبی نقطه‌ای در مرکز یک پوسته رسانای کروی متصل به زمین قرار گرفته است. پتانسیل را در داخل پوسته پیدا کنید. (داهنمایی: برای برآوردن شرایط مرزی بر روی پوسته از هماهنگهای منطقه‌ای که در مبدأ منتظم‌اند استفاده کنید.)

۱۰.۳ نشان دهید که برای یک کره رسانای بی بار، وقتی در میدان الکتریکی که در آغاز یکنواخت است قرار گیرد، پتانسیل ناشی از کره برابر است با پتانسیل یک دوقطبی نقطه‌ای. گشتاور دوقطبی القایی کره را پیدا کنید.

۱۱.۳ یک کره رسانا به شعاع a را که حاوی بار کل Q است در یک میدان الکتریکی E_0 که در آغاز یکنواخت است قرار می‌دهیم. پتانسیل را در تمام نقاط واقع در خارج کره پیدا کنید.

۱۲.۳ یک استوانه رسانای طویل به شعاع a را که بار خالص ندارد، در میدان الکتریکی E_0 که در آغاز یکنواخت است قرار می‌دهیم. جهت E_0 بر محور استوانه عمود است. پتانسیل را در نقاط خارج استوانه، و همچنین چگالی بار را در سطح استوانه محاسبه کنید.

۱۳.۳* نشان دهید که $\text{Im } A[(x+iy)]^{1/2} = Ar^{1/2} \sin \theta / 2$ در معادله لا پلاس صدق می کند، ولی میدان الکتریکی ناشی از این تابع در $\theta = 0$ ناپیوستگی دارد. (توجه کنید که در اینجا مختصات استوانه ای اند). این تابع را می توان برای توصیف پتانسیل در لبه یک صفحه رسانای باردار به کار برد که صفحه رسانا فقط برای مقادیر مثبت x بر صفحه xz منطبق باشد. چگالی بار بر روی این صفحه را پیدا کنید. تعدادی از سطوح هم پتانسیل و تعدادی از خطوط نیرو را رسم کنید.

۱۴.۳ بار نقطه ای q در فاصله d از یک صفحه نامتناهی متصل به زمین قرار دارد. بار کل القایی در صفحه را با انتگرال گیری مستقیم از تابع چگالی سطحی بار محاسبه کنید.

۱۵.۳ دو بار نقطه ای q_1 و q_2 در نزدیکی یک صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین، قرار دارند. بارهای تصویری لازم را برای آنکه این صفحه به یک سطح با پتانسیل ثابت تبدیل شود پیدا کنید. آیا از نتیجه ای که به دست آورده اید می توانید توزیع بار تصویری مورد لزوم را برای موردی که یک جسم باردار به شکل دلخواه با چگالی بار ρ در مقابل یک صفحه رسانای نامتناهی قرار دارد، پیشگویی کنید؟

۱۶.۳ دو صفحه رسانای متصل به زمین با یکدیگر زاویه 60° می سازند و بار نقطه ای q میان آنها قرار دارد. مکان بارهای تصویری که میدان الکتریکی میان این دو صفحه را می دهند، تعیین کنید.

۱۷.۳ بار نقطه ای q میان دو صفحه رسانای موازی متصل به زمین قرار گرفته است. فاصله دو صفحه از یکدیگر d است. مکان تعداد بی نهایت بارهای تصویری را پیدا کنید. نیروی وارد بر بار q را بر حسب یک رشته بی نهایت بیان کنید.

۱۸.۳ نیرویی را که یک بار نقطه ای q و یک کره رسانای بی بار به شعاع a به یکدیگر وارد می کنند پیدا کنید. بار نقطه ای در فاصله r از مرکز کره قرار دارد و $r > a$. یک عبارت تقریبی پیدا کنید که برای $r \gg a$ معتبر باشد.

۱۹.۳ نشان دهید که مسئله کره رسانای بی بار در میدان الکتریکی E_0 را که در آغاز یکنواخت است، می توان به کمک تصاویر حل کرد. (دانهایی: میدان الکتریکی یکنواخت در حوالی مبدأ مختصات را می توان تقریباً با میدان دو بار نقطه ای Q و $-Q$ که روی محور z و به ترتیب در نقاط $z = +L$ و $z = -L$ قرار دارند، مساوی فرض کرد. هر چه L بزرگتر باشد $(L \rightarrow \infty)$ ، میدان یکنواخت تر می شود. واضح است که $E_0 = Q / 2\pi\epsilon_0 L^2$.)

۲۰.۳ بار نقطه ای q در داخل یک پوسته رسانای کروی و به فاصله r از مرکز آن قرار دارد.

شعاع داخلی پوسته a است. نشان دهید که این مسئله را می‌توان به شیوه تصویری حل کرد؛ چگالی سطحی بار σ را که در روی سطح داخلی پوسته القا می‌شود، پیدا کنید. (پتانسیل پوسته کروی را نمی‌توان کاملاً بر حسب q و تصویر آن مشخص کرد، زیرا بارهای ثابت خارج از کره نیز می‌توانند در ایجاد پتانسیل کره سهم باشند. با وجود این سهم این بارهای خارجی فقط جمله ثابتی در پتانسیل است). بار کل القا شده در سطح داخلی پوسته را به دو طریق به دست آورید: (الف) با استدلال فیزیکی؛ (ب) با انتگرال گیری مستقیم σ بر روی سطح.

۲۱.۳ استوانه رسانای بلندی که بار در واحد طول آن λ است موازی با یک صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین قرار دارد. فاصله محور استوانه از صفحه برابر x_0 و شعاع استوانه برابر a است. مکان بار تصویری خطی را پیدا کنید و مقدار ثابت M را (که تعیین کننده پتانسیل استوانه است) بر حسب a و x_0 به دست آورید.

۲۲.۳ توزیع کروی باری با چگالی بار ثابت ρ به ازای $R \leq r$ مشخص می‌شود. برای شعاعهای بزرگتر از R چگالی بار صفر است. با انتگرال گیری از معادله پواسون، پتانسیل $\varphi(r)$ را حساب کنید. نتیجه را با محاسبه انتگرال معادله (۱.۳) امتحان کنید. (دهنمایی: برای محاسبه رابطه (۱.۳) ناحیه بار را به پوسته‌های کروی هم‌مرکز به ضخامت dr تقسیم کنید.)

۲۳.۳ دو قطبی $\mathbf{p}$ عمود بر یک صفحه رسانای نامتناهی و به فاصله d از آن قرار دارد صفحه به زمین متصل است (یعنی پتانسیل آن صفر است). نیروی وارد بر صفحه از طرف این دو قطبی را محاسبه کنید.

۲۴.۳ بار یک طوفان تندر در ارتفاع h_1 برابر $+Q$ و مستقیماً در زیر آن در ارتفاع h_2 برابر $-Q$ است. رابطه‌ای برای میدان الکتریکی قائم E_z در سطح زمین و به فاصله d از این طوفان پیدا کنید. برای $h_1 = 5000\text{m}$ و $h_2 = 3000\text{m}$ و $Q = 15\text{C}$ ، منحنی تغییرات E_z را از $d = 0$ تا $d = 20\text{km}$ رسم کنید.

۲۵.۳ فرض کنید که $\varphi(x, y, z)$ در معادله لاپلاس صدق می‌کند. نشان دهید که مقدار φ در (x, y, z) تقریباً برابر است با میانگین مقادیر آن در شش نقطه مجاور $(x \pm d, y, z)$ ، $(x, y \pm d, z)$ ، $(x, y, z \pm d)$. (دهنمایی: بسط رشته تیلور $\varphi(x \pm d, y, z)$ را تا جمله d^3 محاسبه کنید، و بطور مشابه برای پنج نقطه دیگر؛ سپس نتایج را با هم جمع کنید.) برنامه‌های کامپیوتری برای محاسبه عددی φ می‌توانند بر این نتیجه مبتنی باشند.

معادله لاپلاس در مختصات متعامد منحنی الخط، و (۳) بحث کاملتر درباره حل معادله لاپلاس، توصیه می شوند

Mathematical Physics, by E. Butkov, Reading, Mass: Addison -Wesley, 1968.

Electromagnetic Theory, by J. A. Stratton, New York: Mc Graw-Hill, 1941.

Classical Electricity and Magnetism, Second Edition, by W. Panofsky and M. Phillips, Reading Mass: Addison-Wesley. 1962.

میدان الکتروستاتیک در محیطهای دی الکتریک

تاکنون مسائلی را که شامل محیطهای دی الکتریکی بودند بررسی نکرده ایم و تنها مواردی را که در آنها میدان الکتریکی منحصرأ یا به وسیله بارهای درون يك توزیع مشخص یا در اثر بارهای آزاد واقع بر سطوح رساناها تولید می شود مورد بحث قرار داده ایم. اکنون می خواهیم مورد عمومیتری را بررسی کنیم.

ماده دی الکتریک ایده آل آن است که بار آزاد نداشته باشد. با وجود این محیطهای دی الکتریکی از مولکولها و مولکولها نیز به نوبه خود از موجودات بار داری (هسته های اتمی و الکترونها) تشکیل شده اند، و مولکولهای دی الکتریک یقیناً تحت تأثیر میدانهای الکتریکی قرار می گیرند. میدان الکتریکی موجب می شود که نیرویی به هر ذره باردار وارد شود، ذرات با بار مثبت در جهت میدان رانده می شوند و ذرات با بار منفی در جهت مخالف آن، به گونه ای که قسمتهای مثبت و منفی هر مولکول از مواضع حالت تعادل خود خارج و در دو جهت مخالف جابه جا می شوند. اما مقدار این جابه جایی ها (که در بیشتر موارد از کسر کوچکی از قطر يك مولکول تجاوز نمی کنند) به علت ایجاد نیروهای قوی باز گرداننده ای که در اثر تغییر پیکربندی مولکولها به وجود می آیند، محدود است. گاه از اصطلاح «بار مقید»، در مقابل «بار آزاد» يك رسانا، استفاده می شود تا تأکید شود که این بارهای مولکولی نمی توانند خیلی دور بروند، یا از جسم دی الکتریک جدا شوند. تأثیر کلی از لحاظ ماکروسکوپی را می توان این طور تجسم کرد که تمامی بار مثبت دی الکتریک نسبت به بار منفی آن جابه جا شده است. در این صورت گفته می شود دی الکتریک قطبیده شده است.

دی الکتریک قطبیده، با وجودی که به طور متوسط از لحاظ الکتریکی خنثاست، اما هم در نقاط خارج و هم در داخل دی الکتریک میدان الکتریکی ایجاد می کند. در نتیجه، با وضعی روبه رو می شویم که به ظاهر ناهنجار است: قطبیدگی دی الکتریک به میدان الکتریکی کل موجود

در محیط بستگی دارد، در حالی که قسمتی از این میدان الکتریکی به وسیله خود دی الکتریک ایجاد می شود. به علاوه میدان الکتریکی دی الکتریک، در نقاط دور از آن ممکن است توزیع بار آزاد در روی اجسام رسانا را تغییر دهد، و این به نوبه خود میدان الکتریکی را در دی الکتریک عوض خواهد کرد. هدف اصلی این فصل پیدا کردن روشهایی کلی برای بررسی این وضعیت غریب است.

۱۰۴ قطبش

عنصر حجمی کوچکی چون Δv از محیطی دی الکتریک را که روی هم رفته از حیث الکتریکی خنثاست در نظر می گیریم. هر گاه محیط قطبیده شود جدایی میان بارهای مثبت و منفی تحقق می یابد، و عنصر حجم با گشتاور دوقطبی الکتریکی

$$\Delta p = \int_{\Delta v} \mathbf{r} dq \quad (10.4)$$

مشخص می شود. مطابق آنچه در بخش ۹.۲ دیدیم، میدان الکتریکی که به وسیله Δv در نقاط دور (یعنی در فواصلی از Δv که نسبت به ابعاد عنصر حجم بسیار بزرگ اند) ایجاد می شود، با این کمیت (Δp) تعیین می شود.

چون Δp به اندازه عنصر حجم بستگی دارد، بهتر است با $\mathbf{P}$ ، یعنی گشتاور دوقطبی الکتریکی در واحد حجم

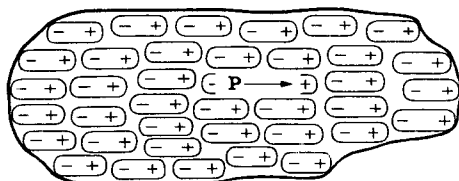
$$\mathbf{P} = \frac{\Delta p}{\Delta v} \quad (2.4)$$

کار کنیم. به بیان دقیقتر، $\mathbf{P}$ باید به عنوان حد این کسر تعریف شود وقتی که حجم Δv از لحاظ ماکروسکوپی بسیار کوچک شود. بدین ترتیب $\mathbf{P}$ به یک تابع نقطه ای $\mathbf{P}(x, y, z)$ تبدیل می شود. $\mathbf{P}$ را معمولاً قطبش الکتریکی، یا فقط قطبش، محیط می نامند. ابعاد آن بار بر واحد سطح و یکای آن در دستگاه mks کولن بر متر مربع است.

واضح است که $\mathbf{P}(x, y, z)$ کمیتی برداری است که در هر عنصر حجم، با Δp هم-جهت است. Δp به نوبه خود با جهت جا به جایی بار مثبت نسبت به بار منفی هم جهت است (رنگ شکل ۱۰۴).

اگرچه Δv از لحاظ ماکروسکوپی بسیار کوچک فرض می شود، ولی با وجود این تعداد بسیار زیادی مولکول دارد. گاهی مطلوب است که درباره گشتاور دوقطبی الکتریکی یک تک مولکول صحبت شود، یعنی

$$\mathbf{p}_m = \int_{\text{مولکول}} \mathbf{r} dq \quad (3.4)$$



شکل ۱۰۴ قطعه‌ای از ماده‌ی دی‌الکتریک قطبیده. هر عنصر حجم به صورت یک دو قطبی Δp نشان داده شده است.

زیرا مولکول یکی از واحدهای کوچک و خنثای الکتریکی است که ماده‌ی دی‌الکتریک را تشکیل می‌دهد. از رابطه (۱۰۴) پیداست که گشتاور دو قطبی مربوط به عنصر Δv از رابطه $\Delta p = \sum p_m$ به دست می‌آید، که در آن عمل جمع بندی شامل تمام مولکولهای درون عنصر Δv است. بنابراین

$$P = \frac{1}{\Delta v} \sum p_m \quad (۴.۴)$$

در این مورد در فصل ۵ بازهم گفتگو خواهد شد. با اینکه شکل ۱۰۴ هر عنصر حجم یک دی‌الکتریک قطبیده را به صورت یک دو قطبی کوچک نشان می‌دهد، شاید آموزنده تر باشد که دی‌الکتریک را مرکب از مولکولهای تجسم کنیم و فرض کنیم که هر دو قطبی شکل ۱۰۴ یک تک مولکول است.

۲.۴ میدان خارجی یک محیط دی‌الکتریک

قطعه‌ای متناهی از جسم یک دی‌الکتریک قطبیده، یعنی جسمی که در هر نقطه r' با قطبش $P(r')$ مشخص می‌شود را، در نظر می‌گیریم. قطبش باعث ایجاد میدان الکتریکی می‌شود، و هدف ما این است که این میدان را در نقطه r خارج از جسم دی‌الکتریک پیدا کنیم (رک شکل ۲.۴). همان طور که در فصل ۲ انجام شد، بهتر است ابتدا پتانسیل $\varphi(r)$ را پیدا کنیم، و میدان الکتریکی را با محاسبه منفی شیب $\nabla \varphi$ به دست آوریم.

هر عنصر حجم $\Delta v'$ از محیط دی‌الکتریک با گشتاور دو قطبی $\Delta p = P \Delta v'$ مشخص می‌شود، و چون فاصله نقطه (x, y, z) از عنصر $\Delta v'$ نسبت به ابعاد $\Delta v'$ بسیار بزرگ است، این کمیت (یعنی گشتاور دو قطبی) به طور کامل سهم $\Delta v'$ را در ایجاد پتانسیل تعیین می‌کند

$$\Delta \varphi(r) = \frac{\Delta p \cdot (r - r')}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^3} = \frac{P(r') \cdot (r - r') \Delta v'}{4\pi\epsilon_0 |r - r'|^3} \quad (۵.۴)$$

در اینجا $r - r'$ برداری است که جهت آن به طرف خارج از حجم $\Delta v'$ است و اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید

$$|r - r'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (۶.۴)$$

پتانسیل کل در نقطه $\mathbf{r}$ از جمع سهمهای مربوط به تمام قسمتهای دی الكترك به دست می آید

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (۷.۴)$$

این نتیجه درست است، و φ را می توان مستقیماً از رابطه (۷.۴) به دست آورد مشروط بر آنکه شکل تابعی $\mathbf{P}$ معلوم باشد. اما بهتر است معادله (۷.۴) را بایک تبدیل ریاضی ساده به شکل نسبتاً متفاوتی بنویسیم.

اگر $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ با معادله (۶.۴) داده شده باشد، آنگاه

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (۸.۴)$$

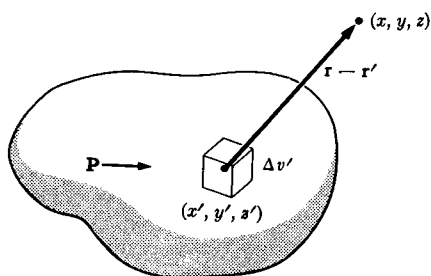
است که صحت آن را می توان با به کار بردن مستقیم عملگر شیب در دستگاه مختصات قائم امتحان کرد. در عملگر ∇' مشتقهای نسبت به مختصات پریم دار دخیل اند. در شرایطی ممکن است محاسبه شیب نسبت به مختصات بدون پریم مطلوب باشد که ما آن را مطابق معمول با ∇ نشان می دهیم. واضح است که نتیجه عمل ∇' بر روی هرتابعی از $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ برابر است با عمل $-\nabla$ بر روی همان تابع. عملگر ∇ را بعداً برای محاسبه میدان الكتریکی در نقطه $\mathbf{r}$ لازم خواهیم داشت. اما در محاسبه انتگرال معادله (۷.۴) در حجم دی الكترك، V_0 ، نقطه $\mathbf{r}$ ثابت نگاه داشته می شود؛ لذا انتگرال معادله (۷.۴) را می توان با استفاده از معادله (۸.۴) به صورت زیر تبدیل کرد

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (۹.۴)$$

از اتحاد برداری (۷.۱۰۱) از جدول ۱۰.۱ داریم

$$\nabla' \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla' \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla' f \quad (۱۰.۴)$$

که در آن f يك تابع نقطه ای نرده ای و $\mathbf{F}$ يك تابع نقطه ای برداری اختیاری است. با استفاده از این اتحاد، (۹.۴) را می توان بازهم به صورت دیگری تبدیل کرد. در اینجا نیز پریم معرف مشتق گیری نسبت به مختصات پریم دار است. فرض کنید $f = (1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$



شکل ۲.۴ میدان الكتریکی در (x, y, z) را می توان با جمع کردن سهم مربوط به عناصر حجمی مختلف $\Delta v'$ در V_0 ، به دست آورد. سطح S_0 با V_0 نشان داده شده است.

و $\mathbf{F} = \mathbf{P}$ ، در این صورت انتگرالده، یعنی معادله (۹.۴)، به شکل زیر درمی آید

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P} \quad (11.4)$$

و سرانجام پتانسیل، معادله (۷.۴)، را به صورت زیر می توان نوشت

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{s_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v_0} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (12.4)$$

که در آن با استفاده از قضیه واگرایی، انتگرال حجمی جمله $\nabla' \cdot (\mathbf{P}/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ به یک انتگرال سطحی تبدیل شده است، و البته $\mathbf{n}$ برداریکه عمود بر عنصر سطح da' است که جهت آن به سمت خارج (خارج دی الکتریک) است.

کمیت های $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ و $-\nabla' \cdot \mathbf{P}$ که در انتگرال های معادله (۱۲.۴) دیده می شوند دو تابع نرده ای اند که از بردار قطبش $\mathbf{P}$ نتیجه می شوند. بهترین است که این مقادیر را بانماهای خاصی مشخص کنیم، و چون این مقادیر به ترتیب ابعاد بار الکتریکی در واحد سطح و بار الکتریکی در واحد حجم دارند می توان نوشت

$$\sigma_p \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n \quad (13.4)$$

و

$$\rho_p \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (14.4)$$

و ρ_p و σ_p را چگالیهای بار قطبشی نامید. چگالی سطحی بار قطبشی از آن مؤلفه قطبش که بر سطح مربوط عمود است به دست می آید، و چگالی حجمی بار قطبشی معیاری است از ناپیکنواختی قطبش در داخل ماده.

اکنون پتانسیل ناشی از ماده دی الکتریک، یعنی رابطه زیر

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{s_0} \frac{\sigma_p da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{v_0} \frac{\rho_p dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned} \quad (15.4)$$

طوری نوشته شده است که به وضوح نشان می دهد این پتانسیل ناشی از یک توزیع بار است. به عبارت دیگر، ماده دی الکتریک به وسیله توزیع مناسبی از بارهای قطبشی جایگزین شده است.

اگر چه معادله (۱۵.۴) با استفاده از تبدیلات ریاضی به دست آمده است، با وجود این

باید بتوانیم σ_p و ρ_p را صرفاً بر مبنای استدلال فیزیکی نیز درک کنیم. اینکه يك چگالی بار سطحی وجود دارد از شکل ۱.۴ پیداست. از روی این شکل دیده می شود که این بارهای سطحی از انتهای دو قطبیهایی که سمنگیری مشابهی دارند تشکیل شده است. بدین ترتیب بر روی هر سطحی که با بردار قطبش موازی نیست يك چگالی بار الکتریکی به وجود می آید. اکنون به ρ_p برمی گردیم؛ انتظاری رود که $\rho_p \Delta v'$ بار اضافی یا بارخالص ایجاد شده در عنصر $\Delta v'$ را به دست بدهد. این موضوع را به صورت زیر توضیح می دهیم: چگالیهای بار ρ^+ و ρ^- را طوری تعریف می کنیم که به ترتیب نشان دهنده بار مثبت کل و بار منفی کل کل در واحد حجم باشند. یعنی ρ^+ نشان دهنده تمام هسته های اتمی در واحد حجم دی الکتریک، و به طور مشابه، ρ^- نشان دهنده تمام الکترون ها در واحد حجم دی الکتریک است. در حالت ناقطیده، هر عنصر حجمی از لحاظ الکتریکی خنثاست؛ پس

$$\rho_0^+(x', y', z') + \rho_0^-(x', y', z') = 0 \quad (16.4)$$

شاخصهای پایین (صفر) نشان دهنده چگالیها در حالت ناقطیده اند. فرض کنید به علت قطیده شدن، بارهای مثبت به اندازه $\delta^+(x, y, z)$ و بارهای منفی به اندازه $\delta^-(x, y, z)$ جا به جا شوند. مقدار بار مثبتی که از عنصر سطح da' عبور می کند برابر است با $\rho_0^+ + \delta^+ \cdot n da'$ ، بنابراین، افزایش بار مثبت حاصل از فرایند قطیدگی در حجم $\Delta v'$ برابر است با

$$-\oint_{\Delta S} \rho_0^+ \vec{\delta}^+ \cdot \mathbf{n} da' \quad (17.4)$$

که در آن ΔS سطحی است که حجم $\Delta v'$ را محصور می کند. به همین ترتیب جا به جا شدن بارهای منفی باعث ازدیاد بار (یا نقصان بار منفی) در حجم $\Delta v'$ می شود که مقدار آن برابر است با

$$\oint_{\Delta S} (-\rho_0^-) \vec{\delta}^- \cdot \mathbf{n} da \quad (18.4)$$

افزایش کلی بار حجم $\Delta v'$ در اثر جا به جا شدن بارهای مثبت و منفی مساوی حاصل جمع معادله های (۱۷.۴) و (۱۸.۴) است که، با استفاده از معادله (۱۶.۴)، آن را می توان به صورت زیر نوشت

$$-\oint_{\Delta S} \rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-) \cdot \mathbf{n} da' = -\nabla \cdot [\rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-)] \Delta v' \quad (19.4)$$

اما $\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-$ تغییر مکان نسبی چگالی بارهای مثبت و منفی است، و در نتیجه $\rho_0^+ (\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-)$ معادل همان چیزی است که ما آن را قطبش $\mathbf{P}$ نامیدیم. پس $\rho_p \Delta v'$ برابر است با بارخالص در عنصر حجم دی الکتریک قطیده.

در نظر اول ممکن است عجیب به نظر بیاید که با اینکه در آغاز با عنصرهای حجمی شروع کردیم که از لحاظ الکتریکی خنثی بودند، اما در پایان به عنصرهای حجمی رسیدیم که بار خالص دارند. طبق گفته قبلی ما، دی الکتریک تشکیل شده است از عنصرهای دو قطبی Δp و لازم بود که هر Δp از لحاظ الکتریکی خنثی باشد تا معادله (۱۵.۴) به طور صحیح پتانسیل را به دست بدهد. حال می بینیم تا وقتی که $\nabla \cdot \mathbf{P}$ صفر نشود، هریک از عنصرهای حجم به طور انفرادی باردار به نظر می آیند. منشأ این تناقض ظاهری در تبدیل ریاضی معادله (۱۱.۴) نهفته است؛ در این معادله سهم هر عنصر حجم تبدیل می شود به یک جمله حجمی متفاوت و یک جمله سطحی. جمع کل بار در حجم و بر روی سطح عنصر حجم هنوز هم صفر است؛ اما وقتی عنصرهای حجمی مختلف را روی هم می گذاریم تا یک قطعه ماکروسکوپی از ماده دی الکتریک تشکیل بدهند، متوجه می شویم که پتانسیل حاصل از «سطوح داخلی» مختلف یکدیگر را حذف می کنند. سرانجام چیزی که برای ما باقی می ماند سهم آن عنصرهای حجمی است که به طور مؤثر باردارند و سهم آن سطوحی که مربوط به مرزهای واقعی جسم دی الکتریک اند.

مقدار کل بار قطبشی یک جسم دی الکتریک، یعنی

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla' \cdot \mathbf{P}) dv' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da' \quad (20.4)$$

باید مساوی صفر شود، زیرا فرض اولیه ما این بود که دی الکتریک، روی هم رفته، از لحاظ الکتریکی خنثی است. این نتیجه مستقیماً از صورت معادله (۲۰.۴)، که به وضوح در نتیجه قضیه واگرایی صفر می شود، پیدا است.

اکنون برای پتانسیل الکتروستاتیکی $\varphi(\mathbf{r})$ ناشی از یک نمونه دی الکتریک قطبیده دو عبارت متمایز داریم، یعنی معادلات (۷.۴) و (۱۵.۴). این دو معادله هر دو درست اند، لیکن برای ما در بیشتر موارد رابطه دوم مناسبتر است. میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ را می توان از روی منفی شیب معادله (۱۵.۴) حساب کرد. چون φ تابعی است از مختصات (x, y, z) ، شیب مربوط عبارت است از $-\nabla$. مختصات بی پریم فقط به صورت تابع $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ ظاهری می شوند. بنا بر این، با توجه به اینکه $-\nabla'(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = \nabla(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ و با به کار بردن معادله (۸.۴)، نتیجه می گیریم که

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{S_0} \frac{\sigma_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \int_{V_0} \frac{\rho_P(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right] \quad (21.4)$$

۳.۴ میدان الکتریکی در داخل یک دی الکتریک

@Quark_Book

پیش از آنکه بتوانیم عبارتی برای میدان الکتریکی در داخل یک محیط قطبیده به دست

آوریم، لازم است این میدان را دقیقاً تعریف کنیم. البته آنچه مورد نظر ماست میدان الکتریکی ماکروسکوپی است، یعنی میدان الکتریکی میانگین در ناحیه کوچکی از دی الکتریک که با وجود کوچکی شامل تعداد زیادی مولکول است. راه دیگری که شاید هم راه بهتری باشد این است که میدان الکتریکی را مستقیماً بر حسب یک آزمایش ماکروسکوپی تعریف کنیم: میدان الکتریکی (ماکروسکوپی) عبارت است از حد نیروی وارد بر واحد بار یک بار آزمون واقع در داخل دی الکتریک، وقتی که بار آزمون آن قدر کوچک است که خودش پرتوزیع بار تأثیری ندارد. این بار آزمون باید از لحاظ ماکروسکوپی ابعاد بسیار کوچکی داشته باشد (یعنی همان چیزی که بار «نقطه‌ای» می‌نامیم)، اما در مقایسه با اندازه یک مولکول بزرگ خواهد بود.

با اینکه عبارت بالا تعریف اساسی میدان الکتریکی ماکروسکوپی $\mathbf{E}$ است، به کار بردن مستقیم این تعریف برای به دست آوردن عبارتی برای میدان الکتریکی کاری است مشکل، زیرا ابتدا باید نیروی وارد بر یک جسم باردار با ابعاد بزرگ را حساب کنیم و بعد وقتی اندازه آن جسم کوچک می‌شود حد آن را به دست آوریم. بنابراین لازم است برای یافتن عبارتی تحلیلی که در جستجوی آن هستیم، خاصیت دیگری از میدان الکتریکی را به کار ببریم، و بدین ترتیب $\mathbf{E}$ را بر حسب بارهای قطبشی محیط به دست بیاوریم. بعداً (در بخش ۱۰.۴)، نشان خواهیم داد که مقداری را که $\mathbf{E}$ نامیده‌ایم با «تعریف اساسی نیرو» مطابقت دارد. میدان الکتروستاتیکی در دی الکتریک باید همان خواص اساسی را داشته باشد که در مورد $\mathbf{E}$ در خلأ صادق بود؛ به خصوص اینکه $\mathbf{E}$ میدانی است که بقا دارد و در نتیجه می‌توان آن را از یک پتانسیل نرده‌ای به دست آورد. بنابراین

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

یا، به طور معادل

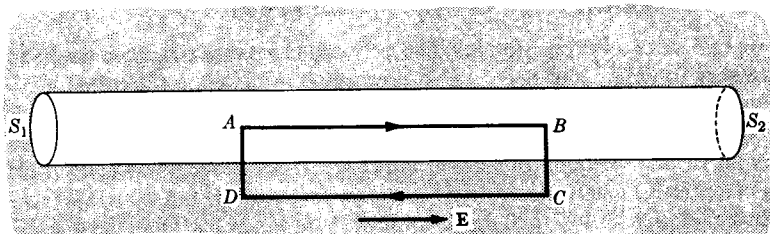
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

حال رابطه اخیر را برای مسیر $ABCD$ که در شکل ۳.۴ نشان داده شده است به کار می‌بریم. در این شکل AB در حفره سوزنی شکلی که در داخل دی الکتریک تعبیه شده است، و CD در داخل خود محیط دی الکتریک قرار دارد. چون قطعات AD و BC را می‌توان به طور دلخواه کوچک فرض کرد، انشغال خطی تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{l} = 0$$

یا به طور معادل

$$E_{et} = E_{dt}$$



شکل ۳.۴ مسیر $ABCD$ که قسمتی از آن در داخل حفره سوزنی شکل و بخش دیگر آن در داخل دی الکتریک قرار دارد. در یک محیط دی الکتریک همسانگرد (بخش ۵.۴) قطبش $\mathbf{P}$ با $\mathbf{E}$ هم جهت است، به طوری که برای امتداد حفره سوزنی که نشان داده شده است، بر روی دیواره های استوانه ای $\sigma_p = 0$ است. در یک دی الکتریک ناهمسانگرد، σ_p الزاماً صفر نیست، اما مقدار آن در مؤلفه طولی میدان الکتریکی در داخل حفره تأثیری ندارد.

که شاخصهای پایین v و d به ترتیب نشان دهندهٔ خلا^۱ و دی الکتریک اند، و شاخص پایین ϵ نمایندهٔ مؤلفهٔ مماسی است.

معادلهٔ (۲۲.۴) به امتداد حفره سوزنی شکل بستگی ندارد. اگر «سوزن» در امتداد $\mathbf{E}$ قرار گیرد، $E_d = E_d$ ؛ به علاوه، به علت تقارن، میدان در داخل حفره در امتداد سوزن است، یعنی $E_{\theta} = E_{\phi}$. بنابراین به این نتیجه مهم می رسیم که:

میدان الکتریکی در داخل یک دی الکتریک برابر است با میدان الکتریکی در داخل یک حفره سوزنی شکل در داخل دی الکتریک، مشروط به آنکه محور حفره موازی امتداد میدان الکتریکی باشد.^۱

از این رو واضح است که مسئله محاسبهٔ میدان الکتریکی در داخل یک دی الکتریک به مسئله تعیین میدان در داخل یک حفره سوزنی شکل واقع در داخل دی الکتریک تبدیل می شود. لیکن میدان الکتریکی داخل حفره، میدان خارجی دی الکتریک است و بنابراین برای تعیین آن می توان از نتایج بخش ۲.۴ استفاده کرد. درست مانند بخش ۲.۴، فرض می کنیم قطبش دی الکتریک با تابع مفروض $\mathbf{P}(x', y', z')$ داده شده باشد، و پتانسیل و میدان الکتریکی ناشی از این قطبش را حساب می کنیم. اگر نقطهٔ $\mathbf{r}$ که پتانسیل و میدان را در آن محاسبه می کنیم در مرکز حفره باشد، با استفاده از معادلهٔ (۱۵.۴)، پتانسیل الکتریکی

۱. چنین بیانی فقط برای دی الکتریکهای همسانگرد دقیقاً درست است (بخش ۵.۴) برای دی الکتریکهای ناهمسانگرد استدلال تقارن با شکست روبه رو می شود، و نتیجه گیری فوق باید چنین تعمیم داده شود؛ میدان الکتریکی در داخل یک دی الکتریک برابر است با مؤلفه طولی میدان الکتریکی در داخل یک حفره سوزنی شکل در دی الکتریک، مشروط بر آنکه محور حفره موازی امتداد میدان الکتریکی داخل دی الکتریک باشد.

را به دست می آوریم

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0 - V_1} \frac{\rho_P(x', y', z') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_0 + S'} \frac{\sigma_P(x', y', z') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (23.4)$$

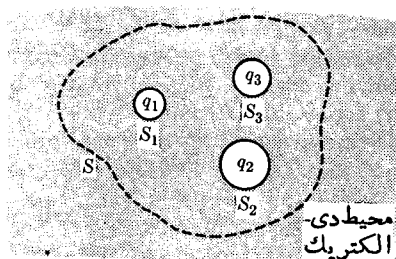
در این معادله $V_0 - V_1$ حجم دی الکتریک است که حجم «سوزن» از آن کم شده است، S_0 سطح خارجی دی الکتریک است و $S' = S_1 + S_2 + S_3$ سطح کل سوزن است. از شکل ۳.۴ پیداست که بر روی سطح جانبی S_3 سوزن، $\sigma_P = 0$ است؛ به علاوه سوزن را می توان به دلخواه نازک ساخت به گونه ای که از سطوح S_1 و S_2 آن نیز بتوان صرف نظر کرد. بنابراین فقط سطوح خارجی دی الکتریک مؤثر خواهند بود و انتگرال سطحی معادله (۲۳.۴) از نظر شکل با انتگرال سطحی معادله (۱۵.۴) یکی خواهد شد. در انتگرال حجمی معادله (۲۳.۴) از حجم حفره چشمپوشی می شود، با وجود این، همچنانکه به راحتی دیده می شود، سهم حجم حفره در مقدار این انتگرال قابل چشمپوشی است. چگالی بار ρ_P محدود است؛ کمیت $dv'/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ در نقطه میدان (یعنی در $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$) و اگر نمی شود زیرا حجم یک نقطه، صفری است از مرتبه ای بالاتر از $\lim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ، و سرانجام حجم سوزن V_1 را می توان با نازک کردن حفره به دلخواه کوچک کرد. بنابراین نیازی هم به کنار گذاشتن حجم V_1 نیست و معادله (۲۳.۴) به صورت معادله (۱۵.۴) درمی آید. به عبارت دیگر، معادله (۱۵.۴)، اعم از اینکه نقطه $\mathbf{r}$ در داخل دی الکتریک واقع باشد یا در خارج آن، پتانسیل $\varphi(\mathbf{r})$ را به دست می دهد.

میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را با محاسبه منفی شیب معادله (۲۳.۴) می توان به دست آورد. اما این میدان با آنچه از معادله (۲۱.۴) حاصل می شود تفاوت ناچیزی دارد. بنابراین معادله (۲۱.۴) میدان الکتریکی ناشی از محیط را در نقطه $\mathbf{r}$ تعیین می کند، خواه $\mathbf{r}$ در داخل دی الکتریک باشد یا در خارج آن.

محاسبات مربوط به معادلات (۱۵.۴) و (۲۱.۴) در مواردی که $\mathbf{P}(x, y, z)$ تابع مکانی معلومی باشد، بسیار راحت است. (چند نمونه از این قبیل موارد را می توان در میان مسائل آخرین فصل پیدا کرد). اما در بیشتر موارد قطبش از اعمال میدان الکتریکی خارجی بر روی محیط دی الکتریک ناشی می شود [یعنی، $\mathbf{P}(x', y', z')$ تابعی است از میدان الکتریکی ماکروسکوپی کل $\mathbf{E}(x', y', z')$ ، و در چنین شرایطی وضع بسیار پیچیده تر خواهد بود. اولاً لازم است که شکل تابعی $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ را بدانیم؛ اما این شکل تابعی را در اکثر موارد به طور تجربی می دانیم و از این لحاظ هیچ اشکالی وجود ندارد. اشکال اصلی از اینجا ناشی می شود که $\mathbf{P}$ به میدان الکتریکی کل، از جمله به آن قسمت از میدان که خود محیط دی الکتریک تولید می کند، بستگی دارد و این همان قسمت از میدان است که ما می خواهیم آن را محاسبه کنیم. پس نمی توانیم $\mathbf{P}$ را حساب کنیم زیرا که $\mathbf{E}$ را نمی دانیم، و برعکس. واضح است که برای حل این مسئله باید راه دیگری انتخاب کنیم. در بخشهای آینده در این باره صحبت خواهیم کرد.

۴.۴ قانون گاوس در دی الکتریکها. جابه‌جایی الکتریکی

در فصل ۲ رابطه مهمی میان شار الکتریکی و بار، موسوم به قانون گاوس، به دست آوردیم. طبق این قانون شار الکتریکی از هر سطح بسته دلخواه متناسب است با بار کل واقع در داخل این سطح. در کاربرد قانون گاوس در مورد ناحیه‌ای که بارهای آزاد نهفته در دی الکتریکها دارد، باید دقت کرد که تمام بارهایی که در داخل سطح گاوس قرار دارند منظور شوند، اعم از بار قطبی و بار نهفته در دی الکتریکها.



شکل ۴.۴ رسم سطح گاوسی S در داخل محیط دی الکتریک.

در شکل ۴.۴ سطح خط چین S يك سطح فرضی بسته است که در داخل محیط دی الکتریک قرار دارد. مقداری بار (Q) در حجم محدود شده به S قرار داده ایم و فرض می‌کنیم که این بارها بر روی سطوح سه رسانا به مقادیر q_1 ، q_2 ، و q_3 توزیع شده‌اند. بنا بر قانون گاوس داریم

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_p) \quad (۲۴.۴)$$

که در آن Q مقدار کل بار نهفته در دی الکتریک است، یعنی

$$Q = q_1 + q_2 + q_3$$

و Q_p بار قطبی است

$$Q_p = \int_{S_1 + S_2 + S_3} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dv \quad (الف ۲۵.۴)$$

در اینجا V حجم دی الکتریک محاط در S است. در S هیچ مرز دی الکتریکی وجود ندارد، بنابراین انتگرال سطحی در معادله (الف ۲۵.۴) شامل سطح S نخواهد شد. چنانچه انتگرال حجمی در معادله (الف ۲۵.۴) با استفاده از قضیه واکرای به يك انتگرال سطحی تبدیل کنیم، باید مواظب باشیم که سهم تمام سطوحی که حجم V را در

بر گرفته‌اند، یعنی سطوح S_1, S_2, S_3 و S_4 در نظر بگیریم. واضح است که سه سطح آخر، جمله اول معادله (۲۵.۴) را حذف می‌کنند، به گونه‌ای که

$$Q_P = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da \quad (25.4 \text{ ب})$$

از ترکیب این نتیجه با معادله (۲۴.۴) نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} da = Q \quad (26.4)$$

معادله (۲۶.۴) بیان می‌کند که شار بردار $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ از یک سطح بسته برابر است با بار خالص نهفته در حجمی که توسط این سطح محصور شده است. این بردار آن قدر مهم است که نام و نماد خاصی برای آن انتخاب شده است. بنا بر این، مایک بردار میدان ماکروسکوپی جدید $\mathbf{D}$ ، به نام جابه‌جایی الکتریکی تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (27.4)$$

که یکای آن همان یکای $\mathbf{P}$ یعنی یکای بار در واحد سطح است.^۱ معادله (۲۶.۴) بر حسب $\mathbf{D}$ چنین می‌شود

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q \quad (28.4)$$

و این نتیجه را گاهی قانون گاوس برای بردار جابه‌جایی الکتریکی، یا به طور ساده قانون گاوس می‌نامند. معادله (۲۸.۴) را می‌توان برای ناحیه‌ای از فضا که با هر سطح بسته S محصور شده باشد به کار برد؛ هر گاه آن را برای ناحیه کوچکی که در آن بارهای محصور با چگالی ρ توزیع شده‌اند به کار ببریم، آنگاه قانون گاوس به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \rho \Delta V$$

از تقسیم این معادله بر ΔV و محاسبه حد آن نتیجه می‌گیریم

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (29.4)$$

۱. در دستگاه یکاهای گاوسی، $\mathbf{D}$ به صورت $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ تعریف می‌شود و $\mathbf{E}$ ، $\mathbf{P}$ و $\mathbf{D}$ همگی یکای یکسانی دارند که عبارت است از یکای بار در واحد سطح و در خلا $\mathbf{D} = \mathbf{E}$.

این نتیجه را گاهی صورت دیفرانسیلی قانون گاوس می‌نامند.

مزیت بیان صورتهای انتگرالی و دیفرانسیلی قانون گاوس، یعنی معادلات (۲۸.۴) و (۲۹.۴)، بر حسب بردار $\mathbf{D}$ در این است که فقط بار Q یا چگالی بار ρ که در محیط دی‌الکتریک قرار داده‌ایم، صریحاً در معادلات ظاهر می‌شوند. این بار همان چیزی است که ما معمولاً آن را از این پس به‌طور ساده بار (یا چگالی بار) خواهیم نامید. هرگاه لازم شود که میان این بار و بار قطبشی محیط Q_p یا بار کل $Q + Q_p$ تمایز قائل شویم، بار Q را بار خارجی خواهیم نامید. مقصود ما از «خارجی» این نیست که این بار الزاماً خارج از مرز فیزیکی جسم قرار دارد، منظور ما این است که این بار، اضافه بر بارهایی است که ترکیب اتمی جسم خنثی را تشکیل می‌دهند.^۱ از آنجا که در بسیاری از مسائل بارهای خارجی معلوم‌اند، خوب است میدان الکتروستاتیکی کلی در هر نقطه در داخل محیط دی‌الکتریک بر حسب مجموع دو قسمت زیر بیان شود

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}(x, y, z) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}(x, y, z) \quad (30.4)$$

که جمله اول، $\mathbf{D}$ ($1/\epsilon_0$)، از طریق واگرایی‌اش به چگالی بار خارجی مربوط می‌شود و جمله دوم، یعنی $\mathbf{P}$ ($-1/\epsilon_0$) متناسب است با قطبش محیط. در خلا^۲ میدان الکتریکی کلاً به‌وسیله جمله اول (۳۰.۴) داده می‌شود.

۵.۴ پذیرفتاری الکتریکی و ثابت دی‌الکتریک

در مقدمه این فصل گفتیم که قطبش هر محیط دی‌الکتریک در اثر میدان الکتریکی موجود در محیط ایجاد می‌شود. درجه قطبش نه تنها به میدان الکتریکی، بلکه به خواص مولکولهای سازنده جسم دی‌الکتریک نیز بستگی دارد. از لحاظ ما کروسکوپی، رفتار جسم بایک رابطه تجربی به نام معادله ساختمندی، یعنی $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ ، که در آن $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی

۱. بار خارجی را غالباً بار «آزاد» می‌نامند، و بار قطبشی را گاهی مترادف با بار مقید به‌کار می‌برند. در الکتروستاتیک این ابهام در دسر زیادی به وجود نمی‌آورد، زیرا بار خارجی بر روی یک رسانا آزاد است (یعنی، آزاد است که به اطراف حرکت کند) و بار قطبشی در دی‌الکتریک مقید است. اما، در دی‌الکتریک بار خارجی آزاد نیست، اگر آزاد بود فوراً به سمت سطح می‌رفت و به خارج نشت می‌کرد. همچنین، بیشتر محیطهای رسانا علاوه بر بارهای آزادی که رفتار الکتروستاتیکی شی^۳ رسانا را معین می‌کنند، بارهای مقیدی دارند که در شرایط دیگر به‌قطبیدگی کمک می‌کنند (فصل ۷). در میدانهای وابسته به زمان (فصل ۱۹)، بسیار مهم است که موضوع تمایز میان بارهای خارجی و قطبشی با موضوع تمایز میان بارهای آزاد و مقید اشتباه نشود. لذا ما منحصرأ در این معنا از اصطلاح بار خارجی استفاده خواهیم کرد.

ماکروسکوپی است کاملاً مشخص می‌شود. این رابطه یک رابطه نقطه‌ای است، و اگر E در جسم از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر کند P هم به تبعیت از آن تغییر می‌کند. برای بیشتر مواد وقتی E صفر شود P صفر خواهد شد. چون این رفتار معمولی مواد است ما بحث خود را در اینجا به موادی که از این نوع اند محدود می‌کنیم. (دربارۀ دی الکتریکهایی که قطبش دائمی دارند در بخش ۴.۵ به اختصار بحث خواهد شد.) به علاوه اگر ماده همسانگرد باشد، قطبش باید همان جهتی را داشته باشد که میدان الکتریکی مولد آن دارد. این نتایج را می‌توان در معادله ساختمندی زیر

$$P = \chi(E)E \quad (31.4)$$

که در آن کمیت نرده‌ای $\chi(E)$ پذیرفتاری الکتریکی نام دارد خلاصه کرد. بسیاری از مواد از لحاظ الکتریکی همسانگردند؛ این دسته شامل شاره‌ها و اجسام جامد چند بلوری و بی‌شکل، و برخی بلورهای شونده. بررسی خواص الکتریکی اجسام ناهمسانگرد خارج از سطح این کتاب است. از ترکیب روابط (۳۱.۴) و (۲۷.۴) رابطه‌ای برای D در یک محیط همسانگرد پیدا می‌کنیم

$$D = \epsilon(E)E \quad (32.4)$$

$$\epsilon(E) = \epsilon_0 + \chi(E) \quad (33.4)$$

که در آن کمیت $\epsilon(E)$ گذردهی جسم نامیده می‌شود. بدیهی است که یگاهای ϵ ، ϵ_0 ، و χ همه یکسان‌اند.

با اینکه دقت کردیم که χ و ϵ را به صورت $\chi(E)$ و $\epsilon(E)$ بنویسیم، با وجود این تجربه نشان داده است که، به استثنای مواردی که میدان بسیار قوی است، غالباً χ و ϵ به میدان الکتریکی بستگی ندارند. به عبارت دیگر χ و ϵ ثابتهای مشخصه جسم‌اند. این نوع اجسام دی الکتریکهای خطی نام دارند، و از روابط زیر تبعیت می‌کنند

$$P = \chi E \quad (\text{الف } 31.4)$$

$$D = \epsilon E \quad (\text{الف } 32.4)$$

بنابراین رفتار الکتریکی هر ماده یا با گذردهی ϵ و یا با پذیرفتاری χ به طور کامل مشخص می‌شود. لیکن مناسبتر آن است که کمیت بی بعد K را که با رابطه زیر تعریف می‌شود به کار ببریم

$$\epsilon = K \epsilon_0 \quad (34.4)$$

جدول ۱۰۴ خواص اجسام دی الکتریک^۱ (ثابت دی الکتریک K و استقامت دی الکتریک $E_{\max}$)

جسم	K	$E_{\max}$ بر حسب ولت بر متر
اکسید آلومینیوم	۴٫۵	۶×۱۰^۶
شیشه *	۵ — ۱۰	۹×۱۰^۶
نایلون	۳٫۵	۱۹×۱۰^۶
پلی اتیلن	۲٫۳	۱۸×۱۰^۶
کوارتز (SiO_2)	۴٫۳	
سدیوم کلرید	۶٫۱	
گوگرد	۴٫۰	
چوب *	۲٫۵ — ۸٫۰	
الکل اتیلیک (۰°C)	۲٫۸۴	
بنزن (۰°C)	۲٫۳	
آب مقطر (۰°C)	۸۷٫۸	
آب مقطر (۲۰°C)	۸۰٫۱	
هوا (۱ جو)	۱٫۰۰۰۵۹	۳×۱۰^۶
هوا (۱۰۰ جو)	۱٫۰۵۴۸	
گاز کربنیک (۱ جو)	۱٫۰۰۰۹۸۵	

۱. داده ها از کتاب زیر گرفته شده اند

Handbook of Chemistry and Physics, 58th edition, CRC Press, Inc., Cleveland, Ohio.

* برای اجسامی نظیر شیشه و چوب ترکیب شیمیایی متغیر است؛ بنابراین برای ثابتهای دی الکتریک گستره ای وجود دارد. از این مطلب نباید نتیجه گرفت که دی الکتریک غیر خطی است.

K را ضریب دی الكترك با ثابت دی الكترك می نامند. از رابطه (۳۳.۴) دیده می شود که

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad (35.4)$$

نابتهای دی الكترك چند جسم متداول در جدول ۱۰۴ داده شده اند. مسائل این کتاب بجز در چند مورد که برای آنها بردار قطبش P مشخص شده است، به دی الكتریکهای خطی محدود می شوند.

اگر میدان الکتریکی در يك دی الكترك را خیلی قوی کنیم، این میدان الکترونها را به طور کامل از مولکولها بیرون می کشد، و جسم به رسانا تبدیل می شود. حداکثر میدان الکتریکی که يك دی الكترك می تواند تحمل کند بی آنکه درهم بشکند، استقامت دی الكترك نامیده می شود. استقامت دی الكترك، E_{max} ، برای تعدادی از مواد در جدول ۱۰۴ آمده است.

۶.۴ بار نقطه‌ای در يك شاره دی الكترك

یکی از ساده ترین مسائل مربوط به دی الكترك که می توان مورد بررسی قرارداد، مسئله بار نقطه‌ای q است در يك محیط دی الكترك نامتناهی همسانگرد همگن. فرض می کنیم که محیط دی الكترك خطی است و با ثابت دی الكترك K مشخص می شود. با اینکه این مسئله خیلی ساده است، اما به هر حال آموزنده خواهد بود.

اگر بار نقطه‌ای q در خلا قرارداد داشت، میدان الکتریکی يك میدان شعاعی خالص بود. اما چون E ، D ، و P در هر نقطه با هم موازی اند، ماهیت شعاعی بودن میدان بر اثر وجود محیط تغییر نمی کند. به علاوه بر اثر تقارن موجود در مسئله E ، D ، و P فقط می توانند به فاصله از بار نقطه‌ای بستگی داشته باشند نه به مختصات زاویه‌ای. اکنون قانون گاوس، معادله (۲۸.۴)، را برای يك سطح کروی به شعاع r که q در مرکز آن قرار دارد به کار می بریم. برای سهولت فرض می کنیم که q در مبدأ مختصات باشد. در این صورت

$$\oint \pi r^2 D = q$$

و

$$D = \frac{q}{\pi r^2}$$

یا

$$D = \frac{q}{\pi r^2} \mathbf{r} \quad (36.4)$$

اکنون میدان الکتریکی و قطبش را به راحتی می توانیم به دست آوریم

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi K \epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (37.4)$$

$$\mathbf{P} = \frac{(K-1)q}{4\pi K r^3} \mathbf{r} \quad (38.4)$$

بنابراین، میدان الکتریکی در مقایسه با حالتی که محیط دی الکتریکی وجود ندارد به نسبت ضریب K کوچکتر می شود.

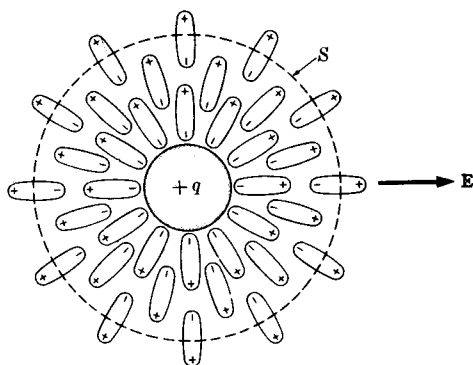
اکنون آموزنده است که این مسئله را با تفصیل بیشتری بررسی کنیم تا بینیم چرا وجود دی الکتریک میدان الکتریکی را تضعیف می کند. منشأ میدان الکتریکی در کلیه بارهاست، بارهای خارجی و بارهای قطبشی. بار خارجی همان بار نقطه ای q است. اما بار قطبشی از دو قسمت تشکیل می شود، یک قسمت مربوط است به چگالی حجمی $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ و قسمت دیگر مربوط است به چگالی سطحی $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ در روی سطح دی الکتریک که با بار نقطه ای در تماس است. با به کار بردن رابطه (38.4)، می بینیم که به ازای $r \neq 0$ ، $\nabla \cdot \mathbf{P}$ صفر می شود و در نتیجه در این حالت هیچ چگالی حجمی بار قطبشی وجود ندارد. بار نقطه ای q از نظر ماکروسکوپی نقطه ای است. فرض کنید که در مقیاس مولکولی این نقطه بزرگ است و می توانیم برای آن یک شعاع مانند b در نظر بگیریم که سرانجام آن را به سمت صفر میل خواهیم داد. در این صورت بار قطبشی سطحی کل از رابطه زیر به دست می آید

$$Q_p = \lim_{b \rightarrow 0} 4\pi b^2 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})_{r=b} = -\frac{(K-1)q}{K} \quad (39.4)$$

بار کل که عبارت است از

$$Q_p + q = \frac{1}{K} q \quad (40.4)$$

از لحاظ ماکروسکوپی به مانند یک بار نقطه ای ظاهر می شود، و اکنون معلوم می شود که چرا میدان الکتریکی، در مقایسه با حالتی که محیط دی الکتریک وجود ندارد، به نسبت K کوچکتر می شود. نمودار طرح واره ای از بار نقطه ای q در محیط دی الکتریکی در شکل ۵.۴ نشان داده شده است.



شکل ۵.۴ نمودار طرح‌واره‌ای که طرز قرار گرفتن مولکولهای قطبیده را در محیط دی‌الکتریکی که بار نقطه‌ای q را در میان گرفته است نشان می‌دهد.

۷.۴ شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان

قبل از آنکه بتوانیم مسائل پیچیده‌تر را حل کنیم، باید بدانیم که بردارهای میدان $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ در عبور از فصل مشترك دو محیط چگونه تغییر می‌کنند. دو محیط ممکن است دو دی‌الکتریک با ویژگیهای متفاوت، یا یک دی‌الکتریک و یک رسانا باشند. خلاصه‌ای می‌توان دی‌الکتریکی با گذردهی ϵ در نظر گرفت.

دو محیط ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که به نحوی که در شکل ۷.۴ نشان داده شده است با هم در تماس‌اند. فرض می‌کنیم یک چگالی سطحی بار خارجی، σ ، وجود دارد که می‌تواند از نقطه‌ای به نقطه دیگر بر روی فصل مشترك دو محیط تغییر کند. سطح قرص مانند کوچکی مانند S را در نظر می‌گیریم که فصل مشترك را قطع کند و مساحتی برابر ΔS از آن را دربر گیرد. ارتفاع این قرص در مقایسه با شعاع قاعده‌های آن، آن قدر کوچک فرض می‌شود که می‌توان از آن صرف نظر کرد. مقدار بار محصور در این سطح برابر است با

$$\text{حجم} \times (\rho_1 + \rho_2) + \sigma \Delta S$$

اما حجم قرص بسیار کوچک است و می‌توان از جمله آخر صرف نظر کرد. به کار بردن قانون گاوس برای سطح S نتیجه می‌دهد

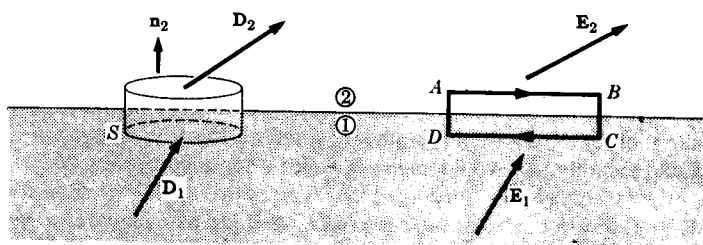
$$\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S = \sigma \Delta S$$

یا

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma \quad (۴۱.۴ \text{ الف})$$

چون $\mathbf{n}_2$ می‌تواند معرف بردار عمود بر فصل مشترك باشد داریم

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (۴۱.۴ \text{ ب})$$



شکل ۶.۴ شرایط مرزی حاکم بر بردارهای میدان در فصل مشترک دو محیط را می‌توان با به کار بردن قانون گاوس برای سطح S ، و انتگرال‌گیری از $E \cdot d\mathbf{l}$ بر روی مسیر $ABCD$ به دست آورد.

بنابراین، ناپیوستگی مؤلفه عمود D با چگالی سطحی بار خسارگی در روی فصل مشترک مشخص می‌شود. به عبارت دیگر، اگر باری بر روی فصل مشترک وجود نداشته باشد، مؤلفه عمود D پیوسته است.

چون میدان الکتروستاتیکی E را می‌توان از منحنی شیب پتانسیل به دست آورد، انتگرال خطی $E \cdot d\mathbf{l}$ بر روی هر مسیر بسته‌ای صفر است. این نتیجه را در مسیر مستطیلی $ABCD$ در شکل ۶.۴ به کار می‌بریم. در این مسیر، طولهای AB و CD مساوی Δl و قطعه‌های BC و AD بسیار کوچک و قابل صرف نظر فرض می‌شوند؛ بنابراین

$$E_2 \cdot \Delta l + E_1 \cdot (-\Delta l) = 0$$

یا

$$(E_2 - E_1) \cdot \Delta l = 0 \quad (۴۲.۴ \text{ الف})$$

پس نتیجه مطلوب عبارت است از

$$E_2 = E_1 \quad (۴۲.۴ \text{ ب})$$

یعنی، مؤلفه مماسی میدان الکتریکی در عبور از فصل مشترک پیوسته است.

نتایج بالا برای دو محیط دلخواه به دست آمده‌اند، لیکن جالب است ببینیم که این معادلات برای موردی که یکی از دو محیط رسانا باشد به چه صورت درمی‌آیند چون هیچ نیروی مولکولی بازگرداننده‌ای به بارهای آزاد جسم رسانا وارد نمی‌شود، به نظر می‌رسد که برای رسانا در معادله (۳۱.۴) داریم $\chi = \infty$ ، و نیز طبق معادله (۳۳.۴)، $\epsilon = \infty$. اگر محیط ۱ را رسانا فرض کنیم، آنگاه نتیجه می‌گیریم که مقادیر (متناهی) P_1 و D_1 هر چه باشند، $E_1 = 0$ است، همچنان که قبلاً در فصل ۲ نیز با استدلال متفاوتی به همین نتیجه

رسیدیم. چون E_n صفر است، معادله (۴۲.۴) ب) به صورت زیر در می آید

$$E_{\tau_i} = 0 \quad (42.4)$$

ولی جابه جایی D_n با این روش تعیین نمی شود؛ اگر ما فعلاً آن را به طور دلخواه صفر بگیریم، معادله (۴۱.۴) ب) به معادله زیر تبدیل می شود

$$D_{\tau_n} = \sigma \quad (44.4)$$

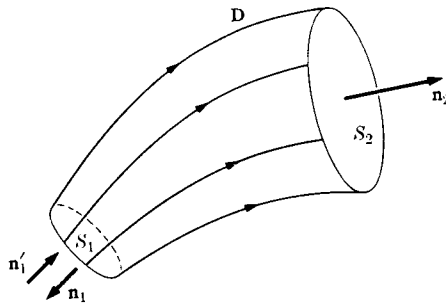
که در آن σ چگالی بار سطحی کل بر سطح رساناست ولی شامل بار سطحی قطبشی بر سطح دی الکتریک نمی شود. روش دیگر آن است که مسئله دی الکتریک را حل کنیم و آنگاه K_n را به سمت بینهایت میل دهیم (رک مسئله های ۱۲.۴ و ۱۴.۴). در این صورت σ معرف بار قطبشی رسانا (به علاوه بار خارجی واقع بر سطح رسانا) خواهد بود. از لحاظ فیزیکی نتیجه این دو روش یکسان خواهد بود. توجه کنید که بنسب معادله (۴۳.۴)، میدان در داخل دی الکتریک همواره بر سطح رسانا عمود است.

بنابراین دلایل فیزیکی محض واضح است که پتانسیل φ در عبور از فصل مشترک دو محیط باید پیوسته باشد. این مطلب ناشی از آن است که اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ میان دو نقطه خیلی نزدیک به هم Δl است، که در آن Δl فاصله دو نقطه است، و طبق آنچه در بالا گفته شد دلیلی وجود ندارد که انتظار داشته باشیم E در فصل مشترک بینهایت شود. در واقع پیوستگی پتانسیل یک شرط مرزی است، ولی این شرط از شرایطی که قبلاً به دست آوردیم مستقل نیست. این شرط در بیشتر موارد با (۴۲.۴) ب) معادل است.

از بحث فوق و از بحث بخشهای گذشته می توان نتیجه گرفت که جابه جایی الکتریکی D با بار خارجی رابطه نزدیک دارد. حال می خواهیم خاصیت مهمی از D را ثابت کنیم، یعنی این خاصیت را که شار D در ناحیه هایی از فضا که در آن بار خسارجی وجود ندارد پیوسته است. برای این کار مجدداً از قانون گاوس کمک می گیریم و خطوط جابه جایی را در ناحیه ای از فضا رسم می کنیم. خطوط جابه جایی خطوطی موهومی اند و به طریقی رسم می شوند که جهت هر یک از آنها در هر نقطه با جهت D در آن نقطه یکی باشد. حال یک لوله جابه جایی را در نظر می گیریم، یعنی حجمی را که از اطراف با خطوط D محصور شده ولی به وسیله این خطوط قطع نشده است (شکل ۷.۴). لوله از دو انتها به سطوح S_1 و S_2 ختم می شود. با به کار بردن قانون گاوس خواهیم داشت

$$\int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da - \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' da = Q \quad (45.4)$$

هر گاه در ناحیه محصور شده بار خارجی وجود نداشته باشد، آنگاه $Q = 0$ است، و همان شاری که از S_1 وارد لوله می شود از S_2 خارج می شود. وقتی بار خسارجی وجود



شکل ۷.۴ لوله شار جا به جایی.

داشته باشد، این بار ناپیوستگی در شار جا به جایی را تعیین می کند؛ از این رو خطوط جا به جایی به بارهای خارجی منتهی می شوند. از طرف دیگر، خطوط نیرو یا به بارهای خارجی ختم می شوند و یا به بارهای قطبی.

۸.۴ مسائل مربوط به مقادیر مرزی در دی الکتریکها

معادله اساسی که در این فصل به دست آمده است عبارت است از

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (۴۶.۴)$$

که در آن ρ چگالی بار خارجی است. اگر دی الکتریکهایی که با آنها سروکار داریم، خطی، همسانگرد، و همگن باشند آنگاه $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ، که در آن ϵ ثابت مشخصه جسم است، و می توان نوشت

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad (۴۷.۴)$$

اما میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ را می توان از یک پتانسیل نرده ای φ به دست آورد، یعنی

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

به طوری که

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (۴۸.۴)$$

از این رو پتانسیل در دی الکتریک در معادله پواسون صدق می کند؛ تنها تفاوت میان معادله (۴۸.۴) و رابطه نظیر آن برای پتانسیل در خلأ آن است که ϵ جانشین ϵ_0 شده است (و ρ چگالی بار خارجی است نه چگالی بار کل).
H--M

در بیشتر موارد جالب توجه، دی الکتریک شامل باری که در حجم آن توزیع شده باشد نیست. یعنی در داخل جسم دی الکتریک $\rho = 0$. بارها بر سطوح رساناها قرار دارند یا به صورت بارهای نقطه‌ای در داخل دی الکتریک نهفته شده‌اند. تحت این شرایط، در سراسر جسم دی الکتریک، پتانسیل در معادله لاپلاس صدق می‌کند

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (49.4)$$

در بعضی مسائل ممکن است یک چگالی سطحی بار، σ ، بر روی سطح جسم دی الکتریک یا بر روی فصل مشترک دو جسم دی الکتریک وجود داشته باشد، لیکن این مطلب تغییری در وضع موجود ایجاد نمی‌کند، و معادله (49.4) باز هم، تا هنگامی که $\rho = 0$ باشد، صادق است.

بنابراین مسئله الکتروستاتیکی برای محیطهای دی الکتریک خطی، همانگونه که تبدیل می‌شود به مسئله پیدا کردن جوابهای معادله لاپلاس در هر یک از این محیطها و الحاق جوابهای مربوط به محیطهای مختلف به وسیله شرایط مرزی بخش گذشته. مسائل متعددی وجود دارند که می‌توان آنها را به این طریق حل کرد؛ یک نمونه از این مسائل را در اینجا حل می‌کنیم و نمونه‌های دیگر را می‌توان در مسائل انتهای فصل یافت.

۹.۴ کره دی الکتریک در یک میدان الکتریکی یکنواخت

می‌خواهیم نحوه تغییر شکل خطوط نیرو را هنگامی که یک کره دی الکتریک به شعاع a در ناحیه‌ای از فضا قرار می‌دهیم که در آن میدان الکتریکی دایره‌ای یکنواخت E_0 وجود دارد، تعیین کنیم. فرض کنید دی الکتریک خطی، همسانگرد، و با ثابت دی الکتریک K مشخص می‌شود، و به علاوه بار هم ندارد. مبدأ مختصات را می‌توانیم مرکز کره فرض کنیم و جهت E_0 را به عنوان جهت قطبی (محور z) در نظر بگیریم؛ در این صورت پتانسیل را می‌توان به صورت مجموعی از هماهنگهای منطقه‌ای نوشت. درست نظیر آنچه در بخش ۵.۳ دیدیم، با انتخاب دو هماهنگ اول تمام شرایط مرزی می‌توانند برآورده شوند. برای ناحیهٔ خلا (ناحیهٔ ۱) در خارج کره می‌نویسیم

$$\varphi_1(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad (50.4)$$

و برای ناحیه دی الکتریک (ناحیهٔ ۲) می‌نویسیم

$$\varphi_2(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad (51.4)$$

ضرایب A_1, A_2, C_1, C_2 مجهول‌اند و باید به کمک شرایط مرزی محاسبه شوند. هماهنگ r^{-2} ضروری نیست زیرا وجود آن مستلزم وجود بار خالص بر روی کره است. می‌توانیم

به معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴) يك عدد ثابت اضافه كنيم ولى چون خواهيم ديد كه عدد ثابت يكسانی در هر دو معادله لازم داريم، می توانيم بی آنكه عمومیت مطلب از دست برود، آن ثابت را مساوی صفر بگیريم.

در فواصل دور از کره، میدان الکتریکی حالت یکنواختی خود را حفظ می کند و $\varphi_1 \rightarrow -E_0 r \cos \theta$. بنابراین $A_1 = -E_0$. به علاوه جز در موردی كه $C_1 = 0$ ، پتانسیل و میدان الکتریکی مربوط به آن در مرکز کره بینهایت می شوند، و این بدان معنی است كه در مرکز باید يك دوقطبی نقطه ای وجود داشته باشد، یعنی يك دوقطبی كه گشتاور آن با ΔV متناسب نباشد. ولی مسلماً در این مسئله دوقطبی نقطه ای موجود نیست؛ همان طور كه در بخش ۳.۴ گفته شد، پتانسیل و میدان ماکروسکوپی در يك دی الکتریک بدون بار نقطه ای، بینهایت نمی شوند. بنابراین $C_1 = 0$ ، و ضرایب باقی مانده A_1 و C_1 از شرایط مرزی بخش ۷.۴ به دست می آیند.

لازمه پیوستگی پتانسیل در فصل مشترك میان دی الکتریک و خلا این است كه در $r = a$ داشته باشیم $\varphi_1 = \varphi_2$ ، یا

$$-E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a \quad (52.4)$$

چون مؤلفه قائم **D** در فصل مشترك $D_r = -\varepsilon(\partial\varphi/\partial r)$ است، پیوستگی D_r (اینكه هیچ گونه باری در سطح دی الکتریک وجود ندارد) مستلزم این است كه در $r = a$ ، $D_{1r} = D_{2r}$ باشد. یا

$$E_0 + 2C_1 a^{-3} = -KA_2 \quad (53.4)$$

پیوستگی E_r در $r = a$ با معادله (۵۲.۴) معادل است. با ترکیب معادلات (۵۲.۴) و (۵۳.۴) نتیجه می گیریم كه

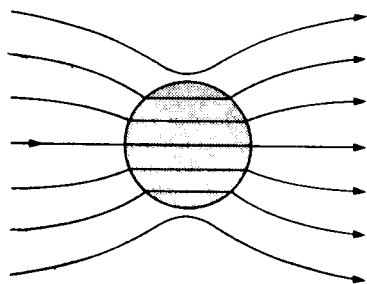
$$A_2 = -\frac{2E_0}{K+2} \quad (54.4)$$

و

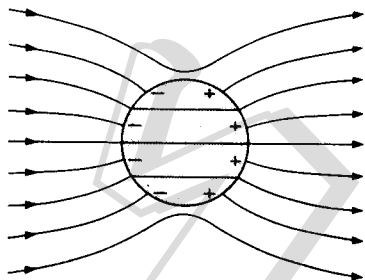
$$C_1 = \frac{(K-1)a^3 E_0}{K+2} \quad (55.4)$$

پس مسئله حل شده است. پتانسیل از معادلات (۵۰.۴) یا (۵۱.۴) به دست می آید و ثابتهای (r, θ, ϕ) نیز همگی معلوم اند. مؤلفه های **E** و **D** را در هر نقطه (r, θ, ϕ) با مشتق گیری می توان به دست آورد. از معادله (۵۴.۴)، و با توجه به اینکه $C_1 = 0$ ، چنین نتیجه می شود كه میدان الکتریکی در داخل کره با E_0 هم جهت است و بارابطه زیر مشخص می شود

$$E_2 = \frac{2}{K+2} E_0 \quad (56.4)$$



(الف)



(ب)

شکل ۸.۴ میدان الکتریکی یکنواخت در اثر حضور يك کره دی الکتریک تغییر شکل یافته است؛ (الف) خطوط جابه جایی الکتریکی. (ب) خطوط میدان الکتریکی.

خطوط جابه جایی و خطوط نیرو در شکل (۸.۴) نشان داده شده اند.

* ۱۰.۴ نیروی وارد بر يك بار نقطه‌ای واقع در يك دی الکتریک

اکنون در وضعی هستیم که می توانیم نیروی وارد بر يك رسانای باردار كوچك كروی را که در داخل يك دی الکتریک خطی و همسانگرد نهاده شده است حساب کنیم. در حد، وقتی که جسم رسانا از لحاظ ماکروسکوپی بی اندازه كوچك است نتیجه این محاسبات، نیروی وارد بر يك بار نقطه‌ای را به دست می دهد.

ابتدا میدان الکتریکی و چگالی بار سطحی در يك نقطه معین از سطح رسانا را باروش شرایط مرزی که در بخش پیش گفته شد، به دست می آوریم، سپس نیروی $\mathbf{F}$ را با انتگرال گیری از میدان بر روی سطح رسانا محاسبه می کنیم

$$\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{E}' \sigma da \quad (۵۷.۴)$$

در اینجا $\mathbf{E}'$ میدان الکتریکی در روی سطح da است که میدان ناشی از خود عنصر سطحی بار از آن کم شده است. به عبارت دیگر

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}_s \quad (۵۸.۴)$$

که در آن $\mathbf{E}_s$ میدان الکتریکی ناشی از خود عنصر سطحی بار، یعنی σda است. این نکته که میدان $\mathbf{E}'$ شامل $\mathbf{E}_s$ نباشد مهم است، زیرا کمیت $\mathbf{E}_s \sigma da$ نماینده برهم کنش عنصر

سطحی بار σda ، با میدان خودش است. این خود - برهم کنش طبعاً هیچ نیروی خاصی بر عنصر وارد نمی‌کند، اما تنش سطحی تولید می‌کند

$$\mathcal{F}_s = \sigma E_s \quad (۵۹.۴)$$

این تنش ناشی از دفع متقابل الکترونها (بایوندهای مثبت اضافی) در لایه سطحی است. این تنش بانبروهای قوی چسبندگی در ماده سازنده عنصر خنثی می‌شود. باید متذکر شد که در فصلهای ۲ و ۳ وقتی نیروهای وارد بر اجسام باردار را محاسبه می‌کردیم، به طور ضمنی خود - میدان E_s را کم می‌کردیم؛ از این رو، هنگام محاسبه نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای، میدان ناشی از بار نقطه‌ای را کنار می‌گذاریم بحث مفصلتر نیروهای وارد بر اجسام باردار را به بخش ۸.۶ واگذار می‌کنیم.

ممکن است چنین به نظر رسد که خود - میدان عنصر سطحی باردار σda به دلیل بی‌نهایت کوچک بودن این عنصر قابل چشمپوشی است. اما این امر واقعیت ندارد. مطمئناً عنصر از لحاظ ماکروسکوپی کوچک است، لیکن باهمه این کوچکی ابعادش به حد صفر نمی‌رسند. برای نقطه‌ای که مستقیماً در روی عنصر سطح است این عنصر مثل یک صفحه نامتناهی است، یعنی عنصر سطح یک زاویه 2π را در بر می‌گیرد، بنابراین

$$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} n \quad (۶۰.۴)$$

در اینجا n بردار عمود بر عنصر سطح و ϵ گذردهی جسم دی‌الکتریک است که با این سطح در تماس است. بنابراین تنش $\mathcal{F}_s$ با σ^2 متناسب است و همیشه، بدون توجه به علامت σ ، به صورت یک کشش عمل می‌کند.

هدف ما در اینجا محاسبه نیروی وارد بر یک رساناست. با استفاده از شرایط مرزی بخش ۷.۴، میدان الکتریکی کل درست در خارج از جسم رسانا با معادله زیر داده می‌شود

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} n \quad (۶۱.۴)$$

از ترکیب (۵۸.۴)، (۶۰.۴)، و (۶۱.۴) نتیجه می‌گیریم که

$$E' = \frac{1}{2} E$$

و نیروی وارد بر رسانا عبارت است از

$$\mathbf{F} = \oint_s \mathbf{E} \sigma da$$

[۵۷.۴ الف]

اکنون يك رسانای كروی كوچك را در نظر می‌گیریم كه در درون دی‌الكتریک با ابعاد نامتناهی نهاده شده است. بار كل بر روی این رسانا Q ، وشاع آن a فرض می‌شود. چون در نهایت می‌خواهیم نتیجه را در حدی محاسبه كنیم كه در آن a بسیار كوچك می‌شود، و چون تغییرات میدان الكتریکی (اگر وجود داشته باشند) در يك مقیاس ماکروسكوپی صورت می‌گیرند، كافی است حالتی را بررسی كنیم كه در آن میدان الكتریکی در حوالی رسانا، در بدو امر، یكنواخت است. این میدان یكنواخت را با E_0 نشان می‌دهیم. مسئله شبیه است به مسئله مقادیر مرزی كه در بخش ۵.۳ حل كردیم، با این تفاوت كه در اینجا كره رسانا در يك دی‌الكتریک با گذردهی ϵ نهاده (یا غوطه‌ور) شده است و به علاوه بار خالص آن Q است.

در مقایسه با بخش ۵.۳ عبارات زیر به راحتی تعیین می‌شوند:

برای پتانسیل

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 a^3}{r^2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad (62.4)$$

برای میدان الكتریکی

$$E_r = E_0 (1 + 2a^3/r^3) \cos \theta + Q/4\pi\epsilon r^2 \quad (63.4)$$

$$E_\theta = -E_0 (1 - a^3/r^3) \sin \theta$$

و برای چگالی سطحی بار بر روی سطح كره

$$\sigma(\theta) = \epsilon E_r|_{r=a} = 3\epsilon E_0 \cos \theta + Q/4\pi a^2 \quad (64.4)$$

اکنون می‌توان نیرو را از معادله (۵۷.۴ الف) به دست آورد. به علت تقارن، تنها مؤلفه غیر صفر نیرو در جهت $\theta = 0$ است، یعنی در جهت محور z

$$F_z = \frac{1}{\gamma} \int_0^\pi (E_r)_{r=a} \cos \theta \sigma(\theta) 4\pi a^2 \sin \theta d\theta$$

$$= E_0 Q \quad (65.4 \text{ الف})$$

یا

$$\mathbf{F} = QE_0 \quad (65.4 \text{ ب})$$

این نتیجه در حد، وقتی كه a بسیار كوچك شود، تغییر نمی‌كند. بنابراین، میدان الكتریکی در دی‌الكتریک، E_0 ، با تعریف بنیادی، یعنی نیروی وارد بر يك بار كوچك آزمون Q تقسیم

بر بزرگی بار Q ، سازگار است.

۱۱.۴ خلاصه مطالب

رفتار الکتروستاتیکی یک محیط دی الکتریک به کمک گشتاور دوقطبی در واحد حجم، یا قطبش آن کاملاً مشخص می شود

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dv}$$

این کمیت، چگالی بار قطبشی تولید می کند

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (\sigma_P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P})$$

که در اثر آنها پتانسیل زیر حاصل می شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{\rho_P(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \oint \frac{\sigma_P(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

میدان $\mathbf{E}$ ی کل، ناشی از بارهای خارجی و بار قطبشی در معادله زیر صدق می کند

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_P)$$

اکنون میدان برداری $\mathbf{D}$ را به صورت مناسب زیر تعریف می کنیم

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

به گونه ای که

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

که در آن تنها بارهای خارجی به عنوان چشمه در نظر گرفته می شوند. در معادله $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ تغییری حاصل نمی شود زیرا این معادله حاوی چگالی بار نیست، برای حل معادلات میدان، برای هر جسم بخصوصی باید یک معادله ساختمندی به صورت زیر معلوم باشد

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$$

@Quark_Book

در آن صورت چهار معادله آخر، با در نظر گرفتن شرایط مرزی زیر

$$D_{\gamma n} - D_{\gamma n} = \sigma$$

$$E_{\gamma t} - E_{\gamma t} = 0$$

برای تعیین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ در داخل و خارج دی الکتریکها کافی اند.

۱. شکل انتگرالی قانون گاوس به صورت زیر درمی آید

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = Q$$

که در آن Q فقط بار خارجی در داخل سطح S را شامل می شود. معادله تاوهنوزهم تعریف پتانسیلی را به صورت زیر به دست می دهد.

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

۲. اکثر اجسام دی الکتریک خطی اند و پذیرفتاری ثابتی دارند

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$$

وقتی این معادله ساختمندی با تعریف $\mathbf{D}$ ترکیب شود رابطه زیر به دست می آید

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

که در آن

$$\epsilon = \epsilon_0 + \chi$$

برای اکثر دی الکتریکهای معمولی، ثابت دی الکتریک، یعنی

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

مقداری بین ۱ و ۱۰۰ دارد، و برای تمام دی الکتریکها $K \geq 1$ ($\chi \geq 0$). در خلا، $K = 1$ ($\chi = 0$). رفتار الکتروستاتیکی رساناها را می توان با فرض اینکه K بینهایت است، به دست آورد.

۳. در یک محیط خطی

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho$$

و

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

روشهای ریاضی برای حل معادلات پواسون و لاپلاس شبیه به روشهای بیان شده در فصل ۳ است، به شرط آنکه شرایط مرزی مناسب در فصل مشترک دی الکتریک در نظر گرفته شوند. این شرایط عبارت اند از

$$K_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = K_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$$

و

$$\varphi_2 = \varphi_1$$

(که با شرط $E_{2t} = E_{1t}$ هم ارز است).

مسائل

۱.۴ يك میله دی الکتریک باریک که سطح مقطع آن A است روی محور x از $x=0$ تا $x=L$ قرار دارد. قطبش میله در امتداد طول آن با رابطه $P_x = ax^2 + b$ داده می شود. چگالی حجمی بار قطبشی و چگالی سطحی بار قطبشی در هر یک از دو سر میله را حساب کنید و هر یک نشان دهید که کل بار قطبشی در این حالت صفر است.

۲.۴ يك مكعب دی الکتریک به ضلع L به صورت شعاعی $\mathbf{P} = A\mathbf{r}$ قطبیده شده است، که در آن A يك ضریب ثابت، $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ و مبدأ مختصات در مرکز مكعب است. همه چگالیهای بار قطبشی را محاسبه کنید و هر یک نشان دهید که کل بار قطبشی صفر است.

۳.۴ میله دی الکتریک استوانه ای شکلی به طول L و شعاع R در امتداد طولش قطبیده شده است. اگر قطبش یکنواخت و بزرگی آن P باشد، میدان الکتریکی ناشی از این قطبش را در نقطه ای بر روی محور میله محاسبه کنید.

۴.۴ ثابت کنید که در یک جسم دی الکتریک به حجم V و سطح خارجی S رابطه زیر میان قطبش $\mathbf{P}$ و چگالیهای بار قطبشی ρ_p و σ_p برقرار است

$$\int_V \mathbf{P} dv = \int_V \rho_p \mathbf{r} dv + \int_S \sigma_p \mathbf{r} da$$

@Quark_Book

در اینجا $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ بردار مکان از مبدأ مختصات است. [دانهمایی: $\nabla \cdot (x\mathbf{P})$]

را طبق معادله (۱۰.۴) بسط دهید.

۵.۴ دو قطعه دی الکتریک نیم نامتناهی را تقریباً در وضع تماس قرار داده ایم به طوری که میان آنها شکاف باریکی با فاصله ثابت وجود دارد. قطبش P در سراسر قطعه‌ها مقداری است ثابت و با بردار عمود بر سطوحی که شکاف میان دو قطعه را در بر می گیرند زاویه γ می سازد. میدان الکتریکی را در شکاف میان دو قطعه محاسبه کنید.

۶.۴ یک رسانای استوانه‌ای طویل به شعاع a را که بار الکتریکی در واحد طول آن λ است در یک محیط دی الکتریک با گذردهی ϵ قرار می دهیم. میدان الکتریکی را در فاصله $r > a$ از محور استوانه محاسبه کنید.

۷.۴ دو محیط دی الکتریک با ثابتهای دی الکتریک K_1 و K_2 با فصل مشترکی از یکدیگر جدا شده اند. فصل مشترک آنها بار خارجی ندارد. رابطه‌ای میان زوایای θ_1 و θ_2 ، که زوایای میان یک خط اختیاری جابه جایی و خط عمود بر فصل مشترک اند را پیدا کنید: θ_1 در محیط ۱ و θ_2 در محیط ۲.

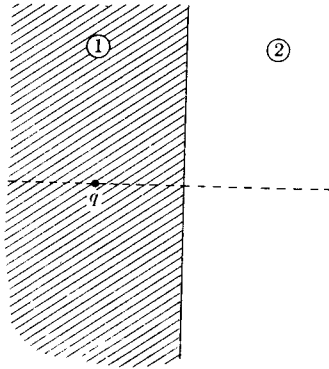
۸.۴ یک کابل هم محور با مقطع دایره‌ای یک دی الکتریک مرکب دارد. شعاع خارجی رسانای داخلی آن برابر a است، که با ورقه‌ای از یک جسم دی الکتریک با ثابت دی الکتریک K_1 و شعاع خارجی b احاطه شده است. روی این لایه ورقه‌ای از یک دی الکتریک دیگر با ثابت دی الکتریک K_2 و شعاع خارجی c قرار دارد. اگر اختلاف پتانسیل U میان دو رسانا برقرار شود، قطبش در هر نقطه از دو محیط دی الکتریک را محاسبه کنید.

۹.۴* دو محیط دی الکتریک با گذردهیهای ϵ_1 و ϵ_2 به وسیله فصل مشترک تختی از هم جدا شده اند. فصل مشترک بار خارجی ندارد. در محیطی که با ϵ_1 مشخص می شود، بار نقطه‌ای q را به فاصله d از فصل مشترک قرار می دهیم. برای سهولت صفحه yz را که از مبدأ مختصات می گذرد همان فصل مشترک می گیریم و q را در روی محور x در $x = -d$ قرار می دهیم. اگر

$$r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}, \quad r' = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}$$

باشد، در آن صورت به راحتی می توان نشان داد که عبارت $(1/4\pi\epsilon_1)[(q/r) + (q'/r')]$ برای تمام نقاط محیط ۱، به استثنای مکان q ، در معادله لاپلاس صدق می کند. به علاوه $q''/4\pi\epsilon_2 r$ در محیط ۲ در معادله لاپلاس صادق است. نشان دهید که پتانسیلهای بالا در تمام شرایط مرزی صدق می کنند و با این عمل q' و q'' را تعیین کنید (شکل ۹.۴).

۱۰.۴ یک دی الکتریک استوانه‌ای طویل به شعاع a و با ثابت دی الکتریک K را در یک میدان الکتریکی یکنواخت E_0 قرار می دهیم. محور استوانه عمود بر جهت E_0 قرار داده می شود. استوانه بار خارجی ندارد. میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج استوانه به دست آورید.



شکل ۹.۴

۱۱.۴ دو قطبی نقطه‌ای p در مرکز يك دی‌الکتریک جامد کروی به شعاع a و با ثابت دی‌الکتریک K قرار دارد. میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج کره پیدا کنید. (دانهایی: میدان در نقاط خارج میدانی دو قطبی است؛ در داخل، علاوه بر میدان دو قطبی يك جمله دیگر نیز لازم است.)

۱۲.۴ نشان دهید که در جواب به دست آمده در بخش ۹.۴، برای دی‌الکتریک کروی در میدانی که در آغاز یکنواخت است، اگر K به سمت بینهایت میل کند، نتیجه با آنچه در بخش ۵.۳ برای کره رسانا به دست آمد یکی است.

۱۳.۴ بره تختی از يك جسم با ثابت دی‌الکتریک K_1 از هر دو طرف توسط جسمی با ثابت دی‌الکتریک K_2 محصور شده است. میدان الکتریکی در محیط ۲، E_2 ، به صورت یکنواخت و عمود بر مرزها داده شده است. میدان E_1 ، قطبش P_1 ، و بار قطبی در محیط ۱ را پیدا کنید.

۱۴.۴ نشان دهید که در مسئله ۱۳.۴ اگر K_1 به سمت بینهایت میل کند، نتیجه از لحاظ فیزیکی با معادله (۴۴.۴) سازگار است.

۱۵.۴ دو صفحه رسانای موازی که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند. يك بره از جسم دی‌الکتریکی را که ثابت دی‌الکتریک آن K و ضخامت یکنواخت آن t است ($t < d$) میان این دو صفحه قرار می‌دهیم. بردارهای میدان E و D در دی‌الکتریک و همچنین در خلأ میان دی‌الکتریک و یکی از صفحات را پیدا کنید. از اثرهای لبه که از نامتناهی بودن صفحات ناشی می‌شود، چشم‌پوشید.

۱۶.۴ دو صفحه رسانای موازی که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه داشته شده‌اند. يك بره از جسم دی‌الکتریکی با ثابت دی‌الکتریک K و ضخامت d

را میان دو صفحه وارد می‌کنیم؛ این بره حجم میان صفحات را کاملاً پر نمی‌کند. مطلوب است محاسبه میدان الکتریکی: (الف) در دی الکتریک، (ب) در ناحیهٔ خلأ میان صفحات. چگالی بار σ را در آن قسمتی از صفحه پیدا کنید که (ج) با دی الکتریک، و (د) با خلأ در تماس است. (ه) σ_p را بر روی سطح برهٔ دی الکتریک پیدا کنید.

۱۷.۴ يك کرهٔ رسانا به شعاع R در يك محیط دی الکتریک مایع با گذردهی ϵ تا نیمه غوطه‌ور است. در ناحیهٔ بالای مایع گازی است با گذردهی ϵ_0 . بار کل بر روی کره Q است. يك میدان الکتریکی شعاعی متناسب با عکس مجذور فاصله به دست آورید که در تمام شرایط مرزی صدق کند. چگالی بارهای آزاد، مقید، و کل را برای تمام نقاط واقع بر سطح کره پیدا کنید. نشان دهید که این میدان الکتریکی، میدان واقعی است.

۱۸.۴ میدان الکتریکی یکنواخت E_0 را در محیطی با ثابت دی الکتریک K برقرار ساخته‌ایم. ثابت کنید که در حفره‌ای کروی در درون این محیط میدان عبارت است از

$$E = \frac{3KE_0}{2K+1}$$

۱۹.۴* قطبش دائم يك کرهٔ دی الکتریک به شعاع R برابر P است که از حیث مقدار و جهت یکنواخت است. کرهٔ قطبیده يك میدان الکتریکی تولید می‌کند. این میدان را در داخل و خارج کره پیدا کنید. در داخل کره، میدان الکتریکی را که در جهت مخالف قطبش است، میدان واقطنندگی می‌گویند. (داهنمایی: چون در تمام نقاط $\nabla \cdot P$ صفر است، پتانسیل الکتروستاتیکی در داخل و خارج کره در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. فرض نکنید که دی الکتریک بایک ثابت دی الکتریک مشخص می‌شود.)

۲۰.۴ در متن کتاب نشان داده شد که قطبش به صورت $P = \rho_0(\vec{\delta}^+ - \vec{\delta}^-)$ است. این رابطه را در مورد کرهٔ مسئله ۱۹.۴ که به طور یکنواخت قطبیده شده است به کار ببرید و میدان خارجی دوقطبی را مستقیماً پیدا کنید.

نظریه میکروسکوپی دی الکتریکها

در فصل پیش به جنبه‌های ماکروسکوپی قطبش دی الکتریکها پرداختیم، و نشان دادیم که چگونه در موارد متعدد می‌توان قطبش را با معرفی ثابت دی الکتریک به حساب آورد. از این راه توانستیم میدان الکتریکی را مستقیماً با بررسی توزیع بار خارجی محاسبه کنیم. در فصل ۴ چند بار به مولکول دی الکتریک اشاره شد، ولی مطالعه میکروسکوپی ماده به تفصیل صورت نگرفت، و تصویر کلیی که عرضه شد از دید ماکروسکوپی بود. اکنون می‌خواهیم ماهیت مولکولی دی الکتریک را بررسی کنیم و ببینیم میدان الکتریکی که مولکول را قاطبیده می‌کند چگونه به میدان الکتریکی ماکروسکوپی مربوط می‌شود. همچنین، براساس یک مدل ساده مولکولی می‌توان رفتار خطی مشخصه رده بزرگی از اجسام دی الکتریک را درک کرد.

۱.۵ میدان مولکولی در دی الکتریک

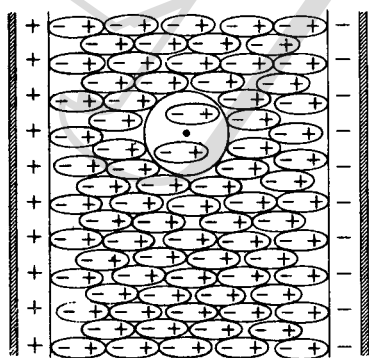
میدان الکتریکی که یک مولکول دی الکتریک را قاطبیده می‌کند به میدان مولکولی E_m موسوم است. E_m میدان الکتریکی در محل هر یک از مولکولها در دی الکتریک است؛ این میدان از همه چشمه‌های خارجی و همه مولکولهای قاطبیده در دی الکتریک، به استثنای مولکولی که در نقطه مورد مطالعه قرار دارد، ناشی می‌شود. واضح است که لزومی ندارد E_m همان میدان الکتریکی ماکروسکوپی باشد زیرا، همان‌طور که در بخش ۳.۴ بحث شد، میدان الکتریکی ماکروسکوپی به نیروی وارد بر بار آزمونی مربوط می‌شود که در مقایسه با ابعاد مولکولی بسیار بزرگ است.

میدان مولکولی را می توان به روش زیر محاسبه کرد. قطعه کوچکی از جسم دی الکتریک را می بریم و حفره ای کروی در اطراف نقطه ای که میدان مولکولی را می خواهیم در آنجا محاسبه کنیم ایجاد می کنیم. آنچه را که از جسم دی الکتریک به جا می ماند به منزله محیطی پیوسته در نظر خواهیم گرفت، یعنی آن را از دید ما کروسکوپی بررسی می کنیم. حال دی الکتریک را مولکول به مولکول دوباره در حفره سر جایش قرار می دهیم، بجز مولکول مرکز حفره که در آنجا می خواهیم میدان مولکولی را پیدا کنیم. مولکولهایی را که بدین ترتیب سر جای شان می گذاریم نه به منزله یک محیط پیوسته، بلکه به صورت دو قطبیهای مجزا در نظر خواهیم گرفت. روشی که مختصراً به آن اشاره شد فقط در صورتی قابل توجیه است که نتیجه محاسبات آن به اندازه حفره بستگی نداشته باشد؛ خواهیم دید که تحت شرایط خاصی این امر در واقع صحت دارد.

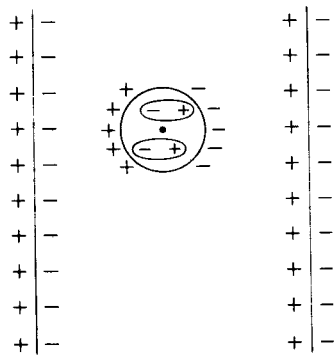
فرض کنید قطعه نازکی از یک دی الکتریک را با قرار دادن آن در میدان الکتریکی یکنواخت موجود میان دو صفحه موازی با بارهای مخالف، نظیر شکل ۱۰۵ الف، قطبیده می کنیم. همچنین فرض کنید قطبش در مقیاس ماکروسکوپی یکنواخت باشد (یعنی $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$) و $\mathbf{P}$ موازی میدانی باشد که مولد آن است. آن قسمت از دی الکتریک را که در خارج حفره قرار دارد می توان بادیستگاهی از بارهای قطبشی نظیر شکل ۱۰۵ ب تعویض کرد، بنابراین، میدان الکتریکی در مرکز حفره را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_p + \mathbf{E}' \quad (105)$$

در اینجا $\mathbf{E}_x$ میدان الکتریکی اصلی مربوط به صفحات موازی باردار، $\mathbf{E}_d$ میدان واقظبنده مربوط به بار قطبشی واقع بر سطوح خارجی دی الکتریک، $\mathbf{E}_p$ مربوط به بار قطبشی واقع



(الف)



(ب)

شکل ۱۰۵ تعویض دی الکتریک خارج از «حفره» بادیستگاهی از بارهای قطبشی.

بر سطح S حفره، و $\mathbf{E}'$ مربوط به تمامی دو قطبیهایی داخل حفره است. گرچه با شکل صریح $\mathbf{E}_x$ کاری نداریم، ولی واضح است که اگر ابعاد صفحات در مقایسه با فاصله میان آنها بزرگ باشد، $E_x = (\sigma/\epsilon_0)$ خواهد بود، که در آن σ چگالی سطحی بار است. میدان واقطنده نیز با دو صفحه موازی بار به وجود می آید که چگالی سطحی آنها برابر است با σ_p . چون $\sigma_p = P_n = \pm P$ پس

$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (2.5)$$

میدان الکتریکی ماکروسکوپی درون دی الکتریک را بدون شاخص پایین، یعنی به صورت $\mathbf{E}$ می نویسیم. از آنجا که مؤلفه قائم جابه جایی الکتریکی $\mathbf{D}$ در فصل مشترک خلا-دی الکتریک پیوسته است، و چون در خلا و درست نزدیک به قطعه دی الکتریک $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_x$ است، پس

$$\epsilon_0 \mathbf{E}_x = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.5)$$

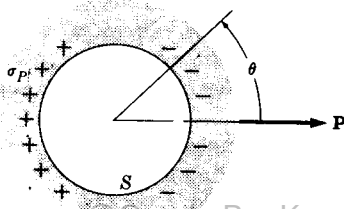
از ترکیب معادلات (۱.۵)، (۲.۵)، و (۳.۵) نتیجه می شود که

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E} + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}' \quad (4.5)$$

معادله فوق میدان مولکولی را به میدان الکتریکی ماکروسکوپی درون جسم دی الکتریک ربط می دهد. این نتیجه کاملاً عمومیت دارد و به وضع هندسی شکل ۱.۵ محدود نمی شود؛ با وجود این روش بالا آموزنده و برای موضوعی که در بخش ۴.۵ درباره آن بحث خواهد شد مفید است.

میدان $\mathbf{E}_s$ از چگالی بار قطبی، $\sigma_p = P_n$ ، واقع بر سطح کروی S نتیجه می شود. با استفاده از مختصات کروی و انتخاب جهت قطبی در جهت $\mathbf{P}$ ، نظیر شکل ۲.۵، نتیجه می شود که

$$d\mathbf{E}_s = \frac{(-P \cos \theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} da \quad (5.5)$$



که در آن $\mathbf{P}$ برداری است از سطح کره به مرکز آن. از روی تقارن به وضوح نتیجه می شود که در انتگرال معادله (۵.۵) بر روی تمامی سطح فقط آن مؤلفه از $d\mathbf{E}_r$ که در امتداد $\mathbf{P}$ قرار دارد سهم خواهد بود. چون $da = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ ، پس

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \end{aligned} \quad (6.5)$$

بالاخره به جمله آخر معادله (۴.۵) می رسمیم که به دو قطبیهای الکتریکی داخل سطح S مربوط می شود. چند مورد مهم وجود دارد که در آنها این جمله صفر می شود. اگر تعداد دو قطبیهای در حفره زیاد، و سمگیری آنها موازی با یکدیگر ولی توزیع آنها در فضا کتره ای باشد، و هیچ همبستگی میان مکان دو قطبیهای وجود نداشته باشد، در آن صورت $\mathbf{E}' = 0$ خواهد بود. این وضعی است که در گازها و امیعات ممکن است حکم فرما باشد. همین طور اگر دو قطبیهای داخل حفره در مکانهای منظمی یک بلور مکعبی^۱ قرار گرفته باشند، باز هم $\mathbf{E}' = 0$ خواهد بود. برای بحث بیشتر به مسئله ۲.۵ رجوع کنید.

در حالت کلی، $\mathbf{E}'$ صفر نیست و اگر ماده شامل چندین نوع مولکول باشد، $\mathbf{E}'$ ممکن است در مکانهای مولکولی مختلف متفاوت باشد. به عنوان مثال، وجود این جمله سبب می شود که کربنات کلسیم رفتار الکتریکی ناهمسانگرد داشته باشد. اما منظور ما در اینجا بسط نظریه مواد ناهمسانگرد نیست، بنابراین، مطالعات بعدی خود را به گروه نسبتاً بزرگی از مواد که در آنها $\mathbf{E}' = 0$ است محدود می کنیم. بنابراین، معادله (۴.۵) به صورت زیر خلاصه می شود

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (7.5)$$

لازم به تذکر است که اگر «حفره» کروی را فقط با برداشتن یک مولکول ایجاد می کردیم، این نتیجه مستقیماً باروش بالا به دست می آمد. ولی در آن صورت حفره آن قدر کوچک بود که تعویض بقیه دی الکتریک با دستگاهی از بارهای قطبی قابل توجیه نبود. گشتاور دو قطبی یک مولکول در واحد میدان قطبنده را قطبش پذیری، α ، می نامند. به عبارت دیگر

$$\mathbf{p}_m = \alpha \mathbf{E}_m \quad (8.5)$$

۱. بلورهایی که بالاترین درجه تقارن را دارند به دستگاه بلورهای مکعبی متعلق اند.

اگر N مولکول در واحد حجم موجود باشد، در آن صورت قطبش $P = Np_m$ است، و از ترکیب این نتیجه با معادلات (۷.۵) و (۸.۵) به دست می آوریم

$$P = N\alpha \left(E + \frac{1}{3\epsilon_0} P \right) \quad (9.5)$$

این معادله را می توان بر حسب ثابت دی الکتریک K ، باز نویسی کرد، زیرا $P = (K - 1)\epsilon_0 E$. بدین ترتیب معادله (۹.۵) به صورت زیر درمی آید

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0 (K - 1)}{N (K + 2)} \quad (10.5)$$

که به معادله کلاؤسیوس - موساتی معروف است. واضح است که معادله (۱۰.۵) يك خاصیت مولکولی، یعنی قطبش پذیری مولکولی را بر حسب مقادیری بیان می کند که می توان آنها را بر مبنای ماکروسکوپی تعیین کرد.

۲.۵ دو قطبیهای القایی. يك مدل ساده

مولکولهای دی الکتریکها را به دو گروه قطبی و غیر قطبی رده بندی می کنند. مولکول قطبی آن است که، حتی هنگامی که میدان قطبیده E_m صفر است يك گشتاور دو قطبی دائمی داشته باشد. در بخش بعد پاسخ دی الکتریک قطبی در برابر میدان الکتریکی خارجی مطالعه خواهد شد، ولی در این بخش ما بایک مسئله تاحدودی راحت تر، شامل مولکولهای غیر - قطبی، که در آنها « گرانیگاههای » توزیع بارهای مثبت و منفی به طور عادی بر یکدیگر منطبق اند، سروکار داریم. مولکولهای متقارن H_2 ، N_2 ، و O_2 ، یا مولکولهای تك اتمی He ، Ne ، و Ar ، جزو این گروه اند.

اعمال میدان الکتریکی بر دی الکتریک سبب جابه جایی نسبی بارهای مثبت و منفی در مولکولهای غیر قطبی می شود، و دو قطبیهای مولکولی که بدین نحو پدید می آیند به دو قطبیهای القایی موسوم اند. ساده ترین نوع مولکولی که می توان تصور کرد مولکولی است که از يك اتم خنثی تشکیل شده باشد. می توان يك مدل کلاسیک ساده برای اتم ساخت و از این مدل عبارتی برای گشتاور دو قطبی القایی و بنابراین عبارتی برای قطبش پذیری آن به دست آورد. اگر چه این مدل مخصوص بررسی مولکولهای تك اتمی است، ولی می توان آن را برای مولکولهای دو اتمی متقارن نیز، بابه کار بردن آن به طور جداگانه برای هر يك از اتمهای مولکول و به دست آوردن قطبش پذیریهای اتمی، به کار برد. در این صورت قطبش - پذیری مولکولی عبارت است از حاصل جمع آنها، یا دو برابر قطبش پذیری اتمی.

هر اتم متشکل است از يك هسته فوق العاده كوچك با بار مثبت كه الكترونهاى مدارى كه دائم در حال حرکت اند آن را در میان گرفته اند. چون الكترونها مدار خود را در مدتی فوق العاده کوتاه (در حدود 10^{-15} s) طی می کنند، واضح است كه در اتم «ایستای» معادل بار هر الكترون در سراسر مدار خودش توزیع شده است. مكانيك كوانتومى به ما مى آموزد كه هر چند این تصویر اساساً صحيح است، ولى تا حدودى ساده و خام است. الكترونها در واقع در مدارهاىى جایگزیده نشده اند، بلكه با احتمالى متناهی در هر قسمت از اتم مى توانند واقع باشند. بنا بر این، پاسخ اتم به يك میدان الكتروستاتیكى یا به میدانهاى الكتریكى با تغییرات كند را بدین گونه مى توان بررسی كرد كه تصور كنیم هر الكترون در سراسر مدار خود در اتم توزیع شده است، و هر مدار قسمت قابل توجهى از حجم اتم را در بر گرفته است. خلاصه كلام، مدل كلاسیك ساده اى از اتم كه با این تصویر سازگار باشد عبارت است از يك بار نقطه اى مثبت (هسته) كه در ابرى از بارهاى منفى با تقارن كروى احاطه شده است و در این ابر چگالى بار تا شعاع اتمى R_0 اساساً یكنواخت و برای شعاعهاى بزرگتر صفر است. اکنون در وضعى هستیم كه بتوانیم قطبش پذیری این «اتم» را محاسبه كنیم. فرض كنید بار الكتریكى هسته Ze است، كه در آن e قدر مطلق بار الكترون و Z عدد اتمى است. چون اتم از لحاظ الكتریكى خنثى است، بار كل در ابر الكترونی $-Ze$ خواهد بود. اگر اتم در میدان قطبیده E_m قرار داده شود، هسته نسبت به مركز ابر بار جابه جا مى شود؛ مقدار این جابه جایی را x مى نامیم. این جابه جایی در امتداد E_m خواهد بود. فرض كنید درائى این جابه جایی ابر بار مثل يك جسم صلب حرکت كند. یعنى در ابر میدان قطبیده ابر تغییر شكل ندهد. جابه جایی x را مى توان از روى تعادل نیروهاى وارد بر هسته محاسبه كرد؛ این نیروها عبارت اند از نیروى ZeE_m كه در جهت میدان عمل مى كند، و نیروى الكتروستاتیكى میان هسته و ابر بار كه مى كوشد پیکربندى اولیه را حفظ كند. بنا بر قانون گاؤس، بار منفى اى كه هسته را جذب مى كند آن بخش از ابر است كه درون كره به شعاع x قرار دارد، و اگر چگالى الكترونی در ابر یكنواخت باشد، این بار برابر مى شود با Zex^3/R_0^3 . پس

$$\frac{(Ze)(Zex^3/R_0^3)}{4\pi\epsilon_0 x^2} = ZeE_m \quad (11.5)$$

یا

$$Zex = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 E_m \quad (12.5)$$

چون گشتاور دوقطبی اتمى كه در این فرایند ایجاد مى شود عبارت است از $p_m = Zex$ ، از مقایسه این معادله با معادله (۸.۵) نتیجه مى شود

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^3 \quad (13.5)$$

مدل اتمى بالا را مى توانیم از طریق مقایسه نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از

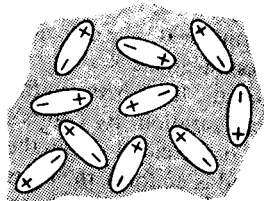
منابع دیگر بیازماییم. مثلاً از ترکیب معادله (۱۳.۵)، با معادله کلاؤسیوس - موساتی (۱۰.۵) می توان α را حذف کرد؛ معادله حاصل شعاع اتمی R_0 را بر حسب کمیت های معلوم تجربی پیشگویی می کند. R_0 ی که به این طریق به دست می آید با نتایج حاصل از آزمایش های دیگر، در مواردی که مدل بالا برای آنها مخصوصاً مناسب است، به نحوی معقول توافق دارد؛ مرتبه بزرگی R_0 در حدود یک آنگستروم یعنی $m \cdot 10^{-10}$ است (مسئله ۱.۵).
 قطبش پذیری که در معادله (۱۳.۵) به دست آمد ثابت، و مستقل از میدان قطبیده است. بنابراین، معادله (۱۳.۵) به مقدار ثابتی برای K منجر می شود، و دی الکتریکی که بدین گونه توصیف شود خطی است.

۳.۵ مولکولهای قطبی. فرمول لانژون - دیبی^۱

همان طور که در بخش گذشته اشاره شد، هر مولکول قطبی گشتاورد و قطبی دائمی دارد، هر مولکول قطبی از حداقل دو نوع اتم مختلف تشکیل شده است؛ در اثنای تشکیل مولکول ممکن است برخی از الکترون های یک اتم به طور کامل یا به طور جزئی به اتم دیگر منتقل شوند و پس از این انتقال آرایش الکترونی حاصل به نحوی باشد که مراکز بارهای مثبت و منفی در مولکول بر هم منطبق نباشند. اگر میدان الکتریکی وجود نداشته باشد، یک قطعه ماکروسکوپی از دی الکتریک قطبی قطبیده نخواهد بود، زیرا همان طور که در شکل ۳.۵ دیده می شود، سمتگیری $\mathbf{p}_m$ یک تک دو قطبیها کتره ای است. این قطبش به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta v} \sum \mathbf{p}_m \quad (14.5)$$

که در آن جمع بندی روی تمام مولکولهای موجود در عنصر حجم Δv صورت می گیرد. وقتی $\mathbf{p}_m$ ها دارای سمتگیری کتره ای باشند، حاصل جمع صفر می شود.
 اگر دی الکتریک قطبی تحت تأثیر میدانی الکتریکی قرار گیرد، بر هر یک از دو قطبیهای



شکل ۳.۵ توزیع کتره ای دو قطبیهای دائمی.

آن گشتاور نیرویی وارد می‌شود، و گرایش این گشتاورها چنان است که می‌خواهند دو قطبها را با میدان همسو کنند. اگر میدان به اندازه کافی قوی باشد ممکن است دو قطبها کاملاً همسو شوند که در آن صورت قطبش به مقدار اشباعی زیر خواهد رسید

$$P_s = N p_m \quad (15.5)$$

که در آن N تعداد مولکولها در واحد حجم است. این اثر سم‌تگیری علاوه بر اثرهای دو قطبی القایی است که معمولاً موجودند. فعلاً ما از سهم مربوط به دو قطبی القایی صرف‌نظر می‌کنیم، ولی بعداً اثر آن را نیز خواهیم افزود.

در شدت میدانهایی که به‌طور معمول با آنها برمی‌خوریم، قطبش هردی الکتریک قطبی معمولاً از مقدار اشباعی آن بسیار کمتر است، و اگر دمای جسم افزایش داده شود قطبش آن حتی کمتر هم می‌شود. فقدان همسویی کامل دو قطبها ناشی از انرژی گرمایی مولکولهاست که در جهت ایجاد سم‌تگیریهایی کتره‌ای برای دو قطبها عمل می‌کند. میانگین گشتاور دو قطبی مؤثر مولکولی را می‌توان به کمک یکی از اصول مکانیک آماری محاسبه کرد. بر طبق این اصل، در دمای T احتمال اینکه مولکولی با انرژی مولکولی به‌خصوص E یافت شود، متناسب است با

$$e^{-E/kT} \quad (16.5)$$

که در آن k ثابت بولتزمن و T دمای مطلق است. در اینجا از ارائه بحث کاملی درباره مبنای این اصل خودداری می‌کنیم؛ چنانچه خواننده با توزیع ماکسولی سرعت در گاز کامل آشنایی داشته باشد قبلاً با این اصل برخورد کرده است. طبق قانون توزیع ماکسول، احتمال اینکه سرعت مولکول v باشد متناسب است با $e^{-mv^2/2kT}$. ولی در گاز کامل ماکسول مولکولها فقط انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ دارند؛ در حالت کلی E در معادله (۱۶.۵) باید هم انرژی جنبشی E_k و هم انرژی پتانسیل U را شامل شود، و عامل بالا به صورت زیر درآید

$$e^{-E_k/kT} e^{-U/kT} \quad (17.5)$$

انرژی پتانسیل یک دو قطبی دائمی $\mathbf{p}_0$ در میدان الکتریکی $\mathbf{E}_m$ عبارت است از

$$U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}_m = -p_0 E_m \cos \theta \quad (18.5)$$

که در آن θ زاویه میان $\mathbf{p}_0$ و میدان الکتریکی است. چون انرژی جنبشی مولکولی به میدان الکتریکی بستگی ندارد، می‌توان توزیع سرعت را در محاسبات زیر کاملاً نادیده گرفت. گشتاور دو قطبی مؤثر یک دو قطبی مولکولی عبارت است از مؤلفه آن در امتداد میدان، یعنی $p_0 \cos \theta$. پس با استفاده از اصل بالا، مقدار میانگین این کمیت عبارت می‌شود از

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle = \frac{\int p_0 \cos \theta e^{+P_0 E_m \cos \theta / kT} d\Omega}{\int e^{+P_0 E_m \cos \theta / kT} d\Omega} \quad (19.5)$$

که در آن $d\Omega$ عنصر زاویه فضایی است که می توان به جای آن $2\pi \sin \theta d\theta$ را قرار داد و حدود θ میان صفر و π است. چون p_0 ، E_m و kT در انتگرال گیری ثابت اند، به آسانی می توان انتگرالها را محاسبه کرد. برای سهولت نماد زیر را تعریف می کنیم

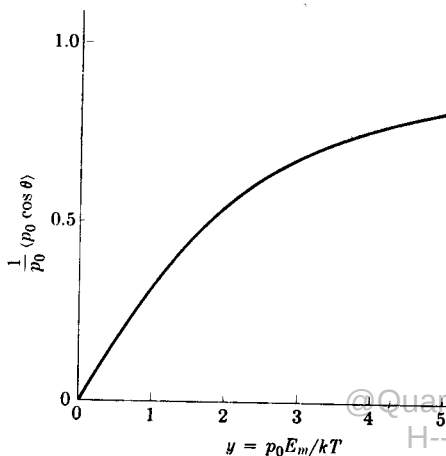
$$y = \frac{P_0 E_m}{kT} \quad (20.5)$$

پس معادله (۱۹.۵) نتیجه زیر را به دست می دهد

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle = p_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (21.5)$$

که به فرمول لانژون معروف است. این تابع در شکل ۴.۵ رسم شده است. از روی شکل پیداست که معادله (۲۱.۵) در واقع، در میدانهای خیلی قوی اثر اشباعی از خود نشان می دهد. ولی به ازای مقادیر کوچک y منحنی خطی است، و همین ناحیه خطی است که در دماهای معمولی حائز اهمیت است. گشتاور دوقطبی مولکولی p_0 برای اکثر اجسام قطبی طوری است که به ازای همه مقادیر شدت میدان، حتی به ازای شدتهایی که نزدیک به استقامت دی الکتریک ماده اند، تازمانی که دما بالاتر از $250^\circ K$ باشد داریم $y \ll 1$. از این رو، هر جسم دی الکتریکی که شامل مولکولهای قطبی باشد عموماً خطی است.

چون فقط ناحیه خطی معادله (۲۱.۵) مهم است، بهتر است که $\coth y$ را به صورت یک رشته توانی بسط دهیم، و فقط جملات اول آن را نگه داریم (مسئله ۴.۵). جمله اول رشته جمله آخر را در معادله (۲۱.۵) حذف می کند. در نتیجه



شکل ۴.۵ رسم تابع لانژون.

مقدار میجانبی به ازای $y \rightarrow \infty$ برابر یک است.

$$\langle p_0 \cos \theta \rangle \approx \frac{1}{3} p_0 \gamma = \frac{p_0^2 E_m}{3kT} \quad (۲۲.۵ \text{ الف})$$

چون $\langle p_0 \cos \theta \rangle$ میانگین گشتاور دوقطبی مؤثر هر مولکول است، بنا براین قطبش مساوی است با $P = N \langle p_0 \cos \theta \rangle$ ، و در جهت E_m خواهد بود. بدین ترتیب معادله (۲۲.۵) الف را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{N} P = \frac{p_0^2}{3kT} E_m \quad (۲۲.۵ \text{ ب})$$

از مقایسه این معادله با معادله (۸.۵) آشکار می شود که قطبش پذیری، α (یعنی گشتاور دوقطبی مولکولی در واحد میدان قطبیده)، برابر است با

$$\alpha = \frac{p_0^2}{3kT} \quad (۲۳.۵)$$

این نتیجه را با چشمپوشی از گشتاورهای دوقطبی القایی به دست آورده ایم، و معرف چیزی است که ما آن را قطبش پذیری مستگیری می نامیم. اثرات دوقطبیهای القایی نظیر آنچه در بخش قبل بررسی شد، منجر به چیزی می شوند که می توان آن را قطبش پذیری تغییر شکل (α_0) نامید. پس در حالت کلی، قطبش پذیری مولکولی کل برابر است با

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3kT} \quad (۲۴.۵)$$

رابطه بالا به معادله لانژون- دی موسوم است و در تغییر ساختارهای مولکولی اهمیت بسیاری دارد.

* ۴.۵ قطبش دائمی. فروالکتریسته

در بخش ۱.۵ دیدیم که میدان مولکولی E_m سبب قطبیدگی تک تک مولکولهای می شود. رابطه میان E_m و میدان الکتریکی ماکروسکوپی E در معادله (۷.۵) داده شده است. در اکثر موارد قطبش با E متناسب است، لذا وقتی که E به سمت صفر میل کند E_m هم صفر می شود. ولی تحت بعضی شرایط معادله (۷.۵) بایک قطبش دائمی (یا خود به خودی) نیز سازگار است. وقتی E را برابر صفر قرار دهیم خواهیم داشت

$$E_m = \frac{1}{3\epsilon_0} P_0 \quad (۲۵.۵)$$

یعنی، به عبارت دیگر، اگر قطبش P_0 وجود داشته باشد، این قطبش سبب ایجاد میدان الکتریکی در محل مولکول می شود و این میدان به نوبه خود سبب قطبیده شدن مولکول خواهد شد. به طور قطع یک میدان قطبیده وجود دارد، اما چنانچه این میدان باعث به وجود آمدن قطبشی غیر از P_0 شود، در آن صورت جواب خود سازگار نخواهد بود. لذا اگر N تعداد مولکولها در واحد حجم باشد، خواهیم داشت

$$P_0 = N\alpha E_m = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} P_0 \quad (26.5)$$

این رابطه وقتی صادق خواهد بود که رابطه زیر

$$P_0 = 0$$

یا رابطه زیر برقرار باشد

$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = 1 \quad (27.5)$$

از این رو، معادله (27.5) شرط قطبش دائمی است.^۱

در اکثر مواد $N\alpha/3\epsilon_0$ کوچکتر از واحد است، و در نتیجه رفتار دی الکتریک معمولی حاصل می شود. با وجود این، در معدودی جامد بلورین شرط (27.5) صادق است. این قبیل اجسام را فروالکتریک می نامند، زیرا خواص الکتریکی آنها شبیه خواص مغناطیسی اجسام فرومغناطیس است. تیتانیت باریوم، $BaTiO_3$ ، بهترین نمونه شناخته شده اجسام فروالکتریکی است که در دمای زیر $120^\circ C$ گشتاور دوقطبی خود به خودی دارد. این دما به نقطه کودی^۲ جسم معروف است.

حالت قطبیده ماده فروالکتریک نسبتاً پایدار است و حالتی است که می تواند برای مدت زیادی دوام داشته باشد. این امر ممکن است تا حدی شگفت آور باشد زیرا یک جسم قطبیده تحت تأثیر میدان واقطنبده خود قرار می گیرد و، بسته به شکل هندسی جسم، این میدان واقطنبده ممکن است نسبتاً بزرگ هم باشد. برای جسمی که به شکل بره تخت، و در امتداد

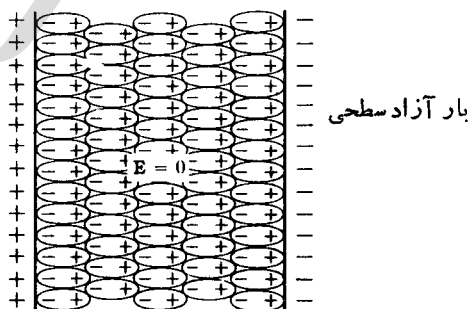
۱. به بیان دقیقتر، معادله (27.5) برای اجسامی به دست آمده است که فقط از یک نوع مولکول تشکیل شده اند، و برای آنها جمله E' بخش ۱۰.۵ صفر می شود. در یک نظریه کمی، که قابل کاربرد در حالت کلی باشد، معادله (27.5) با مجموعه ای از دستگاههای معادلات جایگزین می شود. برای فهم اساسی منشأ فروالکتریسیته به چنین پیچیدگیهایی نیاز نیست و در نتیجه درباره آنها در اینجا بحث نخواهد شد.

عمود بر وجوهش قطبیده شده است، میدان واقطنبده بزرگترین مقدار است. همان طور که در بخش ۱.۵ دیده شد، اگر ابعاد وجوه بره نسبت به ضخامت آن خیلی بزرگ باشند، خواهیم داشت

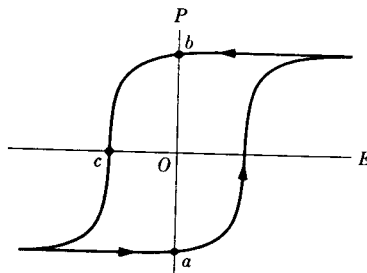
$$\mathbf{E}_d = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (28.5)$$

درواقع، پایداری زیاد يك فروالكتريك قطبیده به این سبب است که بر روی آن هیچ میدان واقطنبده ای اثر نمی کند، حتی در موردی که جسم از لحاظ هندسی به شکل بره باشد. دلیل این امر از بحث زیر روشن می شود: برای قطبی کردن جسم آن را میان دو صفحه رسانای موازی قرار می دهیم و سپس به این صفحات اختلاف پتانسیل نسبتاً زیادی اعمال می کنیم. در این فرایند بار آزاد صفحه ها تا حد زیادی با بار قطبشی سطحی خنثی خواهد شد، درست شبیه به آنچه در اثنای قطبی کردن يك دی الکتريك معمولی رخ می دهد. حال اگر صفحات موازی را با اتصال کوتاه هم پتانسیل کنیم، باز هم حالت قطبیده فروالكتريك از لحاظ انرژی مناسب است، به طوری که بار آزاد در جای خود باقی خواهد ماند، و باز هم سبب خنثی کردن بار قطبشی خواهد شد. وضعیت تقریباً شبیه خواهد بود به آنچه در شکل ۵.۵ نشان داده شده است. در این وضع بار آزاد توسط بار قطبشی سطحی در جای خود نگه داشته می شود. میدان ماکروسکوپی در داخل فروالكتريك صفر است؛ به علاوه میدان الکتریکی خارجی نیز صفر است و مشکل است بتوان جسم فروالكتريك قطبیده را از يك جسم دی الکتريك ناقطبیده متعارف تمیز داد.

حال اگر يك اختلاف پتانسیل زیاد و باعلامت مخالف میان صفحاتی که بر فروالكتريك قطبیده محیط اند برقرار کنیم، جسم جهت قطبش خود را تغییر می دهد و بار آزاد باعلامت مخالف از مدار خارجی به طرف صفحات به مقدار کافی جاری می شود، یعنی به مقداری که نه تنها بار آزاد موجود در آنجا، بلکه بار قطبشی جدید را نیز خنثی کند. از این رو بره فرو -



شکل ۵.۵ يك قطعه ماده فروالكتريك قطبیده.



شکل ۶.۵ منحنی پس ماند برای يك نمونه فروالكتريك.

الکتریکی که میان دو صفحه موازی واقع است می تواند به منزله عنصر اصلی يك دستگاه حافظه به کار رود؛ این برة فروالکتریک قادر است $\pm$ یا $\mp$ را در خود حفظ کند، و تا وقتی که میدان الکتریکی خارجی وجود نداشته باشد قطبش آن پابرجا خواهد ماند. عدد $\pm$ یا $\mp$ را با اعمال يك اختلاف پتانسیل میان دوسر نمونه می توان خواند. اگر میدان اعمال شده در جهت قطبش اولیه باشد، باری از مدار خارجی عبور نخواهد کرد؛ اگر میدان در خلاف جهت قطبش اولیه باشد، در ضمن آنکه قطبش فروالکتریک جهت خود را تغییر می دهد، مقداری بار الکتریکی از مدار خارجی عبور خواهد کرد.

فروالکتریک قطبیده در برابر يك میدان الکتریکی معکوس پایدار است، مشروط بر آنکه این میدان خیلی شدید نباشد. شکل ۶.۵ منحنی کامل قطبش را بر حسب میدان الکتریکی نشان می دهد؛ واضح است که برای میدانهای ضعیف به ازای هر مقدار از E دو مقدار برای P وجود دارد. منحنی شکل ۶.۵ را حلقه پس ماند می نامند. پس ماند یعنی «عقب ماندن»، و واضح است که بردار قطبش نسبت به بردار میدان الکتریکی عقب می ماند. نقاط a و b و وضعیتهای پایدار به ازای $E=0$ اند، و به ترتیب قطبشهای $\pm$ و $\mp$ را نشان می دهند. نقطه c معرف مقدار میدان الکتریکی است که به ازای مقادیر بیشتر از آن جهت قطبش عوض می شود.

۵.۵ خلاصه مطالب

قطبش ماکروسکوپی P ماده دی الکتریک همسانگرد بستگی دارد به گشتاور دو قطبی مولکولی p_m (یا مؤلفه آن) که در پاسخ به میدان الکتریکی موضعی در مکان مولکول (یعنی میدان مولکولی E_m) به وجود می آید

$$P = N p_m(E_m)$$

معمولا p_m با تقریب خوبی متناسب است با E_m

$$p_m = \alpha E_m$$

میدان مولکولی به میدان اعمال شده E و همچنین به خود قطبش (یعنی، میدانهای دو قطبی تمامی مولکولهای دیگر) بستگی دارد. در ساده ترین موارد

$$E_m = E + \frac{1}{3\epsilon_0} P$$

در حالت عادی E_m را می توان از این معادلات حذف کرد و نوشت

$$P = \chi E$$

که در آن χ پذیرفتاری ثابت برابر است با

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}$$

اما وقتی قطبش پذیری مولکولها زیاد باشد، $(N\alpha > 3\epsilon_0)$ ، جواب دیگری با $E = 0$ ، $P \neq 0$ امکان پذیر است (یعنی، ماده ممکن است موقعی که میدان اعمال شده صفر است، مثل جسم فروالکتریک، به طور خود به خود قطبیده شود).

۱. در میدان الکتریکی در اثر تغییر شکل توزیع بار الکترونی تمام مولکولها گشتاور دو قطبی القایی پیدا می کنند. از تحلیل یک مدل خطی ساده، قطبش پذیری اتمی ثابتی نتیجه می شود که با حجم اتم متناسب است

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R_0^3$$

۲. مولکولهای قطبی، که گشتاور دو قطبی دائمی p_0 دارند، علاوه بر این قطبش - پذیری سمگتری نیز از خود نشان می دهند؛ قطبش پذیری با تابع لانژون که در مکانیک آماری به دست می آید توصیف می شود. در دمای بالا سهم مربوط به این قطبش پذیری نیز خطی است و داریم

$$\alpha = \frac{p_0^2}{3kT}$$

۳. معدودی از مواد (مثل باریوم تیتانات) خاصیت فروالکتریکی از خود بروز می دهند.

مسائل

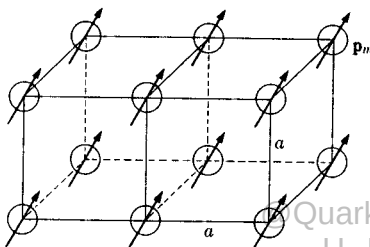
۱.۵ با به کار بردن معادله کلاؤسیوس - موساتی، قطبش پذیری اتمها را در مولکولهای هوا (یعنی N_2 و O_2)، محاسبه کنید. [توجه کنید که از معادله (۱۰.۵) فقط میانگین وزنی قطبش-پذیریهای نیتروژن و اکسیژن به دست می آید. از ترکیب این نتیجه و نظریه بخش ۲.۵ شعاع متوسط اتمها در یک مولکول هوا را محاسبه کنید.]

۲.۵ شکل ۷.۵ شبکه مکعبی ساده ای از مولکولها را نشان می دهد که تمام مولکولهای آن گشتاور دو قطبی یکسانی (از حیث جهت و مقدار) p_m ، دارند. مولکول معینی را در نظر می گیریم و آن را z می نامیم. واضح است که نزدیکترین همسایه های z شش مولکول اند که در فاصله a واقع اند، نزدیکترین همسایه های بعدی آن دوازده مولکول در فاصله $\sqrt{2}a$ و به همین ترتیب. میدان الکتریکی ناشی از شش p_m مولکولهای نزدیکترین همسایه ها را به ازای جهتی دلخواه برای p_m در محل z به دست آورید. (خطوطی که z را به نزدیکترین همسایه هایش متصل می کنند محورهای x ، y ، و z اختیار کنید. برای سهولت p_m را در صفحه xz بگیرید به طوری که با محور x زاویه θ بسازد.)

۳.۵ با استفاده از نتیجه مسئله ۱.۵ برای قطبش پذیری اتم نیتروژن، جا به جایی هسته نیتروژن را نسبت به ابر الکترونی آن در میدانی به شدت $E_m = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ محاسبه کنید. این جا به جایی را با شعاع اتم که در مسئله ۱.۵ به دست آمد مقایسه کنید.

۴.۵ با استفاده از بسط معروف e^x ، عبارت $\coth y$ را بسط دهید و معادله (۲۲.۵ الف) را از معادله (۲۱.۵) به دست آورید. یک مرحله بیشتر جلو بروید و جمله دیگری از رشته معادله (۲۲.۵ الف) را پیدا کنید.

۵.۵ آب مولکولی قطبی است که برای آن معادله کلاؤسیوس - موساتی به درستی قابل کاربرد نیست. با وجود این، فرض کنید که این معادله در مورد آب صادق است و p را برای مولکول آب محاسبه کنید.



شکل ۷.۵ قسمتی از آرایه مکعبی ساده مولکولها که گشتاور دو قطبی هر یک p_m است.

انرژی الکتروستاتیکی

بسیاری از مسائل مکانیک با توجه به نکات مربوط به انرژی خیلی ساده می‌شوند. بنابراین، وقتی رفتار مکانیکی یک دستگاه الکتریکی را مطالعه می‌کنیم، به کار بردن روشهای انرژی می‌تواند مفید باشد. به طور کلی انرژی هر دستگاه بار الکتریکی را (درست نظیر هر دستگاه مکانیکی دیگر) می‌توان به سهمهای مربوط به جنبشی و پتانسیل تقسیم کرد. اما در حالت سکون، همه انرژی دستگاه بار به صورت انرژی پتانسیل است، و ما به خصوص با آن انرژی پتانسیلی سروکار داریم که از بهر هم کنش بارها ناشی می‌شود، یعنی انرژی موسوم به انرژی الکتروستاتیکی.

در بخش ۴.۲، نشان دادیم که انرژی الکتروستاتیکی یک بار نقطه‌ای، U ، رابطه نزدیکی با پتانسیل الکتروستاتیکی φ در مکان آن بار نقطه‌ای دارد. در واقع، هرگاه q مقدار بار نقطه‌ای به خصوصی باشد، کار انجام شده توسط نیروی وارد بر بار موقعی که بار از مکان A به مکان B می‌رود برابر است با

$$\text{کار} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = -q(\varphi_B - \varphi_A) \quad (۱.۶)$$

در اینجا فرض شده است که در هر نقطه در طول مسیر نیروی $\mathbf{F}$ تنها نیروی الکتریکی $q\mathbf{E}$ است. تحت این شرایط ذره باردار شتاب می‌گیرد. برای اینکه شتاب نگیرد، باید نیروی الکتریکی در هر نقطه با نیرویی مساوی و مخالف که توسط عامل دیگری اعمال می‌شود خنثی شود. بنابراین کار کل صفر است و انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند. کاری که این نیروی دیگر

انجام می‌دهد برابر است با

$$W = q(\varphi_B - \varphi_A) \quad (۲.۶)$$

که با افزایش انرژی الکتروستاتیکی بار در طول مسیر A به B برابر است. استدلال مشابهی را می‌توان در مورد دستگاه‌های پیچیده تر بار به کار برد؛ در واقع، انرژی الکتروستاتیکی یک توزیع بار دلخواه را می‌توان به صورت کار لازم برای گرد هم آوردن این توزیع بار در برابر هم کش کولنی بارها محاسبه کرد، بی‌آنکه انرژی به صورت‌های دیگری به آن داده شود.

۱.۶ انرژی پتانسیل گروهی از بارهای نقطه‌ای

منظور از انرژی الکتروستاتیکی گروهی مرکب از m بار نقطه‌ای، انرژی پتانسیل آن دستگاه نسبت به حالتی است که در آن همه بارهای نقطه‌ای بی‌نهایت از یکدیگر دورند. این انرژی را می‌توان به آسانی با محاسبه مقدار کار لازم برای گرد هم آوردن بارها، طبق معادله (۲.۶)، به دست آورد؛ در این محاسبه بارها را یکی پس از دیگری می‌آوریم. اولین بار، q_1 ، را می‌توان بدون صرف انرژی در جای خود قرارداد، $W_1 = 0$ ؛ برای آنکه دومین بار، q_2 ، را در جای خود قرار دهیم، مقدار کار لازم برابر است با

$$W_2 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}$$

که در آن $r_{21} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ است؛ و مقدار کار لازم برای سومین بار، q_3 ، برابر است با

$$W_3 = q_3 \left[\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{31}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{32}} \right]$$

مقدار کار لازم برای آوردن بارهای چهارم، پنجم، و مانند آن را می‌توان به نحو مشابهی حساب کرد. انرژی الکتروستاتیکی کل دستگاه مرکب از m بار مجموع W هاست، یعنی

$$U = \sum_{j=1}^m W_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \right) \quad (۳.۶)$$

نتیجه بالا را می‌توان به صورت کوتاه زیر نوشت

@Quark Book

$$U = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{j-1} W_{jk}$$

حال اگر W_{jk} ها را به شکل يك ماتریس مرتب کنیم و توجه داشته باشیم که $W_{jk} = W_{kj}$ و $W_{jj} = 0$ ، آنگاه می‌توانیم U را به صورت زیر نیز بنویسیم

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m W_{jk}, \quad (W_{jj} = 0)$$

در این شکل جمع‌بندی، که متقارن‌تر است، ضریب $1/2$ را به این دلیل می‌آوریم که برهم کنش میان هر زوج از بارها دوبار حساب نشود. از این رو، شکل دیگر و مناسب‌تر معادله (۳.۶) چنین است

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (۴.۶)$$

که علامت پریم بر روی جمع‌بندی دوم به معنی آن است که در آن جمله $k = j$ عمداً حذف می‌شود.

با توجه به اینکه مقدار نهایی پتانسیل φ در محل j امین بار نقطه‌ای ناشی از سایر بارهای دستگاه، به صورت زیر است

$$\varphi_j = \sum_{k=1}^m \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (۵.۶)$$

رابطه (۴.۶) را می‌توان به صورت دیگری نوشت. از این رو، انرژی الکتروستاتیکی دستگاه عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m q_j \varphi_j \quad (۶.۶)$$

هرگاه بارهای نقطه‌ای به جای خلا در يك محیط دی‌الکتریک خطی نامتناهی گردهم آورده شوند، آنگاه در معادله‌های (۴.۶) و (۵.۶) گذردهی ϵ جانشین ϵ_0 می‌شود لیکن معادله (۶.۶) بی‌تغییر باقی می‌ماند. در بخش بعد نشان داده خواهد شد که رابطه آخر اعتبار عمومی دارد. این رابطه در مورد گروهی از بارهای نقطه‌ای که در محیط‌های دی‌الکتریکی مختلفی قرار گرفته‌اند، و حتی در مورد رساناهای با ابعاد متناهی نیز صادق است. تنها محدودیت در اعتبار معادله (۶.۶) این است که تمام دی‌الکتریک‌ها در دستگاه الکتریکی باید خطی باشند.

۲.۶ انرژی الکتروستاتیکی يك توزیع بار

در این بخش انرژی الکتروستاتیکی يك توزیع بار دلخواه با چگالی حجمی ρ و چگالی سطحی σ را محاسبه می‌کنیم. برخی از بارها ممکن است بر روی سطوح رساناها قرار داشته باشند؛ در واقع، صریحاً فرض می‌کنیم که در دستگاه مورد نظر رساناهایی وجود دارند. به علاوه، فرض می‌کنیم که دی‌الکتریکهای موجود در دستگاه خطی باشند؛ آوردن این قید از آن رو ضروری است که کار لازم برای آوردن دستگاه به حالت باردار نهایی آن به روش رسیدن به این حالت نهایی بستگی نداشته باشد.

فرض کنید که برای گردهم آوردن توزیع بار، عناصر بار δq را از جایی که در آن پتانسیل مرجع $\varphi_A = 0$ است به مکان نهایی آنها بیاوریم. اگر هنگامی که بخشی از توزیع بار را گردهم آورده‌ایم پتانسیل در نقطه معینی از دستگاه مساوی $\varphi'(x, y, z)$ باشد، آنگاه از معادله (۲.۶) کار لازم برای قراردادن δq در این نقطه برابر خواهد بود با

$$\delta W = \varphi'(x, y, z) \delta q \quad (۷.۶)$$

نموبار δq ممکن است به يك عنصر حجم واقع در نقطه (x, y, z) افزوده شود، به طوری که $\delta q = \delta \rho \Delta v$ ، یا ممکن است به يك عنصر سطح در نقطه مورد بحث افزوده شود، که در آن صورت $\delta q = \delta \sigma \Delta a$. مقدار کل انرژی الکتروستاتیکی توزیع باری که گردهم آورده می‌شود، از جمع عناصر انرژی که هر کدام به صورت معادله (۷.۶) هستند به دست می‌آید.

چون کار لازم برای گردهم آوردن بارها به ترتیب گردهم آوری آنها بستگی ندارد، می‌توان روش گردهم آوری خاصی را به کار برد که با آن حاصل جمع δW ها به سهولت قابل محاسبه باشد. در این روش همه قسمت‌های دستگاه با هم به حالت باردار نهایی خود آورده می‌شوند، یعنی در هر مرحله از فرایند باردار کردن مقادیر همه چگالیهای بار کسریکسانی از مقادیر نهایی آنهاست. این کسرها با α نشان می‌دهیم. هرگاه مقادیر نهایی چگالیهای بار با تابعهای $\rho(x, y, z)$ و $\sigma(x, y, z)$ داده شده باشند، آنگاه چگالیهای بار در هر مرحله‌ای دلخواه عبارت خواهند بود از $\alpha \rho(x, y, z)$ و $\alpha \sigma(x, y, z)$. به علاوه نمونه‌های این چگالیها عبارت‌اند از $\delta \alpha = \rho(x, y, z) \delta \alpha$ و $\delta \rho = \sigma(x, y, z) \delta \alpha$. مقدار کل انرژی الکتروستاتیکی که از جمع بندی (۷.۶) به دست می‌آید برابر است با

$$U = \int_V \delta \alpha \int_V \rho(x, y, z) \varphi'(\alpha; x, y, z) dv + \int_S \delta \alpha \int_S \sigma(x, y, z) \varphi'(\alpha; x, y, z) da$$

اما چون مقدار تمام بارها کسریکسانی، α ، از مقدار بار نهایی آنهاست، پتانسیل برابر است

با $\varphi'(\alpha; x, y, z) = \alpha \varphi(x, y, z)$ که در آن φ مقدارنهایی پتانسیل در نقطه (x, y, z) است. با قرار دادن این رابطه در انتگرال بالا، انتگرال گیری روی α به آسانی انجام می شود و نتیجه زیر به دست می آید

$$U = \frac{1}{4} \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dv + \frac{1}{4} \int_S \sigma(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) da \quad (۸.۶)$$

که نتیجه مطلوب برای انرژی يك توزیع بار است. توجه داشته باشید که اولاً حجم انتگرال گیری V باید به حد کافی بزرگ باشد تا همه چگالی بار موجود در مسئله را در بر بگیرد، و ثانیاً پتانسیل φ همان پتانسیل ناشی از چگالی بار ρ (و σ) است. معمولاً چگالی بار در خارج از يك ناحیه کراندار صفر است، و در این صورت می توان V را چنان اختیار کرد که تمامی فضا را شامل شود. اگر تمامی فضا، به استثنای رساناهایی معین، بایک محیط دی الکتریک منفرد پر شده باشد، پتانسیل با رابطه زیر داده می شود

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (۹.۶)$$

اگر چندین دی الکتریک موجود باشند، شرایط مرزی مناسب باید برآورده شود؛ این کار مثلاً با افزودن جوابهای مناسب از معادله لاپلاس به معادله (۹.۶) انجام می شود. معادلات (۸.۶) و (۹.۶) تعمیمهایی از معادلات (۶.۶) و (۵.۶) برای بارهای نقطه ای محسوب می شوند. معادلات قبلی را می توان به عنوان موردی خاص به دست آورد. برای این کار فرض می کنیم که

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^m q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{k=1}^m q'_k \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k)$$

که در آن در رابطه پریم دار باید به ویژه به خاطر داشته باشیم که جمله $k=j$ را کنار بگذاریم. وقتی توزیع ρ پیوسته است، صفر شدن مخرج در معادله (۹.۶) سبب واگرا شدن انتگرال نمی شود، و لذا کنار گذاردن نقطه $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ ضروری نیست.

قبلاً گفتیم که دستگاه شامل رساناهاست. با اینکه معادله (۸.۶) این مورد را نیز به خوبی در بر می گیرد، مناسبترین است که سهم مربوط به رساناها را در آن صریحاً جدا کنیم. قسمتی از انتگرال آخر، شامل انتگرال گیری بر روی سطح این رساناهاست؛ چون هر رسانا يك ناحیه هم پتانسیل است، هر يك از این انتگرالها را می توان محاسبه کرد

$$\frac{1}{4} \int_{\text{رسانای } j} \sigma \varphi da = \frac{1}{4} Q_j \varphi_j \quad (۱۰.۶)$$

که در آن Q_j بار رسانای j ام است. بنابراین معادله (۸.۶) به صورت زیر درمی آید

$$U = \frac{1}{4} \int_V \rho \varphi dv + \frac{1}{4} \int_S \sigma \varphi da + \frac{1}{4} \sum_j Q_j \varphi_j \quad (۱۱.۶)$$

که جمع‌بندی آخر بر روی تمام رساناهاست و انتگرال سطحی منحصر است به سطوح نارسانا. همان‌طور که در فصل ۳ دیدیم، در بسیاری از مسائل که از لحاظ عملی جالب توجه‌اند همه بارها بر روی سطوح رساناها قرار می‌گیرند. در این شرایط معادله (۱۱.۶) تبدیل می‌شود به

$$U = \frac{1}{4} \sum_j Q_j \varphi_j \quad (۱۲.۶)$$

بعداً در همین فصل این رابطه را به تفصیل بررسی خواهیم کرد.

اکنون می‌خواهیم معادله (۱۲.۶) را با معادله (۶.۶)، که برای دستگاهی مرکب از بارهای نقطه‌ای به دست آمد، مقایسه کنیم. در وهله اول به نظر می‌رسد که هر دو معادله یکسان‌اند، لیکن تفاوت مهمی میان آنها وجود دارد. هنگام به دست آوردن معادله (۱۲.۶)، از رساناهای ماکروسکوپی بی‌بار که با افزودن نمو‌های بار به آنها به تدریج باردار می‌شدند، شروع کردیم. بنابراین، انرژی که در معادله (۱۲.۶) آمده است هم شامل انرژی برهم‌کنش میان رساناهای مختلف است و هم شامل خود - انرژی‌های بار هر رسانای جداگانه. اگر تنها یک رسانا وجود داشته باشد، خود - انرژی آن، $U = \frac{1}{2} Q_1 \varphi_1$ ، ناشی از برهم‌کنش بارهای گردهم آمده بر روی آن رسانا خواهد بود. ولی در به دست آوردن معادله (۶.۶)، هر یک از بارهای نقطه‌ای را به صورت یک واحد در نظر گرفتیم؛ پس در این معادله انرژی لازم برای تشکیل بارهای نقطه‌ای از نمو‌های کوچکتر بار، یعنی به اصلاح خود - انرژی بارهای نقطه‌ای، منظور نشده است. هرگاه بار را یک نقطه ریاضی فرض کنیم و بخواهیم خود - انرژی آن را محاسبه کنیم، نتیجه بینهایت می‌شود؛ اما این انرژی در فرمول‌بندی قانون کولن برای نیروی میان بارهای نقطه‌ای منظور نشده است، و در اینجا نیز نباید آن را به حساب آوریم. می‌توان نشان داد که از معادله (۱۲.۶) در حد، هنگامی که رساناها خیلی کوچک می‌شوند و به سمت بارهای «نقطه‌ای» میل می‌کنند، همان نتیجه قبلی به دست می‌آید. برای این منظور پتانسیل زامین رسانا را می‌توان به صورت مجموع دو جمله نوشت

$$\varphi_j = \varphi_{j1} + \varphi_{j2} \quad (۱۳.۶)$$

که در آن φ_{j1} پتانسیل ناشی از بار موجود بر روی خود زامین رسانا، و φ_{j2} پتانسیل ناشی از بار موجود بر روی سایر رساناهاست. پس معادله (۱۲.۶) می‌شود

$$U = \frac{1}{4} \sum_j Q_j \varphi_{j1} + \frac{1}{4} \sum_j Q_j \varphi_{j2} \quad (۱۴.۶)$$

اولین جمله این رابطه خود - انرژیهای مختلف رساناها را نشان می‌دهد. خود - انرژی هر رسانا، $\frac{1}{2} Q \phi$ ، به محیط اطراف آن رسانا بستگی دارد (زیرا توزیع بار بر روی هر رسانا، خود را با محیط اطراف تطبیق می‌دهد)؛ به علاوه، تنها پتانسیل مربوط به رسانای z که از لحاظ فیزیکی مفهوم دارد همان پتانسیل کل ϕ است. از اینرو، تئوریکتی که در معادله (۱۴.۶) صورت گرفته است به طور کلی خیلی بامعنی نیست. اما اگر رساناها به قدری کوچک باشند که از دید ما کروسکوپی بتوان آنها را به صورت بارهای نقطه‌ای در نظر گرفت، آنگاه تغییر توزیع بار بر روی يك «نقطه» نمی‌تواند قابل اهمیت باشد و هر خود - انرژی را می‌توان مستقل از محیط اطراف دانست. به علاوه، چون منظور ما از پتانسیل در نقطه z همان ϕ است، انرژی لازم برای قراردادن تعدادی رسانای بسیار کوچک که قبلاً باردار شده‌اند، در مکانهای مفروض همان جمع دوم در معادله (۱۴.۶) است، که با معادله (۶.۶) هم‌ارز است.

۳.۶ چگالی انرژی میدان الکتروستاتیکی

در بخش گذشته، برای انرژی الکتروستاتیکی يك توزیع بار دلخواه عبارتی به دست آوردیم. این عبارت، معادله (۸.۶)، شامل انتگرال گیری صریح بر روی توزیع بار است. اما می‌توان انرژی الکتروستاتیکی دستگاه را به نحو دیگری نیز بیان کرد، و این روش غالباً مفید است. بنابراین، با يك تبدیل ریاضی (انتگرال گیری جزء به جزء)، معادله (۸.۶) را به انتگرالی تبدیل می‌کنیم که دربرگیرنده بردارهای میدان $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ دستگاه باشد.

مجدداً توزیع بار دلخواهی را در نظر می‌گیریم که با چگالیهای ρ و σ مشخص می‌شود. برای سهولت فرض می‌کنیم که دستگاه بسیار کراندار است، یعنی می‌توانیم سطح بسته‌ای با ابعاد متناهی رسم کنیم که همه بارهای آزاد را دربر بگیرد. به علاوه، فرض می‌کنیم که همه چگالیهای سطحی بار، σ ، بر روی سطوح رساناها قرار گرفته باشند. این فرض در واقع هیچگونه محدودیتی ایجاد نمی‌کند، زیرا چنانچه چگالی سطحی بار در فصل مشترك دو دی الکتریک واقع باشد، می‌توان آن را اندکی گسترش داد و سپس آن را به صورت يك چگالی حجمی ρ در نظر گرفت. چگالیهای ρ و σ به‌جا به‌جایی الکتریکی وابسته‌اند؛ در تمامی نواحی دی الکتریک داریم

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

و بر روی سطوح رساناها^۱

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$$

۱. در اینجا ما ازدو روش بررسی مسئله رسانا، که در بخش ۷.۴ شرح داده شدند، روش اول را اختیار می‌کنیم.

پس رابطه (۸.۶) به صورت زیر درمی آید

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varphi \nabla \cdot \mathbf{D} dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da \quad (۱۵.۶)$$

در اینجا انتگرال حجمی روی قسمتی از فضا که در آن $\nabla \cdot \mathbf{D}$ صفر نیست گرفته می شود، و این ناحیه ای است خارج از رساناها. انتگرال سطحی بر روی سطوح رساناها گرفته می شود.

در انتگرال اول در معادله (۱۵.۶)، انتگرالده را می توان با استفاده از یکی از اتحادهای برداری که تاکنون چندین بار به کار برده ایم [معادله (۷.۱۰۱) از جدول ۱۰.۱] به صورت زیر نوشت

$$\varphi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \varphi \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \nabla \varphi$$

از دو انتگرال حجمی که از این تبدیل به دست می آیند، اولی را با به کار بردن قضیه واگرایی به یک انتگرال سطحی تبدیل می کنیم. بالاخره با توجه به اینکه $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ ، معادله (۱۵.۶) را می توان به صورت زیر نوشت

$$U = \frac{1}{2} \int_{S+S'} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}' da + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da \quad (۱۶.۶)$$

این معادله را می توان تا حد زیادی ساده کرد. سطح $S+S'$ که انتگرال اول از معادله (۱۶.۶) باید بر روی آن حساب شود، تمامی سطحی است که حجم V را محصور کرده است. این سطح متشکل است از S (سطوح تمام رساناهای موجود در دستگاه) و همچنین S' (سطحی که دستگاه را از سمت خارج محصور کرده است و می توان آن را در بینهایت فرض کرد). در هر دو این سطوح بردار عمود $\mathbf{n}'$ به سمت خارج از حجم V خواهد بود. در انتگرال آخری بردار عمود $\mathbf{n}$ به سمت خارج رسانا، یعنی به سمت داخل حجم V است. پس دو انتگرال سطحی بر روی سطح S همدیگر را خنثی می کنند. حال نشان خواهیم داد که انتگرال بر روی سطح S' نیز صفر می شود.

اگر توزیع بار مفروض، که دلخواه ولی کراندار است، مقداری بار خالص داشته باشد، آنگاه در فواصل زیاد از دستگاه بار، پتانسیل به نسبت عکس فاصله کاهش می یابد، یعنی به صورت r^{-1} . همچنین $\mathbf{D}$ متناسب با r^{-2} کاهش می یابد. مساحت یک سطح بسته که از نقطه ای به فاصله r می گذرد با r^2 متناسب است. پس مقدار انتگرال بر روی S' که سطح محصور کننده دستگاه در فاصله r است، با r^{-1} متناسب است و هنگامی که S' به بینهایت برده شود مقدار این انتگرال صفر می شود. @ اگر مقدار بار خالص توزیع بار صفر باشد، در آن صورت پتانسیل در فواصل دور

مانند يك چند قطبی رفتار می کند و سریعتر از r^{-1} کاهش می یابد. در این حال نیز می توان دید که انتگرال بر روی S' صفر می شود. پس برای انرژی الکتروستاتیکی داریم

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad (۱۷.۶)$$

که در آن انتگرال بر روی حجمی از دستگاه گرفته می شود که خارج از رساناها واقع است، یعنی بر روی دی الکتریکهای مختلف موجود در دستگاه. البته انتگرال گیری را می توان به تمامی فضا گسترش داد، زیرا میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ در داخل رساناها صفر است. چنانچه این فرمولبندی برای میدانهایی که بخشی از آنها در اثر بارهای نقطه ای به وجود آمده اند به کار رود، لازم است که «خود-انرژی» بینهایت این بارها را صریحاً تفريق کنیم. (مسئله ۷.۶) انرژی الکتروستاتیکی دستگاه الکتریکی در کجا قرار دارد؟ این سؤالی است که مشخص کردن معنای دقیق آن مشکل است، با وجود این، برای سهولت می توان تصور کرد که انرژی در میدان الکتریکی ذخیره شده است. معادله (۱۷.۶) نشان می دهد که چنین روشی دست کم نامعقول نیست، و علاوه بر آن این معادله مستلزم آن است که برای توزیع انرژی چگالی برابر با $\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ در واحد حجم در نظر بگیریم. بدین ترتیب به مفهوم چگالی انرژی در میدان الکتروستاتیکی می رسم

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (۱۸.۶ \text{ الف})$$

چون معادله (۱۷.۶) را برای دی الکتریکهای خطی به دست آورده بودیم، هردی الکتریک باید گذردهی ثابت ϵ مشخص می شود. وانگهی، بحث فصلهای قبل فقط به دی الکتریکهای همسانگرد محدود بود. از این رو، معادله (۱۸.۶ الف) معادل است با

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad (۱۸.۶ \text{ ب})$$

۴.۶ انرژی دستگاه رساناهای باردار . ضرایب پتانسیل

در بخش ۱۲.۳ نشان داده شد که يك رابطه خطی میان پتانسیلها و بارهای مجموعه ای از رساناها وجود دارد. درواقع، در دستگاهی مرکب از N رسانا، پتانسیل هریک از رساناها با معادله زیر داده می شود

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j \quad [۵۲.۳]$$

معادله (۵۲.۳) را برای N رسانا در خلأ اثبات کردیم، لیکن واضح است که وقتی دی الکتریکهای نیز در دستگاه حضور داشته باشند، مشروط به آنکه این دی الکتریکها خطی و بدون بار خارجی باشند، این استدلال باز هم صادق خواهد بود. ضریب p_{ij} ، آن قسمت از پتانسیل i امین رساناست که از وجود بار واحد بر روی رسانای j زام ناشی می شود. این ضرایب معمولاً ضرایب پتانسیل نامیده می شوند.

در بخش ۲۰.۶ عبارتی برای انرژی الکتروستاتیکی مجموعه ای از N رسانای باردار، یعنی معادله (۱۲.۶)، به دست آوردیم. از ترکیب این نتیجه با معادله (۵۱.۳) معادله زیر به دست می آید

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_i Q_j \quad (19.6)$$

از این رو، انرژی تابع درجه دومی است از بار رساناهای مختلف. چند حکم کلی را می توان در مورد ضرایب p_{ij} بیان کرد که مهمترین آنها عبارتند از (۱) $p_{ij} = p_{ji}$ ، (۲) همه p_{ij} ها مثبت اند، (۳) j هر چه باشد $p_{ii} - p_{ij} \geq 0$. اولین حکم از معادله (۱۹.۶) نتیجه می شود. در این معادله U بر حسب $U(Q_1, \dots, Q_N)$ بیان شده است؛ بنابراین

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial Q_1} \right) dQ_1 + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial Q_N} \right) dQ_N$$

هر گاه فقط dQ_1 تغییر کند، آنگاه

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial Q_1} \right) dQ_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (p_{1j} + p_{j1}) Q_j dQ_1 \quad (20.6)$$

این افزایش انرژی الکتروستاتیکی را می توان مستقیماً از معادله (۲۰.۶) نیز به دست آورد. با آوردن dQ_1 از منبعی با پتانسیل صفر، نتیجه می شود

$$dU = dW = \varphi_1 dQ_1 = \sum_{j=1}^N p_{1j} Q_j dQ_1 \quad (21.6)$$

معادلات (۲۰.۶) و (۲۱.۶) به ازای تمام مقادیر ممکن Q_j باید معادل باشند، و این مستلزم آن است که

$$\frac{1}{2} (p_{1j} + p_{j1}) = p_{1j}$$

و یا

$$p_{j\lambda} = p_{\lambda j} \quad (۲۲.۶)$$

حکم دوم، که بنا به آن پتانسیل ناشی از يك بار خالص مثبت، مثبت است، تقریباً به طور شهودی روشن است اما اثبات دقیق آن دشوار. درستی سومین حکم از استدلال زیر نتیجه می شود: فرض کنید رسانای i بار مثبت Q_i دارد و بقیه رساناها بی بارند. چون رسانای j ($j \neq i$) بی بار است، پس تعداد خالص خطوط جابه جایی که این رسانا را ترك می کنند صفر خواهد بود. دو حالت زیر را جداگانه بررسی می کنیم: (الف) هیچ خط جابه جایی به رسانای j وارد یا از آن خارج نمی شود؛ در این صورت نتیجه می گیریم که این رسانا در يك ناحیه هم پتانسیل قرار دارد، یعنی بایک رسانای دیگر حفاظت شده است. به عنوان مثال، این رسانا ممکن است درون رسانای i قرار گرفته و پتانسیل آن برابر φ_i باشد. در چنین شرایطی $p_{ij} = p_{ji}$. هرگاه رسانای j در درون رسانای k قرار داشته باشد، آنگاه $p_{ij} = p_{ik}$ و بلافاصله ما توجه خود را به رسانای k معطوف می کنیم. (ب) تعداد خطوط شار جابه جایی که وارد رسانای j می شوند با تعداد خطوط خروجی از آن برابرند. منشأ شار جابه جایی بار، رسانای i است؛ پس باید بتوان يك خط شار را که به رسانای j وارد می شود به طرف عقب دنبال کنیم (شاید از طریق رساناهای دیگر) تا به رسانای i برسیم. بنابراین، i در پتانسیل بالاتری از j قرار دارد، یعنی

$$\varphi_i > \varphi_j \quad (Q_i \text{ مثبت است})$$

یا

$$p_{ii} > p_{ij} \quad (۲۳.۶)$$

که به این معادله باید علامت تساوی را اضافه کرد تا حالت (الف) را نیز شامل شود. مفید بودن ضرایب p_{ij} را می توان با ذکر يك مثال ساده نشان داد. می خواهیم پتانسیل يك رسانای کروی بی بار را که يك بار نقطه ای q به فاصله r از مرکز آن قرار دارد پیدا کنیم. در اینجا $r > R$ و شعاع کره رساناست. بار نقطه ای و کره رسانا را به عنوان دستگاهی مرکب از دو رسانا در نظر می گیریم و از تساوی $p_{12} = p_{21}$ استفاده می کنیم. اگر کره بار Q داشته باشد و «نقطه» بی بار باشد، پتانسیل «نقطه» برابر $q/4\pi\epsilon_0 r$ خواهد بود؛ از این رو،

$$p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

آشکار است که وقتی «نقطه» بار q داشته باشد و کره بی بار باشد، پتانسیل کره برابر $q/4\pi\epsilon_0 r$ خواهد بود.

۵.۶ ضرایب ظرفیت و ضرایب القا

معادله (۵۲.۳)، که در فصل ۳ به دست آمد و در بخش ۴.۶ دوباره به آن اشاره شد، دستگاهی از N معادله خطی است که پتانسیل رساناها را بر حسب بارهایشان بیان می کند. این دستگاه معادلات را می توان برای تعیین بارهای Q_i حل کرد تا رابطه زیر به دست آید

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_j \quad (24.6)$$

که در آن c_{ii} ضریب ظرفیت و c_{ij} ($i \neq j$) ضریب القا نامیده می شود. حل واقعی معادله (۵۲.۳)، که ضرایب c را بر حسب p_{ij} ها بیان می کند، می تواند برای مثال با وارونه کردن ماتریس (با استفاده از دترمینانها) انجام شود.

خواص c ها از خواص مربوط به p ها، که قبلاً درباره شان صحبت شد نتیجه می شوند. بدین ترتیب: (۱) $c_{ij} = c_{ji}$ ، (۲) $c_{ii} > 0$ ، (۳) ضرایب القاصفر و یا منفی اند (مسئله ۱۰.۶). می توان معادله های (۲۴.۶) و (۱۲.۶) را با هم ترکیب کرد تا رابطه دیگری برای انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی مرکب از N رسانا به دست آید

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad (25.6)$$

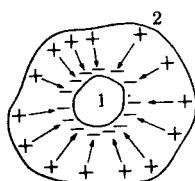
۶.۶ خازنها

دو رسانا که بتوانند بارهای مساوی و مختلف علامه ($\pm Q$) را در خود ذخیره کنند، و اختلاف پتانسیل میان آنها به بارداری بودن سایر رساناها بستگی نداشته باشد، تشکیل خازن می دهند. این بستگی نداشتن به بارهای دیگر به معنی آن است که یکی از این دو رسانا مانند سپری رسانای دیگر را حفاظت می کند. به عبارت دیگر، پتانسیلی که بارهای دیگر در هریک از رساناها این زوج رسانا ایجاد می کنند باید یکسان باشد. چنین وضعی در شکل ۱۰.۶ نشان داده شده است و در آن رساناهای ۱ و ۲ خازنی از این نوع را تشکیل می دهند. به طور کلی، اگر دو رسانای ۱ و ۲ خازنی تشکیل بدهند، می توان نوشت

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_{11} Q + p_{12} (-Q) + \varphi_x \\ \varphi_2 &= p_{12} Q + p_{22} (-Q) + \varphi_x \end{aligned} \quad (26.6)$$

که در آن $\pm Q$ بارهای ذخیره شده و φ_x پتانسیل مشترکی است که سایر بارها ایجاد می کنند.

۴



شکل ۱۰۶ رساناهای ۱ و ۲ تشکیل یک خازن می‌دهند. در اینجا $p_{۱۳} = p_{۲۳}$ ، زیرا مطابق قانون گاوس، وقتی ۱ و ۲ بدون بارند باید صرفنظر از بار روی ۳، پتانسیل یکسانی داشته باشند. به همین ترتیب $p_{۱۴} = p_{۲۴}$.

از تفریق معادلات (۲۶.۶) نتیجه می‌شود

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})Q \quad (27.6)$$

بنابراین اختلاف پتانسیل میان دو رسانای یک خازن متناسب است با بار ذخیره شده، Q . (بدیهی است که بار کل ذخیره شده صفر است، لیکن برحسب قرارداد، مقدار مطلق بار بر روی هر یک از دو رسانا با ذخازن نامیده می‌شود). معادله (۲۷.۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Q = C \Delta\varphi \quad (28.6)$$

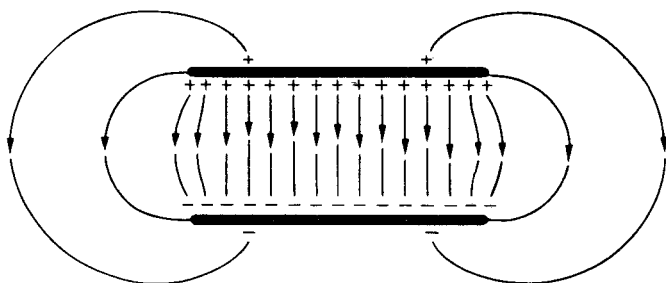
که در آن $C = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})^{-1}$ ظرفیت خازن نام دارد. بدیهی است که C مقدار بار ذخیره شده به ازای واحد اختلاف پتانسیل است، و در دستگاه mks برحسب کولن بر ولت، و یا فاراد ($1F \equiv 1C/V$) اندازه گیری می‌شود.

با به کار بردن نتایج بخشهای گذشته این فصل، انرژی خازن باردار را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta\varphi)^2 = \frac{1}{2} Q \Delta\varphi = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (29.6)$$

در صورتی که رساناهای تشکیل دهنده یک خازن اشکال هندسی ساده‌ای داشته باشند، ظرفیت خازن را می‌توان به روش تحلیلی به دست آورد. از این رو، مثلاً، محاسبه ظرفیت دو صفحه رسانای موازی، دو استوانه هم محور، دو کره هم مرکز، یا یک استوانه و یک صفحه راحت است. ظرفیت خازنی متشکل از دو صفحه موازی (شکل ۲.۶) را در اینجا به دست می‌آوریم، سایر موارد ساده به صورت تمرین در انتهای فصل آمده است.

میدان الکتریکی میان دو صفحه موازی بغیر از میدان حاشیه‌ای در لبه صفحات،



شکل ۲۰۶ میدان الکتریکی میان دو صفحه موازی با بارهای مخالف و ابعاد متناهی.

یکنواخت است. یک خازن ایده آل با صفحات موازی خازنی است که فاصله d میان صفحات آن در مقایسه با ابعاد این صفحات خیلی کوچک باشد؛ پس در خازن ایده آل می توانیم از میدان حاشیه ای صرف نظر کنیم. چنانچه فضای میان دو صفحه خازن از دی الکتریکی با گذر دهی ϵ پر شده باشد، میدان الکتریکی میان صفحات برابر خواهد بود با

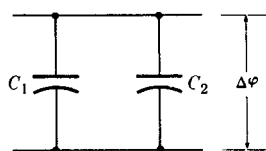
$$E = \frac{1}{\epsilon} \sigma = \frac{Q}{\epsilon A}$$

که در آن A مساحت هر یک از صفحات است. اختلاف پتانسیل $\Delta\phi = Ed$ است. در نتیجه ظرفیت این خازن عبارت است از

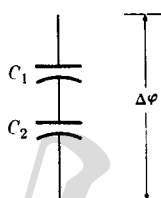
$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{\epsilon A}{d} \quad (۳۰.۶)$$

وقتی خازنی را به عنوان جزئی از یک مدار الکتریکی تصویر می کنند، معمولاً آن را با علامت $\text{—} \text{—}$ نشان می دهند. دو یا چند خازن را می توان به همدیگر متصل کرد. برای این کار یکی از رساناهای خازن اول را به یک رسانای خازن دوم وصل می کنیم، و به همین ترتیب تا به آخر. راههای ممکن برای اتصال خازنها عبارتند از اتصال موازی (شکل ۳۰.۶ الف) و اتصال متوالی (شکل ۳۰.۶ ب). پس از اتصال خازنها به یکدیگر معمولاً بهتر است ظرفیت معادل ترکیب اتصالها را معین کنیم. در مورد اتصال موازی، همان ولتاژ $\Delta\phi$ که در دوسر هر یک از خازنها وجود دارد در دوسر خازن معادل نیز موجود است، پس ظرفیت معادل بارابطة زیر داده می شود

$$C = \frac{Q_{\text{کل}}}{\Delta\phi} = C_1 + C_2 \quad (۳۱.۶ \text{ الف})$$



(الف)



(ب)

شکل ۳.۶ (الف) اتصال موازی و (ب) اتصال متوالی دو خازن.

در صورتی که دو خازن بدون بار به طور متوالی بسته و سپس باردار شوند، بقای بار ایجاب می‌کند که هر یک از خازن‌ها بار یکسانی به دست آورند. از این رو میان ظرفیت خازن معادل C با C_1 و C_2 رابطه زیر برقرار است

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (\text{ب } ۳۱.۶)$$

۷.۶ نیروها و گشتاور نیروها

تاکنون در این فصل روش‌های مختلفی را برای محاسبه انرژی الکتروستاتیکی دستگاه بار بررسی کردیم. حال نشان خواهیم داد که چگونه نیروی وارد بر یکی از اشیای واقع در دستگاه بار را می‌توان بساداستن این انرژی الکتروستاتیکی محاسبه کرد. فرض کنید بادستگاهی منزوی مرکب از قسمتهای متعدد (رساناها، بارهای نقطه‌ای، دی‌الکتریکها) سروکار داریم و یکی از این قسمتها تحت تأثیر نیروهای الکتریکی وارد بر آن به اندازه $d\mathbf{r}$ جابه‌جا می‌شود. کاری که نیروی الکتریکی بر روی دستگاه در این شرایط انجام می‌دهد عبارت است از

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned} \quad (\text{۳۲.۶})$$

چون دستگاه منزوی است، این کار در مقابل صرف مقداری انرژی الکتروستاتیکی U انجام می‌شود؛ به عبارت دیگر، طبق معادله (۱.۶)

$$dW = -dU \quad (\text{۳۳.۶})$$

از ترکیب معادلات (۳۲.۶) و (۳۳.۶) نتیجه می‌شود

$$-dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

و

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (۳۴.۶)$$

با عباراتی مشابه برای F_y و F_z . یعنی، در این مورد $\mathbf{F}$ نیروی پایستار است، و داریم $\mathbf{F} = -\nabla U$.

هر گاه جسم مورد بررسی به نحوی مقید باشد که در حول محوری دوران کند، آنگاه به جای معادله (۳۴.۶) می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد

$$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} \quad (۳۵.۶)$$

که در آن $\vec{\tau}$ گشتاور نیروی الکتریکی و $d\vec{\theta}$ جابه‌جایی زاویه‌ای است. با نوشتن $\vec{\tau}$ و $d\vec{\theta}$ بر حسب مؤلفه‌های آنها (τ_1, τ_2, τ_3) و $(d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3)$ و ترکیب معادلات (۳۳.۶) و (۳۵.۶)، نتیجه می‌گیریم که

$$\tau_1 = -\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \quad (۳۶.۶)$$

و به همین ترتیب برای سایر مؤلفه‌ها.

بدین ترتیب به هدف خود رسیده‌ایم

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q \quad (۳۴.۶ \text{ الف})$$

$$\tau_1 = -\left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1}\right)_Q \quad (۳۶.۶ \text{ الف})$$

در معادلات فوق شاخص پایین Q اضافه شده است تا نشان دهد که دستگاه منزوی است و در نتیجه بار کل آن در اثنای جابه‌جایی $d\mathbf{r}$ یا $d\vec{\theta}$ ثابت می‌ماند. برای استفاده بیشتر از این روش ضروری است که U به صورت تحلیلی بیان شود، و بستگی خاص U به مختصات x یا θ_1 نیز باید در دست باشد. به زودی برای نمایش مفید بودن این روش مثالی خواهیم آورد.

اما معادلات (۳۴.۶ الف) و (۳۶.۶ الف) تمام موارد مورد توجه را دربر نمی‌گیرند، زیرا همان طور که هنگام اثبات آنها اشاره شد، این معادلات محدودند به دستگاه‌های منزوی که در آنها بار ثابت می‌ماند. در گروهی دیگر از مسائل مهم، کلیه بارها بر روی سطوح رسانا قرار می‌گیرند، و این رساناها با منابع خارجی انرژی (مثلا

باتریها) در پتانسیلهای ثابتی نگه داشته می شوند. در اینجا نیز مجدداً می توانیم به یکی از قسمتهای دستگاه مجال دهیم تا تحت تأثیر نیروهای الکتروستاتیکی وارد بر آن حرکت کند، و کار انجام شده (در این حالت به وسیله دستگاه و باتریها) باز هم از طریق معادله (۳۲.۶) به نیرو مربوط خواهد شد. اما کار در این حالت عبارت است از

$$dW = dW_b - dU \quad (37.6)$$

که در آن dW_b کاری است که باتریها انجام می دهند. قبل از آنکه برای این مورد بتوانیم رابطه ای که U را به نیروی وارد بر قسمتی از دستگاه مربوط می کند به دست آوریم، لازم است که dW_b را از معادله (۳۷.۶) حذف کنیم.

انرژی الکتروستاتیکی U برای دستگاهی از رساناهای باردار، قبلاً با معادله (۱۲.۶) داده شده است. اکنون اگر قسمتی از دستگاه، در حالی که پتانسیلهای کلیه رساناهای دستگاه همچنان ثابت اند جابه جا شود، خواهیم داشت

$$dU = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \varphi_j dQ_j \quad (38.6)$$

و انگهی، کاری که باتریها انجام می دهند، dW_b ، برابر است با کاری که لازم است تا هریک از نمره های بار dQ_j از پتانسیل صفر به پتانسیل مربوط به رسانای مورد نظر برسند. با استفاده از معادله (۲.۶)، این مقدار کار برابر است با

$$dW_b = \sum_j \varphi_j dQ_j \quad (39.6)$$

بنابراین

$$dW_b = \epsilon_0 dU \quad (40.6)$$

با به کار بردن این معادله برای حذف dW_b از معادله (۳۷.۶) و ترکیب نتیجه حاصل با معادله (۳۲.۶)، خواهیم داشت

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

یا

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_\varphi \quad (41.6)$$

در اینجا شاخص پایین φ برای آن به کار رفته است که نشان دهد در اثنای جابه جایی مجازی $d\mathbf{r}$ ، همه پتانسیلها ثابت نگه داشته می شوند. به نحوی مشابه می توان اثبات کرد که

$$\tau_1 = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_1} \right)_\varphi \quad (۴۲.۶)$$

به منظور ذکر مثالی در مورد روش انرژی، مسئله زیر را بررسی می کنیم. خازنی با صفحات موازی در دست است که فاصله میان صفحات آن d و ناحیه میان صفحات آن باریک قطعه دی الکتریک جامد با گذردهی ϵ پر شده است. ابعاد هر صفحه خازن عبارت اند از طول l و عرض w . صفحه ها در اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\varphi$ نگه داشته شده اند. قطعه دی الکتریک در امتداد l آنقدر بیرون کشیده می شود که فقط طول x آن در میان صفحات باقی بماند (شکل ۴.۶)، نیرویی که می کوشد قطعه دی الکتریک را سر جایش بر گرداند محاسبه کنید.

جواب: انرژی دستگاه را می توان باهر یک از چند روش مختلف محاسبه کرد. مثلاً، چون $E = \Delta\varphi/d$ در همه جای فضای میان صفحه ها یکسان است، از رابطه زیر استفاده می کنیم

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv$$

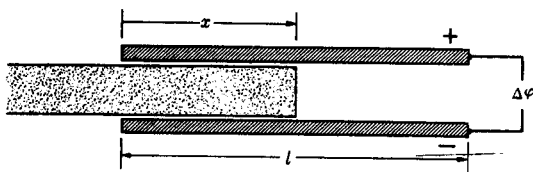
که فضایی که انتگرال بر روی آن محاسبه می شود فقط لازم است که شامل جاهایی باشد که در آنجاها $E \neq 0$ است. با صرف نظر کردن از اثرات حاشیه ای در لبه های خازن، خواهیم داشت

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\Delta\varphi}{d} \right)^2 dwx + \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\Delta\varphi}{d} \right)^2 dw(l-x)$$

از معادله (۴۱.۶) نیرو را می توان محاسبه کرد

$$F_x = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0) w \frac{(\Delta\varphi)^2}{d} = \frac{1}{2} (K - 1) \epsilon_0 E^2 A$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv,$$



شکل ۴.۶ قطعه دی الکتریک که قسمتی از آن از میان دو صفحه باردار بیرون کشیده شده است.

که درجهت افزایش x است. موردی که در آن صفحات منزوی اند (بار ثابت Q) در مسائل ۱۹۰۶ و ۲۴۰۶ بررسی می‌شود.

* ۸.۶ نیروی وارد بر توزیع بار

این فصل بدون بحث مختصری دربارهٔ محاسبهٔ نیروی الکتریکی با استفاده از اصول اولیه، یعنی با انتگرال گیری مستقیم کامل نخواهد بود، هرچند که این روش به تفصیل در یکی از فصول گذشته بررسی شده است (بخش ۱۰.۴). نکتهٔ مهمی که باید به یاد داشت این است که در محاسبهٔ نیروی وارد بر هر عنصر بار، dq ، میدان الکتریکی $\mathbf{E}_s$ حاصل از خود این عنصر باید از میدان الکتریکی کل کم شود

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{E} - \mathbf{E}_s) dq \quad (۴۳.۶)$$

از این رو برای مثال، وقتی نیروی وارد بر یک بار نقطه‌ای را محاسبه می‌کنیم، میدان الکتریکی بینهایتی که خود این بار نقطه‌ای تولید می‌کند، باید در میدان الکتریکی مؤثری که در آن نقطه اثر می‌کند منظور نشود. تأثیر یک توزیع بار گسترده که با میدان الکتریکی خودش برهم کنش دارد به نحوی است که تنشهای داخلی در بار تولید می‌کند، لیکن این تنشها هرگز نمی‌توانند به نحوی ترکیب شوند که یک جا به جایی صلب در مکان بار ایجاد کنند. نیروی وارد بر جسمی که حاوی چگالی سطحی $\sigma(x, y, z)$ است از ترکیب معادلات (۵۷.۴) و (۵۸.۴) به دست می‌آید

$$\mathbf{F} = \oint_s (\mathbf{E} - \mathbf{E}_s) \sigma da \quad (۴۴.۶)$$

که در آن انتگرال بر روی تمامی سطح جسم گرفته می‌شود. میدان $\mathbf{E}_s$ با معادله (۶۰.۴) داده می‌شود

$$\mathbf{E}_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \quad (۴۵.۶)$$

اگر جسم یک رسانا باشد، رابطهٔ ساده‌ای میان میدان الکتریکی کل در سطح، $\mathbf{E}$ ، و $\mathbf{E}_s$ وجود خواهد داشت. پس نیروی وارد بر هر رسانا، همان‌طور که قبلاً در بخش ۱۰.۴ به دست آورده بودیم، برابر است با

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_s \sigma \mathbf{E} da \quad (۴۶.۶ \text{ الف})$$

یا

$$\mathbf{F} = \oint_s \frac{\sigma^2}{2\epsilon} \mathbf{n} da \quad (۴۶.۶ \text{ ب})$$

در پایان، نیروی وارد بر یک توزیع حجمی بار را به دست می آوریم. نیروی وارد بر یک عنصر بار ρdv به صورت زیر است

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{E} - \mathbf{E}_s) \rho dv \quad (۴۷.۶)$$

اما میدان $\mathbf{E}_s$ که عنصر حجمی dv تولید می کند متناسب است با خارج قسمت حجم بر مجذور یکی از ابعاد مناسب آن عنصر، و این خارج قسمت در حد، وقتی که $dv \rightarrow 0$ ، به سمت صفر میل می کند. از این رو $\mathbf{E}_s$ کسر قابل اغماضی از $\mathbf{E}$ است، و برای نیروی وارد بر باری که در حجم V واقع است می توان نوشت

$$\mathbf{F} = \int_{V_0} \rho \mathbf{E} dv \quad (۴۸.۶)$$

۹.۶* تعبیر ترمودینامیکی انرژی الکتروستاتیکی

انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی از رساناهای باردار و دی الکتریکها را به صورتهای مختلف به دست آورديم، به خصوص می دانیم که

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad [۱۷.۶]$$

که در آن انتگرال بر روی همه دی الکتریکها (و از آن جمله خلا) گرفته می شود. طبعاً این سؤال پیش می آید که آیا می توان U را از نظر ترمودینامیکی تعبیر کرد، یعنی آیا این انرژی بخشی از انرژی داخلی دستگاه است؟ برای پاسخ دادن به این سؤال باید به نحوه به دست آوردن U بازگردیم، یعنی به این نکته که U عبارت است از کاری که باید روی دستگاه انجام دهیم تا آن را به حالت باردار در آوریم. از این رو واقعاً U يك جمله مربوط به کار است، و مسئله آن است که تحت چه شرایطی يك نموکار را می توان بسایکی از خواص ترمودینامیکی دستگاه یکی دانست.

مطابق قانون اول ترمودینامیک (که بیان کننده بقای انرژی است)، برای يك فرایند

برگشت پذیر داریم

$$@Quark\_Book$$

$$dE = T dS + dW$$

$$(۴۹.۶)$$

که در آن dE معرف تغییر انرژی داخلی دستگاه، dS معرف تغییر آنتروپی دستگاه، dW کار انجام شده بر روی آن، و T دمای مطلق است. البته کمیت TdS گرمای افزوده شده به دستگاه در اثنای فرایند است.

بدیهی است که تنها در يك فرایند بی دررو می توان نمودار dW را با تغییر در انرژی داخلی dE یکی دانست، یعنی در فرایندی که در آن $dS = 0$ باشد. اما دمای دستگاه ضمن يك فرایند بی دررو عموماً تغییر می کند، و ضرایب دی الکتریک که توابعی از دما هستند نیز تغییر می کنند. یادآوری می کنیم که معادله (۱۷.۶) از معادله (۸.۶) به دست آمد، و آن معادله نیز با این فرض به دست آمد که ضرایب دی الکتریک مختلف در اثنای فرایند باردار کردن ثابت می مانند. از این رو، در يك فرایند بی دررو رابطه $dW = dU$ برقرار نیست. بنابراین، باید خود را به فرایندهای تکدما محدود کنیم، و در چنین فرایندهایی نمی توان dW را با dE یکی دانست.

کمیت ترمودینامیکی موسوم به انرژی آزاد هلمهولتز برای يك دستگاه با رابطه $F = E - TS$ تعریف می شود. پس از مشتق گیری از این رابطه و ترکیب نتیجه حاصل با معادله (۴۹.۶) نتیجه می شود

$$\begin{aligned} dF &= dE - T dS - S dT \\ &= -S dT + dW \end{aligned} \quad (50.6)$$

این درست همان معادله مورد نظر ماست. برای يك فرایند تکدما، dF برابر است با dW و برابر است با dU ؛ و در نتیجه می توان گفت که انرژی الکتروستاتیکی عبارت است از انرژی آزاد دستگاه الکتروستاتیکی: $dU = dF$. این انرژی نشان دهنده حداکثر کاری است که می توان بعدها از میدان الکتروستاتیکی استخراج کرد.

برای دستگاهی که در دمای ثابت نگه داشته شده است، انرژی آزاد همان نقشی را ایفا می کند که انرژی پتانسیل برای يك دستگاه مکانیکی (یعنی دستگاهی مستقل از دما).

۱۰.۶ خلاصه مطالب

انرژی پتانسیل الکتروستاتیکی دستگاهی مرکب از بارهای نقطه ای به صورت کاری محاسبه می شود که باید توسط يك عامل خارجی در مقابل نیروهای کولنی میان بارها انجام شود تا اینکه پیکربندی مفروض گردهم آورده شود. این انرژی پتانسیل را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$U = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$$

که در آن φ_j که پتانسیل ناشی از همه بارهای دیگر در مکان q_j است، برابر است با

$$\varphi_j = \sum' \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}}$$

که در این جمع بندی جمله $k=j$ منظور نمی شود. برای یک توزیع بار کلی، به شرط آنکه همه دی الکتریکهای موجود خطی باشند، انرژی الکتروستاتیکی به صورت زیر درمی آید

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dv$$

که در آن پتانسیل φ عبارت است از پتانسیلی که چگالی بار خارجی ρ در حضور محیطهای دی الکتریکی تولید می کند. (ρ ممکن است بار متمرکز در یک توزیع سطحی بار یا بارهای نقطه ای را نیز شامل شود.) با انتگرال گیری جزء به جزء، انرژی دی الکتریکهای خطی به انتگرال زیر تبدیل می شود

$$U = \int u dv$$

که این انتگرالی است بر روی چگالی انرژی میدان الکتریکی، یعنی

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon}$$

هنگامی که این فرمول بندی برای بارهای نقطه ای به کار می رود، «خود-انرژی» نامتناهی آنها باید تفريق شود.

۹. وقتی تمام بار به صورت یک توزیع سطحی بر روی رساناها، که سطح این رساناها سطوحی هم پتانسیل اند قرار داشته باشد، انرژی الکتروستاتیکی به صورت خاص زیر بیان می شود

$$U = \frac{1}{2} \sum Q_i \varphi_i$$

سپس نتیجه می شود که ضرایب موجود در تابعهای خطی

$$\varphi_i = \sum p_{ij} Q_j$$

و در تابعهای معکوس، یعنی، در تابعهای

$$Q_i = \sum c_{ij} \varphi_j$$

در شرایط زیر صدق می کنند

$$p_{ij} = p_{ji}, \quad c_{ij} = c_{ji}$$

$$(\text{به علاوه، } 0 < p_{ii} \leq p_{ij} \text{ و } 0 \leq c_{ij} < c_{ii})$$

۲. در حالت خاص، وقتی دو رسانا يك خازن تشکیل می دهند

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta \varphi$$

با

$$Q = C \Delta \varphi$$

برای خازنی با صفحات موازی

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

۳. نیروی الکتریکی وارد بر قسمتی از يك دستگاه منزوی، که هر رسانای آن باری ثابت دارد، برابر است با منفی شیب انرژی الکتروستاتیکی

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_\varphi$$

در صورتی که دستگاه منزوی نباشد، ولی در عوض پتانسیل هر رسانا به وسیله يك عامل خارجی (باتری) ثابت نگه داشته شده باشد، نیرو با رابطه زیر بیان می شود

$$F_x = + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_\varphi$$

مسائل

۱۶. يك الکترون سریع (با انرژی جنبشی $[10^{-17} \times 3]$ به فضایی که دارای میدان الکتریکی یکنواخت $E = 1000 \text{ V/m}$ است وارد می شود. میدان موازی راستای حرکت الکترون و در جهتی است که حرکت آنرا کند می کند. الکترون قبل از آنکه به حال سکون

در آید چه فاصله‌ای را طی می‌کند؟ ($10^{-11} \times 10^6 = 10^{-5}$ متر)

۲.۶ يك پوسته‌ی الکتريک کروی (به شعاع داخلی a ، شعاع خارجی b ، و ثابت دی‌الکتریک K) و يك بار نقطه‌ای q به فاصله‌ی بی‌نهایت از یکدیگر قرار دارند. بار نقطه‌ای را به مرکز پوسته‌ی الکتريک منتقل می‌کنیم. تغییر انرژی دستگاه را محاسبه کنید.

۳.۶ دو قطبی ql ، عمود بر صفحه‌ای رسانا قرار گرفته است به طوری که بار q — در فاصله‌ی d و بار $+q$ در فاصله‌ی $d+l$ از صفحه واقع است. انرژی الکتروستاتیکی این دستگاه بار را محاسبه کنید. (دوهمایی: انرژی دستگاهی متشکل از بارهای واقعی به علاوه بارهای تصویری در خلا را در نظر بگیرید. بارهای تصویری را طوری انتخاب کنید که میدان E درست را در جلوی صفحه تولید کنند.)

۴.۶ يك پوسته‌ی کروی باردار به شعاع R ، و چگالی بار سطحی یکنواخت σ_0 مفروض است. خود — انرژی این توزیع بار را به دو طریق تعیین کنید: (الف) با انتگرال گیری مستقیم از معادله (۸.۶)؛ (ب) با انتگرال گیری بر روی میدان، یعنی $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$ / ۲.

۵.۶ يك توزیع بار کروی به شعاع R و چگالی یکنواخت ρ مفروض است. خود — انرژی توزیع را به دو روش محاسبه کنید: (الف) با انتگرال گیری مستقیم از معادله (۸.۶)؛ (ب) با انتگرال گیری بر روی میدان، $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv$ / ۲.

۶.۶ فرض کنید الکترون يك ذره‌ی کروی با بار یکنواخت به شعاع R باشد. و نیز فرض کنید که انرژی سکون $m c^2$ (m جرم سکون الکترون و c سرعت نور است) منشأ الکتروستاتیکی دارد و با نتیجه‌ای که از مسئله ۵.۶ به دست آمد برابر است. با قراردادن مقدار عددی مناسب برای بار و جرم الکترون، «شعاع کلاسیک» الکترون، R ، را محاسبه کنید.

۷.۶ دوبار نقطه‌ای q_1 و q_2 به فاصله‌ی d از یکدیگر قرار دارند. اگر میدانهای مربوط به آنها در نقطه‌ی P به ترتیب $\mathbf{E}_1$ و $\mathbf{E}_2$ باشند، در آن صورت

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$$

(الف) نشان دهید که انتگرالهای E_1^2 و E_2^2 بر روی تمامی فضا واگرا هستند. این همان «خود — انرژی» نامتناهی است که باید از انرژی U کاسته شود. (ب) انتگرالی برای سهم مربوط به $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ در U بنویسید، و نشان دهید که این انتگرال واگرا نیست.

۸.۶ (الف) ظرفیت خازنی که می‌تواند J ۱۰۰۰ رادر V ۱۰۰۰ ذخیره کند، چقدر است؟ (ب) فرض کنید که خازن صفحاتی موازی و به فاصله‌ی 5×10^{-5} از یکدیگر دارد، و باماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک ۲ پر شده است. مساحت مورد نیاز صفحات چقدر است؟

۹.۶ دستگاه برق‌ساز (الکتروفور) تشکیل شده است از صفحه‌ی مدور تختی از موم و صفحه‌ی مشابهی از فلز که دسته‌ای از جنس عایق دارد. به صفحه‌ی مومین، از طریق مالش آن با پارچه‌ی

پشمی یا پوست، بار مقید Q داده می‌شود. سپس صفحه فلزی روی صفحه مومین قرار داده می‌شود و موقتاً به زمین متصل می‌شود تا بار Q — را به دست آورد. صفحه فلزی سرانجام از صفحه مومین جدا می‌شود، و درعین حال بار ($-Q$) خود را حفظ می‌کند. فرض کنید که شعاع صفحات 10 cm و $Q = 0.3\text{ }\mu\text{C}$ ، و فاصله اولیه دو صفحه $m \cdot 10^{-5}$ باشد. اختلاف پتانسیل میان صفحات و انرژی ذخیره شده را موقعی که فاصله میان دو صفحه (الف) $d = 10^{-5}\text{ m}$ و (ب) $d = 0.02\text{ m}$ است، پیدا کنید.

۱۵.۶ دستگاهی متشکل است از فقط دو رسانا. ضرایب ظرفیت و القا را صریحاً بر حسب ضرایب پتانسیل p_{ij} به دست آورید.

۱۱.۶ دو رسانای کروی در خلا قرار دارند. رسانای ۱ به شعاع R به زمین متصل است (یعنی پتانسیل آن صفر است). رسانای ۲ به قدری کوچک است که می‌توان آن را یک بار نقطه‌ای تصور کرد. بار این رسانا q است و به فاصله d از کره متصل به زمین قرار دارد. چه مقدار بار روی کره متصل به زمین القا می‌شود؟ (از مفهوم ضرایب پتانسیل استفاده کنید.)

۱۲.۶ دستگاهی مرکب از دو جسم رسانا واقع در یک محیط دی‌الکتریک خطی مفروض است. رسانای ۱ بار ندارد و رسانای ۲ متصل به زمین است. ثابت کنید پتانسیل رسانای ۲ نیز با پتانسیل زمین برابر است.

۱۳.۶ خازنی با صفحات موازی از یک دی‌الکتریک مرکب ساخته شده است. ورقه‌ای از یک جسم دی‌الکتریک با گذردهی ϵ و ضخامت d_1 در بالای ورقه دی‌الکتریک دیگری (با گذردهی ϵ و ضخامت d_2) قرار داده شده است. ترکیب این دو دی‌الکتریک میان صفحات موازی رسانا که به فاصله $d_1 + d_2$ از یکدیگر واقع اند، قرار گرفته است. ظرفیت خازن را در واحد سطح صفحات آن به دست آورید.

۱۴.۶ استوانه‌ای طویل و رسانا به شعاع a موازی یک صفحه رسانای نامتناهی و به فاصله h از آن قرار دارد. نشان دهید که ظرفیت دستگاه در واحد طول استوانه با رابطه

$$C = 2\pi\epsilon_0 / \cosh^{-1}(h/a)$$

داده می‌شود (بخش ۱۱.۳).

۱۵.۶ دو خازن کاملاً مشابه را که میان صفحات آنها هواست به صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم و ترکیب حاصل را در اختلاف پتانسیل ثابت 50 V نگه می‌داریم. یک ورقه دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک 10 و به ضخامت یک دهم فاصله صفحات را در داخل یکی از خازن‌ها قرار می‌دهیم، اختلاف پتانسیل دوسرین خازن را محاسبه کنید.

۱۶.۶ ظرفیت یک الکتروسکوپ با برگه طلا کاملاً ثابت نیست چون وقتی $\Delta\varphi$ افزایش یابد برگه به طرف محفظه نزدیک‌تر می‌شود. ظرفیت مورد نظر را می‌توان به صورت

$$C = a + b(\Delta\varphi)^2$$

نوشت. برای دستگاهی مشخص ثابتهای a و b را چگونه می‌توانید تعیین کنید؟ وقتی الکتروسکوپ باردار است انرژی آن چقدر است؟ آیا انرژی تماماً الکتریکی است؟

۱۷.۶ دو پوسته رسانای کروی هم مرکز به شعاعهای r_1 و r_2 را به ترتیب در پتانسیلهای φ_1 و φ_2 نگه داشته‌ایم. فضای میان دو پوسته را از یک محیط دی‌الکتریک پر کرده‌ایم. با محاسبه مستقیم نشان دهید که انرژی ذخیره شده در دی‌الکتریک برابر است با $\frac{1}{2}C(\varphi_1 - \varphi_2)$ و در نتیجه C ، ظرفیت دستگاه، را تعیین کنید.

۱۸.۶ دورسانای استوانه‌ای هم محوره که تقریباً شعاع آنها یکی است به اندازه d در بعد شعاعی از یکدیگر جدایند. استوانه‌ها را به طور قائم در یک دی‌الکتریک مایع که پذیرفتاری الکتریکی آن χ و چگالی جرمی آن ρ است فرو می‌بریم. استوانه‌ها را در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه می‌داریم. مایع دی‌الکتریک تاجه ارتفاعی، h ، در فضای میان رساناها بالامی‌آید؟ (از کشش سطحی صرف نظر کنید.)

۱۹.۶ فضای میان صفحات خازنی با صفحات موازی به وسیله بره‌ای از جامد دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک K پر شده است. ابعاد صفحه خازن عبارت‌اند از عرض w ، طول l ، و فاصله صفحات d . خازن را در حالی که به منبعی با اختلاف پتانسیل $(\Delta\varphi)$ متصل است باردار و سپس آن را از منبع جدا می‌کنیم. حال قسمتی از بره دی‌الکتریک را در امتداد بعد l بیرون می‌کشیم به طوری که فقط طول x از آن در داخل خازن باقی بماند. (الف) اختلاف پتانسیل میان صفحات خازن چقدر است؟ (ب) نیرویی که می‌خواهد بره دی‌الکتریک را دوباره به داخل خازن بکشد چقدر است؟

۲۰.۶ ظرفیت یک خازن متغیر که عایق آن هواست، موقعی که یکی از صفحات آن از 0° تا 180° بچرخد، به طور خطی از 50 pF تا 364 pF تغییر می‌کند. صفحه چرخان را در زاویه 75° تنظیم کرده و دو سر خازن را در اختلاف پتانسیلی برابر با 400 V ولت نگه می‌داریم. جهت و اندازه گشتاور نیروی الکتروستاتیکی وارد بر صفحه خازن را پیدا کنید.

۲۱.۶* یک پوسته رسانای کروی، بدون بار و به جرم m ، در یک دی‌الکتریک مایع با ثابت دی‌الکتریک K شناور است به طوری که یک چهارم حجم آن در مایع غوطه‌ور است. تاجه پتانسیلی باید کره را باردار کنیم تا نیمی از حجم آن غوطه‌ور شود؟ (دانهایی: فرض کنید میدان الکتریکی پوسته باردار که تانیمه غوطه‌ور است یک میدان شعاعی خالص باشد، و بعداً نشان دهید که جمع $\sigma_+ + \sigma_-$ روی سطح کروی طوری است که فرض بالا را تأیید می‌کند.)

۲۲.۶ یک بره دی‌الکتریک به ضخامت d و ثابت دی‌الکتریک K فضای میان صفحات خازنی با صفحات موازی را پر کرده است. مساحت صفحه خازن A است. نیروی الکتروستاتیکی

وارد بر یکی از صفحات را برای دومورد زیر محاسبه کنید: (الف) با فرض اینکه دی الکتریک مستقیماً با آن صفحه در تماس باشد؛ (ب) با فرض اینکه میان دی الکتریک و آن صفحه شکاف باریکی از هوا وجود داشته باشد. در هر دو مورد صفحات را در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ نگه می‌داریم.

۲۳.۶ مثال مربوط به شکل ۴.۶ را با انرژی الکتروستاتیکی به صورت $U = 1/2 C(\Delta\varphi)^2$ حل کنید؛ در اینجا $C = C(x)$ ظرفیت خازن است وقتی که قطعه دی الکتریک تا فاصله x فرو رفته است.

۲۴.۶ فرض کنید انرژی الکتروستاتیکی دستگاهی $U = 1/2 Q \Delta\varphi$ است، که در آن $Q = C \Delta\varphi$. ظرفیت را به صورت $C = C(x)$ ، که به پارامتر هندسی x بستگی دارد، در نظر بگیرید. در اینجا پارامتر x مکان قسمتی از دستگاه را مشخص می‌کند. نشان دهید که نیروی وارد بر آن قسمت، برای مقدار به خصوصی از Q و $\Delta\varphi$ ، طبق معادله (۳۴.۶ الف) با Q ثابت، با نیروی وارد بر آن طبق معادله (۴۱.۶) با $\Delta\varphi$ ثابت، یکسان است.

۲۵.۶ مثال مربوط به شکل ۴.۶ را چنانچه ضخامت d ی برة دی الکتریک از فاصله d میان صفحات بسیار کمتر باشد، حل کنید. (داهنمایی: در این حالت، بنسب نتیجه مسئله ۱۵.۴، D در تمامی فضای میان صفحات تقریباً یکسان است، نه E .)

جریان الکتریکی

تاکنون بارهای ساکن را بررسی می کردیم. اکنون می خواهیم بارهای در حال حرکت یکنواخت را مطالعه کنیم. این گفته به این معناست که ما با مواد رسانای الکتریسته سروکار داریم زیرا، بر حسب تعریف، رساناماده ای است که در آن حاملهای بار تحت تأثیر میدانهای الکتریکی پایا، آزادی حرکت دارند (بخش ۵.۲). تعریف بالا نه فقط شامل رساناهای متعارف، نظیر فلزها و آلیاژهاست بلکه نیمرساناها، الکترولیتها، و گازهای یونیده، دی الکتریکهای ناکامل، و حتی خلأ اطراف کاتود گسیلنده گرمایونی را نیز در بر می گیرد. در بسیاری رساناها حاملهای بار الکترون اند. در سایر موارد ممکن است یونهای مثبت یا منفی حامل بار باشند.

بارهای متحرك تشكيل جريان می دهند، و فرایندی که در آن بار انتقال می یابد رسانش نام دارد. به عبارت دقیقتر، جريان (I) به صورت آهنگ انتقال بار از سطح معینی در رسانا (مثلا، از مقطع مفروضی از يك سیم) تعریف می شود. بنابراین

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1.7)$$

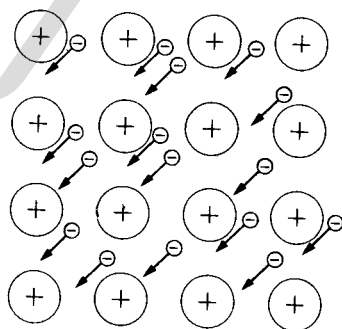
که در آن $Q = Q(t)$ بارخالص منتقل شده در زمان t است. یکای جريان در دستگاه mks آمپر (A) است، که به افتخار فیزیکدان فرانسوی آندره ماری آمپر^۱ نامگذاری شده است. بدیهی است که

$$\text{يك كولن} = \frac{\text{يك آمپر}}{\text{يك ثانيه}}$$

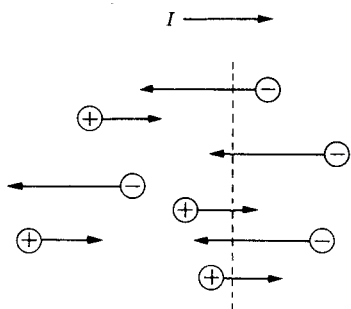
۱.۷ ماهیت جریان

در فلزات الکترون‌ها تمام جریان را حمل می‌کنند، در حالی که یون‌های مثبت سنگین در مکان‌های منظمی در ساختار بلوری، ثابت‌اند (شکل ۱.۷). از هراتم فقط الکترون‌های ظرفیت آن (الکترون‌های خارج‌ترین مدار) آزادند که در فرایند رسانش شرکت کنند؛ سایر الکترون‌ها به یون‌های خود قویاً مقیدند. در شرایط حالت پایا، می‌توان الکترون‌ها را از نقطه‌ای به فلز وارد و از نقطه‌ای دیگر از آن خارج کرد، اما فلز روی هم رفته از لحاظ الکتروستاتیکی خنثی است. نیروهای قوی الکتروستاتیکی از تجمع الکترون‌های اضافی در هر نقطه از فلز جلوگیری می‌کنند. همین طور، کمبود الکترون‌ها به وسیله نیروهای الکتروستاتیکی با علامت مخالف جبران می‌شود. بعداً خواهیم دید که در رساناها بار اضافی با سرعت فوق‌العاده زیاد تلف می‌شود. از این رو، متوجه می‌شویم که می‌توان موضوع جریان الکتریکی را بدون در نظر گرفتن جزئیات اثرهای الکتروستاتیکی وابسته به حامل‌های بار مطالعه کرد.

در الکترولیتها، هم یون‌های مثبت و هم یون‌های منفی، هر دو، جریان را حمل می‌کنند. با وجود این، چون بعضی یون‌ها سریعتر از یون‌های دیگر حرکت می‌کنند، معمولاً یک نوع یون در رسانش نقش غالب را ایفا می‌کند. توجه به این نکته مهم است که حرکت یون‌های مثبت و منفی در جهات مخالف (شکل ۲.۷) سبب ایجاد جریان در جهت یکسانی می‌شود. صحت این گفته از روی معادله (۱.۷) آشکار است زیرا بارخالص انتقال یافته از هر سطح مفروض هم به علامت حامل بار و هم به جهت حرکت آن بستگی دارد. بنابراین، در شکل ۲.۷ هر دو گروه حامل بارهای مثبت و منفی، جریانی به سمت راست ایجاد می‌کنند. بر حسب قرارداد، جهت حرکت بارهای مثبت (یا به طور معادل، عکس جهت حرکت بارهای منفی) را به عنوان جهت یا سوی جریان انتخاب می‌کنند. به طور کلی، جریان الکتریکی در پاسخ به میدان الکتریکی به وجود می‌آید. اگر یک میدان الکتریکی بر جسم رسانایی اعمال شود، موجب خواهد شد که حامل‌های بار مثبت در جهت کلی میدان و حامل‌های منفی در خلاف جهت



شکل ۱.۷ نمودار طرح‌واره حرکت الکترون‌های رسانش در فلزات.



شکل ۲۰۷ جریسانی که در اثر حرکت حاملهای بار مثبت و منفی، هر دو، ایجاد می‌شود.

میدان حرکت کنند. بنابراین، تمام جریانهایی که در این فرایند ایجاد می‌شوند بسا میدان هم‌جهت‌اند.

در تخلیه الکتریکی گازها، جریان توسط یونهای مثبت و منفی، هر دو، حمل می‌شود، لیکن چون الکترونها در مقایسه با یونهای سنگین تحرك خیلی بیشتری دارند، عملاً تمام جریان به وسیله الکترونها حمل می‌شود. رسانش در گازها تا حدودی پیچیده است، زیرا جمعیت‌های الکترونی و یونی با تغییر شرایط تجربی به شدت تغییر می‌کنند. (عامل تعیین‌کننده این جمعیتها در درجه اول فشار گاز و افت پتانسیل در دو سر گاز است.) در شرایط معینی فرایند آبخاری به وقوع می‌پیوندد؛ در این فرایند یونهای معدودی که در آغاز حضور دارند شتاب می‌گیرند، با اتمهای خنثی برخورد ناکشسان (غیرالاستیک) می‌کنند و در نتیجه یونها و الکترونهای بیشتری به وجود می‌آورند. این یونهای اضافی نیز می‌توانند سبب برخوردهایی بشوند و یونش تولید کنند؛ در نتیجه چگالی حاملهای بار به شدت افزایش می‌یابد.

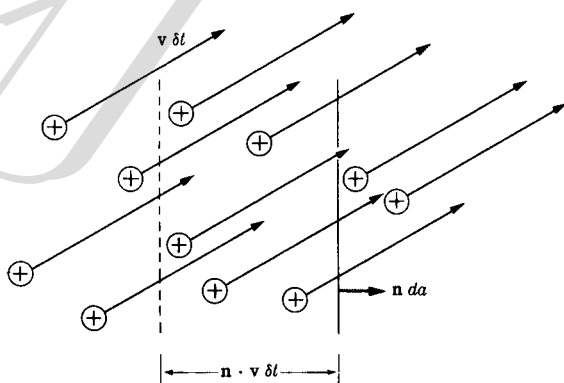
در شکل‌های ۱۰۷ و ۲۰۷ حاملهای بار را در دو گروه تصویر کرده‌ایم که هر گروه حرکت مشترکی به نام حرکت سوقی دارد. اما چنین تصویری بیش از حد ساده شده است. هر گروه از حاملهای بار در واقع نماینده مجموعه‌ای از ذرات است که با محیط اطراف خود در تعادل گرمایی به سر می‌برند؛ از این رو هر ذره هم حرکت سوقی دارد و هم حرکت گرمایی. حرکت گرمایی اگرچه ممکن است بزرگ باشد، اما چون کتره‌ای است، به انتقال منظم بارها منجر نمی‌شود. از طرف دیگر حرکت سوقی کتره‌ای نیست. پس در مطالعه فرایند رسانش، می‌توانیم از حرکت گرمایی که در نهایت نتیجه اش صفر است چشم‌پوشیم و همان تصویر ساده‌ای را که در شکل‌های ۱۰۷ و ۲۰۷ نشان داده شد به کار ببریم. اما در برخی دیگر از فرایندهای انتقال، نظیر رسانش در شیب گرمایی (که اثر ترموالکتریک را موجب می‌شود)، باید حرکت گرمایی را نیز کاملاً به حساب آوریم تا بتوانیم پدیده‌ها را کاملاً درک کنیم.

جریانهایی را که تا کنون در این بخش تشریح کردیم به جریانهای (سانشی موسوم‌اند. این جریانها نمایانگر حرکت سوقی حاملهای بار در يك محیط خنثی هستند. خود محیط ممکن است در کل ساکن باشد، و معمولاً نیز چنین است. مایعها و گازها نیز ممکن است حرکت هیدرودینامیکی داشته باشند، و اگر محیط چگالی بار الکتریکی داشته باشد، این

حرکت هیدرودینامیکی نیز خود جریانهایی به وجود خواهد آورد. این جریانه‌ها که از انتقال جرمی محیط باردار ناشی می‌شوند، جریانه‌های همرفت نامیده می‌شوند. جریانه‌های همرفت در مطالعه الکتریسیته جوی دارای اهمیت بسیارند؛ در واقع، جریانه‌های همرفت رو به بالا در رعد و برق‌ها برای حفظ شیب پتانسیل عادی جو در بالای زمین کافی‌اند. حرکت ذرات باردار در خلا* (نظیر حرکت الکترون‌ها در لولهٔ خلا* دیود) نیز یک جریان همرفت تولید می‌کند. یکی از خصوصیات مشخصهٔ جریان همرفت آن است که از لحاظ الکتروستاتیکی خنثی نیست، و معمولاً باید بار الکتروستاتیکی آن را به حساب آورد. در بقیهٔ این فصل فقط به بررسی جریانه‌های رسانشی می‌پردازیم.

۲.۷ جگالی جریان . معادله پیوستگی

اکنون محیط رسانایی را که فقط یک نوع حامل بار الکتریکی، q ، دارد بررسی می‌کنیم. تعداد این حاملها در واحد حجم را با N نشان می‌دهیم. مطابق بخش پیش، از حرکت گرمایی کتره‌ای صرف‌نظر می‌کنیم و برای تمام حاملها سرعت یکسان $\mathbf{v}$ را در نظر می‌گیریم. حالا در موقعیتی هستیم که بتوانیم جریانی را که از عنصر سطح da (مطابق شکل ۳.۷) می‌گذرد محاسبه کنیم. در زمان δt هر حامل به اندازهٔ $\mathbf{v} \delta t$ حرکت می‌کند. از روی شکل پیداست که بار δQ که در مدت δt از سطح da می‌گذرد برابر است با حاصل ضرب q در مجموع تمام حاملهای باری که در حجم $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \delta t da$ هستند؛ $\mathbf{n}$ برداریکه عمود بر سطح da است. بنا بر معادلهٔ (۱.۷) جریان برابر است با



شکل ۳.۷ حرکت سوقی حاملهای بار از صفحهٔ da در زمان δt .

$$dI = \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{q N \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta t da}{\delta t}$$

$$= N q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.7)$$

اگر بیش از يك نوع حامل بار وجود داشته باشد، هر يك از انواع حاملها سهمی نظیر رابطه (۲.۷) در تولید جریان خواهد داشت. در حالت کلی، جریانی که از سطح da می گذرد عبارت است از

$$dI = \left[\sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i \right] \cdot \mathbf{n} da \quad (3.7)$$

جمع بندی بالا بر روی انواع حاملهای مختلف انجام می شود. مقدار داخل کروشه برداری است که بعد آن بعد جریان بر واحد سطح است؛ این کمیت را چگالی بار می نامند و با نماد $\mathbf{J}$ نمایش می دهند

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i \quad (4.7)$$

چگالی جریان را می توان برای هر نقطه از محیط رسانا تعریف کرد و، بنا بر این، يك تابع نقطه ای برداری است. این بردار کمیتی است بسیار مفید که مستقیماً در معادلات دیفرانسیل اساسی نظریه الکترودینامیک وارد می شود. یکای $\mathbf{J}$ در دستگاه mks آمپر بر متر مربع (A/m^2) است.

معادله (۳.۷) را می توان به صورت زیر نوشت

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

و جریانی که از سطح S می گذرد، یعنی از سطحی باشکله دلخواه و با مساحتی که اندازه ای ماکروسکوپی دارد، با انتگرال زیر داده می شود

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (5.7)$$

چگالی جریان $\mathbf{J}$ و چگالی بار ρ کمیت هایی مستقل از یکدیگر نیستند، بلکه در هر نقطه بایک معادله دیفرانسیل بهم مربوط می شوند؛ این معادله به معادله پیوستگی معروف است. ارتباط آن دو از این حقیقت ناشی می شود که بار نه نابود می شود و نه آفریده می شود. معادله پیوستگی را می توان با به کار بردن معادله (۵.۷) در مورد يك سطح بسته دلخواه S ، به دست آورد. جریان الکتریکی که به حجم V محصور در سطح S وارد می شود، از رابطه

زیر به دست می آید

$$I = - \oint_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = - \int_v \nabla \cdot \mathbf{J} dv \quad (۶.۷)$$

انتگرال دوم از به کار بردن قضیهٔ واگرایی حاصل شده است. علامت منها در معادلهٔ (۶.۷) به این خاطر است که $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ عمود به سمت خارج است، در صورتی که ما می خواهیم I راهنگامی مثبت بنامیم که جریان خالص بار از خارج V به داخل آن باشد. از طرفی مطابق معادلهٔ (۱.۷)، I برابر است با آهنگ انتقال بار به داخل حجم V یعنی

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_v \rho dv \quad (۷.۷ \text{ الف})$$

چون ما با حجم ثابت V سروکار داریم، مشتق زمان فقط بر روی تابع ρ عمل می کند. اما ρ تابعی است از مکان و زمان، پس مشتق زمانی وقتی به زیر علامت انتگرال برده می شود به مشتق پاره ای بر حسب زمان تبدیل می شود. بنابراین

$$I = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (۷.۷ \text{ ب})$$

اکنون با مساوی قرار دادن معادلات (۶.۷) و (۷.۷ ب) نتیجه می گیریم

$$\int_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \right) dv = 0 \quad (۸.۷)$$

اما حجم V کاملاً اختیاری است، و تنها راهی که معادلهٔ (۸.۷) می تواند برای هر بخش حجم اختیاری از محیط صادق باشد آن است که انتگرالده آن در تمام نقاط صفر شود؛ بنابراین معادلهٔ پیوستگی به صورت زیر به دست می آید

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (۹.۷)$$

۳.۷ قانون اهم . رسانندگی

تجربه نشان می دهد که در هر فلز در دمای ثابت چگالی جریان $\mathbf{J}$ با میدان الکتریکی تناسب خطی دارد (قانون اهم). بنابراین

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (۱۰.۷)$$

ثابت تناسب، یعنی g را رسانندگی می‌نامند. معادله (۱۰.۷) برای تعداد زیادی از اجسام رسانای معمولی تقریباً صحیح است؛ اما در حالت کلی به جای معادله (۱۰.۷) باید از معادله زیر استفاده کرد

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E})\mathbf{E}$$

که در آن $g(\mathbf{E})$ تابعی است از میدان الکتریکی. موادی که معادله (۱۰.۷) در مورد آنها صدق می‌کند محیطهای خطی یا محیطهای اهمی نامیده می‌شوند. در اینجا نیز، مانند مبحث دی الکتریکها، ما بیشتر با موارد خطی سروکار خواهیم داشت. معکوس رسانندگی را مقاومت ویژه، η ، می‌نامند. بنا بر این^۱

$$\eta = \frac{1}{g} \quad (۱۱.۷)$$

یکای η در دستگاه mks ولت - متر بر آمپر یا به طور ساده اهم - متر است که در آن اهم (Ω) چنین تعریف می‌شود

$$\text{يك اهم} = \frac{\text{يك ولت}}{\text{يك آمپر}}$$

یکای رسانندگی g عبارت است از $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ که گاهی به صورت مهو بر متر نوشته می‌شود. مقاومت ویژه تعدادی از مواد معمولی در جدول ۱۰.۷ آمده است. از روی این جدول پیداست که کلیه مواد تا حدی از خود الکتریسیته عبور می‌دهند، اما اجسامی را که عایق (دی الکتریک) نامیدیم درجه رساناییشان به نسبت ضریب فوق العاده بزرگی (به بزرگی $۱۰^{۲۳}$) از فلزات ضعیفتر است. تفاوت میان رسانا و عایق را در بخش ۷.۷ به طور کمی مطالعه خواهیم کرد.

جسم رسانایی را که از قانون اهم تبعیت می‌کند در نظر بگیریم. این جسم سیم مستقیمی است با سطح مقطع یکنواخت که دوسر آن در اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\varphi$ نگه داشته شده است. فرض کنید که سیم همگن است و با رسانندگی ثابت g مشخص می‌شود. تحت این شرایط يك میدان الکتریکی در سیم وجود خواهد داشت که با رابطه زیر به $\Delta\varphi$ مربوط می‌شود

$$\Delta\varphi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (۱۲.۷ \text{ الف})$$

۱. نمادهای مرسوم برای مقاومت ویژه و رسانندگی به ترتیب ρ و σ است، لیکن برای اینکه با نمادهای مربوط به چگالی حجمی بار ρ و چگالی سطحی بار σ اشتباه نشوند ما از نمادهای η و g استفاده خواهیم کرد.

بدیهی است که میدان الکتریکی نمی تواند مؤلفه حالت پایایی در جهت عمود بر محور سیم داشته باشد، زیرا مطابق معادله (۱۰.۷) چنین مؤلفه ای سبب باردار کردن مداوم سطح سیم خواهد شد. بنابراین میدان الکتریکی صرفاً طولی خواهد بود. به علاوه، به علت شکل هندسی رسانا، میدان الکتریکی در تمامی نقاط در طول سیم باید یکسان باشد. پس معادله (۱۲.۷) الف) به صورت زیر درمی آید

$$\Delta\varphi = El \quad (12.7 \text{ ب})$$

که در آن l طول سیم است. اما میدان الکتریکی E وجود جریانی به چگالی $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ را ایجاب می کند. جریانی که از هر مقطع سیم عبور می کند برابر است با

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = JA \quad (13.7)$$

که در آن A سطح مقطع سیم است. از ترکیب معادله (۱۳.۷) با معادلات (۱۰.۷) و (۱۲.۷) ب) نتیجه می گیریم که

$$I = \frac{gA}{l} \Delta\varphi \quad (14.7)$$

که رابطه ای است خطی میان I و $\Delta\varphi$. کمیت l/gA را مقاومت سیم می نامند. مقاومت با نماد R نشان داده خواهد شد. با به کار بردن نماد R می توانیم معادله (۱۴.۷) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\Delta\varphi = RI \quad (15.7)$$

که شکل آشنای قانون اهم است (بدیهی است که R را بر حسب اهم می سنجند). در بخش بعدی نشان داده خواهد شد که از معادله (۱۰.۷) بدون بستگی به شکل رسانا معادله (۱۵.۷) نتیجه می شود. معادله (۱۵.۷) را می توان به منزله تعریفی از مقاومت جسمی یا وسیله ای که یک جریان ثابت را از خود عبور می دهد دانست. در حالت کلی، R به مقدار این جریان بستگی خواهد داشت. اما، همچنان که قبلاً گفته شد، ما بیشتر به اجسام رسانای خطی علاقه مندیم و در مورد این اجسام R به جریان بستگی ندارد.

کار انجام شده توسط میدان، وقتی که بار dQ در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ عبور کند، برابر است با $dW = dQ \Delta\varphi$. توان مربوط برابر است با

$$P = I \Delta\varphi = I^2 R = (\Delta\varphi)^2 / R$$

که دو صورت آخری با استفاده از قانون اهم به دست می آیند. این توان به صورت گرمای

جدول ۱۰۷ مقاومت ویژه η و ضریب گرمایی مقاومت α برای برخی از اجسام معمولی در ۲۰ درجه سلسیوس^۱

ماده	η بر حسب Ωm	$\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dT}, (^\circ C)^{-1}$
آلومینیوم	2.765×10^{-8}	۰.۰۰۰۴۳
مس	1.67×10^{-8}	۰.۰۰۰۶۸
طلا	2.35×10^{-8}	۰.۰۰۰۴
آهن	9.71×10^{-8}	۰.۰۰۰۶۵
نیکل	6.84×10^{-8}	۰.۰۰۰۶۹
نقره	1.59×10^{-8}	۰.۰۰۰۴۱
جیوه	9.58×10^{-8}	۰.۰۰۰۰۹
تنگستن	5.51×10^{-8}	۰.۰۰۰۴۵
کنستانتین (مس ۶۰، نیکل ۴۰)	4.90×10^{-8}	۰.۰۰۰۰۰
نیکروم	1.000×10^{-8}	۰.۰۰۰۰۴
ژرمانیوم (خالص)	۰.۰۴۶	-۰.۰۰۴۸
ژرمانیوم ($5 \times 10^{-6} \%$ آرسنیک)	۰.۰۱۱	۰.۰۰۱۱
گرافیت	1.4×10^{-5}	
محلول نمک طعام (اشباع شده)	۰.۰۴۴	-۰.۰۰۰۵
اکسید آلومینیوم	1×10^{14}	
شیشه	$10^{10} - 10^{14}$	
ید	1.3×10^7	
کوارتز (SiO_2)	1×10^{13}	
گوگرد	2×10^{15}	
چوب	$10^8 - 10^{11}$	

ژول درجسم تلف می شود.

۴.۷ جریانهای پایا در محیطهای پیوسته

شباهت بسیار نزدیکی میان يك دستگاه الکتروستاتیکی مرکب از رساناها و دی الکتریکها، از يك سو، و دستگاهی که جریان پایایی را هدایت می کند، از سوی دیگر، وجود دارد. در این بخش این شباهت را بررسی می کنیم.

محیطی رسانا، همگن و اهمی را در نظر بگیرید که تحت شرایط رسانش حالت پایا قرار دارد. چون صرفاً با حالت پایا سروکار داریم، چگالی بار موضعی $\rho(x, y, z)$ مقدار حالت تعادل خود را دارد و در هر نقطه محیط $\partial\rho/\partial t = 0$ است. به این ترتیب معادله پیوستگی (معادله ۹.۷) به رابطه زیر تبدیل می شود

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{جریانهای پایا}) \quad (۱۶.۷)$$

از به کار بردن قانون اهم و ترکیب آن با رابطه (۱۶.۷) نتیجه می گیریم که

$$\nabla \cdot g\mathbf{E} = 0$$

که برای يك محیط همگن به صورت زیر درمی آید

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

اما چون برای يك میدان ایستا $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ، پس می توان $\mathbf{E}$ را از يك پتانسیل نرده ای به دست آورد

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

از ترکیب دو معادله اخیر، نتیجه می شود که

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (۱۷.۷)$$

که این معادله لاپلاس است.

بنابراین می بینیم که مسئله رسانش حالت پایا را می توان به همان طریق مسائل الکتروستاتیکی حل کرد. معادله لاپلاس به کمک یکی از شیوه هایی که در فصل ۳ بحث کردیم حل و جواب مناسب، مثل همیشه، با شرایط مرزی تعیین می شود. در رسانش، شرایط مرزی کافی برای حل مسئله شرایطی است که φ یا $\mathbf{J}$ را در هر نقطه روی سطح محیط رسانا مشخص می کند. چون دوبردار $\mathbf{J}$ و $\mathbf{E}$ با قانون اهم به هم مربوط می شوند، مشخص کردن $\mathbf{J}$ بر روی سطح رسانا معادل است با مشخص کردن $\mathbf{E}$ بر روی آن سطح. به مجرد آنکه جواب مناسب معادله

لاپلاس پیدا شد، E (و در نتیجه J) را می توان در هر نقطه داخل محیط با محاسبه شیب تعیین کرد.

در رسانش حالت پایا، جریانی که از مساحت فصل مشترك میان دو رسانا عبور می کند به دو طریق محاسبه می شود: بر حسب چگالی جریان در محیط ۱ یا بر حسب چگالی جریان در محیط ۲. چون نتیجه هر دو روش باید یکی باشد، پس مؤلفه قائم J در دو طرف فصل مشترك باید پیوسته باشد، یعنی

$$J_{1n} = J_{2n} \quad (۱۸۰۷ \text{ الف})$$

یا

$$g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n} \quad (۱۸۰۷ \text{ ب})$$

این معادله شبیه معادله مربوط به پیوستگی D_n در دو طرف فصل مشترك دی الکتریکها در مسائل الکتروستاتیکی است.

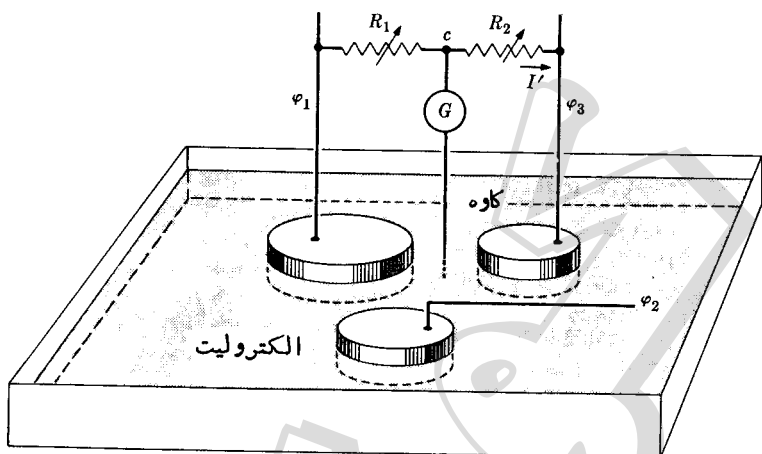
از آنجا که میدان در هر يك از دو محیط ساکن است، پس برای مسیر بسته ای که دو محیط را به هم مربوط کند خواهیم داشت

$$\oint E \cdot dl = 0$$

و یا مطابق اثبات بخش ۷۰۴

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (۱۹۰۷)$$

این رابطه برای هر دو نوع مسئله (رسانش پایا و الکتروستاتیک) یکسان است. مثالی از مطالبی که در بالا مطرح شد را می توان در «مخزن الکترولیتی» شکل ۴۰۷ یافت. در اینجا تعدادی رسانای فلزی که به منابع خارجی پتانسیل متصل اند در يك محیط مایع رسانا (که به طور ایده آل ابعاد آن بینهایت فرض می شود) با رسانندگی متوسط (مثلاً، محلول آب نمک) قرار دارند. چون رسانندگی محلول نمک بسیار کمتر از رسانندگی فلز است (جدول ۱۰۷)، میدان الکتریکی در فلز از میدان الکتریکی در محلول (به ازای چگالی جریان یکسان) خیلی کمتر است. نسبت میدانها به قدری کوچک است که در فلز می توان از E چشم پوشید، و هر يك از رساناهای فلزی را حجمی هم پتانسیل فرض کرد. کاوه رسانای کوچکی را، مطابق شکل، برای بررسی پتانسیل محلول می توان به کار برد و به این طریق سطوح هم پتانسیل آن را رسم کرد. یکی از کاربردهای این روش تجربی آن است که برای مواردی که شکل هندسی پیچیده ای دارند و تعیین جوابهای معادله لاپلاس از لحاظ نظری مشکل است، جواب عددی معادله لاپلاس با این روش به دست می آید. جوابی که به دست می آید محدود به مسئله رسانش نیست، بلکه این جواب برای مسئله الکتروستاتیکی هم ارز که در



شکل ۴.۷ مخزن الکترولیت دو بعدی. سه رسانای فلزی را در پتانسیلهای φ_1 ، φ_2 و φ_3 نگه می‌داریم و برای سهولت فرض می‌کنیم که $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$. نماد ∇ به معنای مقاومت متغیر است و G گالوانومتر است. فرض می‌کنیم که مقاومت سیمهای رابط قابل صرف نظر است. اگر مقاوتمهای R_1 و R_2 طوری تنظیم شوند که جریان داخل G صفر شود، آنوقت $\varphi_{\text{کاوه}} = \varphi_c$ و از هر دو مقاومت R_1 و R_2 جریان یکسان I' عبور می‌کند. در این شرایط خواهیم داشت

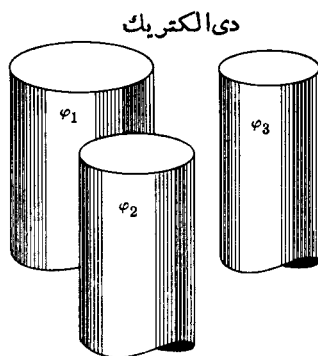
$$\varphi_{\text{کاوه}} = \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_3)R_1/(R_1 + R_2) \quad \text{یا} \quad \varphi_{\text{کاوه}} = \varphi_1 - I'R_1 = \varphi_3 + I'R_2$$

آن همان رساناهای فلزی بایک محیط دی الکتریک احاطه شده اند نیز معتبر است (شکل ۵.۷). به عنوان دومین مثال برای رابطه میان رسانش والکتروستاتیک، دو رسانای فلزی واقع در محیطی اهمی، همگن، و نامتناهی با رسانندگی معتدل g را در نظر می‌گیریم. اگر رساناهای فلزی را در پتانسیلهای φ_1 و φ_2 نگه داریم، جریان I که میان آنها برقراری شود برابر خواهد بود با

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$$

که در آن R مقاومت محیط است.^۱ این جریان را می‌توان بر حسب چگالی جریان $\mathbf{J}$ در محیط نوشت

۱. چون I مشابه Q در مسئله الکتروستاتیکی است، I با $\Delta\varphi$ متناسب است، و $1/R$ به عنوان ثابت تناسب تعریف می‌شود. معادله (۲۲.۷) را ببینید.



شكل ۵.۷ مسئله الكتروستاتيكي هم ارز با مسئله رسانش در شكل قبل. چون شكل ۴.۷ نشان دهنده يك رسانش دوبعدى است، پس مسئله الكتروستاتيكي نيز دوبعدى است، و هر سانا از استوانه‌اى بى نهايت بلند تشكيل شده است.

$$I = \oint_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

در اينجا S هر سطح بسته‌اى است كه يكي از رساناها را كاملا در ميان بگيرد (به استثنائى سيم فلزى عايق شده‌اى كه جريان را به درون رسانا مى رساند تا پتانسيل آن را ثابت نگه دارد). اما

$$\mathbf{J} = g \mathbf{E}$$

از تركيب سه معادله آخر، نتيجه مى گيريم كه

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = g \oint_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da \quad (20.7)$$

اگر اين ميدان الكتريكي ناشى از بارهاى الكتروستاتيكي موجود بر روى دو رساناى فلزى در يك محيط دى الكتريك بود، مطابق قانون گاوس داشتيم

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\epsilon} Q \quad (21.7)$$

كه در آن Q بار موجود بر روى رساناى فلزى است كه با سطح S احاطه شده است، و ϵ گذردهى محيط است. در چنين شرايطى دو رسانا يك خازن تشكيل مى دادند.

$$Q = C (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (22.7)$$

از قرارداد معادلات (۲۱.۷) و (۲۲.۷) در معادله (۲۰.۷) نتیجه می شود

$$RC = \frac{\epsilon}{g} \quad (23.7)$$

که رابطه ای است میان مقاومت محیط و ظرفیت مسئله الکتروستاتیکی هم ارز آن. در واقع، این رابطه چیزی بیش از یک شباهت میان محیطهای رسانا و محیطهای دی الکتریک است؛ این رابطه برای هر محیط منفردی با رسانندگی g و ثابت دی الکتریک ϵ نیز صادق است. چون دی الکتریک ایده آل وجود ندارد، مقدار g ی هر دی الکتریک واقعی هر قدر هم کم باشد، صفر نیست. از سوی دیگر، حتی رساناهای خوب هم مقدار g مربوط به خود را دارند، هر چند که این مقدار ممکن است بسیار کوچک باشد. از این رو هر خازنی یک مقاومت نشتی، و هر مقاومتی یک ظرفیت کم وابسته به خود دارد؛ در هر مورد R و C با معادله (۲۳.۷) به هم مربوط می شوند (به طور تقریبی، زیرا محیط نامتناهی نیست).

۵.۷ نزدیک شدن به تعادل الکتروستاتیکی

در فصل ۲ گفتیم که بار اضافی یک رسانا روی سطح آن قرار می گیرد. این وضع البته وضعیت تعادل است. در آنجا نزدیک شدن به حالت تعادل را بررسی نکردیم، ولی گفتیم که رساناهای خوب (فلزی) فوق العاده سریع به حالت تعادل می رسند. هر چه رسانایی کمتر باشد، نزدیک شدن به تعادل الکتروستاتیکی کندتر است؛ در واقع اگر رسانندگی جسم فوق العاده کم باشد، ممکن است برای رسیدن به تعادل الکتروستاتیکی سالها وقت لازم باشد.

یک محیط همگن و همسانگرد را که با رسانندگی g و گذردهی ϵ مشخص شده و چگالی حجمی بار آزاد از پیش تعیین شده آن برابر $\rho_0(x, y, z)$ است، در نظر می گیریم. اگر این دستگاه رسانا را ناگهان از میدانهای الکتریکی وارد بر آن جدا کنیم، به سمت وضع تعادل که در آن هیچ بار اضافی در درون دستگاه وجود ندارد گرایش پیدا می کند. بنابر معادله پیوستگی داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad [9.7]$$

۱. در اینجا واضح نیست که ثابت دی الکتریک یک رسانای نسبتاً خوب را چگونه می توان اندازه گیری کرد، ولی این موضوع در فصل ۱۳ روشن خواهد شد. مقیاس زمانی که در محدوده آن یک اندازه گیری «ایستا» باید انجام شود در بخش بعد معلوم خواهد شد، مقدار $\epsilon = \infty$ ، که در فصل ۴ پیشنهاد شد، فقط در صورت نبودن جریان قابل استفاده است؛ در مورد جریان پایا، فقط بارهای مقید در ایجاد ϵ دخالت دارند نه بارهای آزاد.

که باكمك قانون اهم به صورت زیر درمی آید

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (24.7)$$

اما $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ درواقع، در این صورت، بنابراین

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{g}{\epsilon} \rho = 0 \quad (25.7)$$

به ازای g و ϵ ثابت، جواب این معادله بامشتق پاره ای به صورت زیر است

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z) e^{-gt/\epsilon} \quad (26.7)$$

و دیده می شود که نزدیک شدن به حالت تعادل به طور نمایی صورت می گیرد. از معادله (26.7) پیداست که مقدار ϵ/g بعد زمان دارد؛ این مقدار را ثابت زمانی یا زمان واهلش t_e محیط می گویند

$$t_e = \frac{\epsilon}{g} = \epsilon \eta \quad (27.7)$$

ثابت زمانی معیاری است از سرعت نزدیک شدن محیط رسانا به حالت تعادل الکتروستاتیکی؛ به عبارت دقیقتر، t_e مدت زمانی است که طی آن بار در هر ناحیه مشخصی به $1/e$ مقدار اولیه اش کاهش می یابد.

دیرک کاربرد بخصوص، چنانچه ثابت زمانی جسمی از زمان مشخصه لازم برای انجام اندازه گیری مربوط به مراتب کمتر باشد، آن جسم به توزیع بار حالت تعادل خود خواهد رسید. در برخی کاربردها تنها کافی است که ثابت زمانی کمتر از 10^{-10} ثانیه باشد تا اطمینان حاصل شود که رفتار جسم رسانا گونه است. چون گذردهی اکثر اجسام غیر فلزی^۱ در گستره میان 10^9 تا 10^{14} اهم قرار می گیرد، این امر مستلزم ماده ای است که مقاومت ویژه آن کمتر از 10^9 یا 10^{10} اهم - متر باشد. در کاربردهای مربوط به فرکانسهای بالا، برای رفتار رسانا - گونه واقعی ثابت زمانی کوتاهتر و مقاومت ویژه کمتری لازم است، درواقع باید شرط زیر برقرار باشد

$$t_e \ll \frac{1}{f}$$

۱. این رابطه را نمی توان در مورد يك فلز به کاربرد، زیرا ما اندازه ویژه ϵ را نمی دانیم، در واقع، $10^{-14} \text{ s} \approx \tau \approx t_e$ که در آن τ زمان برخورد است که در بخش ۷.۷ آن را بررسی خواهیم کرد. چنان که خواهیم دید، برای زمانهای کوتاهتر از τ فرض $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ صادق نیست.

که در آن f بالاترین فرکانس موجود در آزمایش است. برای رفتار دی‌الکتریک گونه درست شرط معکوس برقرار است.

۶.۷ شبکه‌های مقاومت و قوانین کیرشهوف

تا به حال رسانش را از لحاظ انتقال بار در یک محیط رسانا بررسی و مسئله را بر حسب معادلات دیفرانسیلی که باید در هر نقطه صادق باشند حل می‌کردیم. در این حالتها کمیت مهمی که باید تعیین شود، چگالی جریان $\mathbf{J}$ است. اما در بسیاری از مسائلی که از جنبه عملی مورد نظرند، حامل‌های بار الکتریکی مقیدند که از مسیری که رسانش زیاد دارد عبور کنند؛ چنین مسیری را هدا می‌نامند. در این مسائل کمیت‌های مهم عبارت‌اند از جریان در هر قسمت از مدار. در این بخش فقط مدارهای حامل جریان‌های پایا، یعنی مدارهای جریان مستقیم، را بررسی می‌کنیم. هر مدار ممکن است از چندین انشعاب مختلف تشکیل شده باشد. در واقع مدار را می‌توان به صورت شبکه‌ای از مسیرهای رسانا تعریف کرد، که هر یک می‌توانند ولتاژهای اعمال شده معینی داشته باشند. مسئله اساسی در تحلیل مدارها عبارت است از: مقاومت و ولتاژ اعمال شده در هر یک از انشعابهای مدار داده شده‌اند، جریان را در هر یک از این انشعابها پیدا کنید.

در فصل ۲ نشان دادیم که انتگرال مؤلفه مماسی هر میدان الکتروستاتیکی دور هر مسیر بسته‌ای صفر است؛ یعنی، برای میدان الکتروستاتیکی

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (28.7)$$

برای مواد اهمی، $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. در حالت کلی این رابطه به صورت $\mathbf{J} = g(\mathbf{E})\mathbf{E}$ درمی‌آید، ولی $g(\mathbf{E})$ همیشه کمیتی مثبت است. پس نتیجه می‌گیریم که یک نیروی الکتروستاتیکی خالص نمی‌تواند سبب شود که جریان دور تمامی مدار با سوی یکسانی بگردد. یا به عبارت دیگر، تنها به کمک نیروهای الکتروستاتیکی نمی‌توان جریان پایا برقرار کرد. ولی بر ذره باردار q ممکن است علاوه بر نیروی ماکروسکوپی الکتروستاتیکی نیروهای دیگر (مکانیکی، «شیمیایی»، و مانند آن) نیز اثر کنند، به طوری که در قسمتی از مدار بارها در خلاف جهت $\mathbf{E}$ حرکت کنند. در بخشهای قبل در مورد مسئله مربوط به علت ایجاد جریان الکتریکی بحث نکردیم و تنها فرض کردیم که دو نقطه واقع بر یک شیء رسانا با منابع انرژی خارجی در اختلاف پتانسیل ثابت $\Delta\varphi$ نگه داشته می‌شوند. در اینجا نیز کافی است که فرض کنیم چنین ولتاژهای اعمال شده‌ای وجود دارند، اما اکنون با کمی دور شدن از موضوع اصلی دربارهٔ

۱. در کتابهای دیگر ولتاژ اعمال شده را معمولاً نیروی محرکه الکتریکی (یا emf) می‌نامند، گرچه واژه مرسوم در آزمایشگاه برای این اختلاف پتانسیل همان ولتاژ اعمال شده است. واژه تاریخی emf و مفهوم آن گیج‌کننده و غیر ضروری است، بنابراین در اینجا از آن استفاده نمی‌کنیم. واژه emf را برای مفهوم تقریباً متفاوتی، که بعداً معرفی خواهد شد (فصل ۱۱) نگه می‌داریم.

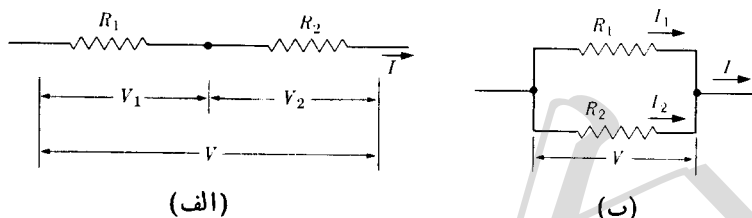
چگونگی تولید واقعی این ولتاژها بحث خواهیم کرد.

در آزمایشگاه ولتاژ پایا را معمولاً یا به وسیله باتری و یا به وسیله يك منبع تغذیه الكتریکی (كه ولتاژ برق شهر را مستقیم و هموار می کنند) تولید می کنند، ولی با وسایل گوناگون دیگر، مثلاً مولد وان دو گراف، نیز می توان آن را تولید کرد. تحلیل مولد وان دو گراف از لحاظ مفهومی راحت است. در مولد وان دو گراف بارها را در يك پایانه (سر) بر روی تسمه حامل قرار می دهند و آنها را به زور به پایانه دیگری كه در انرژی پتانسیل بیشتری است می برند و در آنجا از تسمه جدا می کنند. در کار کرد مولد در حالت پایا، برای هر مسیر بسته داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ؛ مثلاً، علامت انتگرال در امتداد تسمه منفی و در امتداد يك مسیر خارجی میان دو پایانه با آن برابر ولی با علامت مثبت است. اگر تسمه را واداریم تا به حد کافی سریع حرکت کند، می توانیم يك جریان پایای خارجی را از درون يك مقاومت متصل به دو پایانه عبور دهیم؛ توان ورودی درست برابر است با توان مکانیکی لازم برای گرداندن تسمه ای كه بارها را علیه يك میدان الكتریکی منتقل می كند. طرز کار باتری نیز همینطور است (به جز آنكه «نیروهای» مؤثر در باتری به مكانيك كوانتومی حاكم بر الكتروشیمی بستگی دارند)، و در امتداد هر مسیر بسته ای $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ، حتی در امتداد مسیری كه از درون الكترولیت باتری می گذرد. ولی آنچه برای تحلیل مدار مهم است صرفاً این است كه برای مسیر بسته ای كه حاوی پایانه های منبع و ولتاژ است داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ ، مشروط بر آنكه يك شاخه از مسیر از درون شبکه مقاومتها بگذرد و شاخه دیگر مستقیماً يك پایانه را به پایانه دیگر ولی در خارج از منبع وصل كند. هدف نظریه مدارهای الكتریکی به دست آوردن روشی برای تحلیل شاخه اول است، كه شامل شبکه مقاومتهاست؛ نیازی نیست كه ما علت ایجاد اختلاف پتانسیل میان پایانه های منبع توان (اعم از علل مکانیکی، شیمیایی، یا مانند آن) را تحلیل كنیم، بلكه تنها کافی است كه آن را ولتاژ اعمال شده $\mathcal{V}$ بنامیم. يك منبع ایده آل، ولتاژ اعمال شده $\mathcal{V}$ را تولید می كند كه به جریان گرفته شده از منبع بستگی ندارد؛ اما ولتاژ دوسریك منبع حقیقی تا حدودی به جریان بستگی دارد، یعنی $\mathcal{V} = \mathcal{V}(I)$ ساده ترین فرض كه معمولاً صادق است، آن است كه این بستگی خطی است

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 - R_I I$$

ضریب R_I را مقاومت داخلی و $\mathcal{V}_0$ را ولتاژ هدا - باز (یا در بیشتر کتابهای دیگر، emf) می نامند.

قبل از آنكه به مسئله عمومی شبکه پردازیم، ابتدا بحث اتصالات ساده متوالی و موازی مقاومتها را مرور می كنیم. مقاومت، كه در بخش ۳.۷ تعریف شد، خاصیتی از شیء مادی مورد نظر است كه هم به ماهیت ماده تشکیل دهنده شیء و هم به شكل هندسی آن بستگی دارد. (در حالی كه مقاومت ویژه تنها به ماهیت جسم رسانا بستگی دارد). شیء رسانایی به شكل مناسب را كه مشخصه اصلی آن مقاومتش است، مقاوم (یا اصطلاحاً مقاومت) می نامند و معمولاً آن را با نماد R نمایش می دهند. مقاومتها را می توان به يكدیگر



شکل ۶.۷ (الف) اتصال متوالی و (ب) اتصال موازی دو مقاومت.

متصل و شبکه مقاومت درست کرد؛ نحوه اتصال مقاومتها در شکل ۶.۷ نشان داده شده‌اند. قسمت (الف) اتصال متوالی را نشان می‌دهد؛ در این حالت از هر دو مقاومت جریان یکسان I می‌گذرد. اگر معادله (۱۵.۷) را در مورد هریک از مقاومتها به کار ببریم، و توجه کنیم که اختلاف پتانسیل^۱ به صورت $V = V_1 + V_2$ است، نتیجه می‌گیریم که

$$V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

بنابراین مقاومت معادل این ترکیب برابر است با

$$R = R_1 + R_2 \quad (\text{اتصال متوالی}) \quad (29.7)$$

در اتصال موازی (شکل ۶.۷ ب) اختلاف پتانسیل دو سر دو مقاومت یکی است، و جریان کلی که از این ترکیب می‌گذرد برابر است با $I = I_1 + I_2$. با به کار بردن معادله (۱۵.۷)، نتیجه می‌گیریم که

$$I = \frac{1}{R_1} V + \frac{1}{R_2} V = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V$$

و مقاومت معادل این ترکیب از رابطه زیر به دست می‌آید

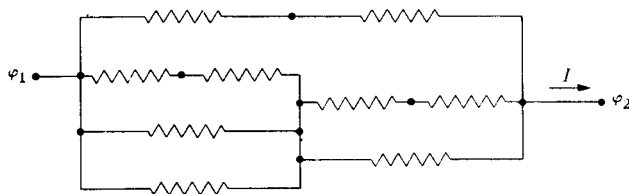
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (\text{اتصال موازی}) \quad (30.7)$$

مقاومت معادل شبکه پیچیده‌تری مانند شبکه شکل ۷.۷ را می‌توان از ترکیب کردن دوبه‌دوی مقاومتها طبق معادلات (۲۹.۷) یا (۳۰.۷)، و تکرار این عمل تا زمانی که فقط یک مقاومت معادل باقی بماند، به دست آورد. این روش برای همه شبکه‌ها قابل استفاده خواهد بود؛

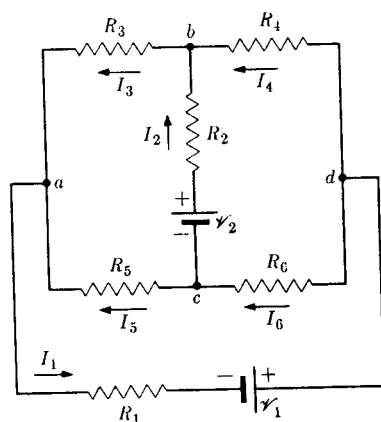
۱. در این بخش به جای نماد $\Delta \phi$ از V برای اختلاف پتانسیل استفاده خواهیم کرد تا با متداولترین نماد گذاری مدارهای الکتریکی در توافق باشد.

ولی هر شبکه ای را که دو پایانه داشته باشد می توان به کمک روش زیر به يك مقاومت معادل تبدیل کرد.

هر مسئله شبکه را می توان به کمک دو قاعده که به قوانین کیرشهوف^۱ موسوم اند، به طور منظم حل کرد. قبل از بیسان این قوانین، به تعریف دو اصطلاح می پردازیم. نقطه انشعاب، نقطه ای از مدار است که در آن تعداد سه رسانا و یا بیشتر به هم می پیوندند، مانند نقاط a



شکل ۷.۷ يك شبکه مقاومت.



شکل ۸.۷ يك مدار نوعی که کاربرد قوانین کیرشهوف در مورد آن ضروری است. نماد $\pm$ برای نشان دادن ولتاژ اعمال شده به کار می رود. در يك مسئله مداری نوعی، $\mathcal{V}$ ها و R ها مشخص اند و جریانیها را باید معلوم کرد. دو معادله از شش معادله مربوط به جریانیها در مدار بالا عبارتند از: $\mathcal{V}_1 = I_6 R_6 + I_5 R_5 + I_1 R_1$ و $-I_1 + I_3 + I_5 = 0$.

۱. به افتخار گوستاو رابرت کیرشهوف (Gustav Robert Kirchhoff ۱۲۵۶-۱۲۰۳)

b, c ، و با d در شکل ۸.۷. هر مسیر سانشی بسته در شبکه را يك حلقه گویند. حال می‌توان قوانین کیرشهوف را چنین بیان کرد

I. جمع جبری جریان‌هایی که به يك نقطه انشعاب وارد می‌شوند صفر است، یعنی

$$\sum I_j = 0 \quad (I)$$

II. جمع جبری اختلاف پتانسیل‌های دور هر حلقه از شبکه برابر است با صفر، یعنی

$$\sum V_j = 0 \quad (II)$$

قانون اول بیان صوری این واقعیت است که بارهای الکتریکی نمی‌توانند در نتیجه يك جریان پایا، در يك نقطه انشعاب در مدار جمع شوند. این قانون بیان مجدد معادله پیوستگی در شکل معادلات (۶.۷) و (۷.۷) است، و بدین سان هم‌ارز است با

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (\text{جریان‌های پایا}) \quad [۱۶.۷]$$

قانون دوم صرفاً بیان مجدد رابطه زیر است

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{میدان‌های ساکن}) \quad [۲۸.۷]$$

برای به کار بردن قوانین کیرشهوف، لازم است که قانون اهم را یادآوری کنیم:
افت پتانسیل در مقاومت R_j برابر است با

$$V_j = I_j R_j \quad (\text{مقاومت}) \quad [۱۵.۷]$$

در اینجا فرض می‌شود که پتانسیل بالاتر در انتهای است که جریان مفروض وارد مقاومت می‌شود. این بیان صورت انتگرالی رابطه زیر است

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E} \quad (\text{محیط خطی}) \quad [۱۰.۷]$$

بالاخره ولتاژهای اعمال شده را به طریق زیر نمادگذاری می‌کنیم

$$V_j = -\mathcal{V}_j \quad (\text{ولتاژ اعمال شده})$$

اگر این معادله را با معادله (۱۵.۷) ترکیب کنیم، می‌توانیم قانون II کیرشهوف را به صورت زیر بنویسیم

$$\sum \mathcal{V}_j = \sum I_j R_j \quad (II \text{ الف})$$

اگر لازم باشد که مقاومتهای داخلی چشمه‌ها در نظر گرفته شوند، این مقاومتهای می‌توانند به سمت راست (II الف) منتقل شوند.

قبل از اینکه قوانین کیرشهوف را در مورد مسئله خاصی به کار ببریم، لازم است جهت‌هایی برای جریانهای هر شاخه فرض کنیم. این جهات باید در نمودار مدار نشان داده شوند. آن وقت فرمولبندی معادلات (I) و (II الف) بر اساس این جهات مفروض نوشته می‌شوند. چنانچه از حل عددی این معادلات برای جریان خاصی يك مقدار عددی منفی به دست آید، جهت صحیح این جریان مخالف جهت مفروض است. در مسئله‌ای که در شکل ۸.۷ نشان داده شده است، شش جریان مجهول وجود دارند؛ این جریانها با نمادهای I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 و I_6 نشان داده شده‌اند و برای هر يك جهت مفروضی منظور شده است.

قانون اول کیرشهوف را برای هر نقطه انشعاب می‌توان به کار برد، لیکن معادلاتی که به دست می‌آیند همگی مستقل نیستند. قاعده کلی آن است که چنانچه n نقطه انشعاب وجود داشته باشد، تنها $n - 1$ نقطه آن معادلات مستقل دارند. در مسئله نشان داده شده در شکل ۸.۷ شش جریان مجهول وجود دارد؛ حل این مسئله مستلزم سه معادله نقطه انشعاب و سه معادله حلقه است.

جمعه‌ها در روابط (I) و (II الف)، جمع جبری‌اند. در رابطه (I) اگر جهت مفروض جریان به سمت نقطه انشعاب باشد جریان مثبت در نظر گرفته می‌شود و اگر این جهت به طرف خارج از نقطه اتصال مورد نظر باشد منفی در نظر گرفته می‌شود. در به کار بردن معادلات حلقه، يك جهت (ساعتگرد یا عکس ساعتگرد) برای پیمودن حلقه باید انتخاب شود. هر ولتاژ اعمال شده‌ای را که بتواند (به خودی خود) در جهت پیمودن حلقه جریانی مثبت ایجاد کند، مثبت فرض می‌کنیم؛ هر جمله IR را، چنانچه جریانی که از مقاومت وابسته به آن عبور می‌کند در جهت پیمودن حلقه باشد، مثبت فرض می‌کنیم.

۷.۷ نظریه میکروسکوپی رسانش

درک رفتار خطی که به صورت قانون اهم بیان می‌شود و نیز برخی جنبه‌های تجربی دیگر رسانش، بر اساس يك مدل میکروسکوپی ساده رسانا امکان پذیر است. يك ذره آزاد محیط به بار q و جرم m را در نظر می‌گیریم. در اثر نیروی الکتریکی موضعی، qE ، سرعت سوق ذره مطابق با رابطه $m \frac{dv}{dt} = qE$ افزایش خواهد یافت. اگر ذره باردار در خلأ بود، به شتاب گرفتن ادامه می‌داد. ولی در محیطی مادی که يك جریان پایا از خود عبور می‌دهد سرعت سوق ثابت است، و بنابراین نیروی کل وارد بر ذره باید برابر با صفر باشد. بنابراین علاوه بر نیروی الکتریکی، يك نیروی دیگر ناشی از محیط نیز باید به ذره وارد شود. ساده‌ترین فرض ممکن آن است که این نیروی کند کننده متناسب با سرعت باشد، پس معادله حرکت به صورت زیر درمی‌آید

$$m \frac{dv}{dt} = qE - Gv \quad (31.7)$$

مشاهده می شود که وقتی $dv/dt = 0$ باشد، جواب حالت پایا برای سرعت سوق به صورت زیر است

$$v = \frac{q}{G} E \quad (32.7)$$

باوجود این، بررسی جواب کامل معادله (۳۱.۷) جالب است؛ این جواب عبارت است از

$$v(t) = \frac{q}{G} E (1 - e^{-Gt/m}) \quad (33.7)$$

به شرط آنکه شرط اولیه $v(0) = 0$ برقرار باشد. این جواب نشان می دهد که سرعت سوق موضعی به طور نمایی به مقدار پایای خود نزدیک می شود یعنی به صورت $e^{-t/\tau}$ که در آن τ ، زمان داهلش، برابر است با

$$\tau = \frac{m}{G} \quad (34.7)$$

اگر G را از دو معادله (۳۲.۷) و (۳۴.۷) حذف کنیم، برای سرعت سوق در حالت پایا مقدار زیر را به دست می آوریم

$$v = \frac{q\tau}{m} E \quad (35.7)$$

وقتی این نتیجه را با معادله (۴.۷) برای تنها یک نوع حامل بار ترکیب کنیم، چگالی جریان را به دست می آوریم

$$J = Nqv = \frac{Nq^2\tau}{m} E \quad (36.7)$$

که بنا بر قانون اهم با میدان متناسب است. از مقایسه معادله بالا با معادله (۱۵.۷)، برای رسانندگی مقدار زیر را به دست می آوریم

$$g = \frac{Nq^2\tau}{m} \quad (37.7)$$

یا در حالتی که چندین نوع حامل بار وجود داشته باشند مقدار g به صورت زیر درمی آید

$$g = \sum \frac{N_i q_i^2 \tau_i}{m_i}$$

برای يك رسانای الكتریکی نسبتاً خوب، نظیر يك نیم رسانا یا فلز (ولی نه الكترولیت)، τ را می توان از نظر فیزیکی به عنوان ذهان میانگین میان برخورد های الكترون رسانش تعبیر كرد. در چنین جسمی الكترون برای مدتی کوتاه شتاب می گیرد، و پس از آن با یکی از اتمهای جسم برخورد می كند. در نتیجه این برخورد الكترون در جهتی كتره ای پرتاب می شود، به گونه ای كه اثر میانگین برخورد سرعت سوق الكترون را مجدداً به صفر كاهش می دهد. اگر میانگین زمان برخورد τ ، و میانگین سرعت ویژه v باشد، آنگاه بعد از هر مدت زمان τ الكترونها به مقدار mv از اندازه حرکت خود را از دست می دهند. در حالت پایا، آهنگ اتلاف اندازه حرکت mv/τ با آهنگ كسب اندازه حرکت qE برابر قرار داده می شود، و نتیجه حاصل با معادله (۳۵.۷) یکی است. زمان میانگین τ با رابطه زیر به مسافت آزاد میانگین الكترون مربوط می شود

$$l = v\tau \quad (38.7)$$

كه در آن v سرعت گرمایی الكترونهاست. در اینجا مجدداً تأکید می كنیم كه v از سرعت سوق v بسیار بیشتر^۱ است (گرچه جهت آن كتره ای است). در اكثر فلزها v در حدود 10^6 m/s (تقریباً مستقل ازما) است، و در نیم رساناها مقدار آن در دمای اتاق تقریباً يك مرتبه بزرگی كمتر است؛ از سوی دیگر سرعت سوق میانگین v در فلزهای معمولی از حدود 10^{-2} m/s بیشتر نیست. در فلزها و نیم رساناها مسافت آزاد میانگین در دمای اتاق نوعاً چند صد آنگستروم (10^{-8} m) است، به طوری كه در فلزها $10^{-14} \text{ s} \approx \tau$ ؛ در نیم رساناها τ ممكن است يك مرتبه بزرگی طولانیتر باشد. در هر دو مورد، چون τ با زمان آغاز برقراری یا زمان فرو افت جریان اهمی نیز برابر است، به هنگامی كه میدان در مقاومت های ساخته شده از این مواد برقرار و یا حذف می شود، این فاصله زمانی عملاً لحظه ای^۲ محسوب می شود. این نکته را متذكر می شویم كه در فلزات، زمان واهلش τ برای فرو افت جریان، زمان برخورد، و ثابت زمانی τ_c برای اتلاف چگالی بار اضافی همه برابر می شوند، هر چند كه از لحاظ مفهومی متفاوت اند.^۳

از جدول ۱۰.۷ پیداست كه فلزات موادی هستند كه بالاترین رسانندگی الكتریکی دارند. رسانندگی این مواد به دو دلیل بسیار زیاد است، اول اینکه چگالی حامل های بار در آنها زیاد است، یعنی در حدود يك حامل بار برای اتم، و دیگر اینکه سرعت سوق برای واحد میدان الكتریکی در فلزات زیاد است. در فلزات فقط با يك نوع حامل بار، یعنی با الكترون، سروكار داریم. لذا در این مورد معادلات رسانش ساده اند

- تنها به همین دلیل است كه می توان τ را از میدان شتاب دهنده E مستقل فرض كرد.
- در مقیاس فواصل ماكرو سكویی، محدودیت عمده زمانی عبارت است از زمان طولانیتر لازم برای انتشار میدان در سرعت نور، مثلاً 10^{-10} s برای مسافت ۳ سانتیمتری در خلا.
- در هر رسانای شعیف، زمان برخورد ممكن است بی معنی باشد، و یا τ_c ممكن است، مطابق معادلات (۲۷.۷) و (۳۷.۷)، به طور معكوس با τ متناسب باشد.

$$J = -Ne v \quad (۳۹.۷)$$

$$g = Ne(v/E) = Ne^2 \tau / m \quad (۴۰.۷)$$

در اینجا e قدر مطلق بار الکترون است. سرعت سوق الکترون برای واحد میدان الکتریکی (v/E) را تحریک الکترون می گویند. تحریک زیاد بدان معناست که زمان برخورد، τ ، یا به عبارت دیگر، مسافت آزاد میانگین طولانی است. برای اینکه بتوانیم مسافت آزاد میانگین الکترونها در فلز را بهتر تجسم کنیم باید از دینامیک برخورد الکترونها استفاده کنیم. می دانیم که رسانا از حیث الکتروستاتیکی فقط به طور متوسط خنثی است، و اینکه در ابعادی از مرتبه یک آنگستروم تغییرات زیادی در پتانسیل آن وجود دارد. همچنین می دانیم که هر ذره باردار مانند الکترون، باید برخورد کند و یا بر اثر تغییرات در پتانسیل پراکنده شود. اما به این نکته نیز واقفیم که در حرکت الکترون در مقیاس اتمی ماهیت موجی آن نقش مهمی ایفا می کند. حل کامل مسئله برخورد الکترونی با به کار بردن مفاهیم مکانیک موجی از حدود این کتاب خارج است؛ در اینجا فقط به ذکر یکی از نتایج آن می پردازیم. در یک بلور کامل که پتانسیل تناوبی سه بعدی دارد، یک موج الکترونی اصلاً برخوردی نمی کند؛ زمان برخورد τ برای آن نامتناهی است. از این رو، متناهی بودن رسانندگی فلزات ناشی از وجود ناکاملیهایی در ساختار کاملاً تناوبی آنهاست. این ناکاملیهها بدو نوع اند: (۱) ناخالصیها و نقصهای هندسی (نظیر مرزهای دانه‌ای در مواد چند بلوری) و (۲) ناکاملیهای ناشی از حرکت گرمایی اتمها در ساختار ماده. این هر دو نقص مستقل از یکدیگر به مقاومت ویژه کمک می کنند (قاعده ماتیسن^۱) به گونه‌ای که

$$\eta = \eta_1 + \eta_2(T) \quad (۴۱.۷)$$

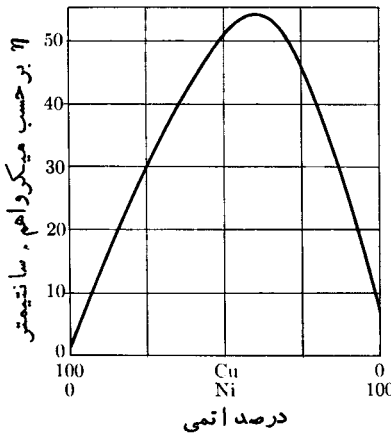
که در آن T دمای مطلق است.

در دماهای معمولی، پراکندگی امواج الکترونی توسط اتمهایی که در اثر گرما جابه‌جا شده‌اند سهم اصلی را در مقاومت ویژه فلزات بسیار خالص دارد. بنابرین، $\eta \approx \eta_2(T)$. مقطع مؤثر پراکندگی در یک اتم جابه‌جا شده متناسب است با مربع دامنه ارتعاش آن (x^2)، به عبارت دیگر متناسب است با بیشینه انرژی پتانسیل آن. با فرض اینکه بر اتمهای جابه‌جا شده نیروهای بازگرداننده کشسان وارد می‌شود، داریم

$$(\text{انرژی جنبشی})_{\max} = (\text{انرژی پتانسیل})_{\max} \propto kT$$

به طوری که

$$\eta \approx \eta_2 \propto (\tau_2)^{-1} \propto x^2 \propto T \quad (۴۲.۷)$$



شکل ۹.۷ مقاومت ویژه آلیاژهای مس - نیکل بر حسب تابعی از نسبت ترکیب در 25°C .

یا اگر این رابطه را با کلمات بیان کنیم، مقاومت ویژه فلز خالص متناسب است با دمای مطلق. بنا بر این ضریب گرمایی مقاومت، $(1/\eta)d\eta/dT$ ، برای فلزهای بسیار خالص، عبارت است از

$$\alpha = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dT} \approx \frac{1}{T} \quad (۴۳.۷)$$

که با ارقام مربوط به فلزات در جدول ۱.۷ تقریباً توافق دارد. به بیان دقیقتر، باید گفت که استدلال بالا فقط وقتی معتبر است که دما از دمای دبی (فلز) دمای کمی که در بالاتر از آن تمام مدهای ارتعاشی اتمی برانگیخته می شوند) بالاتر باشد. در دماهای کمی پایینتر از دمای دبی، η به زیر مقدار پیش بینی شده در رابطه خطی (۴۲.۷) سقوط می کند. در دماهای بسیار کم از سهم η نمی توان صرف نظر کرد.

افزودن مقدار کمی ناخالصی، همیشه مقاومت ویژه را افزایش می دهد. آلیاژ را می توان فلز ناخالصی در نظر گرفت که مقاومت ویژه آن همیشه از مقاومت ویژه فلزی از فلزات تشکیل دهنده آلیاژ که مقاومت ویژه کمتری دارد، بیشتر است (شکل ۹.۷). ضریب گرمایی α در هر آلیاژ آشکارا کمتر است از ضریب مربوط برای فلز خالص، درست به این دلیل که مقاومت ویژه آن بیشتر است. با وجود این تعدادی آلیاژ ساخته شده اند که ضریب گرمایی بسیار کم دارند.

در فصل بعد توصیف خواهد شد، این جریانها در مبحث مغناطیس نیز اهمیت اساسی دارند. چگالی جریان، که در نقطه‌ای در فضا به طور موضعی تعریف می‌شود، برابر است با

$$\mathbf{J} = \sum N_i q_i \mathbf{v}_i$$

از آنجا که چگالی بار برابر است با

$$\rho = \sum N_i q_i$$

در مواردی ممکن است چگالی بار صفر باشد، در عین آنکه چگالی جریان غیر صفر است. این مورد (یعنی رسانش، در مقابل همرفتی) موضوع بحث ما در اینجا است. جریان کل از يك سطح S عبارت است از

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

و

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

بقای بار در هر نقطه با معادله پیوستگی به صورت زیر بیان می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(در حال حاضر ما عمدتاً جریانهای پایا را در نظر می‌گیریم، که برای آنها $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ و همچنین $\partial \mathbf{J} / \partial t = 0$) جریان رسانی در يك محیط بایک معادله ساختمندی داده می‌شود که در ساده‌ترین مورد خطی، رسانندگی g به کمک آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{J} = g \mathbf{E}$$

۱. صورت انتگرالی معادله ساختمندی، قانون اهم است

$$V = IR$$

مقاومت يك رسانای مستقیم با سطح مقطع یکنواخت برابر است با

$$R = l / gA$$

۲. وقتی در يك محیط رسانای پیوسته جریانهای پایا وجود داشته باشند، پتانسیل از معادله

لاپلاس پیروی می کند

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

شرایط مرزی برای $\mathbf{E}$ همان شرایط مرزی در محیط دی الکتریکی است، و شرایط مرزی مربوط به $\mathbf{J}$ با شرایط مربوط به $\mathbf{D}$ یکسان اند. در نتیجه، برای دو رسانا که در محیطی نامتناهی قرار گرفته اند داریم

$$RC = \frac{\epsilon}{g} \quad (\text{یکاهای mks})$$

۳. اگر چگالی حجمی بار در محیطی رسانا در ابتدا صفر نباشد، با ثابت زمانی زیر افت می کند

$$t_c = \frac{\epsilon}{g} \quad (\text{یکاهای mks})$$

این زمان برای فلزات در حدود 10^{-14} s است، و برای رساناهای ضعیف تر ممکن است به چندین ماه نیز برسد.

۴. برای مدارهای الکتریکی، معادلات ایستای $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ و $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ به دو قانون کیرشهوف تبدیل می شوند

$$\sum I_j = 0 \quad \text{در يك نقطه اتصال}$$

$$\sum V_j = 0 \quad \text{دور يك حلقه}$$

برای تأمین توان تلف شده توسط جریانهای پایا در مقاومتها، باید ولتاژهای معینی توسط بعضی وسایل، مثلاً، توسط باتریهایی که بیان طرز کارشان در چارچوب مبحث الکتروستاتیک امکان پذیر نیست اعمال شود. بنابراین، حل کامل مسئله مدار به کمک قانون اهم بسیار راحت است.

۵. نظریه میکروسکوپی رسانش اهمی، علاوه بر نیروی الکتریکی شتاب دهنده، به یک نیروی کند کننده خطی که بر بارهای آزاد موجود در محیط وارد می شود نیز وابسته است. اگر این موضوع را بر حسب زمان و اهلس τ بنویسیم داریم

$$g = \frac{Nq^2\tau}{m}$$

زمان τ عبارت است از ثابت زمانی مربوط به برقراردادن موضعی یک جریان اهمی پس از اعمال میدان؛ در موارد عملی τ کوتاه است (10^{-14} s در فلزات). در رساناهای الکترونی خوب (فلزات، نیم رساناها)، τ به عنوان فاصله زمانی میانگین میان برخوردها تعبیر می شود. در این موارد τ به مسافت آزاد میانگین الکترون، به صورت زیر بستگی دارد

$$\tau = l/v_T$$

که در آن v_T سرعت گرمایی کتره‌ای است و نه سرعت سوق.

مسائل

۱.۷ حداکثر جریانی که می‌تواند از سیمی مسی به سطح مقطع 2 mm^2 بگذرد، 20 A است. (الف) چگالی جریان مربوط بر حسب A/m^2 چقدر است؟ (ب) با این فرض که از هراتم مس يك الكترون در رسانش شرکت می‌کند، سرعت سوق الکترونی مربوط به این چگالی جریان را محاسبه کنید. (عدد آووگادرو: $10^{23} \times 602 = N_0$ ؛ وزن اتمی مس: 63.5 ؛ چگالی مس: 8.92 g/cm^3). (ج) با استفاده از رسانندگی تجربی، زمان برخورد میانگین يك الكترون در مس را محاسبه کنید.

۲.۷ رسانندگی آب دریا تقریباً $(\Omega \text{ m})^{-1}$ است. چگالی جریان در سلولی به طول 1 cm و سطح مقطع 1 cm^2 از آب دریا را، وقتی اختلاف پتانسیل 3 V به دوسر آن اعمال شود، پیدا کنید. سرعت سوق میانگین را محاسبه کنید. فرض کنید که غلظت یونها 2 درصد است.

۳.۷ دو صفحه فلزی مسطح نامتناهی و موازی به فاصله d از یکدیگر قرار دارند. فضای میان آنها با دو محیط رسانا پر شده است و فصل مشترك دو محیط صفحه‌ای است موازی با صفحات فلزی. محیط اول (رساندگی g_1 ، گذردهی ϵ_1) به ضخامت a ، و محیط دوم (رساندگی g_2 ، گذردهی ϵ_2) به ضخامت $a - d$ است. صفحات فلزی به ترتیب در پتانسیل‌های φ_1 و φ_2 قرار دارند. در حالت پایا، پتانسیل فصل مشترك دو محیط، و چگالی سطحی بار بر روی این فصل مشترك چقدر است؟

۴.۷ دستگاهی از بارها و جریان‌های الکتریکی در درون حجم ثابت V کاملاً محصور است. گشتاور دو قطبی توزیع بار - جریان (بخش ۹.۲) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r} \rho \, dv$$

که در آن $\mathbf{r}$ بردار مکان نسبت به مبدهی ثابت است. ثابت کنید که

$$\int_V \mathbf{J} \, dv = \frac{d}{dt} \mathbf{p}$$

(اذهمایی: ابتدا اتحاد زیر را ثابت کنید)

$$\int_V \mathbf{J} \, dv = \oint_S \mathbf{r} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_V \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{J} \, dv$$

و توجه داشته باشید که $\mathbf{J}$ بر روی سطح S صفر می شود.)

۵.۷ محیطی رسانا در میدان یکنواخت $\mathbf{E}_0$ قرار دارد. حفره ای کروی به شعاع a در محیط ایجاد کرده ایم. (الف) پتانسیل داخل و خارج حفره را پیدا کنید. (ب) بار سطحی ظاهر شده بر سطح حفره چقدر است؟ (ج) خطوط میدان را رسم کنید.

۶.۷ خازنی با صفحات موازی از ماده ای با ثابت دی الکتریک K و رسانندگی g پر شده است. خازن با بار اولیه Q باردار شده است. (الف) نشان دهید که بار به صورت تسابعی نسایی از زمان از صفحات نشت می کند. (ب) نشان دهید که تولید گرمای ژول کل برابر است با انرژی الکتروستاتیکی ذخیره شده در آغاز. (ج) اگر ماده اکسید سیلیسیوم باشد، ثابت زمانی تخلیه چقدر است؟ (جدولهای ۱.۴ و ۱.۷)

۷.۷ دو پوسته استوانه ای فلزی طویل (به شعاعهای r_1 و r_2 ، $r_2 > r_1$)، به صورت هم محور قرار داده شده اند. پوسته ها در اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ قرار دارند. (الف) فضای میان پوسته ها با محیطی به رسانندگی g پر شده است. با استفاده از قانون اهم، $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ ، جریان الکتریکی میان واح طول پوسته ها را محاسبه کنید. (ب) اگر فضای میان دو پوسته با محیطی نارسانا با گذردهی ϵ پر شده باشد، می توان ظرفیت دستگاه را از تعریف $C = Q/\Delta\varphi$ حساب کرد. نشان دهید که برای این وضعیت هندسی حاصل ضرب مقاومت در واحد طول در ظرفیت در واحد طول مساوی ϵ/g است.

۸.۷ مقاومت نشت کابلی با پوشش عایق لاستیکی به طریق زیر اندازه گیری می شود: طول l از کابل عایق دار را در محلول آب نمک فرو می بریم، اختلاف پتانسیلی میان قسمت رسانای کابل و محلول برقرار می کنیم، و جریانی را که از کابل می گذرد اندازه می گیریم. در یک مورد خاص ۳ متر از کابل را در محلول فرو برده ایم و با اعمال اختلاف پتانسیل ۲۵۰ ولت میان رسانا و محلول، جریانی برابر با 2×10^{-9} آمپر اندازه گیری کرده ایم. ضخامت عایق برابر شعاع رسانای درون آن است. مقاومت ویژه الکتریکی عایق چقدر است؟

۹.۷ سیم مسی طویلی به شعاع a در فاصله h از یک صفحه نامتناهی مسی و به موازات آن کشیده شده است. فضای بالای صفحه و اطراف سیم با محیطی به رسانندگی g پر شده است. نشان دهید که مقاومت الکتریکی میان این دو الکترود مسی در واحد طول سیم برابر است با

$$R = \frac{1}{\pi g} \cosh^{-1} \frac{h}{a}$$

۱۰.۷ به تمام نقاط سطح یک کره همگن و همسانگرد با رسانندگی g ، پتانسیل $\varphi_0 \cos\theta$ اعمال شده است. در اینجا θ همان زاویه قطبی معمولی است که نسبت به یک محور که از مرکز کره می گذرد اندازه گیری می شود. چگالی شدت جریان $\mathbf{J}$ را در تمام نقاط درون

کره محاسبه کنید.

۱۱.۷ دو الکترو د مسی استوانه‌ای به شعاع a بر صفحه دیسکی از جنس سیلیسیوم به ضخامت s عمودند و فاصله محورهاى آن دو از یکدیگر b است. الکتروها تا عمق s در دیسک فرو رفته‌اند، به عبارت دیگر، کاملاً تا انتهای دیسک رفته‌اند. ابعاد سطح دیسک نسبت به b خیلی بزرگ است، به طوری که می‌توان آن را نامتناهی انگاشت. اگر رسانندگی سیلیسیوم g باشد، جریان میان الکتروها را، وقتی که اختلاف پتانسیل آنها برابر $\Delta\varphi$ است، حساب کنید.

۱۲.۷* يك صفحه مسی مربع شکل به ضلع a و ضخامت s و رسانندگی g تحت تأثیر اختلاف پتانسیلی به نحو زیر قرار دارد: یکی از لبه‌های صفحه در پتانسیل φ و لبه مقابل آن در پتانسیل φ_0 قرار دارد. (الف) مقاومت الکتریکی صفحه چقدر است؟ (ب) سوراخ کوچکی به شعاع a در مرکز صفحه ایجاد می‌کنیم. نسبت تغییر مقاومت را به طور تقریبی محاسبه کنید. (دانه‌مایی: توزیع پتانسیل را در صفحه با استفاده از هماهنگی‌های استوانه‌ای کسینوس θ پیدا کنید. متأسفانه توزیعی که بدین نحو به دست می‌آورید کاملاً صحیح نیست، زیرا که لبه‌های مقابل مربع دقیقاً منطبق بر خطوط هم پتانسیل این توزیع نیستند. جواب تقریبی را می‌توان با مساوی گرفتن پتانسیل متوسط لبه‌ها با $\varphi_0 \pm$ به دست آورد.)

۱۳.۷ نسبت اتلاف توان به مساحت سطح را برای رساناهای مذکور در (الف) مسئله ۱.۷ و (ب) مسئله ۲.۷، محاسبه کنید.

۱۴.۷ سه مقاومت ۱ اهمی و ۲ اهمی و ۳ اهمی داده شده‌اند. مقاومت شانزده ترکیب مختلف را که با این مقاومتها می‌توان ساخت پیدا کنید.

۱۵.۷ يك لامپ ۴ ره واتى چنان طراحی شده است که با اختلاف پتانسیل ۲ ولتی کار کند. مقاومت R را به طور موازی با لامپ می‌بندیم و ترکیب این دو را با يك مقاومت ۳ اهمی و يك باتری ۳ ولتی (با مقاومت داخلی $1/3$ اهم) به طور سری قرار می‌دهیم. مقدار R باید چقدر باشد تا لامپ در ولتاژ طرح کار کند؟

۱۶.۷* يك خط مقاومت با مقاومت کل nR میان پتانسیل φ_0 و زمین وصل شده است (منظور از زمین پتانسیل مرجع است). خط مقاومت روی $1 - n$ تیر با فواصل مقاومتی یکسان قرار گرفته است، به طوری که مقاومت میان هر دو تیر R است. مقاومت نشن به زمین در هر يك از تیرها βR است. اگر φ_m پتانسیل خط مقاومت در m امین تیر باشد نشان دهید که

$$\varphi_{m+1} - (2 + \beta^{-1})\varphi_m + \varphi_{m-1} = 0$$

۱۷.۷ دو باتری را که به ترتیب دارای ولتاژ مدار باز $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$ و مقاومت داخلی R_1 و R_2 اند به طور موازی به یکدیگر و به مقاومت بار R می‌بندیم. (الف) جریان را در مقاومت بار پیدا کنید. (ب) اگر مقاومت بار تغییر کند ولی سایر کمیتها ثابت بمانند، R باید چه مقدار

باشد تا توان تلف شده در آن حداکثر شود؟

۱۸.۷ يك گروه شامل n پیل متشابه با ولتاژ مدار باز $\mathcal{V}_0$ و مقاومت داخلی R_I را برای ایجاد جریانی در مقاومت بار R به کار می‌بریم. نشان دهید اگر این n پیل را به یکدیگر و با مقاومت R به‌طور متوالی ببندیم، آنگاه $I = n\mathcal{V}_0 / (R + nR_I)$ ؛ ولی هرگاه پیلها را موازی ببندیم و ترکیب آنها را به‌طور متوالی به مقاومت R وصل می‌کنیم آنگاه $I = \mathcal{V}_0 / (R + R_I/n)$.

۱۹.۷ شش مقاومت مشابه (R) را به هم می‌بندیم تا تشکیل يك شش ضلعی بدهند. شش مقاومت دیگر (همگی با همان مقاومت R) را میان شش رأس این شش ضلعی و مرکز آن وصل می‌کنیم. (الف) مقاومت معادل میان هر دو رأس مقابل چقدر است؟ (ب) مقاومت معادل میان هر دو رأس مجاور چقدر است؟

۲۰.۷ شش مقاومت اضلاع يك چهار وجهی را تشکیل می‌دهند. پنج تا از مقاومتها یکسان اند (R) ، و ششمی برابر R_1 است. اختلاف پتانسیلی به‌دوسریکی از مقاومتهای مجاور R_1 اعمال می‌کنیم. نشان دهید که تولیدگرهای ژول در R_1 وقتی حداکثر است که $R_1 = (3/5)R$ باشد.

۲۱.۷ چنانچه در مدار شکل ۸.۷ ولتاژ $\mathcal{V}_p$ را صفر کنیم و گالوانومتر R_g را به‌جای مقاومت R_p قرار دهیم، يك مدار پل وتستون^۱ به‌دست می‌آوریم. R_1 را نیز صفر می‌گیریم. این پل وقتی به حالت تعادل (جریان صفر از گالوانومتر) می‌رسد که $R_p R_g = R_f R_d$ باشد. بدین ترتیب يك مقاومت مجهول، مثلاً R_g ، را می‌توان بر حسب مقاومتهاى معلوم تعیین کرد: در حالت تعادل $R_g = R_f R_d / R_p$. (الف) جریان الکتریکی را که در حالت عدم تعادل از گالوانومتر می‌گذرد حساب کنید. (ب) فرض کنید می‌خواهیم با تغییر دادن R_p پل را به حالت تعادل در آوریم. حساسیت پل با رابطه $S = CR_p (\partial I_f / \partial R_p)$ تعریف می‌شود، که در آن C مقدار انحراف گالوانومتر به‌دای عبور واحد جریان است، و شاخص صفر به معنی آن است که مشتق پاره‌ای باید در حالت تعادل محاسبه شود. ثابت کنید که

$$S = \frac{C\mathcal{V}_0}{R_p + R_f + R_d + R_g + R_g(1 + R_d/R_f)(1 + R_f/R_p)}$$

* ۲۲.۷ پل وتستون مسئله قبل نزدیک به حالت تعادل است فرض کنید $R_d/R_p = \alpha$ و $R_g/R_f = \alpha(1 - \varepsilon)$ ، که در آن $\varepsilon \ll 1$. اگر مقاومت R_g قابل چشمپوشی باشد، نشان دهید که $I_f/I_g = \alpha\varepsilon/(\alpha + 1)^2$.

* ۲۳.۷ يك مقاومت تقریباً ۱۰ اهمی را می‌خواهیم با مدار پل وتستون مسئله ۲۱.۷ اندازه

بگیریم، تعداد بسیار متنوعی مقاومت معلوم استاندارد در دست داریم. حداکثر توان مجاز دستگاه ۵ وات است. اگر $R_g = 100 \Omega$ ، و گالوانومتر جریان‌هایی را که درست $4 \times 10^{-9} A$ یا بیشترند نشان دهد، بالاترین دقتی که می‌توان در اندازه‌گیری یک مقاومت مجهول به دست آورد چقدر است؟ فرض کنید مقاومت‌های استاندارد کاملاً دقیق باشند و محدودیتی در دقت ایجاد نکنند.

۲۴.۷* یک محیط رسانای خطی در n نقطه به الکترودهایی به پتانسیل‌های ثابت $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ وصل شده است. نشان دهید که گرمای ژول تولید شده در محیط از فرمول $\sum_{i=1}^n \varphi_i I_i$ به دست می‌آید، که در آن I_i جریانی است که از الکتروود i وارد محیط می‌شود.



میدان مغناطیسی جریانهای پایا

دومین میدانی که در مبحث الکتریسیته و مغناطیس مطالعه می‌شود، میدان مغناطیسی است. این میدانها، یا به عبارت دقیقتر، آثار این میدانها از زمانهای بسیار قدیم، یعنی از همان وقتی که آثار ناشی از مغناطیسه‌های طبیعی سنگ آهنر با (Fe_3O_4) برای اولین بار مشاهده شد، شناخته شده‌اند. خواص شمال و جنوب یابی این ماده تأثیر مهمی بر دریا نوردی و اکتشاف گذاشت. با وجود این، جز در این مورد، مغناطیس پدیده‌ای بود که کم مورد استفاده قرار می‌گرفت و کمتر نیز شناخته شده بود، تا اینکه در اوایل قرن نوزدهم اوستند دریافت که جریان الکتریکی میدان مغناطیسی تولید می‌کند. این کار، توأم با کارهای بعدی گاوس، هنری، فاراده و دیگران، اهمیت میدان مغناطیسی را به عنوان شریک میدان الکتریکی نمایان ساخت. کارهای نظری ماکسول و دیگران (فصلهای ۱۱ و ۱۶) نشان دادند که این شراکت واقعی است، و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی به طرزی جدایی ناپذیر درهم آمیخته‌اند. تلاش مردان عمل به توسعه ماشینهای الکتریکی، وسایل مخبرات، و کامپیوترها منجر شد. این وسایل که پدیده مغناطیسی در آنها دخیل است نقشی بس مهم در زندگی روزمره ایفا می‌کنند. در این فصل تعاریف اساسی مربوط به مغناطیس داده می‌شوند، میدانهای مغناطیسی حاصل از جریان پایای الکتریکی مطالعه می‌شود و برخی پایه‌های اساسی برای مطالعات آینده گذارده خواهد شد.

با رابطه زیر داده شد

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.8)$$

در آنجا به طور ضمنی فرض شد که هر دو بار ساکن اند. اگر بارها به ترتیب با سرعت‌های $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}_1$ در حرکت یکنواخت باشند، علاوه بر این نیرو یک نیروی مغناطیسی $\mathbf{F}_m$ نیز از طرف q_1 به q وارد می‌شود

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq_1}{r^2} \mathbf{v} \times \left(\mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.8)$$

عدد $\mu_0/4\pi$ در اینجا نقش $1/4\pi\epsilon_0$ در الکتروستاتیک را ایفا می‌کند، یعنی، این عدد ثابتی است که برای سازگاری یک قانون تجربی با مجموعه‌ای از یکاها لازم است. در دستگاه یکاهای mks، بنا به تعریف، داریم

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2$$

و این به تعریف اصلی کولن می‌انجامد (بخش ۳.۸). همچنین، مثل مورد نیروی الکتروستاتیکی، مناسب است که با تعریف کردن میدان مغناطیسی، خواص «بار آزمون» را جدا کنیم؛ در این مورد نه فقط بار آزمون q ، بلکه سرعت آن $\mathbf{v}$ نیز باید به صورت عاملی جدا نگه داشته شود

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.8)$$

که در آن میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ برابر است با

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^2} \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.8)$$

اگر تعدادی چشمه بار متحرک وجود داشته باشند، نیروها و میدانها جمع پذیرند. در تعریف $\mathbf{B}$ نیز باید نوعی فرایند حدی منظور کنیم تا اطمینان حاصل کنیم که بار آزمون روی چشمه‌های مولد $\mathbf{B}$ تأثیر نمی‌گذارد. در دستگاه mks یکای میدان مغناطیسی، بنا به معادله (۳.۸)، عبارت است از نیوتون - ثانیه بر کولن - متر، که قسلاً (T) نامیده می‌شود. در حالتی که میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی هر دو موجود باشند، نیروی کل وارد بر بار متحرک برابر است با $\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.8)$$

که به نیروی لورنتس معروف است.

نیروی مغناطیسی میان دو بار، به خاطر وابستگی به سرعت و ضربهای برداری، از نیروی الکتریکی پیچیده تر است. در وهله نخست، شباهت این دو در آن است که بزرگی هر دو نیرو به حاصل ضرب بارها و عکس مجذور فاصله میان آنها بستگی دارد (علاوه بر این هر دو دارای يك ثابت بعددار هستند). اما جهت نیروی مغناطیسی در راستای خط واصل ذرات نیست (یعنی، يك نیروی مرکزی نیست)، مگر اینکه $\mathbf{v}$ تصادفاً بر $\mathbf{r}$ عمود باشد؛ نیرو همیشه در صفحه دربر گیرنده $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ قرار دارد. مهمتر اینکه نیرو همیشه بر $\mathbf{v}$ عمود است؛ بنابراین معادله (۳.۸)، میدان $\mathbf{B}$ هر چه باشد $\mathbf{F}_m = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_m = 0$ ، در نتیجه نیروی مغناطیسی هرگز بر روی يك ذره باردار کار انجام نمی دهد. اگر صورت و مخرج معادله (۲.۸) را در ϵ_0 ضرب کنیم، مقایسه دیگری میان $\mathbf{F}_m$ و $\mathbf{F}_e$ ممکن می شود. مقایسه نتیجه این عمل با معادله (۱.۸) نشان می دهد که ابعاد $\epsilon_0 \mu_0$ باید برابر با ابعاد عکس مجذور سرعت باشد. اکنون می نویسیم

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (۶.۸)$$

که در آن بعد c بعد سرعت است، در این صورت

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \left(\frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

با استفاده از مقدار تعریف شده μ_0 و مقدار تجربی ϵ_0 ، به دست می آوریم

$$c = 299792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

که از حیث مقدار برابر است با سرعت تجربی نور.^۱ در فصل ۱۶ خواهیم دید که این تطابق عددی تصادفی نیست، بلکه چنانچه نور خود موج الکترومغناطیسی باشد يك پیامد الزامی است. در اینجا لازم نیست به عمق معنی این رابطه پردازیم، بلکه فقط از آن به منزله يك

۱. معادله (۶.۸) باید در هر دستگاه یکای سازگاری برقرار باشد. در دستگاه یکاهای گاوسی، که در آن بنا به تعریف $\epsilon_0 = 1/4\pi$ است، مقدار $c^2 = 1/4\pi\mu_0$ را آزمایش تعیین می کند. اختلاف دیگر میان دو دستگاه یکا در آن است که در دستگاه یکاهای گاوسی دو تا c از یکدیگر جدا و با v ها همراه می شوند به طوری که می توانیم بنویسیم

$$\mathbf{B} = \frac{q_1}{r^2} \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}_m = q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$$

فايده این تعریفها این است که $\mathbf{B}$ و $\mathbf{E}$ از لحاظ ابعادی یکسان اند (و اینکه شکل نسبیتی v/c صریحاً ظاهر می شود).

واقعیت تجربی استفاده می‌کنیم. این بدان معنی است که برای يك زوج ذره داده شده

$$\frac{F_m}{F_e} \leq \frac{v}{c} \frac{v_1}{c}$$

یعنی، اگر سرعت‌های ذره‌ها در مقایسه با سرعت نور كوچك باشند، برهم‌کنش مغناطیسی از برهم‌کنش الکتریکی بسیار كوچكتر خواهد بود. در حقیقت، معادله‌های (۱۰۸)، (۲۰۸)، و (۴۰۸) فقط تقریب‌های مرتبه اولی هستند از عبارتهای نسبیتی صحیحی که در فصل ۲۱ به دست خواهیم آورد، و این تقریبها تا وقتی برقرارند که $v_1 \ll c$ باشد. باید توجه داشت که میدانهای حاصل از بار q_1 ، که حرکت یکنواخت دارد، با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}_1}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$$

برای سرعت‌های به حد دلخواه بزرگ نیز این رابطه برقرار است، با آنکه وقتی مقدار v_1 نزدیک به مقدار c است عبارتهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ هر دو تغییر می‌کنند. بالاخره، شایان توجه است که نیروی مغناطیسی تنها به سرعت نسبی دوبار بستگی ندارد، بلکه مقدار آن در يك دستگاه مختصات متحرك متفاوت است؛ و اینکه با تعویض برچسب ذرات تغییر حاصل در این نیرو صرفاً يك تغییر علامت نیست. ولی، لازم نیست که فعلاً به این جنبه‌ها بپردازیم، زیرا در کار بستهایی که در این فصل و در فصلهای بعد خواهیم داشت، این اثرها حذف می‌شوند.

از آنجا که $F_m \ll F_e$ ، در وهله اول ممکن است چنین به نظر رسد که همواره در مقایسه با نیروی الکتریکی از نیروی مغناطیسی می‌توان صرف نظر کرد، اما دستگاههایی از ذرات وجود دارند که این امر در آنها مصداق پیدا نمی‌کند. به ویژه در جریان رسانشی، که در آن بارهای مثبت و منفی با چگالیهایی برابر موجودند، میدان الکتریکی ماکروسکوپی صفر است ولی میدان مغناطیسی بارهای متحرك صفر نیست. در آهنرباهای الکتریکی، موتورها، مبدلها، و سایر مواردی که نیروهای مغناطیسی از اهمیت عملی بسیار زیادی برخوردارند، چنین وضعیتی برقرار است. بنابراین با بررسی برهم‌کنشهای مغناطیسی میان جریانهای رسانشی موضوع را آغاز می‌کنیم. در بخش بعد نیروی وارد بر يك جریان رسانشی واقع در میدان مغناطیسی موجود، و در بخش ۳۰۸ میدان مغناطیسی حاصل از يك جریان رسانشی معین را بررسی می‌کنیم.

۱. به ویژه در دستگاه مختصاتی که با سرعت v حرکت می‌کند، این نیرو صفر می‌شود. این وابستگی به دستگاه مختصات با فرض اساسی مکانیک کلاسیک که بنا بر آن نیروها در تمام دستگاههای مختصات لخت یکسان‌اند، در تناقض است. این مطلب برای ما نخستین سر نخ است حاکی از آن که نظریه نسبیت برای بررسی الکترومغناطیس ضروری است.

۲.۸ نیروهای وارد بر رساناهای حامل جریان

از روی نیروی لورنتس (معادله ۵.۸) می‌توانیم رابطه‌ای برای نیروی وارد بر يك عنصر $d\mathbf{l}$ از رسانای حامل جریان به‌دست آوریم. اگر $d\mathbf{l}$ عنصری از رسانا باشد که جهت آن با جهت جریان I که از آن می‌گذرد یکی فرض شود، آن وقت $d\mathbf{l}$ با سرعت حاملهای بار در رسانا، $\mathbf{v}$ ، موازی خواهد بود. اگر در هر واحد حجم از رسانا N حامل بار وجود داشته باشد، نیروی وارد بر عنصر $d\mathbf{l}$ عبارت است از

$$d\mathbf{F} = NA|d\mathbf{l}|q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (۷.۸)$$

که در آن A مساحت سطح مقطع رسانا و q بار هر حامل بار است. در صورتی که چندین نوع حامل بار وجود داشته باشند، آن وقت در معادله (۷.۸) يك جمع‌بندی باید منظور کنیم؛ لیکن نتیجه نهایی، یعنی معادله (۸.۸) تغییر نخواهد کرد. چون $\mathbf{v}$ و $d\mathbf{l}$ موازی‌اند، صورت دیگر نوشتن معادله (۷.۸) چنین است

$$d\mathbf{F} = Nq|\mathbf{v}|A d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad [۷.۸]$$

اما $Nq|\mathbf{v}|A$ درست همان جریان ناشی از یکی از انواع حاملهای بار است. پس برای نیروی وارد بر عنصری نهایت کوچکی از رسانای حامل جریان داریم

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (۸.۸)$$

از معادله (۸.۸) می‌توان انتگرال گرفت تا نیروی وارد بر يك مدار کامل (یا بسته) به‌دست آید. هر گاه مدار مورد نظر با منحنی C نشان داده شود، آنگاه

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (۹.۸)$$

چنانچه $\mathbf{B}$ تابعی از مکان باشد، تنها ساده‌سازی که در معادله (۹.۸) امکان‌پذیر است این است که جریان I را از زیر انتگرال بیرون آوریم. اما اگر $\mathbf{B}$ یکنواخت، یعنی مستقل از مکان، باشد آن وقت می‌توان آن را نیز از زیر انتگرال بیرون آورد تا نتیجه زیر به‌دست آید

$$\mathbf{F} = I \left\{ \oint_C d\mathbf{l} \right\} \times \mathbf{B}$$

محاسبه انتگرال باقی مانده کار آسانی است. چون این انتگرال عبارت است از مجموع بردارهای بی‌نهایت کوچکی که يك مدار کامل را تشکیل می‌دهند، نتیجه‌اش الزاماً صفر است. پس

$$\mathbf{F} = \oint_c I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\mathbf{B} \text{ یکنواخت}) \quad (۱۰.۸)$$

کمیت جالب توجه دیگر گشتاور نیروی وارد بر یک مدار کامل است. عنصر گشتاور نیرو، $d\tau$ ، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$d\vec{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (۱۱.۸)$$

گشتاور نیروی وارد بر یک مدار کامل عبارت است از

$$\vec{\tau} = I \oint_c \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (۱۲.۸)$$

در اینجا نیز چنانچه $\mathbf{B}$ یکنواخت نباشد ساده‌سازی بیشتری میسر نیست، اما اگر یکنواخت باشد بسط سراسری به ترتیب زیر امکان پذیر است

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathbf{i}(dyB_z - dzB_y) + \mathbf{j}(dzB_x - dxB_z) + \mathbf{k}(dxB_y - dyB_x) \quad (۱۳.۸)$$

با استفاده از این مؤلفه‌ها، مؤلفه‌های $\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ را به راحتی می‌توان پیدا کرد

$$[\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_x = y dxB_y - y dyB_z - z dzB_x + z dxB_z$$

$$[\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_y = z dyB_z - z dzB_y - x dxB_z + x dyB_x \quad (۱۴.۸)$$

$$[\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_z = x dzB_x - x dxB_z - y dyB_z + y dzB_y$$

چون $\mathbf{B}$ مستقل از $\mathbf{r}$ فرض شده است (میدان یکنواخت) مؤلفه‌های $\mathbf{B}$ را می‌توان از زیر انتگرال‌هایی که در بسط معادله (۱۲.۸) ظاهر می‌شوند، بیرون آورد. انتگرال‌گیریهایی فضایی که باید انجام دهیم از دو نوع کلی زیرند

$$\oint \xi d\xi \quad (۱۵.۸ \text{ الف})$$

و

$$\oint \xi d\eta \quad (۱۵.۸ \text{ ب})$$

که در آنها ξ نشان‌دهنده هر یک از مختصات است و η نمایانگر هر مختصه‌ای است که با ξ متفاوت باشد. انتگرال اولی بدیهی است زیرا که صرفاً انتگرال $d\xi$ است از یک حد پایینی ξ_1 تا یک حد بالایی ξ_2 ، به اضافه همین انتگرال از ξ_2 تا ξ_1 . چون جابه‌جا کردن

حدود انتگرال يك علامت منها پديد می آورد، پس نتیجه صفر است، و به این ترتیب انتگرالهای مربوط به شش جمله از معادله های (۱۴.۸) حذف می شوند. انتگرالهای از نوع (۱۵.۸ ب) فقط دو متغیر ξ و η را دربردارند، پس فرقی نمی کند که این انتگرالها دور منحنی واقعی C محاسبه شوند یا دور تصویر این منحنی بر روی صفحه ξ - η (شکل ۱۰.۸). با به کار بردن تصویر بر روی صفحه ξ - η به راحتی می توان دید که انتگرال (۱۵.۸ ب) نشان دهنده چیست. در شکل ۲.۸ صفحه ξ - η همراه با سطح بی نهایت کوچک $d\eta$ نشان داده شده است. انتگرال را می توان به صورت زیر نوشت

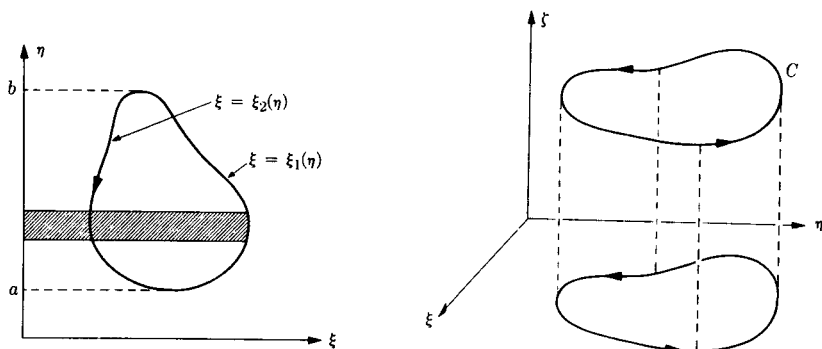
$$\oint \xi d\eta = \int_a^b \xi_1(\eta) d\eta + \int_b^a \xi_2(\eta) d\eta \quad (۱۶.۸)$$

این انتگرال، همان مساحت سطح محصور به وسیله تصویر منحنی را نتیجه می دهد، و در شکل مقدار آن مثبت است. اگر ξ و η در يك دستگاه مختصات راستگرد به ترتیب دوری ظاهر شوند، آن وقت جهت دور زدن منحنی، بردار يکة عمودی در جهت مثبت ξ به دست خواهد داد. پس می توان نوشت

$$\oint \xi d\eta = A_\xi \quad (۱۷.۸)$$

که در آن ξ ، η ، ξ جایگشت دوری x ، y ، z اند. با به کار بردن این نتایج در محاسبه انتگرالها، به دست می آوریم

$$\tau_z = I \oint_C [\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})]_z = I(A_y B_z - A_z B_y) \quad (۱۸.۸)$$



شکل ۲.۸ محاسبه انتگرال $\oint \xi d\eta$

رابطه مشابهی برای مؤلفه‌های y و z نیز به دست می‌آید. سه رابطه حاصل را می‌توان به صورت ساده زیر نوشت

$$\vec{\tau} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (۱۹.۸)$$

در این رابطه $\mathbf{A}$ برداری است که مؤلفه‌های آن برابرند با مساحت سطح محصور شده با تصویر منحنی C بر روی صفحات yz و zx و xy . در نظریه مغناطیسی بارها با کمیت $I\mathbf{A}$ برخورد می‌کنیم؛ این کمیت را گشتاد مغناطیسی مدار می‌نامیم. نماد $\mathbf{m}$ را برای گشتاور مغناطیسی به کار خواهیم برد

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A} \quad (۲۰.۸)$$

که $\mathbf{A}$ به همان صورت بالا تعریف می‌شود. به شیوه‌ای که در بالا به کار رفت به آسانی می‌توان نشان داد که انتگرال $\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ دور یک مسیر بسته دو برابر مساحت محصور شده با منحنی مسیر است. پس

$$\frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} = \mathbf{A} \quad (۲۱.۸)$$

با استفاده از این رابطه داریم

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (۲۲.۸)$$

که رابطه دیگری است برای گشتاور مغناطیسی. اگر جریان به جای محصور بودن در سیمها، در محیطی جریان داشته باشد، آن وقت همان طور که قبلاً نشان داده شد، بهتر است که $I d\mathbf{l}$ را با $\mathbf{J} dv$ برابر بگیریم

$$I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{J} dv \quad (۲۳.۸)$$

در این صورت می‌نویسیم

$$d\mathbf{m} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{J} dv \quad (۲۴.۸)$$

فرمول بالا در مبحث خواص مغناطیسی ماده سودمند خواهد بود.

۱. توجه کنید که منحنی C به منحنیهای مسطح محدود نشده است و تعریف بالا برای $\mathbf{A}$ هر محدودیتی از این قبیل را غیر ضروری می‌کند.

۳.۸ قانون بیو و ساوار

درسال ۱۸۲۰ / ۱۱۹۹ درست چند هفته پس از اعلام کشف اورستد مبنی بر ایجاد اثرهای مغناطیسی به وسیله جریانهای الکتریکی، آمپر نتایج یک رشته از آزمایشهای خود را عرضه کرد. نتایج آمپر را می توان تعمیم داد و به زبان ریاضیات جدید به صورت زیر بیان کرد

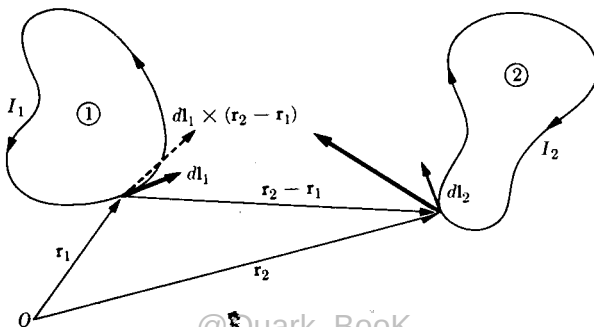
$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_1 \times [d\mathbf{l}_2 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (25.8)$$

این رابطه نسبتاً پیچیده را می توان به کمک شکل ۳.۸ توضیح داد. نیروی $\mathbf{F}_2$ نیرویی است که از طرف مدار ۱ به مدار ۲ وارد می شود، $d\mathbf{l}$ ها و $\mathbf{r}$ ها در شکل مشخص شده اند. بر حسب تعریف در دستگاه یکاهای mks داریم

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

معادله (۲۵.۸) به عنوان تعریف اصلی آمپر به کار می رود، و سپس کولن بر حسب آمپر تعریف می شود. به نظر می رسد که معادله (۲۵.۸)، از نظر ظاهری، به علت عدم تقارن قانون سوم نیوتون را نقض می کند، لیکن با به کار بردن برخی قضایای آنالیز برداری می توان نشان داد که در واقع تقارن وجود دارد، یعنی، $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ (مسئله ۴.۸) از معادله (۹.۸) واضح است که معادله (۲۵.۸) ایجاب می کند که

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (26.8)$$



شکل ۳.۸ برهم کنش مغناطیسی دو مدار جریان.

این رابطه تعمیمی است از قانون بیوساوار، که ما این اسم را هم برای معادله (۲۶.۸) و هم برای صورت دیفرانسیلی آن، یعنی رابطه زیر به کار خواهیم برد

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (27.8)$$

اگر از استدلال مشابهی که به معادله (۷.۸) انجامید استفاده کنیم، معادله (۲۷.۸) مستقیماً از معادله (۴.۸)، چنانچه در مورد یک رسانا به کار برده شود، به دست می آید. و به عنوان آخرین نکته، روابط (۲۶.۸) و (۲۷.۸) برای توزیع پیوسته جریانی که با چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ توصیف شود به صورت زیر درمی آیند

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 \quad (28.8)$$

و

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 \quad (29.8)$$

مشاهدات تجربی نشان می دهند که تمام میدانهای القایی مغناطیسی را می توان بر حسب یک توزیع جریان توصیف کرد. یعنی، $\mathbf{B}$ همواره به صورت معادله (۲۸.۸) است، با چگالی جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)$. این بدان معنی است که قطبهای مغناطیسی منزوی وجود ندارند، و

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (30.8)$$

معادله (۳۰.۸) برای هر نوع $\mathbf{B}$ که به صورت (۲۸.۸) و یا (۲۶.۸) نوشته شود صحیح است، و این مطلب را می توان از راه ریاضی به طریق زیر اثبات کرد. واگرایی معادله (۲۸.۸) را حساب می کنیم. با به کار بردن $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{G}$ و $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F}$ داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_2 \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1$$

۱. لازم به تذکر است که بر سر نامگذاری قوانین مختلف تاحدی اختلاف نظر وجود داشته است. ما در اینجا وارد این بحث نمی شویم و خواننده علاقه مند را به کتاب عالی زیر ارجاع می دهیم.

E.T. Whittaker, *History of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. I, Philosophical Library, New York, 1951.

لیکن $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$ شیب $1/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ است نسبت به $\mathbf{r}_2$. از آنجا که تاو شیب هر تابعی صفر است، نتیجه می گیریم که

$$\nabla_2 \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = 0$$

۴.۸ کاربردهای مقدماتی قانون بیو و ساوار

به علت آنکه محاسبه انتگرالهای معادله (۲۸.۸) (یا معادله ۲۶.۸) با اشکال روبه رومی شود، دامنه مسائلی که در حل آنها این معادلات رami توان به کاربرد محدود است. برخی از حالت های قابل محاسبه در این بخش بررسی می شوند، در بخش های دیگر شیوه های دیگری برای پیدا کردن $\mathbf{B}$ بررسی خواهد شد.

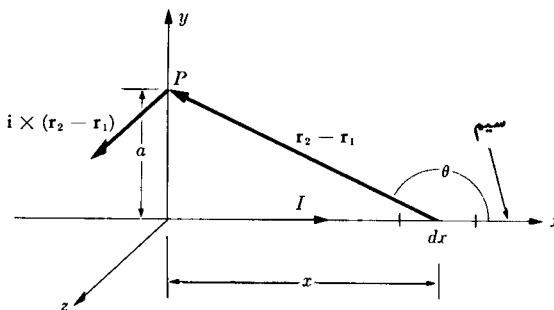
به عنوان اولین مثال، میدان مغناطیسی ناشی از سیمی مستقیم و بسیار بلند را بررسی می کنیم. فرض می کنیم که سیم در امتداد محور x ، از منهای بینهایت تا به اضافه بینهایت، امتداد دارد و جریان I را حمل می کند. میدان در یک نقطه نوعی اختیاری $\mathbf{r}_2$ بر روی محور y محاسبه خواهد شد. وضعیت هندسی مسئله در شکل ۴.۸ نشان داده شده است. میدان مغناطیسی به صورت زیر است

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \mathbf{i} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (31.8)$$

چون $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ در صفحه xy قرار گرفته است، پس

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sin \theta \mathbf{k} \quad (32.8)$$

به علاوه



@Quark Book

شکل ۴.۸ میدان مغناطیسی در نقطه P ناشی از یک سیم بلند و مستقیم.

$$\frac{a}{x} = \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta \quad (۳۳.۸)$$

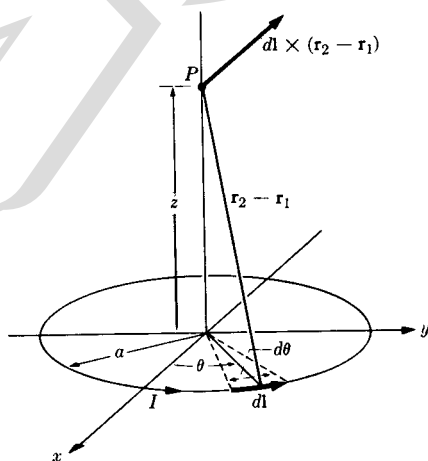
$$|\mathbf{r}_\gamma - \mathbf{r}_\lambda| = a \csc(\pi - \theta) = a \csc \theta \quad (۳۴.۸)$$

با به کار بردن این روابط برای تبدیل معادله (۳۱.۸) به صورت انتگرالی بر روی θ از صفر تا π ، نتیجه زیر به دست می آید

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_\gamma) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \mathbf{k} \frac{1}{a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \mathbf{k} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \mathbf{k} \quad (۳۵.۸)$$

برای به کار بردن این نتیجه در حالت های کلیتر، فقط لازم است توجه شود که مسئله حول محور x تقارن دارد. پس نتیجه می گیریم که خطوط $\mathbf{B}$ در همه جا به صورت دوایری هستند که رسانا در مرکز آنها قرار گرفته است. این نکته با نتیجه ساده ای که جهت $\mathbf{B}$ را بایک قاعده دست راست معلوم می کند توافق کامل دارد.

به عنوان دومین مثال، یک مدار دایره ای را در نظر می گیریم. محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از این مدار در یک نقطه اختیاری از فضا بسیار مشکل است، لیکن اگر فقط نقاط واقع بر محور تقارن را در نظر بگیریم، عبارت مربوط به $\mathbf{B}$ نسبتاً ساده می شود. در این مثال یک بررسی کاملاً برداری به کار برده می شود تا شیوه کار نشان داده شود. شکل ۵.۸ وضعیت هندسی و مختصات به کار برده شده را نمایش می دهد. می خواهیم میدان را در نقطه $\mathbf{r}_\gamma$ واقع بر محور



شکل ۵.۸ میدان محوری یک حلقه سیم دایره ای.

z محاسبه کنیم؛ حلقه دایره‌ای در صفحه xy قرار دارد. میدان مغناطیسی با معادله (۲۶.۸) داده می‌شود که در آن، مطابق شکل ۵.۸، روابط زیر باید به کار برده شوند

$$dl = a d\theta (-i \sin \theta + j \cos \theta)$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = -ia \cos \theta - ja \sin \theta + kz \quad (۳۶.۸)$$

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = (a^2 + z^2)^{1/2}$$

از قرارداد این روابط در معادله (۲۶.۸) نتیجه می‌گیریم

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(iza \cos \theta + jza \sin \theta + ka^2)}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\theta \quad (۳۷.۸)$$

نتیجه انتگرال‌گیری دو جمله اول صفر می‌شود، و باقی می‌ماند

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{k} \quad (۳۸.۸)$$

که البته تماماً در امتداد محور z است.

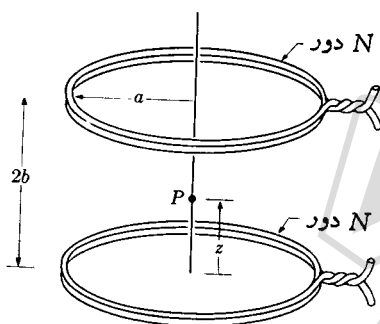
يك دستگاه حامل جریان که غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد، پیچۀ هلمهولتز است. این دستگاه از دو پیچۀ مستدیر با شعاعهای مساوی و محور مشترک تشکیل شده است. فاصله میان دو صفحه پیچها طوری انتخاب می‌شود که مشتق دوم $\mathbf{B}$ در نقطه‌ای واقع بر محور و به فاصله مساوی از پیچها صفر شود؛ شکل ۶.۸ چنین دستگاهی را نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی در نقطه P عبارت است از

$$B_z(z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(zb - z)^2 + a^2]^{3/2}} \right\} \quad (۳۹.۸)$$

که از به کار بردن معادله (۳۸.۸) برای هر يك از دو پیچ به دست می‌آید. عدد N مربوط است به حالتی که هر يك از پیچها N دور دارد. مشتق اول B_z نسبت به z عبارت است از

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{2z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{2(z - zb)}{[(zb - z)^2 + a^2]^{5/2}} \right\} \quad (۴۰.۸)$$

در نقطه $z = b$ این مشتق صفر است. مشتق دوم نسبت به z به صورت زیر است



شکل ۶.۸ میدان محوری پیچۀ هلمهولتز.

$$\frac{d^2 B_z}{dz^2} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^{7/2}} + \frac{1}{[(2b-z)^2 + a^2]^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{(z-2b)^2}{[(2b-z)^2 + a^2]^{7/2}} \right\}$$

در نقطه $z = b$ مقدار آن برابر است با

$$\left. \frac{d^2 B_z}{dz^2} \right|_{z=b} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left\{ \frac{b^2 + a^2 - 5b^2 + b^2 + a^2 - 5b^2}{(b^2 + a^2)^{7/2}} \right\} \quad (41.8)$$

که به ازای $a^2 - 4b^2 = 0$ صفر می شود. پس انتخاب مناسب برای b عبارت است از

$$2b = a \quad (42.8)$$

یعنی، فاصله میان دو پیچۀ باید برابر باشعاع باشد. با این فاصله، میدان در نقطه وسط برابر است با

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{a} \frac{8}{5^{3/2}} \quad (43.8)$$

پیچۀ های هلمهولتز نقش مهمی در تحقیق علمی دارند و غالباً برای تولید يك میدان مغناطیسی نسبتاً یکنواخت در ناحیه كوچكی از فضا به كار می روند. حال میدان مغناطیسی را در نقطه ای واقع بر محور در نزدیکی نقطه وسط میان دو پیچۀ بررسی می کنیم. میدان $B_z(z)$ را می توان بر حسب رشته تیلور در حول نقطه $z = 1/2 a$ بسط داد

$$B_z(z) = B_z\left(\frac{1}{\gamma}a\right) + \left(z - \frac{1}{\gamma}a\right) \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{z=\frac{1}{\gamma}a} + \dots$$

چون سه مشتق اول تابع صفر می شوند، پس

$$B_z(z) = B_z\left(\frac{1}{\gamma}a\right) + \frac{1}{\gamma^2} \left(z - \frac{1}{\gamma}a\right)^2 \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \Big|_{z=\frac{1}{\gamma}a} + \dots$$

اگر مشتق چهارم به طور صریح محاسبه شود، $B_z(z)$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$B_z(z) = B_z(a/2) \left\{ 1 - \frac{144}{125} \left(\frac{z - a/2}{a} \right)^4 \right\} \quad (44.8)$$

پس برای ناحیه ای که در آن $|z - a/2|$ کمتر از $a/10$ باشد، $B_z(z)$ با مقدار $B_z(a/2)$ به مقدار کمی کمتر از یک و نیم در ده هزار فرق می کند.

در اندازه گیریهای میدانهای مغناطیسی موجود در آزمایشگاه، تسلا یکای نسبتاً بزرگی است؛ به همین دلیل عموماً برای میدان **B** از یکای دیگری به نام گاوس از دستگاه یکاهای گاوسی (پیوست ۱) استفاده می کنیم؛ یک گاوس برابر با 10^{-4} تسلاست. به منظور سهولت در مراجعه، میدان مغناطیسی در نقطه وسط پیچ هلمهولتز را به صورت زیر می نویسیم

$$B_z = \frac{32\pi N}{5^{3/2}a} \frac{I}{10} \quad [\text{الف } 43.8]$$

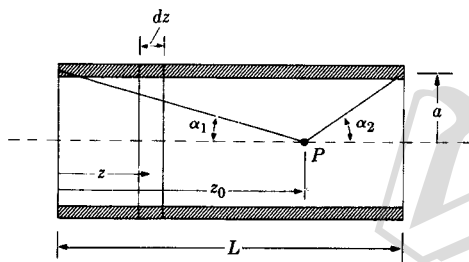
که در آن I بر حسب آمپر، a بر حسب سانتیمتر و B بر حسب گاوس است. بدیهی است که N همان تعداد دورها در هر یک از دو پیچ است.

وسیله دیگری که برای آن از معادله (38.8) استفاده می شود سیملوله است. سیملوله سیمی است که آن را N دور با فاصله یکنواخت روی سطح استوانه ای به شعاع a و طول L پیچیده باشند. چنین وضعیتی در شکل ۷.۸ نشان داده شده است. میدان مغناطیسی در نقطه z از تقسیم طول L به عناصر dz ، به طوری که در شکل نشان داده شده است، و کاربرد معادله (38.8) برای هر عنصر، و سپس جمع کردن نتایج، به دست می آید. با توجه به اینکه عنصر dz حاوی تعداد $N dz/L$ دور است، داریم

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 N I}{L} \frac{a^2}{2} \int_0^L \frac{dz}{[(z_0 - z)^2 + a^2]^{3/2}} \quad (45.8)$$

با تغییر متغیر $z - z_0 = a \tan \theta$ نتیجه می گیریم

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 N I}{2L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 N I}{L} \left[\frac{\sin \theta_2 - \sin \theta_1}{2} \right] \quad (46.8)$$



شکل ۷.۸ میدان مغناطیسی محوری سیملوله.

که در آن $\theta_1 = -\tan^{-1}(z_0/a)$ و $\theta_2 = \tan^{-1}(L-z_0)/a$. اینکه به جای واحد، که در فرمولهای مقدماتی وجود دارد، سینوس دیده می شود نشان دهنده تصحیحات انتهایی مربوط به محدود بودن طول سیملوله است. برای فهم تقریب متداولی که عموماً انجام می شود، یعنی تقریب $B_z = \mu_0 NI/L$ بهتر است زوایای α_1 و α_2 را که در شکل ۷.۸ نشان داده شده اند (هر دو مثبت اند) به کار ببریم. بر حسب این زوایا، معادله (۴۶.۸) به صورت زیر درمی آید

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0 NI}{L} \left[\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{2} \right] \quad (۴۷.۸)$$

اگر طول سیملوله در مقایسه با شعاع آن بلند باشد و z_0 به هیچ یک از دو مقدار صفر یا L نزدیک نباشد، آن وقت α_1 و α_2 هر دو زوایای کوچکی خواهند بود و می توان آنها را به صورت تقریبی زیر نوشت

$$\alpha_1 \cong \frac{a}{z_0} \quad \alpha_2 \cong \frac{a}{L-z_0} \quad (۴۸.۸)$$

با بسط $\cos \alpha_1$ و $\cos \alpha_2$ و نگه داشتن جملات تا درجه دوم، نتیجه زیر را به دست می آوریم

$$B_z(z_0) \cong \frac{\mu_0 NI}{L} \left\{ 1 - \frac{a^2}{4z_0^2} - \frac{a^2}{4(L-z_0)^2} \right\} \quad (۴۹.۸)$$

از این معادله نتیجه می گیریم که اگر $z_0 = L/2$ و $L/a = 10$ باشد، آنگاه خطایی برابر با ۲ درصد در نتیجه صرف نظر کردن از جملات درجه دوم و بالاتر حاصل می شود.

۵.۸ قانون مداری آمپر

برای میدانهای مغناطیسی داده شده بامعادله (۲۶.۸) یا (۲۸.۸)، در صورتی که ناشی از جریانهای پایا باشند، یعنی ناشی از جریانهایی که در رابطه زیر صدق می کنند

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (50.8)$$

می توان رابطه بسیار مهمی برای $\mathbf{B}$ به دست آورد. این کار با محاسبهٔ ناو معادله (۲۸.۸) انجام می گیرد. محاسبهٔ ناو، مشتق گیری نسبت به $\mathbf{r}_\nu$ را در بردارد، در نتیجه فقط بر روی عامل $(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_1) / |\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_1|^3$ عمل می کند

$$\nabla_\nu \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\nu) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \left(\nabla_\nu \cdot \frac{\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_1|^3} \right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_\nu \frac{\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_1|^3} \right] dv_1$$

به علت تقارن میان $\mathbf{r}_\nu$ و $\mathbf{r}_1$ ، مشتق گیری در جمله دوم را می توان به مشتق گیری نسبت به $\mathbf{r}_1$ (بامنظور داشتن يك علامت منها) تغییر داد.

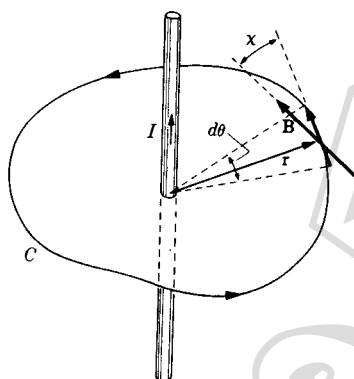
$$\nabla_\nu \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\nu) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) 4\pi \delta(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_1) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_\nu}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_\nu|^3} \right] dv_1$$

جملهٔ اول بر حسب تابع دلتای دیراک نوشته شده است، همان طور که در معادله (۵۷.۲) داشتیم؛ انتگرال گیری این جمله که مستقیماً انجام می شود نتیجهٔ $\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_\nu)$ را می دهد. با انتگرال گیری جزء به جزء می توان نشان داد که جملهٔ دوم برابر با صفر است. برای مؤلفهٔ x داریم

$$\nabla_1 \cdot \left(\mathbf{J} \frac{x_1 - x_\nu}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_\nu|^3} \right) = \frac{x_1 - x_\nu}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_\nu|^3} \nabla_1 \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \nabla_1 \frac{x_1 - x_\nu}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_\nu|^3}$$

و به طور مشابه برای دیگر مؤلفه ها. جملهٔ دارای $\nabla \cdot \mathbf{J}$ بنا بر فرض (۵۰.۸) مساوی صفر است، و با استفاده از قضیهٔ واگرایی می توان انتگرال حجمی سمت چپ را به يك انتگرال سطحی تبدیل کرد؛ وقتی سطح در خارج از ناحیهٔ کرانداری که در آن $\mathbf{J}$ غیر صفر است انتخاب شود، مقدار انتگرال سطحی صفر می شود. (همین نتیجه را می توان مستقیماً از اتحاد ۴.۲.۱ در جدول ۲.۰۱ به دست آورد.) بنابراین نتیجهٔ نهایی به صورت زیر نوشته می شود

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_\nu) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_\nu) \quad (51.8)$$



شکل ۸.۸

شکل ۸.۸ تحقیق صحت قانون مداری آمپر برای سیم مستقیم و بلند.

که شکل دیفرانسیلی قانون آمپر نام دارد. در فصل ۹ این قانون را تا اندازه‌ای تغییر خواهیم داد تا برای مواردی که مواد مغناطیسی وجود دارد، سودمندتر باشد؛ لیکن، معادله (۵۱.۸)، مادامی که $\mathbf{J}$ بیانگر کلی جریان و $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ باشد، هنوز هم معتبر خواهد بود. از قضیه استوکس می‌توان استفاده کرد و معادله (۵۱.۸) را به یک صورت انتگرالی تبدیل کرد که این صورت گاهی بسیار مفید واقع می‌شود. این کاربرد قضیه استوکس چنین نوشته می‌شود

$$\int_s \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad [۴۵.۱]$$

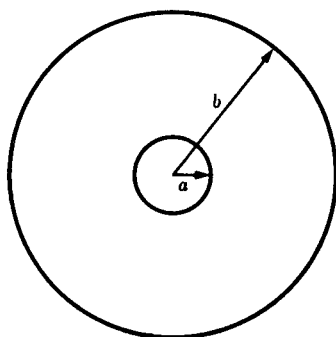
با استفاده از معادله (۵۱.۸) برای $\nabla \times \mathbf{B}$ داریم

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (۵۲.۸)$$

بیان ساده این رابطه این است که انتگرال خطی $\mathbf{B}$ بر روی هر مسیر بسته برابر است با حاصل ضرب μ_0 در کل جریانی که از مسیر بسته عبور می‌کند.

تحقیق صحت معادله (۵۲.۸) در یک حالت ساده آموزنده است. سیم مستقیم و بلند، مثال بسیار خوبی است. در این حالت اندازه $\mathbf{B}$ در نقطه‌ای به فاصله r از سیم، از رابطه $B(r) = \mu_0 I / 2\pi r$ به دست می‌آید و جهت آن مماس است بر دایره‌ای به شعاع r ، که مرکزش بر روی رسانا قرار گرفته باشد. شکل ۸.۸ وضع هندسی این مسئله را نشان می‌دهد. جریان در جهت بالاست، و C در جهت عکس ساعتگرد طی می‌شود. از شکل پیداست که

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}| |d\mathbf{l}| \cos \chi = |\mathbf{B}| r d\theta \quad (۵۳.۸)$$



شکل ۹.۸ مقطع يك كابل هم محور.

با به کار بردن مقدار $|\mathbf{B}|$ که در بالا ذکر شد، داریم

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I \quad (52.8)$$

که حالت خاصی است از معادله (۵۲.۸).

قانون مداری آمپر، یعنی معادله (۵۲.۸)، از بسیاری لحاظ همتای قانون گاوس در الکتروستاتیک است. منظور از این بیان آن است که از این قانون می توان برای محاسبه میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریانی که تقارن کافی داشته باشد استفاده کرد، بی آنکه به محاسبه انتگرالهای بفرنج قانون بیونیز داشته باشیم. به عنوان مثال، يك كابل هم محور را در نظر می گیریم که از يك رسانای كوچك مرکزی به شعاع a و يك رسانای خارجی به شکل استوانه ای هم محور با سیم مرکزی به شعاع b تشکیل شده است، نظیر شکل ۹.۸. فرض می کنیم که هر دو رسانا جریان یکسان I را حمل می کنند و جهت جریان در آن دو عکس یکدیگر است. همچنین فرض می کنیم جریان سیم مرکزی به سمت بیرون از صفحه کاغذ باشد. از تقارن مسئله روشن است که $\mathbf{B}$ در همه جا باید مماس بر دایره ای باشد که مرکز آن منطقه بر مرکز رسانای مرکزی است و از نقطه ای که میدان در آن خواسته شده است می گذرد. به علاوه، $\mathbf{B}$ نمی تواند به زاویه سمت بستگی داشته باشد. مسیرهای مناسب برای کاربرد معادله (۵۲.۸) عبارت اند از دوایری که مرکزشان بر رسانای مرکزی منطبق باشد. برای يك چنین دایره ای به شعاع r ، داریم

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B \quad (55.8)$$

@Quark_Book

که باید مساوی باشد با حاصل ضرب μ_0 در کل جریانی که از سطح دایره عبور می کند. پس

$$\forall \pi r B = \mu_0 I \quad a < r < b$$

$$\forall \pi r B = 0 \quad b < r \quad (56.8)$$

این نتیجه نسبتاً پیش پا افتاده را می‌توان با انتگرال گیری از قانون بیو به دست آورد، البته بازحمت زیاد.

۶.۸ پتانسیل برداری مغناطیسی

محاسبه میدانهای الکتریکی با معرفی کردن پتانسیل الکتروستاتیکی بسیار ساده شد. این کار از آنجا امکان پذیر شد که تاو میدان الکتریکی برابر صفر است. اما تاو میدان مغناطیسی صفر نیست، لیکن واگرایی آن صفر است. چون واگرایی هر تاو صفر است، پس منطقی است که میدان مغناطیسی را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (57.8)$$

تنها قید لازم دیگر که باید برای $\mathbf{A}$ قائل شد، این است که

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (58.8)$$

و با به کار بردن اتحاد زیر

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (59.8)$$

و با این انتخاب که $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ باشد، نتیجه می‌شود که

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (60.8)$$

با انتگرال گیری از هر یک از مؤلفه‌های قائم و به کار بردن جواب معادله پواسون به منزله راهنما، به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_r)}{|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}_r|} dv_r \quad (61.8)$$

محاسبه انتگرالهای موجود در این عبارت از انتگرالهای موجود در قانون بیو بسیار ساده تر است؛ لیکن، در عین حال این انتگرالها از آنها سببی که در به دست آوردن پتانسیل الکتروستاتیکی به کار می‌روند پیچیده ترند.

راه دیگر به دست آوردن معادله (۶۱.۸) تبدیل مستقیم معادله (۲۸.۸) به معادله

(۵۷.۸) است. این عمل را با توجه به رابطه زیر می توان انجام داد

$$\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = -\nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (۶۲.۸)$$

که در آن ∇_2 به معنی مشتق گیری نسبت به $\mathbf{r}_2$ است. با استفاده از اتحاد برداری زیر

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{F}) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \varphi \quad (۶۳.۸)$$

که برای هر بردار $\mathbf{F}$ و هر تابع نرده ای φ صادق است، معادله زیر نتیجه می شود

$$\nabla_2 \times \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \right\} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (۶۴.۸)$$

زیرا $\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)$ به $\mathbf{r}_2$ بستگی ندارد. با قرار دادن این نتایج در معادله (۶۴.۸) به نتیجه زیر می رسیم

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dv_1 \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla_2 \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \end{aligned} \quad (۶۵.۸)$$

با بیرون آوردن ناو از زیر انتگرال، معادله (۶۵.۸) عیناً به صورت معادله (۵۷.۸) درمی آید. بدین ترتیب رابطه

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dv_1 \quad [۶۱.۸]$$

از این راه نیز به دست می آید.

برای اینکه این توهم پیش نیاید که پتانسیل برداری در محاسبه میدانهای ساده می تواند به اندازه پتانسیل الکتروستاتیکی مفید باشد، باید خاطر نشان ساخت که اصولاً هیچ موردی وجود ندارد که در آن بتوان $\mathbf{A}$ را به طور ساده و کامل محاسبه کرد (هرچند که محاسبه عددی

این پتانسیل برای توزیعهای کراندار جریان همیشه امکان پذیر است). وقتی که معادله (۶۱.۸) برای سیم مستقیم طولانی به کار برده شود، A بینهایت می شود. محاسبات مربوط به حلقه دایره ای شامل انتگرالهای بیضوی می شوند، و الی آخر. همچنین باید توجه کرد که محاسبه پتانسیل برداری در يك تك نقطه مفید نخواهد بود، زیرا میدان مغناطیسی از طریق مشتق گیری به دست می آید. کاربرد اصلی پتانسیل برداری در محاسبات تقریبی است، از قبیل تقریبهایی که در بخش بعد درباره آنها بحث می شود، و نیز در مسائل مربوط به تابش الکترومغناطیسی (فصلهای ۱۶ و ۲۰).

۷.۸ میدان مغناطیسی يك مدار در فواصل دور

پتانسیل برداری مغناطیسی مدار کوچکی را که در فواصل دور قرار گرفته باشد به آسانی می توان محاسبه کرد. عبارت مربوط به پتانسیل برداری (۶۱.۸) را می توان با قرار دادن $I d\mathbf{r}$ به جای $\mathbf{J} dv$ ، در مورد مدارهای جریان به کار برد. بدین ترتیب

$$A(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (66.8)$$

برای مدارهایی که ابعادشان در مقایسه با r_2 کوچک است می توان مخرج را به شکل تقریبی محاسبه کرد. برای این کار، مانند معادله (۶۶.۲)، می نویسیم

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = (r_2^2 + r_1^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^{-1/2} \quad (67.8)$$

و این عبارت را بر حسب توانهای r_1/r_2 تا درجه اول بسط می دهیم

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^{-1} = \frac{1}{r_2} \left[1 + \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_2^2} + \dots \right] \quad (68.8)$$

با استفاده از این مقدار در معادله (۶۶.۸) نتیجه می گیریم که

$$A(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_2} \oint d\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r_2^2} \oint d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + \dots \right\} \quad (69.8)$$

۱. در واقع برای سیم بلند مستقیم يك پتانسیل برداری متناهی وجود دارد. در مختصات استوانه ای برای سیمی که منطبق بر محور z است و جریان $I\mathbf{k}$ را حمل می کند، این پتانسیل برابر است با $A = -(\mu_0 I / 2\pi) \ln rk$. صحت این رابطه را می توان با محاسبه مستقیم $\nabla \times A$ تحقیق کرد. (پیوست ۱۳)

در رابطه بالا انتگرال اول صفر می‌شود؛ انتگرال ده دوم یکی از جمله‌های بسط برداری زیر است

$$(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \quad (70.8)$$

برای حذف جمله اول در طرف راست معادله (70.8)، دیفرانسیل $\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)$ را برای تغییر کوچکی در $\mathbf{r}_1$ به صورت زیر می‌نویسیم

$$d[\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] = \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{r}_1) + d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1) \quad (71.8)$$

که البته رابطه‌ای است دقیق. با جمع کردن معادله‌های (70.8) و (71.8) و تقسیم حاصل-جمع بر ۲ نتیجه می‌شود

$$d\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2}d[\mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1)] \quad (72.7)$$

چون جمله آخریک دیفرانسیل کامل است، در حاصل دومین انتگرال معادله (69.8) سهمی نخواهد داشت. پس نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{I}{2} \oint \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 \right] \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} \quad (73.8)$$

طبق معادله (72.8) عبارت داخل کروشه‌ها گشتاور مغناطیسی، $\mathbf{m}$ ، مدار است. بنابراین

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_2}{r_2^2} \quad (74.8)$$

در این محاسبات فرض شده است که همواره $r_1 \ll r_2$ ؛ پس معادله (74.8) برای هر مبدأ مختصات اختیاری صحیح نیست، بلکه فقط برای میدانی نزدیک به مدار صادق است. میدان مغناطیسی را با محاسبهٔ تساوی معادله (74.8) می‌توان به دست آورد. این کار با استفاده از اتحادهای برداری به آسانی انجام می‌شود. نخست داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} + \mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^2} \right] \end{aligned} \quad (75.8)$$

جمله اول داخل کروشه‌ها را می‌توان با توجه به رابطه زیر

$$m_z \frac{\partial}{\partial x_y} \left(\frac{\mathbf{r}_y}{r_y^3} \right) = \frac{m_z \mathbf{i}}{r_y^3} - 3m_z x_y \frac{\mathbf{r}_y}{r_y^5} \quad (۷۶.۸)$$

تبدیل کرد. پس

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}_y}{r_y^3} = \frac{\mathbf{m}}{r_y^3} - \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_y) \mathbf{r}_y}{r_y^5} \quad (۷۷.۸)$$

جمله دوم فقط شامل محاسبه زیر است

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}_y}{r_y^3} = \frac{3}{r_y^3} - \mathbf{r}_y \cdot \frac{3\mathbf{r}_y}{r_y^5} = 0 \quad (r_y \neq 0) \quad (۷۸.۸)$$

پس، بالاخره خواهیم داشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_y) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r_y^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_y) \mathbf{r}_y}{r_y^5} \right] \quad (۷۹.۸) \quad (\text{دوقطبی مغناطیسی})$$

معادله (۷۹.۸) نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی ناشی از یک مدار در فاصله دور به جزئیات شکل هندسی آن بستگی ندارد، بلکه فقط به گشتاور مغناطیسی آن، $\mathbf{m}$ ، مربوط می‌شود. مقایسه این معادله با معادله (۳۶.۲) نشان می‌دهد که (۷۹.۸) از نظر صوری مانند میدان الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی است، و این توجیهی است برای اطلاق نام میدان دوقطبی مغناطیسی به آن. معمولاً $\mathbf{m}$ را گشتاور دوقطبی مغناطیسی مدار می‌نامند.

۸.۸ پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی

معادله (۵۱.۸) نشان می‌دهد که هر جا چگالی جریان صفر باشد تاو میدان مغناطیسی در آنجا صفر است. پس می‌توانیم میدان مغناطیسی را در ناحیه‌هایی که چگالی جریان در آنجا صفر است به صورت یک پتانسیل نرده‌ای بنویسیم

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi^* \quad (۸۰.۸)$$

اما واگرایی $\mathbf{B}$ نیز صفر است، پس این بدان معناست که

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla^2 \varphi^* = 0 \quad (۸۱.۸)$$

بنابراین φ^* ، که پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی نام دارد، در معادله لاپلاس صدق می‌کند. بیشتر کارها و نتایج الکتروستاتیک را می‌توان مستقیماً در اینجا وارد کرد و برای محاسبه φ^*

در وضعیتهای مختلف به کار برد؛ اما، در به کار بستن شرایط مرزی باید دقت کرد (مسئله ۲۵۰۸). رابطه مربوط به پتانسیل نرده ای يك دو قطبی مغناطیسی، به ویژه مفید است. با توجه به این که معادله (۷۹۰۸) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_r) = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_r}{4\pi r_r^3} \right) \quad (۸۲۰۸)$$

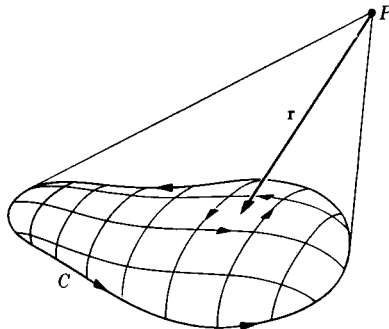
آشکار است که برای دو قطبی مغناطیسی $\mathbf{m}$ خواهیم داشت

$$\varphi^*(\mathbf{r}_r) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_r}{4\pi r_r^3} \quad (۸۳۰۸)$$

مدار بزرگ C را می توان به کمک يك شبکه بندی، نظیر شکل ۱۵۰۸، به تعداد زیادی مدار کوچک تقسیم کرد. هرگاه هر حلقه کوچک حاصل از شبکه بندی همان جریانی را داشته باشد که در مدار اصلی C موجود است، آنگاه به علت خنثی شدن جریانهای متقابل در شاخه مشترک حلقه های مجاور، اثر کلی با حالتی که در آن بار فقط در مدار C جریان داشته باشد یکسان خواهد بود. برای هر يك از حلقه های کوچک، می توانیم گشتاور مغناطیسی را به صورت زیر بنویسیم

$$d\mathbf{m} = I n \, da \quad (۸۴۰۸)$$

زیرا هر يك از این حلقه ها آن قدر کوچک است که می توانیم آن را يك مدار مسطح فرض کنیم. با استفاده از این عبارت در معادله (۸۳۰۸) و انتگرال گیری بر روی سطح محصور



شکل ۱۵۰۸ يك مدار ماکروسکوپی جریان که از عناصر دو قطبی مغناطیسی ساخته شده است.

به وسیله مدار C نتیجه می گیریم که

$$\varphi^*(P) = \frac{I}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{r}_\gamma \cdot \mathbf{n} da}{r_\gamma^2} \quad (۸۵.۸)$$

در این معادله $\mathbf{r}_\gamma$ باید به عنوان برداری از da به نقطه P ، یعنی $-\mathbf{r}$ ، همان طور که در شکل ۱۰.۸ نشان داده شده است، تعبیر شود. با تغییر $\mathbf{r}_\gamma$ به $-\mathbf{r}$ خواهیم داشت

$$\varphi^*(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da}{r^3} \quad (۸۶.۸)$$

کمیت $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da$ درست برابر است با حاصل ضرب r در تصویر da بر روی صفحه ای عمود بر $\mathbf{r}$. پس $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da / r^3$ زاویه فضایی است که da از نقطه P در بر می گیرد. بنابراین، معادله (۸۶.۸) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\varphi^*(P) = -\frac{I\Omega}{4\pi} \quad (۸۷.۸)$$

که در آن Ω زاویه فضایی است که منحنی C از نقطه P در بر می گیرد. پتانسیل نرده ای مغناطیسی را می توان برای محاسبه میدان مغناطیسی مدارهای حامل جریان و یا لایه های دو گانه مغناطیسی (لایه های دو قطبی) به کار برد. این روش گاهی برای بررسی مسائل مداری نیز سودمند است، اما کاربرد اصلی آن در بررسی مواد مغناطیسی است.

۹.۸ شار مغناطیسی

کمیت زیر

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (۸۸.۸)$$

به شار مغناطیسی^۱ موسوم است و بر حسب وبر (Wb) اندازه گیری می شود. این کمیت شبیه به شار الکتریکی است که قبلاً درباره آن بحث شد، لیکن اهمیت آن به مراتب بیشتر است. شاری که از هر سطح بسته می گذرد صفر است، این مطلب را می توان با محاسبه زیر نشان داد

۱. بنابراین تسلا، که قبلاً به عنوان یکای $\mathbf{B}$ در دستگاه mks به کار می رفت، برابر است با Wb/m^2 .

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int_v \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0 \quad (۱۹۰۸)$$

از اینجا همچنین نتیجه می گیریم که شاری که از همداری می گذرد به سطح خاصی که برای محاسبه شار به کار می بریم بستگی ندارد. در فصل ۱۱ وقتی در مورد القای الکترومغناطیسی بحث می کنیم، از نتایج بالا استفاده خواهیم کرد.

۱۰.۸ خلاصه مطالب

مغناطوساتیک مبتنی است بر افزودن نیروی مغناطیسی به نیروی کولن، وقتی بارها در حال حرکت اند. در دستگاه یکاهای mks، نیروی لورنتس وارد بر بار آزمون q ، که سرعتش $\mathbf{v}$ است، برابر است با

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

میدان مغناطیسی بارچشمه q که با سرعت یکنواخت $\mathbf{v}$ در حرکت است، برابر است با

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$$

که در آن $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی ناشی از بار q و

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

سرعت نور است. (در دستگاه یکاهای گاوسی، به جای $\mathbf{B}$ در این فرمولها از $\mathbf{B}/c$ استفاده می کنیم.) با توجه به روابط زیر، این نتایج را می توان در مورد جریانهای رسانشی به کار برد

$$Nq dv \mathbf{v} = \mathbf{J} dv = I d\mathbf{l}$$

که در مورد هر یک از انواع ذرات باردار متحرک $Nq = \rho$ و $\rho \mathbf{v} = \mathbf{J}$.

۱. نیروی وارد بر عنصر $d\mathbf{l}$ از سیمی واقع در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ برابر است با

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

برای یک میدان $\mathbf{B}$ ثابت، گشتاور نیروی وارد بر مدار عبارت است از

$$\vec{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

که در آن (یکاهای mks)

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$$

عبارت است از گشتاور مغناطیسی مدار. انتگرال $\frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ برداری است که مؤلفه‌هایش عبارت‌اند از مساحت‌های سطوح محصور شده توسط تصاویر منحنی C بر صفحات مختصات.

۲. میدان مغناطیسی ناشی از عنصر جریان $I d\mathbf{l}'$ برابر است با

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

که در آن (در دستگاه یکاهای mks) $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ؛ با انتگرال‌گیری از این رابطه روی یک مدار، میدان یک مدار کامل محاسبه می‌شود. برای یک توزیع جریان کلی $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ به منزله چشمه، داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

بامشتق‌گیری از این عبارت درمی‌یابیم که هیچ تکی قطبی مغناطیسی وجود ندارد

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

و برای یک توزیع جریان پایا با

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

داریم

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

اینها معادلات دیفرانسیل اساسی‌اند که تمام میدانهای مغناطوساتاتیکی در هر نقطه باید به‌طور موضعی در آنها صدق کنند. (معادله واگرایی حتی برای میدانهای وابسته به‌زمان نیز صادق است، و دومین معادله از چهار معادله اساسی ماکسول است.)

۳. با انتگرال‌گیری از دو طرف معادله تساوی بر روی سطح اختیاری S ، و به‌کار بردن قضیه استوکس، قانون آمپر نتیجه می‌شود

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

که در آن

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

کل جریانی است که از S ، سطح محصور شده توسط C ، می گذرد. در محدودی از وضعیتهای خاص که در آنها تقارن کامل وجود دارد، و می توان دید که بزرگی و جهت $\mathbf{B}$ نسبت به يك منحنی مناسب مثل C ثابت است، استفاده از این قانون برای محاسبه $\mathbf{B}$ عملاً سودمند است.

۴. وجود تابع پتانسیل برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ از معادله واگرایی نتیجه می شود، به طوری که

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

برای يك توزیع جریان مشخص

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

۵. در فاصله بسیار دور از ناحیه استقرار جریانهای $\mathbf{J}$ چشمه، بسط چند قطبی $\mathbf{A}$ نتیجه زیر را به دست می دهد

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots$$

(جمله تك قطبی وجود ندارد.)

۶. در ناحیه هایی که $\mathbf{J} = 0$ است، يك پتانسیل نرده ای $\varphi^*(\mathbf{r})$ می توان تعریف کرد (چون $\nabla \times \mathbf{B} = 0$)، به طوری که

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi^*$$

این پتانسیل، مانند پتانسیل الکتروستاتیکی، در معادله لاپلاس صدق می کند

$$\nabla^2 \varphi^* = 0$$

لیکن شرایط مرزی متفاوت ممکن است دسته های متفاوتی از جوابهای معادله لاپلاس را مطرح سازند. جواب دوقطبی با جواب دوقطبی الکتريکی یکسان است

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

مسائل

۱.۸ ذره باردار به جرم m و بار q در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ حرکت می‌کند. نشان دهید که کلیترین مسیر حرکت ذره، مارپیچی است که مقطع آن دایره‌ای است به شعاع $R = mv_{\perp}/qB$ (در اینجا $v_{\perp}$ مؤلفه سرعت ذره در امتداد عمود بر $\mathbf{B}_0$ است).

۲.۸ هامیلتونی ذره باردار در حال حرکت در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ ، که موازی محور z است، با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p^2 - \frac{qB_0}{2m} (xp_y - yp_x) + \frac{q^2 B_0^2}{8m} (x^2 + y^2)$$

نشان دهید که معادلات حرکتی که از $\mathcal{H}$ نتیجه می‌شوند با نتایج مسئله ۱.۸ سازگارند.

۳.۸ پروتونی با سرعت 10^7 متر بر ثانیه در امتداد عمود بر یک میدان مغناطیسی به شدت 10^4 تسلا پرتاب می‌شود (الف) پس از طی مسافت ۱ سانتیمتر انحراف مسیر ذره از امتداد خط مستقیم چقدر است؟ (ب) چه زمانی طول می‌کشد تا پروتون یک قوس 90° را بپیماید؟

۴.۸ نشان دهید که قانون نیرو، معادله (۲۵.۸)، را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

که آشکارا متقارن است، یعنی $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

۵.۸ فرض کنید سیم‌لوله بسیار بلندی ۱۰۰۰ دور در سانتیمتر دارد و جریان (ابریسانی) ۱۰ آمپر را حمل می‌کند. مطلوب است نیروی شعاعی در واحد طول، f ، که بر هر دور از سیم پیچ وارد می‌شود. نشان دهید که کشش سیم T برابر است با $T = f a$ ؛ a شعاع سیم‌لوله است.

۶.۸ نشان دهید که نیروی بین دو سیم موازی با جریانهایی هم‌جهت I_1 و I_2 از نوع نیروی جاذبه است. اگر دو سیم موازی خیلی طویل و به فاصله a از یکدیگر باشند، نیروی مغناطیسی وارد بر قطعه dl_2 از سیم ۲ را حساب کنید.

۷.۸ یک مدار جریان به شکل شش ضلعی منظم به ضلع a داده شده است. اگر مدار حامل جریان I باشد، میدان مغناطیسی را در مرکز شش ضلعی پیدا کنید.

۸.۸ نوار فلزی باریک و بسیار درازی به عرض w مفروض است. جریان در امتداد طول نوار و مقدار کل آن I است. میدان مغناطیسی را در نقطه‌ای واقع در صفحه نوار و خارج از نوار، به فاصله b از لبه نزدیکتر آن، حساب کنید.

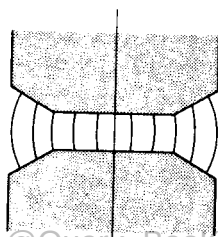
۹.۸ سیم نازکی N دور به صورت دایره‌های نزدیک به هم (و در يك لایه) بر روی سطح کره چوبینی به شعاع a پیچیده شده است؛ N عددی است بزرگ، صفحات دایره‌ها بر محور کره عمودند و سطح آن را کاملاً می‌پوشانند. اگر جریان در این سیم پیچ I باشد، میدان مغناطیسی را در مرکز کره محاسبه کنید.

۱۰.۸ سیم‌لوله‌ای به طول ۱۵ سانتیمتر در دو لایه سیم‌پیچی شده است. هر لایه ۱۰۰ دور سیم دارد. لایه اول به شعاع ۲ سانتیمتر و لایه دوم به شعاع ۲.۰۵ سانتیمتر است. اگر این سیم پیچ حامل ۳ آمپر جریان باشد، میدان مغناطیسی را در نقاط مختلف محور سیم‌لوله پیدا کنید. میدان مغناطیسی محوری را بر حسب تابعی از فاصله میان مرکز سیم‌لوله تا يك انتهای آن رسم کنید.

۱۱.۸ سیم‌لوله‌ای با مقطع مربع شکل (یعنی سیم‌لوله‌ای که تمام دورهای آن به شکل مربع اند) N دور سیم در واحد طول دارد و حامل جریان I است. طول هر ضلع از مقطع این سیم‌لوله a است. اگر سیم‌لوله بسیار طولی فرض شود، میدان مغناطیسی محوری را در مرکز آن محاسبه کنید.

۱۲.۸ میدان مغناطیسی در نقطه‌ای واقع بر محور (محور z) يك حلقه مستدیر که حامل جریان I است، با معادله (۳۸.۸) داده شده است. با استفاده از این نکته که $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، يك رابطه تقریبی برای B_r (مؤلفه شعاعی میدان مغناطیسی) پیدا کنید که برای نقاط خیلی نزدیک به محور اعتبار داشته باشد.

۱۳.۸ مؤلفه قائم میدان مغناطیسی در ناحیه میان وجوه قطبهای يك شتاب‌دهنده ذرات به صورت $B_z = B_z(r, z)$ داده شده است، که در آن $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ فاصله از محور وجوه قطبهاست. (الف) اگر $|B_r|$ تابعی نزولی از r باشد، نشان دهید که خطوط شدت مغناطیسی به سمت خارج خم می‌شوند، نظیر شکل ۱۱.۸، اعم از اینکه قطب بسالایی قطب شمال باشد یا قطب جنوب. (دانهمایی: از این واقعیت که $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ است، و در صفحه میانه $B_r = 0$ است، استفاده کنید.) (ب) اگر خطوط $\mathbf{B}$ انحنایی نظیر آنچه در شکل آمده است داشته باشند، نشان دهید که ذرات شتابداری که از صفحه میانه دور شوند تحت تأثیر



@Quark_Book

نیروی بازگرداننده‌ای قرار می‌گیرند که آنها را به طرف صفحه میانه برمی‌گرداند، اعم از اینکه این ذرات بار مثبت داشته باشند یا بار منفی.

* ۱۴.۸ از معادله (۳۰.۸) پیدا است که فقط برخی از میدانهای برداری شایستگی آن را دارند که به عنوان میدان مغناطیسی از لحاظ فیزیکی قابل تحقق باشند. (الف) ثابت کنید که بردار

$$\mathbf{B} = (\mathbf{r}/r) \times \nabla g(x, y, z)$$

که در آن $g(x, y, z)$ یک تابع اختیاری است، میدان مغناطیسی مناسبی است؛ (ب) چنانچه g جوابی از معادله لاپلاس باشد، چگالی جریان $\mathbf{J}$ که این میدان مغناطیسی را تولید می‌کند پیدا کنید.

۱۵.۸ نشان دهید که در یک محیط همگن، همسانگرد، و غیرمغناطیسی که رسانندگی آن g و جریانه‌های آن پایاست، $\mathbf{B}$ در معادله برداری لاپلاس $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$ صدق می‌کند.

۱۶.۸ با استفاده از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی را در فاصله r از مرکز یک سیم طویل حامل جریان I محاسبه کنید. این محاسبه را برای هر دو حالت $r < R$ و $r > R$ انجام دهید؛ R شعاع سیم است. صریحاً نشان دهید که میدان مغناطیسی روی محور سیم صفر می‌شود.

۱۷.۸ یک رسانای استوانه‌ای به شعاع b حاوی سوراخ استوانه‌ای شکلی به شعاع a است؛ محور سوراخ موازی با محور استوانه و در فاصله s از آن قرار دارد، به طوری که $a < s < b - a$. رسانا حامل جریان یکنواختی به چگالی $\mathbf{J}$ است. میدان $\mathbf{B}$ را در داخل سوراخ، روی قطری که بر یکی از قطرهای رسانا منطبق است پیدا کنید. (دانهمایی: توزیع جریان معادلی را بررسی کنید که مشکل از چگالی $\mathbf{J}$ در سرتاسر سوراخ و رسانا، به علاوه چگالی $\mathbf{J}$ — در داخل سوراخ است.)

۱۸.۸ فرض کنید که در داخل و خارج سیملوله بسیار بلندی (طول نامتناهی) میدان تماماً در راستای z باشد. (الف) با استفاده از قانون آمپر نشان دهید که میدان در داخل و خارج یکنواخت است؛ و از این رو، اگر $\mathbf{B}$ در فاصله بی‌نهایت از محور برابر صفر باشد، در تمامی نقاط خارج صفر خواهد بود. (ب) قانون آمپر را به کار برید و $\mathbf{B}$ را در داخل سیملوله پیدا کنید. نشان دهید که نتیجه با معادله (۴۷.۸) در حد $a/L \rightarrow 0$ توافق دارد.

۱۹.۸ چنبره‌ای مانند شکل ۲۰.۱۱، به طور یکنواخت سیم پیچی شده است. این سیم پیچ N دورسیم دارد و حامل جریان I است. شعاع داخلی چنبره a و شعاع خارجی آن b است. میدان مغناطیسی را در نقاط مختلف داخل سیم پیچ چنبره‌ای پیدا کنید. نسبت b/a را طوری تعیین کنید که $\mathbf{B}$ در داخل چنبره بیش از ۲۵ درصد تغییر نکند.

۲۰.۸ نشان دهد که پتانسیل برداری مغناطیسی برای دو سیم طویل مستقیم و موازی که هر

دوجریان I را درجهتهای مختلف حمل می کنند، به صورت زیر است

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) n$$

که در آن r_1 و r_2 عبارت اند از فواصل نقطه میدان از سیمها، و n برداریکه ای موازی سیمهاست.

۲۱.۸ مجموعه ای از رساناها داده شده است: یک سیم مستقیم بی نهایت طویل و یک پوسته نازک استوانه ای فلزی (به شعاع b) که سیم را احاطه کرده است و با آن هم محوره است. این دو رسانا جریان یکسان I را در جهات مخالف یکدیگر حمل می کنند. پتانسیل برداری مغناطیسی دستگاه را پیدا کنید.

۲۲.۸ (الف) نشان دهید که $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi$ که در آن Φ عبارت است از شار مغناطیسی از سطحی که به وسیله مدار C محصور شده است. (ب) این نتیجه و نتایج مسئله ۱۸.۸ را به کار برید و $\mathbf{A}$ را در فاصله r در خارج ($r > a$) و داخل ($r < a$) یک سیم ولوله بسیار بلند پیدا کنید. (ج) امتحان کنید که آیا $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ است.

۲۳.۸ (الف) با مشتق گیری مستقیم از معادله (۱۸.۶) نشان دهید که $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. (ب) نشان دهید که $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla$ نیز مانند $\mathbf{A}$ پتانسیلی برداری برای میدان $\mathbf{B}$ محسوب می شود؛ $\mathbf{A} \cdot \nabla$ یک تابع اختیاری است. (ج) نشان دهید که، با انتخاب یک $\mathbf{A}$ مناسب، پتانسیل برداری مربوط به $\mathbf{B}$ می تواند هر واکرایی مطلوبی را داشته باشد.

۲۴.۸ نشان دهید که تمام توابع زیر پتانسیلهای برداری ممکن برای میدان یکنواخت $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ محسوب می شوند: $A_1 = -Byi$ ، $A_2 = Bxj$ ، $A_3 = -\frac{1}{2}r \times B$. برای کدام یک از اینها $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ است؟ نشان دهید که $A_1 - A_2$ برابر است با شیب یک تابع، یعنی $\mathbf{A} \cdot \nabla$.

۲۵.۸ نشان دهید که در مختصات استوانه ای، میدان $\mathbf{B}$ در خارج از سیم مستقیم بلندی که حامل جریان I است از پتانسیل نرده ای زیر به دست می آید

$$\varphi^* = -\frac{I}{2\pi} \theta$$

نشان دهید که φ^* در معادله لاپلاس صدق می کند. چرا این φ^* یکی از هماهنگهای استوانه ای نیست (در صورتی که برای پتانسیل الکتروستاتیکی یک خط بار چنین خواهد بود)؟

۲۶.۸ زاویه میل مغناطیسی طبق تعریف عبارت است از زاویه میان جهت میدان مغناطیسی زمین و صفحه مماس بر سطح زمین در هر نقطه. رابطه ای برای زاویه میل بر حسب عرض

۲۷.۸* ژئومغناطیسی به دست آورید. فرض کنید میدان مغناطیسی زمین یک میدان دو قطبی باشد. (الف) نشان دهید که پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی برای نقطه‌ای واقع بر محور (محور z) یک حلقه مستدیر به شعاع a ، به صورت زیر است

$$\varphi^* = \frac{1}{2} I \left\{ 1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right\}$$

(ب) با بسط رابطه بالا بر طبق قضیه دو جمله‌ای، عبارتی به صورت رشته‌ای به دست آورید که برای ناحیه $z < a$ صادق باشد.
(ج) پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی φ^* باید در معادله لاپلاس صدق کند، به علاوه به علت تقارن $\varphi^* = \varphi^*(r, \theta)$ که در آن r فاصله مرکز حلقه تا نقطه میدان و θ زاویه میان $\mathbf{r}$ و محور z است. نشان دهید که با استفاده از هماهنگیهای منطقه‌ای، معادله (۱۸.۳)، می‌توان جوابی برای φ^* به دست آورد که قابل تبدیل به پتانسیل قسمت (ب) برای نقاط واقع بر محور تقارن باشد. (د) با استفاده از φ^* در قسمت (ج)، B_r و B_θ را در نقاط خارج از محور تقارن حلقه به دست آورید.

۲۸.۸* کره‌ای به شعاع a را که چگالی بار سطحی آن σ است (بار محکم به کره متصل است) حول محوری که از مرکز می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخانیم. نشان دهید که میدان مغناطیسی در یک نقطه خارج از آن به صورت یک میدان دو قطبی است و گشتاور دو قطبی معادل آن را حساب کنید.

۲۹.۸ دو دو قطبی m_1 و m_2 در یک صفحه قرار دارند؛ m_1 ثابت است ولی m_2 می‌تواند حول مرکز خود بچرخد. نشان دهید که در حالت تعادل $\tan \theta_1 = -2 \tan \theta_2$ که در آن θ_1 و θ_2 به ترتیب عبارت‌اند از زوایای میان $\mathbf{r}$ با m_1 و m_2 بردار جابه‌جایی میان m_1 و m_2 است).

خواص مغناطیسی ماده

در فصل ۸ روشهای محاسبه میدان مغناطیسی توزیع مشخصی از جریانهای الکتریکی را بررسی کردیم. بنابراین چنانچه بامدار حامل جریانی سروکار داشته باشیم که از يك حلقه سیم بسته تشکیل شده است، میدان مغناطیسی در ناحیه خلا اطراف سیم را به كمك قانون بیو می توانیم محاسبه کنیم. حال اگر فضای اطراف سیم را يك محیط مادی پر کرده باشد، آیا میدان مغناطیسی به علت وجود ماده تغییر خواهد کرد؟ پاسخ مثبت است. همه مواد از اتمها ساخته شده اند، و هر اتم شامل الکترونهاى در حال حرکت است. این مدارهای الکترونی، که هر يك محدود است به يك تك اتم، جریانهای اتمی نام دارند. پس ظاهرأ دونوع جریان وجود دارد: (۱) جریان واقعی که از انتقال بار، یعنی از حرکت الکترونهاى آزاد یا یونهاى باردار، به وجود می آید؛ (۲) جریانهای اتمی، که جریانهای کاملادورانی اند و منجر به انتقال بار نمی شوند. اما، هر دونوع جریان می توانند میدان مغناطیسی تولید کنند.

۱.۹ مغناطش

جریان اتمی مدار كوچك بسته ای است به ابعاد اتمی، و در نتیجه می توان آن را به طرز مناسبی به صورت يك دوقطبی مغناطیسی توصیف کرد. در واقع، در اینجا کمیتی که مورد نظر است گشتاور دوقطبی است، زیرا میدان مغناطیسی که هر تك اتم در دوردست تولید می کند تنها با مشخص کردن گشتاور دوقطبی مغناطیسی آن، $\mathbf{m}$ ، کاملاً تعیین می شود. فرض می کنیم که گشتاور مغناطیسی $\mathbf{m}$ ، باشد. اکنون يك کمیت برداری

ماکروسکوپی را به نام مغناطش، $\mathbf{M}$ ، با همان روشی که در فصل ۴ دربارهٔ تعریف قطبش به کار بردیم، تعریف می‌کنیم. تمام گشتاورهای دوقطبی واقع در عنصر کوچک حجم Δv را با هم جمع برداری می‌کنیم و نتیجه را بر Δv تقسیم می‌کنیم، کمیت حاصل یعنی

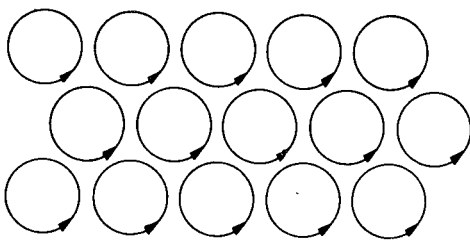
$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_i \mathbf{m}_i \quad (۱۰۹)$$

گشتاور دوقطبی مغناطیسی در واحد حجم، و یا به عبارت ساده‌تر، مغناطش نامیده می‌شود. فرایند حد در رابطه (۱۰۹) همان فرایند حد ماکروسکوپی معمولی است؛ Δv را از دید ماکروسکوپی خیلی کوچک می‌کنیم، اما نه آنقدر کوچک که از لحاظ آماری تعداد زیادی اتم نداشته باشد. در این صورت کمیت $\mathbf{M}$ یک تابع برداری نقطه‌ای خواهد بود. در حالتی که ماده نامغناطیده است، چون جهت $\mathbf{m}_i$ ها کاملاً کتره‌ای است مجموع $\sum \mathbf{m}_i$ صفر می‌شود، اما در صورت وجود یک میدان برانگیزندهٔ خارجی، معمولاً $\mathbf{M}$ به این میدان بستگی دارد. بستگی خاص $\mathbf{M}$ به $\mathbf{B}$ در بخش ۶.۹ بررسی خواهد شد.

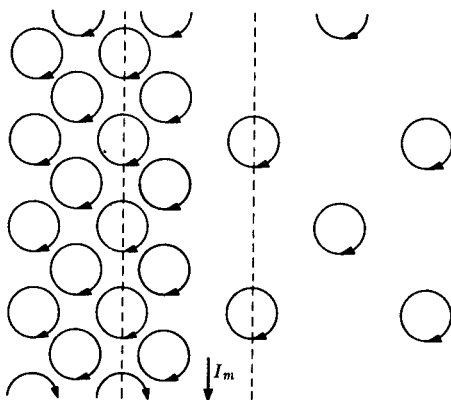
در حال حاضر، فرض می‌کنیم $\mathbf{M}(x, y, z)$ تابعی باشد معلوم و سهم جسم مغناطیده را در ایجاد میدان مغناطیسی. بر مبنای روابط بخش ۷.۸ محاسبه می‌کنیم.

تابع برداری $\mathbf{M}$ ، توصیفی ماکروسکوپی از جریان اتمی درون ماده به دست می‌دهد. به طور مشخص، $\mathbf{M}$ تعیین کنندهٔ حاصل ضرب تعداد مدارهای جریان اتمی در واحد حجم، در گشتاور مغناطیسی میانگین یا مؤثر هر مدار است. از دید صرفاً ماکروسکوپی، تمام اثرهای مغناطیسی مربوط به ماده را می‌توان به طرز مناسب بر حسب $\mathbf{M}$ و یا مشتقهای آن بیان کرد. یکی از این مشتقها، یعنی $\nabla \times \mathbf{M}$ ، معادل است با یک چگالی جریان انتقالی که بتواند همان میدان مغناطیسی ایجاد شده به وسیلهٔ خود $\mathbf{M}$ را به وجود آورد؛ این بردار را چگالی جریان مغناطش $\mathbf{J}_M$ ، می‌نامند. قبل از به دست آوردن رابطهٔ مهمی که $\mathbf{J}_M$ و $\mathbf{M}$ را به هم مربوط می‌کند، مدل ساده‌ای از مادهٔ مغناطیده را بررسی می‌کنیم که در آن جریانهای حلقه‌ای اتمی هم جهت در کنار هم قرار گرفته‌اند (شکل ۱۰.۹). اگر مغناطش یکنواخت باشد، جریانهای حلقه‌های مختلف یکدیگر را حذف می‌کنند و در درون ماده هیچ جریان مؤثری وجود نخواهد داشت. چنانچه مغناطش یکنواخت نباشد، عمل حذف کامل نخواهد بود. به عنوان مثالی از مغناطیدگی نایکنواخت، تغییر ناگهانی در مغناطش را که در شکل ۲.۹ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم؛ اگر توجه خود را به ناحیهٔ میان خطوط نقطه چین معطوف داریم، واضح است که باری که به سمت پایین حرکت می‌کند از باری که به سمت بالا در حرکت است بیشتر است. این را جریان مغناطش می‌نامیم. پس، هر چند که انتقال بار در کار نیست، لیکن حرکت مؤثری از بار به سمت پایین وجود دارد، و این «جریان» می‌تواند یک میدان مغناطیسی ایجاد کند.

حال باقی می‌ماند اینکه رابطهٔ میان $\mathbf{J}_M$ و $\mathbf{M}$ را پیدا کنیم. دو عنصر کوچک حجم در یک قطعه مادهٔ مغناطیسی را در نظر می‌گیریم که حجم هر عنصر، $\Delta x \Delta y \Delta z$ است و این دو



شکل ۱۰۹ تصویر ساده‌ای از ماده مغناطیسی که از جریانهای حلقه‌ای اتمی هم‌جهت تشکیل شده است.



شکل ۲۰۹ نمونه‌ای از تغییر ناگهانی در مغناطش.

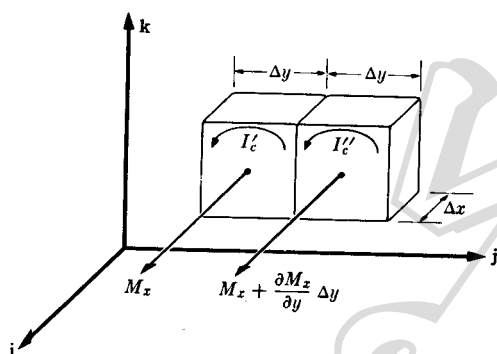
عنصر در جهت محور y در کنار هم قرار گرفته‌اند (شکل ۳۰۹). اگر مغناطش در اولین عنصر حجم $\mathbf{M}(x, y, z)$ باشد، مغناطش در دومین عنصر عبارت است از

$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \Delta y + \text{جمله‌های از مرتبه بالاتر}$$

مؤلفه x گشتاور مغناطیسی اولین عنصر، $M_x \Delta x \Delta y \Delta z$ ، را می‌توان بر حسب یک جریان دورانی I_c' به صورت زیر بیان کرد

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I_c' \Delta y \Delta z \quad (۲۰۹)$$

به طریق مشابه، مؤلفه x گشتاور مغناطیسی عنصر دوم، با چشمپوشی از جملات مرتبه‌های بالاتر



شکل ۳.۹ جایگزینی عنصرهای حجم ماده مغناطیده با جریانهای دورانی I'_c و I''_c .

که در حد باخیلی کوچک شدن عنصرهای حجم صفر می شوند، برابر است با

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x \Delta y \Delta z = I''_c \Delta y \Delta z \quad (۳.۹)$$

مقدار خالص جریان روبه بالا در ناحیه وسط دو عنصر حجم برابر است با

$$I'_c - I''_c = -\frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (۴.۹)$$

در مرحله بعد دو عنصر حجم مجاور را در امتداد محور x در نظر می گیریم و توجه خود را به مؤلفه y بردار مغناطش در هر عنصر متمرکز می کنیم. در ناحیه وسط دو عنصر، مقدار خالص جریان روبه بالا، ناشی از جریانهای دورانی که معرف گشتاورهای مغناطیسی اند، به صورت زیر است

$$(I_c)_y = \frac{\partial M_y}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (۵.۹)$$

اینها تنها جریانهای دورانی يك عنصر به خصوص اند که سبب ایجاد جریان خالصی در راستای محور z می شوند. این جریان خالص، که ناشی از یکنواخت نبودن مغناطش است، جریان مغناطش نامیده می شود. این جریان، نوعی جریان انتقالی نیست، بلکه، همان طور که دیدیم، از جریانهای دورانی، یعنی از جریانهای اتمی درون ماده، به وجود می آید. سطح مؤثر برای هر يك از جریانها در (۴.۹) و (۵.۹)، $\Delta x \Delta y$ است. پس

$$(J_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (۶.۹ الف)$$

یا

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad (۶.۹ ب)$$

پس چگالی جریان مغناطش تاو بردار مغناطش است.

۲.۹ میدان مغناطیسی ناشی از ماده مغناطیده

طبق معادله (۱.۹)، هر عنصر حجم $\Delta v'$ از ماده مغناطیده بایک گشتاور مغناطیسی مشخص می شود

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{M}(x', y', z') \Delta v' \quad (۷.۹)$$

بسیار به کار بردن نتایج بخش ۷.۸، می توانیم سهم هر $\Delta \mathbf{m}$ (یا معادل آن هر $\Delta v'$) را در ایجاد میدان مغناطیسی در نقطه (x, y, z) بنویسیم. بنابراین، میدان مغناطیسی با انتگرال گیری بر روی تمامی حجم جسم، V ، به دست می آید. این روش در شکل ۴.۹ نشان داده شده است.

به جای محاسبه مستقیم $\mathbf{B}$ ، بهتر است ابتدا پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ را به دست آوریم و سپس با گرفتن تاو از آن، $\mathbf{B}$ را حساب کنیم. مطابق روش بخش ۷.۸، پتانسیل برداری در نقطه (x, y, z) با رابطه زیر داده می شود

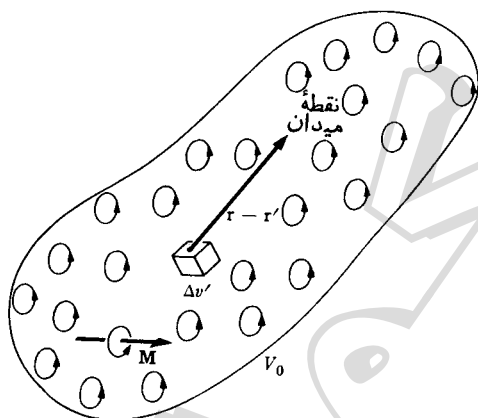
$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{M}(x', y', z') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (۸.۹)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(x', y', z') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

به کمک اتحادهای برداری (۹.۱.۱) و (۳.۲.۱) از جدولهای ۱.۱ و ۲.۱، این انتگرال به صورت زیر در می آید

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad (۹.۹)$$

که نور آن S_0 سطح محصورکننده حجم V_0 است. با استفاده از معادله (۶.۹ ب) و تعریف کردن چگالی سطحی جریان مغناطش $\mathbf{j}_M$ (یعنی، جریان مغناطش در واحد طول که در لایه



شکل ۴.۹ سهم يك توزیع ماده مغناطیده در ایجاد میدان مغناطیسی.

سطحی جاری است) بارابطه

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (10.9)$$

معادله (۹.۹) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{j}_M da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.9)$$

می توانستیم از ابتدا رابطه نهایی، یعنی معادله (۱۱.۹) را حدس بزنیم. با وجود این، مشاهده اینکه نتیجه حاصل، از ریاضیات و آن هم به نحوی کاملاً طبیعی به دست آمده است خشنود کننده است. بنابراین، پتانسیل برداری ناشی از توزیع جریانهای اتمی داخل ماده به همان صورت پتانسیل ناشی از توزیع جریانهای انتقالی واقعی است. باید خاطر نشان کرد که معادله (۱۰.۹) رابطه مناسب برای چگالی سطحی جریان است، عبارتی که بارابطه $\mathbf{J}_M = \nabla' \times \mathbf{M}$ سازگار است. $\mathbf{j}_M$ را وقتی باید به کار برد که $\mathbf{M}$ به طور ناگهانی تغییر کند، چنان که ممکن است در فصل مشترک میان دو محیط پیش آید، لیکن اگر ناحیه ناپیوستگی $\mathbf{M}$ در فاصله $\Delta \xi$ گسترده شده باشد، آن وقت می توان نشان داد که $\mathbf{j}_M$ جزء جمله $\Delta \xi \mathbf{J}_M$ است. (یا اگر ناحیه ناپیوستگی خیلی نازک باشد، $\mathbf{j}_M$ را می توان بایک تابع دلتای سطحی نمایش داد.)

با اینکه معادله (۱۱.۹) هم صحیح است و هم به صورتی است که با نتایج فصل ۸ به خوبی سازگاری دارد، ولی وقتی می خواهیم $\mathbf{B}$ را برای توزیع مشخصی از مغناطش

محاسبه کنیم، با برخی اشکالات عملی مواجه خواهیم شد. نخست باید عملیات $\nabla \times \mathbf{M}$ را انجام دهیم، و آنگاه برای پیدا کردن $\mathbf{B}$ از میدان $\mathbf{A}$ ، محاسبهٔ تاو دیگری لازم است. در صورت امکان، کار کردن با کمیت‌های نرده‌ای به‌طور قطع برتری دارد و محاسبهٔ شیب يك میدان نرده‌ای (نظیر آنچه در مبحث الکتروستاتیک داشتیم) از محاسبهٔ تاو يك میدان برداری آسانتر است. به همین جهت به معادلهٔ (۸.۹) بازمی‌گردیم و راه دیگری را امتحان می‌کنیم. چون به هر جهت $\mathbf{B}$ مورد نظر ماست نه $\mathbf{A}$ ، بنابراین، تاو را محاسبه می‌کنیم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \nabla \times \left[\mathbf{M} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dv' \quad (12.9)$$

که در آن عملگرهای دیفرانسیلی مربوط به تاو بر مختصات بی‌پریم عمل می‌کنند. همان‌طور که ممکن است خواننده حدس زده باشد، کار بعدی ما تبدیل انتگرالده معادلهٔ (۱۲.۹) است. برای این کار از اتحادهای برداری جدول ۱۰.۱ استفاده می‌کنیم. بنابراین اتحاد (۱۰.۱۱) داریم

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

با فرض $\mathbf{F} = \mathbf{M}$ و $\mathbf{G} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ و توجه به اینکه مشتق گیرها نسبت به مختصات بی‌پریم انجام می‌شوند، اتحاد بالا به صورت

$$\nabla \times \left[\mathbf{M} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = \mathbf{M} \nabla \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (13.9)$$

درمی‌آید، زیرا $\nabla \cdot \mathbf{M}(x', y', z') = 0$ ، و مانند آن. بنابراین

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_I(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) \quad (14.9)$$

که در آن

$$\mathbf{B}_I(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M} \nabla \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dv' \quad (الف \ 14.9)$$

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (ب \ 14.9)$$

نخست انتگرال ساده‌تر $\mathbf{B}_I$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادلهٔ (۵۷.۲) نتیجهٔ زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_I(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \nabla \pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' \\ &= \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (15.9)$$

حال به محاسبه انتگرال $\mathbf{B}_{II}$ می‌پردازیم. انتگرالده آن را با استفاده از اتحاد دیگری (۶.۱.۱) می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla \left[\mathbf{M} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mathbf{M} \times \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \quad (16.9)$$

جمله آخر در (۱۶.۹) شامل عبارت زیر است

$$\nabla \times \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = -\nabla \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

که عیناً مساوی صفر می‌شود. پس

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

که نظیر معادله (۸.۵.۸) می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}_{II}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) \quad (17.9)$$

کمیت $\varphi^*(\mathbf{r})$ يك پتانسیل نرده‌ای، یعنی پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی ناشی از ماده مغناطیسی است

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (18.9)$$

با جمع کردن دو سهم، (۱۵.۹) و (۱۷.۹)، عبارت زیر را برای میدان مغناطیسی به دست می‌آوریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (19.9)$$

پس میدان مغناطیسی ناشی از يك توزیع ماده مغناطیده را می‌توان به صورت مجموع دو جمله نوشت: شیب يك میدان نرده‌ای به اضافه جمله‌ای متناسب با مغناطش موضعی. در يك

نقطه خارجی، یعنی در خلا، $\mathbf{M}$ صفر است و بنابراین میدان مغناطیسی تنها شیب يك میدان نرده ای است، میدانی که خود انتگرال میدانهای دو قطبی دوردست (معادله ۸۳.۸) است.

۳.۹ پتانسیل مغناطیسی نرده ای و چگالی قطب مغناطیسی

پتانسیل مغناطیسی نرده ای، معادله (۱۸.۹)، از نظر شکل ریاضی با پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از ماده دی الکتریک قطبیده مشابه است. از این رو، در اینجا نیز از تبدیل ریاضی زیر استفاده می کنیم

$$\frac{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{M} \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$= \nabla' \cdot \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{M} \quad (20.9)$$

بدین ترتیب معادله (۱۸.۹) به صورت زیر درمی آید

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (21.9)$$

که در آن S_0 سطح ناحیه V_0 است. باقیاس با بخش ۲.۴، مفید به نظر می رسد که کمیت های نرده ای زیر را تعریف کنیم

$$\rho_M(\mathbf{r}') \equiv -\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') \quad (22.9)$$

که آن را چگالی قطب مغناطیسی می نامند، و

$$\sigma_M(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} \quad (23.9)$$

که به چگالی سطحی قدرت قطب مغناطیسی معروف است. این کمیت ها با وجود آنکه نسبتاً تصنعی هستند اما خیلی مفیدند، زیرا همان نقشی را در نظریه مغناطیس ایفا می کنند که ρ_p و σ_p در نظریه دی الکتریک. یکاهای ρ_M و σ_M به ترتیب عبارت اند از آمپر بر متر مربع و آمپر بر متر.

برای مثال، يك میله آهنربا را که به طور یکنواخت مغناطیده شده است در نظر می گیریم. چون مغناطش یکنواخت است، پس $\rho_M = 0$ است. چگالیهای سطحی تنها در سطوحی که بردار مغناطش روی آنها مؤلفه ای عمود بر سطح دارد، مخالف صفر اند؛ این

سطوح را قطبهای آهنربا می‌نامند. این مثال تاحدی يك مثال ایده‌آل است، لیکن چندان هم بامیلۀ آهنربای آزمایشگاهی که با آن آشناییم تفاوت ندارد. (در عمل، قطبهای يك آهنربا نوعی تأثیر و امغانطنده به وجود می‌آورند که این تأثیر یک‌نواخت بودن $\mathbf{M}$ را از بین می‌برد و در نتیجه هر قطب را در ناحیه‌ای وسیع‌تر از سطح قطب گسترش می‌دهد.)
جمع کل قدرت قطب مغناطیسی هر آهنربا صفر است. این حکم مستقیماً از قضیه واگرایی نتیجه می‌شود

$$\int_{V_0} (-\nabla \cdot \mathbf{M}) dv + \int_{S_0} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

حال محاسبه‌ای را که قبلاً شروع کردیم تکمیل می‌کنیم. معادله (۱۸.۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\rho_M dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\sigma_M da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad [18.9 \text{ الف}]$$

و $\mathbf{B}(x, y, z)$ برابر خواهد بود با $-\mu_0$ ضرب در شیب این پتانسیل نسبت به مختصات بدون پریم، به علاوه جمله $\mu_0 \mathbf{M}$ ، پس

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \rho_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \sigma_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad [19.9 \text{ الف}]$$

این رابطه سهم جسم مغناطیده در حجم V_0 را در ایجاد میدان مغناطیسی در نقطه (x, y, z) نشان می‌دهد.

۴.۹ چشمه‌های میدان مغناطیسی. شدت مغناطیسی

در بخشهای گذشته دیدیم که چگونه جسم مغناطیده میدان مغناطیسی به وجود می‌آورد. به علاوه، در فصل ۸ اثرهای مغناطیسی جریانهای متعارف را بررسی کردیم. در حالت کلی، هر دو نوع چشمه مغناطیسی وجود دارند: جریانهای متعارف یا جریانهای انتقالی، که در آزمایشگاه قابل اندازه‌گیری‌اند، و جریانهای اتمی درون ماده. درك این نکته جالب است که يك قطعه از ماده تحت شرایط خاصی می‌تواند هم به این علت که مغناطیده است و هم به این علت که دارای جریانی انتقالی از حاملهای بار است میدان مغناطیسی تولید کند. پس، به عنوان مثال، یکی از بهترین اجسام مغناطیسی، یعنی آهن، ممکن است از طریق الکترونهای آزاد خود حامل يك جریان انتقالی باشد، در حالی که یونهای ثابت آهن در شبکه بلوری

آن دارای جریانهای اتمی اند و این جریانها می توانند جهت خاصی پیدا کنند و مغناطش شدیدی را سبب شوند.

به طور کلی، میدان مغناطیسی را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \mu_0 \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (24.9)$$

که در آن

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_M da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (25.9)$$

حجم V تمام نواحی حامل جریان و تمام ماده را در برمی گیرد؛ سطح S نیز شامل تمام سطوح و فصل مشترکهای محیطهای مختلف است. چگالی جریان $\mathbf{J}$ شامل تنها جریانهای متعارف از نوع انتقال بار است، درحالی که اثر جریانهای اتمی در بردار مغناطش $\mathbf{M}$ و بتانسیل φ^* یافت می شود.

چنانچه $\mathbf{J}$ و $\mathbf{M}$ در تمام نقاط مشخص باشند، معادله (۲۴.۹) را می توان برای یافتن $\mathbf{B}$ به کار برد. اما در بیشتر مسائل $\mathbf{J}$ مشخص است لیکن $\mathbf{M}(x', y', z')$ به $\mathbf{B}(x', y', z')$ بستگی دارد، پس حتی اگر شکل تابعی $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ هم معلوم باشد، معادله (۲۴.۹) حداکثر فقط یک معادله انتگرالی برای $\mathbf{B}$ فراهم می آورد. برای احتراز از این مشکل یک بردار مغناطیسی کمکی، یعنی شدت مغناطیسی $\mathbf{H}$ را در بحثمان وارد می کنیم. این بردار را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (26.9)$$

از ترکیب (۲۴.۹) و (۲۶.۹) به دست می آوریم

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \nabla \varphi^*(\mathbf{r}) \quad (27.9)$$

ظاهراً با همه این کارها فایده ای عایدمان نشده است، زیرا $\mathbf{H}$ هنوز از طریق ρ_M و σ_M به $\mathbf{M}$ بستگی دارد؛ اما در بخش بعد نشان خواهیم داد که چگونه $\mathbf{H}$ از طریق یک معادله دیفرانسیل به چگالی جریان متعارف $\mathbf{J}$ مربوط می شود. وضع در اینجا مشابه حالت الکتروستاتیکی است، که در آن بردار کمکی $\mathbf{D}$ از طریق واگرایی خود به چگالی بار آزاد مربوط می شود.

میدان برداری $\mathbf{H}$ در نظریه مغناطیس نقش مهمی را ایفا می کند، به خصوص در

مسائلی که شامل آهنرباهای دائمی اند. این مطالب را در بخشهای بعدی این فصل بررسی خواهیم کرد. یکای H همان یکای M است، یعنی آمپر بر متر.

۵.۹ معادلات میدان

در فصل ۸، معادلات اساسی که اثرهای مغناطیسی جریانها را بیان می کنند به صورت دیفرانسیلی زیر بیان کردیم

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

حال می خواهیم بدانیم چنانچه قسمتی از میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ ناشی از ماده مغناطیده باشد، این معادلات چگونه تغییر می کنند.

خواننده به خاطر می آورد که از معادله واگرایی ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) چنین نتیجه گرفتیم که می توانیم $\mathbf{B}$ را به صورت تاو تابع برداری $\mathbf{A}$ بنویسیم. اما این نتیجه به میدانهای مغناطیسی تولید شده توسط جریانهای متعارف محدود نمی شود. میدان ناشی از جسم مغناطیده را از جریانهای اتمی می توان به دست آورد؛ در واقع، در بخش ۲.۹ از همین راه این میدان را به دست آوردیم. پس $\mathbf{B}$ را می توان همواره به صورت $\nabla \times \mathbf{A}$ نوشت، و معادله واگرایی به صورت زیر همواره صادق خواهد بود

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (28.9)$$

«معادله تاو»، شکل دیفرانسیلی قانون مداری آمپر است. در اینجا باید دقت کنیم که همه انواع جریانهایی که می توانند میدان مغناطیسی ایجاد کنند منظور شوند. بنابراین، در حالت کلی، این معادله را می توان به نحو مناسب چنین نوشت

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M) \quad (29.9)$$

که در آن $\mathbf{J}$ چگالی جریان انتقالی و $\mathbf{J}_M$ چگالی جریان مغناطش است. معادلات (۲۹.۹) و (۲۸.۹) را می توان ترکیب کرد و نتیجه زیر را به دست آورد

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}$$

که، بر طبق معادله (۲۶.۹)، معادل است با

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (30.9)$$

بنابراین، بردار مغناطیسی کمکی $\mathbf{H}$ از طریق تاو خود به چگالی جریان انتقالی مربوط

می‌شود. معادله فوق با گرفتن تاو از (۲۷.۹) نیز به دست می‌آید. معادلات (۲۸.۹) و (۳۰.۹) معادلات اساسی میدان مغناطیسی اند. این دو معادله، همراه با شرایط مرزی مناسب و یک رابطه تجربی میان $\mathbf{H}$ و $\mathbf{B}$ ، برای حل مسائل مغناطیس کفایت می‌کنند. در برخی موارد استفاده از فرمولبندی انتگرالی این نظریه ارجح است. به کمک قضیه استوکس می‌توان معادله (۳۰.۹) را به صورت زیر تبدیل کرد

$$\int_s \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ = \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da$$

یا

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (31.9)$$

به بیانی دیگر، انتگرال خطی مؤلفه مماسی شدت مغناطیسی دور مسیر بسته C برابر است با کل جریانهای انتقالی که از سطح محصور به منحنی C می‌گذرند. به دلیل قضیه واگرایی معادله (۲۸.۹) معادل است با

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad (32.9)$$

یعنی برای هر سطح بسته، شار مغناطیسی صفر است.

۶.۹ پذیرفتاری و تراوایی مغناطیسی. پسماند

برای حل مسائل مربوط به نظریه مغناطیس داشتن رابطه‌ای میان $\mathbf{H}$ و $\mathbf{B}$ ، و یا معادل آن، رابطه‌ای میان $\mathbf{M}$ و یکی از بردارهای میدان مغناطیسی، ضروری است. این روابط به ماهیت ماده مغناطیسی بستگی دارند و غالباً از راه تجربه به دست می‌آیند. در بسیاری از مواد یک رابطه تقریباً خطی میان $\mathbf{M}$ و $\mathbf{H}$ وجود دارد. اگر ماده همسانگرد و درعین حال خطی^۱ باشد، خواهیم داشت

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (33.9)$$

۱. اگر ماده ناهمسانگرد ولی خطی باشد، به جای معادله (۳۳.۹)، معادله تانسوری زیر

$$M_x = \chi_{m,11} H_x + \chi_{m,12} H_y + \chi_{m,13} H_z$$

و سایر معادلات مشابه به کار می‌روند. در این موارد $\mathbf{M}$ و $\mathbf{H}$ الزاماً هم جهت نخواهند بود. مادر این کتاب، بررسی خود را به محیطهای همسانگرد محدود می‌کنیم.

که در آن کمیت نرده‌ای و بی بعد χ_m را پذیرفتاری مغناطیسی می‌نامند. اگر χ_m مثبت باشد، ماده را پارامغناطیس می‌گویند، و میدان مغناطیسی در اثر حضور ماده تقویت می‌شود. اگر χ_m منفی باشد، جسم را دیامغناطیس می‌نامند و میدان مغناطیسی در اثر حضور چنین ماده‌ای تضعیف می‌شود. با اینکه χ_m تابعی از دماست، و گاهی نیز به شدت با دما تغییر می‌کند، عموماً با اطمینان می‌توان گفت که χ_m برای مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس بسیار کوچک است؛ یعنی

$$|\chi_m| \ll 1 \quad (\text{برای مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس}) \quad (۳۴.۹)$$

پذیرفتاری مغناطیسی بعضی از مواد معمولی در جدول ۱۰.۹ آمده است. در بیشتر کتابهای راهنما و جدولهای داده‌های فیزیکی χ_m را مستقیماً درج نمی‌کنند، بلکه به صورت پذیرفتاری جرمی χ_m یا پذیرفتاری مولی χ_m می‌نویسند، این کمیتها با روابط زیر تعریف می‌شوند

$$\chi_m = \chi_{m, \text{جرمی}} d \quad (۳۵.۹)$$

$$\chi_m = \chi_{m, \text{مولی}} \frac{d}{A} \quad (۳۶.۹)$$

که در آن d چگالی جرمی ماده و A وزن مولکولی آن است. چون ابعاد M و H همان ابعاد گشتاور مغناطیسی در واحد حجم است، واضح است، که H جرمی χ_m و H مولی χ_m به ترتیب گشتاور مغناطیسی در واحد جرم و گشتاور مغناطیسی در مول را مشخص می‌کنند. برای سهولت، پذیرفتاری جرمی نیز در جدول ۱۰.۹ قید شده است. وجود رابطه‌ای خطی میان M و H وجود رابطه‌ای خطی میان B و H را به صورت زیر ایجاب می‌کند

$$B = \mu H \quad (۳۷.۹)$$

که در آن μ ضریب تراوایی (مغناطیسی) نامیده می‌شود که از ترکیب معادله‌های (۲۶.۹) و (۳۳.۹) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (۳۸.۹)$$

گاهی اوقات به جای χ_m کمیت بی بعد زیر را در جدولها ذکر می‌کنند

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (۳۹.۹)$$

جدول ۱۰۹ پذیرفتاری مغناطیسی برخی مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس در دمای اتاق^۱

ماده	χ_m	χ_m , جرمی, m^3/kg
آلومینیوم	21×10^{-5}	0.77×10^{-8}
بیسموت	-164×10^{-5}	-1.68×10^{-8}
مس	-98×10^{-5}	-0.11×10^{-8}
الماس	-22×10^{-5}	-0.62×10^{-8}
کلرور گادولینیوم ($GdCl_3$)	6030×10^{-5}	13373×10^{-8}
طلا	-35×10^{-5}	-0.18×10^{-8}
منیزیم	12×10^{-5}	0.68×10^{-8}
جیوه	-28×10^{-5}	-0.21×10^{-8}
نقره	-24×10^{-5}	-0.23×10^{-8}
سدیوم	84×10^{-5}	0.87×10^{-8}
تیتانیوم	180×10^{-5}	401×10^{-8}
تنگستن	76×10^{-5}	0.40×10^{-8}
گاز کربنیک (فشار یک اتمسفر)	-119×10^{-8}	-0.60×10^{-8}
هیدروژن (فشار یک اتمسفر)	-22×10^{-8}	-2.48×10^{-8}
نیتروژن (فشار یک اتمسفر)	-67×10^{-8}	-0.54×10^{-8}
اکسیژن (فشار یک اتمسفر)	1935×10^{-8}	1354×10^{-8}

۱. داده‌ها از کتاب

Handbook of Chemistry and Physics, 58th edition, CRC Press, Inc., Cleveland, Ohio.

انتخاب شده‌اند. عملاً در تمام منابع، پذیرفتاری مغناطیسی بر حسب یکاهای گاوسی (cgs) داده می‌شوند؛ اگر شاخص (۱) برای نمایش دادن کمیت‌ها در دستگاه گاوسی به کار رود آنگاه:

$$\chi_m = 4\pi \chi_m^{(1)} \text{ و } \chi_m \text{ جرمی, } \chi_m^{(1)} = 4\pi \times 10^{-3} \chi_m \text{ جرمی}$$

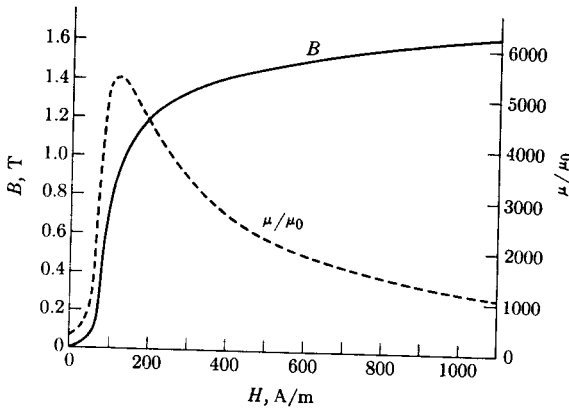
جدول ۲۰۹ خواص مواد فرومغناطیس دردمای اتاق^۱

 مغناطش اشباع $= M_s$ ، شدت مغناطیسی لازم برای اشباع $= H_s$ ،

 وادارندگی مغناطیسی $= H_c$ ، پسمانده B_r

ماده	درصد ترکیب	$\mu_0 M_s, T$	$H_s, A/m$	$K_m, \max$
آهن (تابکاری شده)		۲۱۵	1.6×10^5	۵ ۵۰۰
کوبالت		۱۷۹	7.0×10^5	
نیکل		۵۶۱	5.5×10^5	
آلیاژها:			$H_c, A/m$	
آهن - سیلیسیوم	۹۶Fe , ۳Si	۲۰۲	۵۶	۸ ۰۰۰
پرمالوی (Permalloy)	۵۵Fe , ۴۵Ni	۱۶۰	۵۶	۵۰ ۰۰۰
مومتال (Mumetal)	$\left. \begin{array}{l} 50Cu , 2Cr , \\ 77Ni , 16Fe \end{array} \right\}$	۰۷۵	۱۲	۱۵۰ ۰۰۰
پرمندور (Permendur)	۵۰Co , ۵۰Fe	۲۴۰	۱۵۹	۶ ۰۰۰
فریت منگنز	$MnFe_2O_4$	۰۴۹		۲ ۵۰۰
فریت نیکل	$NiFe_2O_4$	۰۳۲		۲ ۵۰۰
		B_r, T		
فولاد کوبالت	$52Fe , 36Co , 2W$ $6Cr , 0.8C$	۰۹۷	1.9×10^3	
آلنیکو V	$51Fe , 8Al , 14Ni$ $24Co , 3Cu$	۱۲۵	4.9×10^3	

1. American Institute of Physics Handbook, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1972.

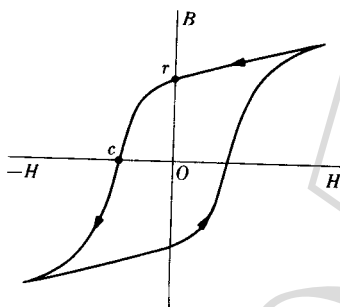


شکل ۵.۹ منحنی مغناطش و تراوایی نسبی آهن تجارتنی (تابکاری شده).

این کمیت را تراوایی نسبی می نامند. برای مواد پارامغناطیس و دیامغناطیس که در جدول ۱.۹ آمده اند، به خوبی دیده می شود که K_m خیلی به واحد نزدیک است.

فرومغناطیسها رده دیگری از مواد مغناطیسی را تشکیل می دهند. وجه مشخصه چنین ماده ای آن است که می تواند مغناطش دائم داشته باشد و همچنین آنکه عموماً وجودش تأثیر زیادی در میدان مغناطیسی دارد. مواد فرومغناطیس خطی نیستند، در نتیجه معادله های (۳۳.۹) و (۳۷.۹) با مقادیر ثابت χ و μ در موردشان صدق نمی کند، به هر حال، مناسب به نظر می رسد که معادله (۳۷.۹) را به عنوان معادله ای برای تعریف μ به کار ببریم، یعنی $\mu = \mu(H)$ ، اما باید در این خصوص احتیاط کرد چه این کار در بعضی موارد ممکن است به اشکالاتی منجر شود. اگر کمیت μ مربوط به یک ماده فرومغناطیس با معادله (۳۷.۹) تعریف شود، آن وقت بر حسب مقدار H ، کمیت μ تمام مقادیر میان صفر تا بینهایت را قبول خواهد کرد و ممکن است مثبت یا منفی باشد. بهترین کار این است که هر یک از مسائل مربوط به فرومغناطیسها را جدا گانه بررسی کنیم، و ناحیه ای از منحنی $B-H$ را که برای مسئله مفروض مهم است تعیین کنیم، و تقریبهای مناسب برای آن ناحیه را به کار ببریم.

ابتدا نمونه ای از یک فرومغناطیس نامغناطیده را بررسی می کنیم. اگر شدت مغناطیسی، که در آغاز صفر است، به طوری یکنوا افزایش داده شود، منحنی حاصل از رسم رابطه $B-H$ ، مشابه منحنی شکل ۵.۹ خواهد بود. این منحنی را منحنی مغناطش ماده می نامند. واضح است که μ هایی که از منحنی مغناطش، با استفاده از رابطه $\mu = B/H$ ، به دست بیایند، همواره علامت یکسانی دارند (مثبت)، لیکن مقادیرشان بسیار متفاوت است. بیشترین مقدار



شکل ۶.۹ حلقهٔ پسماند نمونه برای یک مادهٔ فرومغناطیسی.

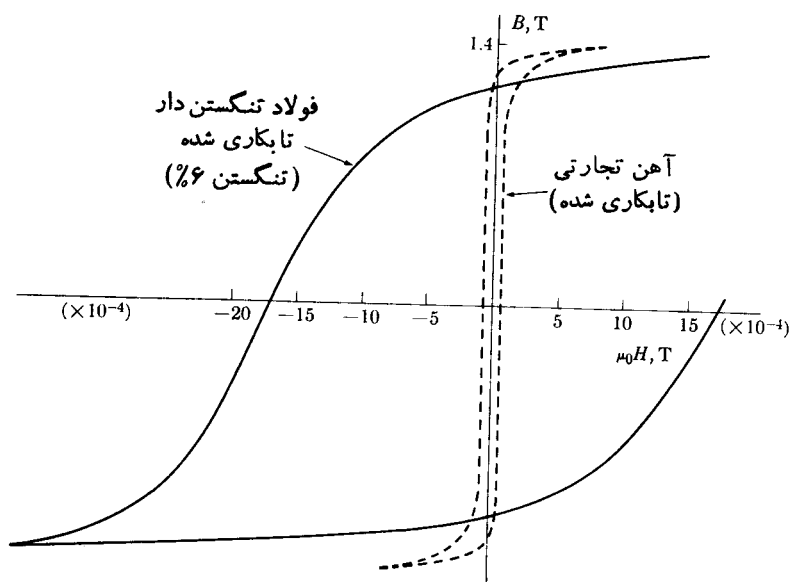
تراوایی در «زانوی» منحنی رخ می‌دهد؛ در بعضی مواد این تراوایی بیشینه تا $10^5 \mu_0$ نیز می‌رسد؛ در سایر مواد از این مقدار بسیار کمتر است. علت وجود زانو در منحنی این است که مغناطش M در ماده به مقدار بیشینه‌ای می‌رسد، و برای مقادیر بسیار زیاد H ، افزایش میدان مغناطیسی

$$B = \mu_0 (H + M)$$

تنها به علت وجود جمله $\mu_0 H$ ادامه می‌یابد. مقدار بیشینه M را مغناطش اشباع ماده می‌نامند (جدول ۲.۹).

حال یک نمونهٔ فرومغناطیس را که به‌روش بالا مغناطیده شده است در نظر می‌گیریم. اگر شدت مغناطیسی H را کاهش دهیم، رابطهٔ $B-H$ از روی همان منحنی شکل ۵.۹ بر نمی‌گردد، بلکه از روی منحنی جدید شکل ۶.۹ حرکت می‌کند و به نقطهٔ r می‌رسد. مغناطش، پس از برقرار شدن، دیگر با حذف H از میان نمی‌رود؛ در واقع باید یک شدت مغناطیسی معکوس به کار گرفته شود تا مغناطش به صفر کاهش یابد. اگر افزایش H در جهت معکوس ادامه یابد، آن وقت M (و در نتیجه B) در جهت معکوس برقرار خواهد شد، و در شکل ۶.۹ حالت تقارن معینی آغاز خواهد شد. سرانجام، وقتی بار دیگر H افزایش یابد، نقطهٔ عمل در شکل ۶.۹ منحنی پایینی را طی می‌کند. پس منحنی $B-H$ وقتی H در حال افزایش است، با منحنی مربوط وقتی H در حال کاهش است، کاملاً متفاوت است. این پدیده را پسماند می‌گویند، که به معنی «عقب ماندن» است. مغناطش در مواقع از میدان محرک خود عقب می‌ماند.

منحنی شکل ۶.۹ حلقهٔ پسماند ماده نامیده می‌شود. مقدار B در نقطهٔ r را پسمانده یا باقیماندگی می‌نامند، اندازهٔ H در نقطهٔ c به نیروی داداندگی و یا داداندگی مغناطیسی ماده موسوم است. از شکل ۶.۹ پیداست که مقدار μ_0 ، که با معادلهٔ (۳۷.۹)



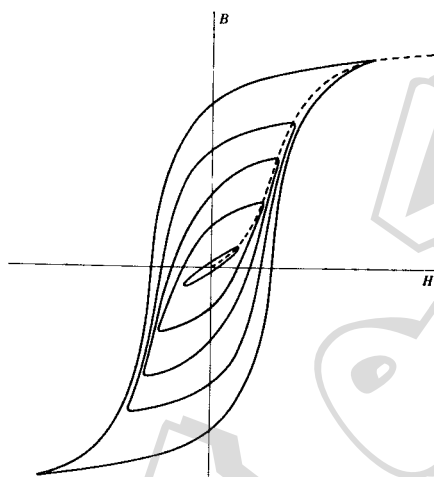
شکل ۷۰۹ مقایسه منحنی پسماند برای چند ماده^۱. (توجه کنید $\mu_0 H$ روی محور افقی به جای H رسم شده است. $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T.m/A}$)

تعریف می شود، در ربع دوم و چهارم نمودار منفی است. شکل حلقه پسماند نه تنها به ماهیت ماده فرومغناطیسی بستگی دارد (شکل ۷۰۹)، بلکه به مقدار بیشینه H که بر ماده اعمال می شود نیز بستگی دارد (شکل ۸۰۹). با وجود این، وقتی $H_{\max}$ برای ایجاد اشباع در ماده کافی باشد، حلقه پسماند با افزایش $H_{\max}$ تغییر شکل نمی دهد. (جدول ۲۰۹). برای آهن نرم، پسماند نسبتاً کوچک است.

برای بعضی کاربردها، دانستن تراوایی مؤثر ماده ای که تحت تأثیر مجموع يك میدان کوچک متناوب H و يك میدان بزرگ ثابت قرار گرفته، مطلوب است. بنابراین، اگر ΔB تغییر میدان مغناطیسی ناشی از تغییر ΔH در شدت مغناطیسی باشد، تراوایی نموی به صورت زیر تعریف می شود

$$\mu_{\text{نموی}} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (۴۰۰۹)$$

@Quark Book



شکل ۸.۹ حلقهٔ پسماند اصلی و چند حلقهٔ پسماند فرعی برای يك مادهٔ نمونه.

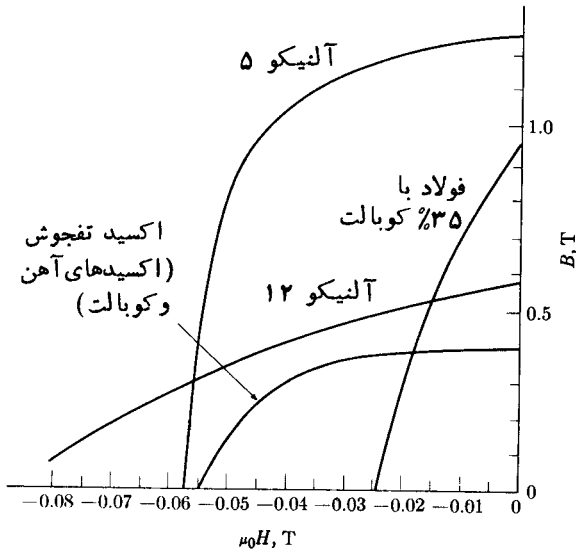
و تقریباً برابر است با شیب منحنی پسماندی که از نقطهٔ مورد نظری گذرد.

مواد فرومغناطیس را برای یکی از دو منظور زیر به کار می‌برند: (۱) افزایش شار مغناطیسی يك مدار جریان، (۲) به عنوان منابع میدان مغناطیسی (آهنرباهای دائم). برای استفاده به عنوان آهنربای دائم، ابتدا ماده را با قراردادن آن در يك میدان مغناطیسی قوی تا حد اشباع مغناطیده می‌کنند (یعنی، با قراردادن آن میان قطبهای يك آهنربای الکتریکی و یا گذاردن آن در يك سیملوله که جریان زیادی برای يك لحظه از آن عبور می‌کند). به هر حال، وقتی که آهنربای دائم از میدان خارجی بیرون آورده می‌شود، به طور کلی تحت تأثیر يك میدان و امغاننده قرار می‌گیرد؛ دربارهٔ این مطلب در بخشهای ۸.۹ و ۱۱.۹ به تفصیل بحث خواهد شد. بنابراین ربع دوم نمودار حلقهٔ پسماند، قسمت حائز اهمیت را بطة $B-H$ برای يك مادهٔ آهنربای دائم است (شکل ۹.۰).

۲.۹ شرایط مرزی برای بردارهای میدان

قبل از آنکه بخواهیم مسائل مغناطیس، حتی مسائل سادهٔ آن را حل کنیم، باید بدانیم که چگونه بردارهای میدان B و H در عبور از فصل مشترك دو محیط تغییر می‌کنند. فصل مشترك مورد نظر ممکن است میان دو محیط با خواص مغناطیسی متفاوت و یا میان يك محیط مادی و خلا باشد.

دو محیط مجاور ۱ و ۲ را، همان طور که در شکل ۱۰.۹ نشان داده شده اند، در نظر



شکل ۹.۹ منحنیهای پسماند برای مواد آهنربای دائم. (توجه کنید که H به جای $\mu_0 H$ در روی محور افقی رسم شده است.)

می گیریم. يك سطح كوچك S به شكل قرصی استوانه‌ای می‌سازیم كه فصل مشترك را قطع كند و ارتفاع آن نسبت به قطر قاعده‌هایش ناچیز باشد. با به كار بردن انتگرال شار، یعنی معادله (۳۲.۹) برای سطح S ، خواهیم داشت

$$\mathbf{B}_\tau \cdot \mathbf{n}_\tau \Delta S + \mathbf{B}_\lambda \cdot \mathbf{n}_\lambda \Delta S = 0$$

كه در آن $\mathbf{n}_\tau$ و $\mathbf{n}_\lambda$ بردارهای يکۀ عمود بر سطوح بالا و پایین قرص استوانه‌ای‌اند. چون $\mathbf{n}_\tau = -\mathbf{n}_\lambda$ ، و چون هريك از این بردارها را می‌توان به عنوان برداریكۀ عمود بر فصل - مشترك منظور كرد، پس

$$(\mathbf{B}_\tau - \mathbf{B}_\lambda) \cdot \mathbf{n}_\tau = 0 \quad (۴۱.۹ \text{ الف})$$

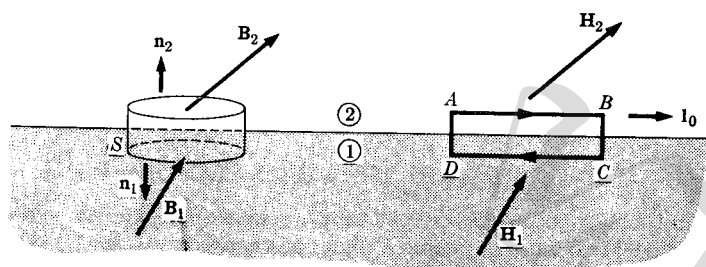
یا

$$\mathbf{B}_{\tau n} - \mathbf{B}_{\lambda n} = 0 \quad (۴۱.۹ \text{ ب})$$

@Quark Book

پس مؤلفه قائم $\mathbf{B}$ در عبور از فصل مشترك پیوسته است.

شرط مرزی در مورد میدان $\mathbf{H}$ را می‌توان با كار برد قانون مداری آمپر، یعنی معادله



شکل ۱۰.۹ شرایط مرزی برای بردارهای میدان در فصل مشترک میان دو محیط را می‌توان بابه کاربردن قانون گاوس در مورد S ، وانتگرال گیری از $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ بر روی مسیر $ABCD$ به دست آورد.

(۳۱.۹)، برای مسیر مستطیلی $ABCD$ در شکل ۱۰.۹ به دست آورد. بر روی این مسیر، طولهای AB و CD را برابر Δl می‌گیریم و BC و AD را قابل چشمپوشی فرض می‌کنیم. جریانی که از درون مستطیل می‌گذرد قابل چشمپوشی است، مگر اینکه یک جریان سطحی واقعی وجود داشته باشد. از این رو

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{l}_0 = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}_0) = \mathbf{j} \times \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{l}_0$$

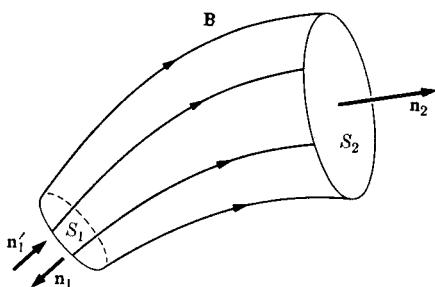
یا

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t = \mathbf{j} \times \mathbf{n}_2 \quad (۴۲.۹ \text{ الف})$$

که در آن $\mathbf{j}$ چگالی جریان سطحی است (جریان انتقالی در واحد طول در لایه سطحی) و $\mathbf{l}_0$ برداری که ای است در جهت Δl . بنابراین، مؤلفه مماسی شدت مغناطیسی در عبور از یک فصل مشترک پیوسته است، مگر اینکه یک جریان واقعی سطحی وجود داشته باشد. سرانجام، با محاسبه ضرب برداری (۴۲.۹ الف) در $\mathbf{n}_2$ خواهیم داشت

$$\mathbf{n}_2 \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j} \quad (۴۲.۹ \text{ ب})$$

هر گاه $\mathbf{H}_1$ و $\mathbf{H}_2$ معلوم باشند، فرمول بالا برای تعیین $\mathbf{j}$ مناسب است. قبل از اتمام این بخش یکی دیگر از خواص مهم میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ را ثابت می‌کنیم، و آن اینکه شار مغناطیسی $\mathbf{B}$ در همه جا پیوسته است. توجه خود را به ناحیه‌ای از فضا معطوف و خطوط میدان مغناطیسی را در آنجا رسم می‌کنیم. خطوط میدان مغناطیسی خطوطی فرضی اند و طوری رسم می‌شوند که جهت هر خط در هر نقطه با جهت $\mathbf{B}$ در آن نقطه یکی باشد. حال یک لوله از شار مغناطیسی را در نظر می‌گیریم، یعنی حجمی را که از اطراف با خطوط $\mathbf{B}$ محصور شده باشد و در هیچ جا این خطوط را قطع نکند (شکل ۱۱.۹). لوله



شکل ۱۱.۹ لوله‌ای از میدان مغناطیسی.

در دوانتها به سطوح S_1 و S_2 ختم می‌شود. با به کار بردن قضیه واگرایی خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv &= 0 \\ &= \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}' da \\ &= \Phi(S_2) - \Phi(S_1)\end{aligned}\quad (۴۳.۹)$$

پس همان مقدار شار مغناطیسی که از سطح S_1 وارد لوله می‌شود از سطح S_2 خارج می‌شود. خطوط شار هرگز به جایی ختم نمی‌شوند، بلکه بسایند سرانجام به خودشان وصل شوند و حلقه‌های بسته‌ای تشکیل دهند.

البته احکام بالا در مورد میدان $\mathbf{B}$ صدق می‌کنند. شاید ذکر این موضوع لازم باشد که این احکام در مورد میدان $\mathbf{H}$ صادق نیستند، زیرا $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ ، که در همه جا صفر نیست. پس با کاربرد قضیه واگرایی در مورد لوله‌ای از شدت مغناطیسی، به دست می‌آوریم

$$\int_{S_2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da - \int_{S_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}' da = \int_V \rho_M dv \quad (۴۴.۹)$$

ناپوستگی در شار شدت مغناطیسی، برابر است با کل قدرت قطب مغناطیسی که درون لوله شار واقع است.

۸.۹ مسائل مقادیر مرزی شامل مواد مغناطیسی

چون $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ از شرایط مرزی مشابه با شرایط مرزی مربوط به $\mathbf{D}$ و $\mathbf{E}$ تبعیت می‌کنند،

مسائل محیطهای خطی با مغناطش مشخص به مسائل دی الکتریکها، که در فصل ۴ مورد بحث قرار گرفتند، شباهت دارند. در این بخش ما با ردهٔ به خصوصی از مسائل، یعنی، محاسبهٔ میدانهای مغناطیسی در داخل مادهٔ مغناطیسی بدون جریان انتقالی سروکار خواهیم داشت. این رده از نظر صوری با دی الکتریک بدون چگالی بار خارجی یکسان است. وقتی $\mathbf{J} = 0$ باشد، معادله‌های اساسی مغناطیس (۲۸.۹) و (۳۰.۹) به صورت زیر ساده می‌شوند

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [28.9]$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (45.9)$$

معادلهٔ (۴۵.۹) نشان می‌دهد که $\mathbf{H}$ را می‌توان به صورت شیب يك میدان نرده‌ای نوشت. این امر نباید باعث تعجب شود، زیرا که مطابق معادلهٔ چشمه، یعنی معادلهٔ (۲۷.۹)، سهم جسم مغناطیسی در ایجاد $\mathbf{H}$ از پیش به همین صورت بیان شده است، و در بخش ۸.۸ نشان دادیم که میدان (در واقع اثباتی که در آنجا آمده است بساید برای میدان $\mathbf{H}$ تعمیم داده شود) ناشی از جریانهای انتقالی وقتی که چگالی موضعی جریان صفر باشد از همین طریق به دست می‌آید. طبق معادلهٔ (۴۵.۹) می‌توان نوشت

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi^* \quad (46.9)$$

که φ^* در اینجا پتانسیل نرده‌ای مغناطیسی ناشی از تمام چشمه‌هاست. دوزوع مادهٔ مغناطیسی وجود دارند که محاسبهٔ میدان مغناطیسی در آنها به مسئلهٔ سادهٔ مقادیر مرزی تبدیل می‌شود: (۱) مادهٔ مغناطیسی خطی و یا تقریباً خطی که در آن $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ، و (۲) يك قطعه ازماده‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده شده است و در آن $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$. در هر دو حالت معادلهٔ (۲۸.۹) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (47.9)$$

از ترکیب این معادله با معادلهٔ (۴۶.۹) نتیجه می‌گیریم

$$\nabla^2 \varphi^* = 0 \quad (48.9)$$

که همان معادلهٔ لاپلاس است. بنا بر این مسئلهٔ مغناطیس تبدیل می‌شود به مسئلهٔ یافتن جوابی برای معادلهٔ لاپلاس که در شرایط مرزی صدق کند. آنگاه $\mathbf{H}$ را می‌توان با محاسبهٔ منهای شیب پتانسیل مغناطیسی به دست آورد، و $\mathbf{B}$ از رابطهٔ

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

و یا

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

هر کدام که مناسب مسئله ما باشد، به دست می آید.

دو مسئله مغناطیس زیر سوده مندی روشی را که در بالا تشریح شد نشان می دهند؛ تمرینهای بیشتری از این قبیل در مسائل آخر فصل آمده اند. مثال اول در مورد کره ای است از ماده مغناطیسی خطی به شعاع a و تراوایی μ ؛ این کره در ناحیه ای از فضا قرار دارد که حاوی یک میدان مغناطیسی $\mathbf{B}_0$ است و این میدان در آغاز یکنواخت بوده است. می خواهیم بدانیم چگونه میدان مغناطیسی بر اثر وجود کره تغییر می کند، و به خصوص، می خواهیم میدان مغناطیسی را در داخل خود کره به دست آوریم. مسئله خیلی شبیه است به حالت مربوط به کره دی الکتریک در میدان الکتریکی یکنواخت، که در بخش ۹.۴ حل شد. بنا بر این، با اختیار کردن مبدأ مختصات در مرکز کره، و جهت $\mathbf{B}_0$ به عنوان جهت قطبی (جهت z)، پتانسیل را می توانیم به صورت مجموعه ای از هماهنگهای منطقه ای بنویسیم. در اینجا نیز تمام شرایط مرزی را می توان با هماهنگهای $\cos \theta$ بر آورده کرد. پس می نویسیم

$$\varphi_1^*(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad (49.9)$$

برای ناحیه خلا (۱) در خارج کره، و

$$\varphi_2^*(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad (50.9)$$

برای ناحیه ماده مغناطیسی (۲). ثابتهای A_1, A_2, C_1, C_2 را باید از روی شرایط مرزی به دست آورد.

در فواصل بسیار دور از کره، میدان مغناطیسی خصوصیت یکنواختی خود را حفظ می کند: $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$ ، و $\varphi_1^* \rightarrow -(B_0/\mu_0)r \cos \theta$ پس $A_1 = -(B_0/\mu_0)$. چون φ_2^* و میدان مغناطیسی مربوط به آن نمی توانند در هیچ نقطه ای بینهایت شوند، ضریب C_2 را باید مساوی صفر قرار دهیم. حال که شرایط مرزی را در $r=0$ و $r=\infty$ اعمال کردیم، توجه خود را به فصل مشترک دو محیط در $r=a$ معطوف می کنیم

$$H_{1\theta} = H_{2\theta}$$

$$B_{1r} = B_{2r}$$

یا

$$-\left(\frac{B_0}{\mu_0}\right) \sin \theta + \frac{C_1}{a^3} \sin \theta = A_2 \sin \theta \quad (51.9)$$

$$B_0 \cos \theta + 2\mu_0 \frac{C_1}{a^3} \cos \theta = -\mu A_r \cos \theta \quad (52.9)$$

از حل همزمان دو معادله فوق به دست می آوریم

$$A_r = -\frac{2B_0}{(\mu + 2\mu_0)}$$

و

$$C_1 = [(\mu/\mu_0) - 1] \frac{B_0 a^3}{(\mu + 2\mu_0)}$$

و بنا براین میدانهای مغناطیسی در درون و بیرون کره عبارت اند از

$$B_r = \frac{2B_0 k}{1 + 2(\mu_0/\mu)} \quad (53.9)$$

و

$$\mathbf{B}_1 = B_0 \mathbf{k} + \left[\frac{(\mu/\mu_0) - 1}{(\mu/\mu_0) + 2} \right] \left(\frac{a}{r} \right)^3 B_0 (2a_r \cos \theta + a_\theta \sin \theta) \quad (54.9)$$

مسئله دیگری که می خواهیم حل کنیم به آهنربای دائم مربوط می شود. می خواهیم میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط یک کره مغناطیده یکنواخت با بردار مغناطش $\mathbf{M}$ و شعاع a را، موقعی که هیچ گونه میدان مغناطیسی دیگری وجود ندارد، پیدا کنیم. چنانچه محور z را در امتداد بردار مغناطش و مبدأ مختصات را در مرکز کره اختیار کنیم، می توانیم بتانسیل را بر حسب هماهنگهای منطقه ای بسط دهیم

$$\varphi_1^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1,n} r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad (55.9)$$

برای ناحیه خلا^{*} (۱) در خارج کره، و

$$\varphi_2^*(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n} r^n P_n(\theta) \quad (56.9)$$

برای ناحیه آهنربای دائمی (۲). در اینجا ما عمداً هماهنگهای مربوط به توانهای مثبت r را از بسط (۵۵.۹) کنار گذاشته ایم زیرا این هماهنگها در فواصل زیاد بزرگ می شوند، و همچنین توانهای منفی r در بسط (۵۶.۹) را کنار گذاشته ایم زیرا آنها در مبدأ مختصات

مقدارشان بینهایت می‌شود. از شرایط مرزی در $r = a$ ، یعنی از

$$H_{\perp\theta} = H_{\perp r}$$

$$B_{\perp r} = B_{\perp \theta}$$

نتایج زیر را بدست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} (C_{\perp, n} a^{-(n+1)} - A_{\perp, n} a^n) a^{-1} \frac{d}{d\theta} P_n(\theta) = 0 \quad (57.9)$$

و

$$\begin{aligned} \mu_0 C_{\perp, 0} a^{-2} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\theta) [C_{\perp, n} (n+1) a^{-(n+2)} + A_{\perp, n} n a^{n-1}] \\ - \mu_0 M \cos \theta = 0 \quad (58.9) \end{aligned}$$

از آنجا که هر $P_n(\theta)$ تابع متمایزی از θ است، هیچ یک از P_n ها را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی سایر P_n ها نوشت. پس برای اینکه معادله‌های (57.9) و (58.9) معتبر باشند، باید جملاتی که شامل P_n یا $dP_n/d\theta$ اند، تک تک مساوی صفر شوند. از جمله‌های مربوط به $n=0$ نتیجه می‌شود

$$\frac{dP_0}{d\theta} = 0$$

و

$$\mu_0 C_{\perp, 0} a^{-2} = 0$$

بنابراین $C_{\perp, 0} = 0$ و $A_{\perp, 0}$ نامعین است. اما $A_{\perp, 0}$ همان جمله ثابت در پتانسیل است؛ این جمله را می‌توان مساوی صفر قرارداد بی‌آنکه بر روی $\mathbf{H}$ یا $\mathbf{B}$ تأثیری داشته باشد. از جمله‌های مربوط به $n=1$ ، نتیجه می‌شود

$$C_{\perp, 1} a^{-2} - A_{\perp, 1} = 0$$

و

$$2C_{\perp, 1} a^{-2} + A_{\perp, 1} - M = 0$$

@Quark Book

از حل این دستگاه معادلات می‌توان نتیجه گرفت

$$C_{1,n} = \frac{1}{3} M a^r$$

و

$$A_{2,n} = \frac{1}{3} M$$

برای تمام مقادیر $n \geq 2$ تنها مقادیری برای $C_{1,n}$ و $A_{2,n}$ که با هر دو معادله سازگاری داشته باشند عبارتند از $C_{1,n} = 0$ و $A_{2,n} = 0$.
با قراردادن این نتایج در معادله‌های (۵۵.۹) و (۵۶.۹)، به دست می‌آوریم

$$\varphi_1^*(r, \theta) = \frac{1}{3} M (a^r / r^r) \cos \theta \quad (59.9)$$

و

$$\varphi_2^*(r, \theta) = \frac{1}{3} M r \cos \theta \quad (60.9)$$

شدت مغناطیسی $\mathbf{H}$ را می‌توان با انجام محاسبه شیب به دست آورد، و نتیجه به صورت زیر است

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{3} M (a^r / r^r) [2a_r \cos \theta + a_\theta \sin \theta] \quad (61.9)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{3} M \mathbf{k} \quad (62.9)$$

بنابراین میدان خارجی مربوط به کره‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده است، دقیقاً یک میدان دوقطبی است، که از گشتاور دوقطبی $\frac{4}{3} \pi a^3 \mathbf{M}$ نتیجه می‌شود. شدت مغناطیسی داخل کره میدانی است و امغانطنده (در خلاف جهت مغناطش)، و این نتیجه با میدان الکتریکی داخل کره‌ای که به طور یکنواخت قطبیده شده باشد در توافق است. پس می‌بینیم که کره مغناطیده تحت تأثیر میدان و امغانطنده خود قرار می‌گیرد. ضریب $(1/3) = (1/4\pi) (4\pi/3)$ در معادله (۶۲.۹) صرفاً به شکل هندسی کره بستگی دارد؛ مقدار $4\pi/3$ به عامل و امغانطش کره موسوم است. عاملهای و امغانطش برای سایر اشکال هندسی محاسبه شده‌اند و در بعضی از جدولهای داده‌های فیزیکی آمده‌اند.^۱

۱. مثلاً، رجوع کنید به

میدان مغناطیسی خارجی B_y مساوی است با μ_0 ضرب در معادله (۶۱.۹). میدان مغناطیسی در داخل کره برابر است با

$$B_y = \frac{2}{3} \mu_0 M k = \frac{2}{3} \mu_0 M \quad (۶۳.۹)$$

۹.۹ مدارهای جریان شامل محیطهای مغناطیسی

در فصل ۸ با میدانهای مغناطیسی ناشی از مدارهای جریان در خلا سروکار داشتیم. یکی از مثالهایی که در مسائل بررسی شد (مسئله ۱۹.۸)، مسئله سیم پیچ چنبره‌ای با N دور یکنواخت بود که جریان I از آن می‌گذشت (شکل ۱۲.۹). حال بار دیگر مسئله سیم پیچ چنبره‌ای را حل می‌کنیم، ولی این بار با فرض اینکه محیط داخل سیم پیچها با يك ماده فرومغناطیسی همگن و همسانگرد که در آغاز مغناطیده نبوده است، پر شده باشد. بردار میدانی که به آسانی به دست می‌آید شدت مغناطیسی است، زیرا این بردار با قانون مداری آمپر، یعنی معادله (۳۱.۹)، به جریان درون سیم مربوط می‌شود. اگر معادله (۳۱.۹) را در مورد يك مسيردايره‌ای که با سوراخ درون حلقه هم محور است، نظیر مسیر نقطه چین در شکل، به کار بریم، تقارن مسئله حکم می‌کند که H در تمام نقاط واقع بر مسیر یکسان باشد

$$H_l l = NI$$

یا

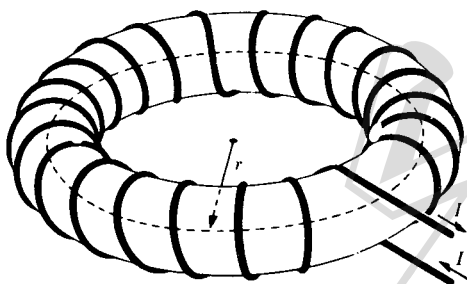
$$H_l = \frac{NI}{l} \quad (۶۴.۹)$$

در اینجا شاخص l معرف مؤلفه مماس بر مسیر، و $l = 2\pi r$ طول کل مسیر است. از معادله (۶۴.۹) نتیجه می‌شود

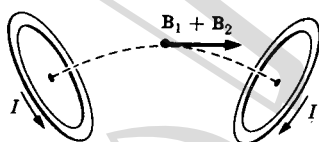
$$B_l = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M_l \quad (۶۵.۹)$$

بنابراین میدان مغناطیسی با حالتی که در خلا داشتیم به اندازه جمله اضافی $\mu_0 M_l$ تفاوت دارد.

فقط مؤلفه مماسی B (و H) باروش بالا به دست می‌آید؛ با وجود این، این تنها مؤلفه‌ای است که انتظار داریم وجود داشته باشد. مطابق معادله (۲۷.۹) دو نوع چشمه شدت مغناطیسی وجود دارد: جریانهای انتقالی و مواد مغناطیده. به آسانی می‌توان نشان داد که جریان در سیم پیچ چنبره‌ای فقط يك میدان مماسی ایجاد می‌کند. سیم پیچ معادل است با



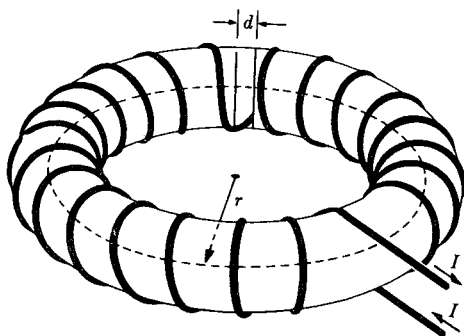
شکل ۱۲.۹ سیم پیچ چنبره‌ای.



شکل ۱۳.۹ ماهیت محوری میدان در یک سیم پیچ چنبره‌ای با ترکیب میدان مغناطیسی زوج حلقه‌های جریان نشان داده شده است.

N حلقه مستدیر جریان؛ اگر حلقه‌ها را دو به دو ترکیب کنیم (شکل ۱۳.۹) واضح است که هر جفت حلقه يك میدان مماسی در نقطه مورد نظر تولید می‌کند. چشمه دوم $\mathbf{H}$ ، یعنی خود ماده مغناطیده، ممکن است احتمالاً از طریق چگالیهای قطبهای مغناطیسی، یعنی $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ و $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ در ایجاد میدان سهمی داشته باشد. از آنجا که ماده فرومغناطیسی درون چنبره همسانگرد است، $\mathbf{M}$ در همان جهت $\mathbf{H}$ خواهد بود. اما $\mathbf{M}$ در اثر جریانهای درون سیم پیچ چنبره‌ای به وجود آمده است، و این میدان مماسی است. از این رو انتظار داریم تنها مؤلفه M_z داشته باشیم و می‌توانیم شاخص z را حذف کنیم. بر این اساس، در نمونه چنبره‌ای هیچ سطحی یسافت نمی‌شود که بر $\mathbf{M}$ عمود باشد، و بنابراین σ_M وجود ندارد. بالاخره ρ_M باید برابر صفر باشد؛ با اینکه M ممکن است تابعی از r باشد (یعنی تابعی از فاصله تامحور چنبره)، ولی جمله $\partial M / \partial r$ در به وجود آوردن $\nabla \cdot \mathbf{M}$ سهمی ندارد. نتیجه جالب آن است که ماده مغناطیسی در این حالت هیچ سهمی در ایجاد $\mathbf{H}$ ندارد و معادله (۶۵.۹) تمامی میدان مغناطیسی را به دست می‌دهد.

مسئله دیگر، که تا حدی از مسئله قبلی پیچیده‌تر است، مسئله يك سیم پیچ چنبره‌ای با



شکل ۱۴.۹ یک سیم پیچ چنبره‌ای که بر اطراف حلقه‌ای از ماده مغناطیسی که یک شکاف هوا دارد، پیچیده شده است.

N حلقه پیچیده شده به دور یک ماده فرومغناطیسی است که در آن یک شکاف هوا به عرض d تعبیه شده باشد (شکل ۱۴.۹). در اینجا تمایزی بین شکاف هوا و شکاف خلأ قائل نمی‌شویم، زیرا از جدول ۱۰.۹ به وضوح پیداست که تفاوت بین تراوایی هوا و μ_0 ناچیز است. در این مسئله قانون مداری آمپر برای پیدا کردن H کافی نیست، زیرا دیگر نمی‌توانیم بر مبنای استدلال تقارن بگوییم که H در تمامی نقاط یک مسیر دایره‌ای یکسان است. پس ابتدا به سراغ معادله چشمه، یعنی معادله (۲۷.۹)، می‌رویم.

باز خاطر نشان می‌کنیم که شدت مغناطیسی شامل دوبخش است، یک سهم ناشی از جریانهای انتقالی و دیگری ناشی از مغناطش. چون سیم پیچ چنبره‌ای نظیر سیم پیچ مسئله قبلی است، سهم جریانهای انتقالی در ایجاد H باید مانند این سهم در مسئله قبل باشد. با نمایش این سهم با شاخص ۱، می‌توان نوشت

$$H_1 = \frac{NI}{l} \quad (۶۶.۹)$$

پس مسئله عبارت است از محاسبه H_2 یا جمله $\nabla\phi^*$. برای حفظ سادگی مسئله، این فرض منطقی را به کار می‌بریم که در سراسر ماده فرومغناطیسی بردار مغناطش M مماسی و یکنواخت است؛ این فرض همه مطالب فیزیکی اساسی را فراهم می‌آورد بی آنکه محاسبات جبری مسئله را مشکل کند. در این صورت ρ_M مساوی صفر می‌شود، اما بر روی وجوه قطبی که با شکاف هوا هم مرزند $\sigma_M = \pm M$. این وضع مسئله الکتروستاتیکی را که شامل خازن باردار با صفحات موازی است تداعی می‌کند. در واقع، فرمول بندی ریاضی پتانسیل در

هر دو حالت یکی است. اگر شکاف هوا فوق‌العاده باریک باشد، آنگاه، تقریباً

$$H_v = M \quad (\text{در شکاف})$$

$$H_v = 0 \quad (\text{در سایر جاها}) \quad (۶۷.۹)$$

اما این نتیجه با قانون مداری آمپر تطبیق نمی‌کند، زیرا

$$\oint H dl = \oint (H_v + H_v) dl = NI + Md \neq NI$$

مگر اینکه d قابل چشمپوشی باشد. برای یک شکاف باریک که عرض آن در حد چشمپوشی کوچک نیست، تقریب زیر بهتر است

$$H_v = M \left(1 - \frac{d}{l} \right) \quad (\text{در شکاف})$$

$$H_v = -M \frac{d}{l} \quad (\text{در ماده}) \quad (۶۸.۹)$$

این تقریب نه تنها در قانون مداری آمپر صدق می‌کند، بلکه پیوستگی مؤلفه قائم $\mathbf{B}$ در عبور از جوجه قطبها را نیز تضمین می‌کند.

با ترکیب معادلات (۶۶.۹) و (۶۸.۹)، و قراردادن نتیجه در معادله (۲۶.۹)،

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

نتیجه زیر را به دست می‌آوریم

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} + \mu_0 M \left(1 - \frac{d}{l} \right) \quad (۶۹.۹)$$

که هم برای درون شکاف و هم برای درون ماده مغناطیسی صادق است. برای حل کامل مسئله، تنها دانستن رابطه زیر

$$M = \chi_m(H)H$$

لازم است. برای «آهن نرم»، χ_m را می‌توان ثابت فرض کرد.

* ۱۰.۹ مدارهای مغناطیسی

همان‌طور که دیدیم، خطوط شار مغناطیسی، حلقه‌هایی بسته تشکیل می‌دهند. هر گاه تمام (یا تقریباً تمام) شار مغناطیسی مربوط به توزیع خاصی از جریانها در مسیر نسبتاً مشخصی محصور شده باشد، آنگاه می‌توان گفت که يك مدار مغناطیسی داریم. بدین ترتیب مثالهایی که در بخش ۹.۹ بررسی شدند مدارهای مغناطیسی‌اند، زیرا شار مغناطیسی در ناحیه درون سیم پیچ چنبه‌ای محصور شده است. در مثال اول، مدار فقط شامل يك نوع ماده، یعنی يك حلقه فرومغناطیسی بود؛ اما در حالت دوم بامداري متوالی مرکب از دو ماده برخورد کردیم: يك ماده فرومغناطیسی و يك شكاف هوا.

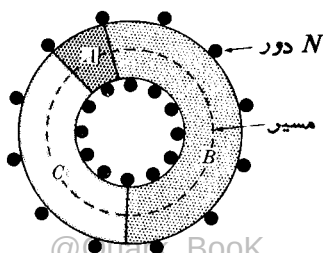
اینك به بررسی يك مدار متوالی كلتر، مركب از چند ماده، می‌پردازیم که با يك سیم پیچ چنبه‌ای شامل N دور با جریان I ، احاطه شده است. چنین مداری در شکل ۱۵.۹ نشان داده شده است. با کاربرد قانون مداری آمپر در مسیری که در امتداد مدار است (مسیر نقطه-چین در شکل) به دست می‌آوریم

$$\oint H dl = NI$$

بهبتر است که H در هر نقطه از طول مسیر بر حسب شار مغناطیسی Φ بیان شود؛ با به کار بردن $B = \mu H$ و $\Phi = BA$ ، که در آن A سطح مقطع مدار در نقطه مورد نظر است، خواهیم داشت

$$\oint \frac{\Phi dl}{\mu A} = NI$$

حال چون با يك مدار مغناطیسی سروکار داریم، انتظار می‌رود که Φ در تمام نقاط مدار اساساً مقدار ثابتی باشد، در نتیجه Φ را به خارج از انتگرال می‌بریم



شکل ۱۵.۹ يك مدار مغناطیسی.

$$\Phi \oint \frac{dl}{\mu A} = NI \quad (۷۰.۹)$$

این معادله اساسی مدار مغناطیسی است که به کمک آن می‌توانیم شار Φ را بر حسب پارامترهای مدار پیدا کنیم.

معادله (۷۰.۹) یادآور معادله مشابه آن، $IR = \mathcal{V}$ ، برای مدار متوالی جریان است. باقیاس با مدارهای جریان، نیروی محرکه مغناطیسی (mmf) و نیز مقاومت مغناطیسی $\mathcal{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{mmf} = NI \quad (۷۱.۹)$$

$$\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu A} \quad (۷۲.۹)$$

با به کار بردن این تعاریف می‌توانیم معادله (۷۰.۹) را به صورت زیر بنویسیم

$$\Phi = \frac{\text{mmf}}{\mathcal{R}} \quad [\text{الف } ۷۰.۹]$$

اگر مدار از چند قطعه همگن تشکیل شده باشد، و هر یک از قطعات مقطع یکنواختی داشته باشد، مقاومت مغناطیسی را می‌توان با تقریب زیر بیان کرد

$$\mathcal{R} = \sum_j \frac{l_j}{\mu_j A_j} = \sum_j \mathcal{R}_j \quad (\text{الف } ۷۲.۹)$$

پس مقاومت مغناطیسی کل مدار متوالی برابر است با جمع مقاومت‌های عناصر تشکیل دهنده آن. شباهت مدارهای جریان و مدارهای مغناطیسی حتی از آنچه تا کنون اشاره شد نیز بیشتر است، زیرا مقاومت یک مدار جریان با رابطه

$$R = \oint \frac{dl}{gA}$$

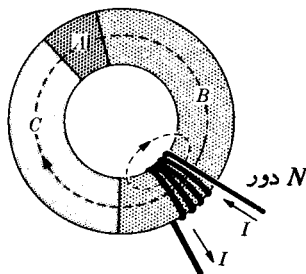
داده می‌شود که تفاوتش با معادله (۷۲.۹) فقط در جانشین شدن g به جای μ است. به علت همین شباهت، بدیهی است که ترکیب‌های موازی و متوالی مقاومت‌های مغناطیسی را درست نظیر ترکیب‌های موازی و متوالی مقاومت‌های الکتریکی می‌توان به دست آورد.

مفهوم مدار مغناطیسی وقتی بیشترین مورد استفاده را دارد که در مورد مدارهایی شامل مواد فرومغناطیسی به کار رود، لیکن درست برای همین مواد است که تا حدودی با مشکل

رو به رو می‌شویم. برای يك ماده فرومغناطیسی $\mu = \mu(H)$ ، و تا زمانی که مسئله مدار کاملاً حل نشده است و Φ را پیدا نکرده‌ایم، H در درون ماده معلوم نیست. در عین حال وضع چندان هم یأس‌آور نیست؛ درواقع مسئله را می‌توان نسبتاً به آسانی باروش تکرار حل کرد. در این روش به ترتیب زیر عمل می‌کنیم: (۱) به عنوان اولین حدس فرض می‌کنیم $H = NI/l$ ، که در آن l طول کل مسیر است. (۲) برای این مقدار H از روی منحنی مغناطش مربوط، تراوایی هر يك از مواد موجود در مدار را به دست می‌آوریم. (۳) مقاومت مغناطیسی کل مدار را حساب می‌کنیم، و (۴) شار Φ را از معادله (۷۰.۹ الف) محاسبه می‌کنیم. (۵) از روی Φ شدت مغناطیسی را در عناصر مختلف مدار پیدا می‌کنیم و تراواییهای آنها را دوباره معین می‌کنیم. (۶) همین روش را با شروع مجدد از (۳) تکرار می‌کنیم. معمولاً برای تعیین Φ تا حدود چند درصد تقریب، يك یا دو بار تکرار کفایت می‌کند.

مقاومت مغناطیسی R_l با تراوایی μ به‌طور معکوس متناسب است. چون تراوایی ماده فرومغناطیسی ممکن است ۱۰۰، ۱۰۳، و یا حتی در شرایط معینی ۱۰۵ برابر μ_0 باشد، واضح است که ماده فرومغناطیسی در مقابل عبور شار مغناطیسی مسیری با مقاومت مغناطیسی کم تشکیل می‌دهد. اگر شار مغناطیسی با دو مسیر موازی رو به رو شود، یکی با مقاومت مغناطیسی زیاد R_h و دیگری با مقاومت مغناطیسی کم (R_l)، در این صورت بیشترین شار از مسیر کم مقاومت عبور می‌کند، و مقاومت مغناطیسی معادل برای مدار انشعابی از رابطه $R = R_h R_l / (R_h + R_l)$ به دست می‌آید. حال اگر به شکل ۱۶.۹ بنگریم متوجه می‌شویم که وقتی مواد A ، B ، و C فرومغناطیسی باشند، بیشترین شار مغناطیسی از حلقه فرومغناطیسی می‌گذرد، زیرا مسیرها در بین دو انتهای سیم‌لوله مقاومت مغناطیسی زیادی دارد. بنابراین مدارهای مغناطیسی شکل‌های ۱۵.۹ و ۱۶.۹ درواقع معادل‌اند.

چنانچه B و C فرومغناطیس باشند، اما A شکافی از هوا باشد، دیگر دو مدار معادل نیستند، زیرا از دو انتهای سیم‌لوله شکل ۱۶.۹ مقداری شار مغناطیسی نشت می‌کند. اینکه



شکل ۱۶.۹ چنانچه تراواییهای A ، B ، و C بزرگ باشند، این مدار مغناطیسی معادل مدار مغناطیسی شکل ۱۵.۹ است.

چه مقدار از شار به بیرون نشت می کند بستگی دارد به نسبت مقاومت مغناطیسی مدار مغناطیسی به مقاومت مغناطیسی مسیری که از طریق آن شار به بیرون نشت می کند. وقتی عرض شکاف هوا در مقایسه با طول سیملوله کوچک باشد، شار نشتی کم است و در محاسبات تقریبی می توان از آن صرف نظر کرد. مقاومت مغناطیسی مربوط به مسیر نشت برای بسیاری از اشکال هندسی معمولی محاسبه شده، و در تعدادی از کتب مرجع متداول نقل شده است.^۱ مفهوم مدار قطعاً در مورد مدارهای مغناطیسی به همان دقت مدارهای الکتریکی نیست زیرا (۱) نسبت مقاومت مغناطیسی مدار به مقاومت مغناطیسی مدار نشتی به اندازه نسبت مقاومتیهای مربوط در مدارهای الکتریکی کوچک نیست، و (۲) ابعاد عرضی مدار مغناطیسی معمولاً در مقایسه با طول آن قابل صرف نظر کردن نیست؛ با این همه ثابت شده است که مفهوم مدار مغناطیسی فوق العاده مفید است.

* ۱۱.۹ مدارهای مغناطیسی شامل آهنرباهای دائم

کاربرد مفهوم مدار مغناطیسی در مورد مدارهای شامل آهنربای دائم، یعنی مدارهای شار مغناطیسی که در آنها منشأ Φ از موادی است که به طور دائم مغناطیده اند، نیز مفید است. برای سهولت کار آهنربای دائم را با علامت اختصاری P-M نشان می دهیم. به سبب رابطه پیچیده $B-H$ در ماده P-M، روشی که در بخش قبل مورد بحث واقع شد چندان برای مسئله موجود مفید نیست. به جای آن ما بار دیگر از قانون مداری آمپر شروع می کنیم و این بار آن را برای مسیر شار مدار P-M به کار می بریم

$$\oint H dl = 0$$

یا

$$\int_a^b H dl = - \int_b^a (P-M) H dl \quad (۷۳.۹)$$

در نوشتن معادله (۷۳.۹) صریحاً فرض می کنیم که جسم P-M در فاصله بین نقاط b و a در مسیر شار قرار داد، در حالی که از a تا b مسیر شار با ماده P-M مواجه نمی شود. با قراردادن $B = \mu H$ و $\Phi = BA$ در طرف چپ معادله (۷۳.۹) نتیجه می گیریم

۱. برای نمونه رجوع کنید به:

S. A. Nasar and L. E. Unnewehr, *Electromechanics and Rotating Electric Machines* (New York: Wiley, 1978); and F. N. Bradley, *Materials for Magnetic Functions* (New York: Hayden Book Co., 1971), p. 162.

$$\oint \frac{dl}{\mu A} = - \int_b^{a(P-M)} H dl \quad (۷۴.۹ \text{ الف})$$

شار مغناطیسی Φ در سراسر طول مدار پیوسته است، بنابراین $\Phi = B_m A_m$ که در آن B_m میدان مغناطیسی در درون آهنربای دائم و A_m سطح مقطع آن است. طرف راست معادله (۷۴.۹ الف) را می‌توان به صورت $-H_m l_m$ نوشت، که در آن H_m میانگین شدت مغناطیسی درون آهنربا، و l_m طول آهنرباست. پس

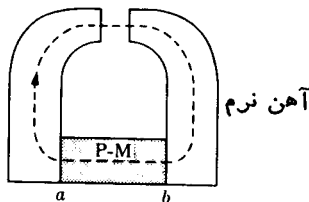
$$B_m A_m \mathcal{R}_{ab} = -H_m l_m \quad (۷۴.۹ \text{ ب})$$

که این معادله‌ای است که کمیت‌های مجهول B_m و H_m را به هم مربوط می‌کند. این معادله را می‌توان به طور همزمان با منحنی پسماند آهنربا حل کرد تا B_m و H_m ، هر دو، به دست آیند.

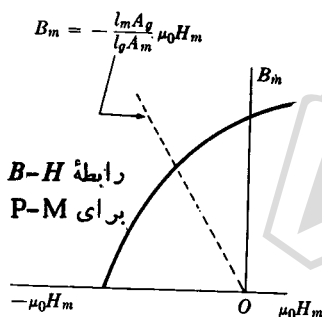
به عنوان مثالی از یک مدار $P-M$ ، مداری شامل یک آهنربا، یک شکاف هوا، و یک قطعه آهن نرم (شکل ۱۷.۹) را در نظر می‌گیریم. توجه به این نکته که آهن نرم یک ماده $P-M$ نیست بسیار مهم است؛ پسماند آهن نرم در مقایسه با پسماند آهنربا عملاً قابل چشمپوشی است، و تراوایی آن، $\mu_i = B_i/H_i$ ، کمیتی مثبت است. مقاومت مغناطیسی $\mathcal{R}_{ab}$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathcal{R}_{ab} = \frac{l_i}{\mu_i A_i} + \frac{l_g}{\mu_0 A_g} \quad (۷۵.۹)$$

که در آن شاخصهای i و g به ترتیب برای آهن و شکاف هوا به کار برده شده‌اند. چنانچه شکاف هوا خیلی باریک نباشد، معادله (۷۵.۹) را می‌توان معمولاً به صورت تقریبی



شکل ۱۷.۹ یک مدار آهنربای دائم. برای مداری که نشان داده شده است، آهنربا میدان و امغانطنده نسبتاً بزرگی دارد که بر خودش اثر می‌گذارد؛ با ازدیاد طول ماده $P-M$ ، مثلاً با قرار دادن آهنرباهای اضافی در دوازوی مدار، می‌توان این میدان و امغانطنده را کاهش داد.



شکل ۱۸.۹ خط واغناطندگی برای يك مدار مغناطیسی، (شاخص m نمایا نكر آهنراست) چون به جای H_m ، $\mu_0 H_m$ رسم شده است، شیب خط واغناطندگی برابر است با $-(l_m A_g / l_g A_m)$ ، به عبارت دیگر این شیب يك عدد بی بعد است.

$$R_{ab} \approx \frac{l_g}{\mu_0 A_g}$$

نوشت، که پس از ترکیب با (۷۴.۹ ب)، نتیجه می دهد

$$B_m = - \frac{l_m A_g}{l_g A_m} \mu_0 H_m \quad (۷۶.۹)$$

و این رابطه ای است خطی بین B_m و H_m . منحنی این معادله همراه با منحنی پسماند مغناطیسی در شکل ۱۸.۹ رسم شده اند. محل تقاطع دو منحنی نقطه کار آهن را تعیین می کند. حال دیگر مسئله در اصول حل شده است: با دانستن B_m ، شار Φ و چگالی شار B_g به آسانی محاسبه می شوند.

اما دو نکته شایان تذکر باقی مانده اند. اول اینکه، برای مساحت مؤثر سطح مقطع شکاف، A_g ، چه مقداری را باید به کار برد؟ به عنوان اولین تقریب، می توان A_g را برابر با مساحت سطح مقطع قطب آهن نرم فرض کرد، و در صورتی که شکاف هوا خیلی بزرگ نباشد، این تقریب کافی خواهد بود. در اینجا به بحث مفصل درباره این مطلب نمی پردازیم و خواننده علاقه مند را به خواندن مراجعی که در بخش قبل ذکر شد دعوت می کنیم. دوم اینکه مسئله نشت شار به همان اندازه در مدار P-M مهم است که در سایر انواع مدارهای مغناطیسی. اما برای مسائل مربوط به این کتاب، معمولاً فرض می کنیم که شار نشتی قابل چشمپوشی است.

بالاخره، متذکر می شویم که H_m ی که از شکل ۱۸.۹ به دست می آید منفی است، یعنی، شدت مغناطیسی درون آهن را يك اثر واغناطندده است. این نتیجه ای است کلی؛ وقتی

که منشأ شار مغناطیسی در یک آهنربای دائمی قرار داشته باشد، آن وقت خود آهنربا تحت تأثیر یک میدان و امغانطنده قرار می گیرد.

۱۲.۹ خلاصه مطالب

در فصل ۴ دیدیم که پاسخ یک محیط (دی الکتریک) به میدان E عبارت است از چگالی بار قطبی $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ و $\sigma_p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$ ؛ که در آن $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ ؛ در فصل ۷، پاسخ یک محیط (رسانا) به میدان E را به صورت چگالی جریان انتقالی $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$ مشاهده کردیم. حال می بینیم که پاسخ یک محیط (مغناطیسی) به میدان $\mathbf{B}$ نوع دیگری از چگالی جریان، یعنی جریان مغناطش اتمی است

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} \quad \text{و} \quad \mathbf{j}_M = -\mathbf{n} \times \mathbf{M}$$

که در آن $\mathbf{M} = d\mathbf{m}/dv$ عبارت است از گشتاور مغناطیسی در واحد حجم ماده. پتانسیل برداری ناشی از مغناطش به صورت زیر است

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

میدان مغناطیسی کل ناشی از جریانهای انتقالی پایا به علاوه جریانهای مغناطش در رابطه زیر صدق می کند

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_M)$$

توجه داشته باشید که رابطه $\nabla \cdot \mathbf{J}_M = 0$ همواره به صورت اتحاد برقرار است. بهتر است که میدان برداری $\mathbf{H}$ به صورت زیر تعریف شود

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$$

به طوری که در رابطه $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ فقط جریانهای انتقالی متعارف را به عنوان چشمه داشته باشیم. برای محیطی معین، معادله ساختمندی زیر

$$\mathbf{M} = \chi_m (\mathbf{H}) \mathbf{H}$$

باید معلوم باشد. وقتی این معادله را با تعریف $\mathbf{H}$ ترکیب کنیم، رابطه زیر را به دست می آوریم

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H}$$

که در آن $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ آنگاه این رابطه همراه با معادلات دیفرانسیلی زیر

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ را تعیین می کنند، که البته باید در شرایط مرزی زیر صادق باشند

$$\mathbf{B}_{\tau_n} - \mathbf{B}_{\lambda_n} = 0$$

$$\mathbf{H}_{\tau_n} - \mathbf{H}_{\lambda_n} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}_\tau$$

۱. اکثر مواد یا دیامغناطیسی اند ($\chi_m < 0$) و یا پارامغناطیسی ($\chi_m > 0$)، و در هر دو مورد $|\chi_m| \ll 1$. مواد مغناطیسی که اهمیت عملی دارند، فرومغناطیسی اند. برای این مواد $|\chi_m|$ ممکن است بیش از ۱۰۰۰۰ باشد، لیکن $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ نه خطی است و نه حتی تک مقدار (پسماند).

۴. در مسائلی که جریانهای انتقالی ندارند، از آنجا که $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ است، استفاده از پتانسیل نرده ای مناسب است

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi^*$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، پس $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ ، و از این رو φ^* در معادله پواسون صدق می کند

$$\nabla^2 \varphi^* = \nabla \cdot \mathbf{M}$$

يك جواب این معادله به صورت زیر است

$$\varphi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\rho_M(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\sigma_M(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

که در آن $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ و $\sigma_M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}$ (این جواب در صورتی مفید است که $\mathbf{M}$ معلوم باشد).

۴. در مسائلی که در آنها محیط خطی با $\mathbf{M}$ یکنواخت باشد، $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ و φ^* در معادله لاپلاس صدق می کند. این مسائل با مسائل الکتروستاتیکی متناظر که چگالی بار خارجی ندارند،

یکسان اند.

۴. برای جریانهای انتقالی، انتگرال $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ عبارت است از قانون آمپر

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

۵. جواب مربوط به $\mathbf{H}$ به دو قسمت، یکی ناشی از جریانهای انتقالی و دیگری ناشی از مواد مغناطیسی، تقسیم می شود

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \nabla \varphi^*(\mathbf{r})$$

(محاسبه جمله دوم به معلوم بودن $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ بستگی دارد.)۶. در حضور مواد فرومغناطیسی با μ ی بزرگ، فرض اینکه تمامی شار Φ در حجم معلومی محصور است ممکن است تقریب سودمندی باشد. در این صورت

$$NI = \Phi \mathcal{R}$$

که در آن مقاومت مغناطیسی

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$$

را می توان برای هر جزء از مدار مغناطیسی محاسبه کرد.

مسائل

۱.۹ یک آهنربای دائمی به شکل استوانه قائم به طول L مفروض است. اگر مغناطش $\mathbf{M}$ یکنواخت و در جهت محور استوانه باشد، چگالیهای جریان مغناطش $\mathbf{J}_M$ و $\mathbf{j}_M$ را پیدا کنید. این توزیع جریان را با توزیع جریان مربوط در یک سیموله مقایسه کنید.۲.۹ توزیع جریانهای مغناطش را برای کره ای که به طور یکنواخت مغناطیده شده و بردار مغناطش آن $\mathbf{M}$ است به دست آورید. بر طبق معادله (۳.۹) میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در درون چنین کره ای یکنواخت است. آیا می توانید با استفاده از این اطلاعات یک سیم پیچ جریان طراحی کنید به طوری که در یک فضای کروی میدان مغناطیسی یکنواخت ایجاد کند؟۳.۹ (الف) گشتاور مغناطیسی یک جسم ماکروسکوپی به صورت $\int_V \mathbf{r} \times \mathbf{M} dv$ تعریف می شود.

رابطه زیر را ثابت کنید

$$\int_V \mathbf{M} dv = \int_V \mathbf{r} \rho_M dv + \oint_S \mathbf{r} \sigma_M da$$

در این رابطه S سطحی است که حجم V را احاطه کرده است. (دانهمایی: به مسئله مشابه مربوط به $\mathbf{P}$ در فصل ۴ مراجعه کنید.) (ب) يك آهنربای دائمی به شکل کره و به شعاع R دارای بردار مغناطش یکنواخت $\mathbf{M}_0$ در امتداد محور قطبی است. گشتاور مغناطیسی این آهنربا را هم از سمت راست و هم از سمت چپ معادله قسمت (الف) پیدا کنید.

۴.۹ (الف) آهنربایی با بردار مغناطش مشخص $\mathbf{M}(x, y, z)$ داده شده است. هر عنصر حجم dv را می توان يك دوقطبی مغناطیسی کوچک $\mathbf{M} dv$ فرض کرد. اگر آهنربا را در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ قرار دهیم، گشتاور نیروی وارد بر آهنربا را بر حسب گشتاور مغناطیسی آن (که در مسئله ۳.۹ تعریف شده است) پیدا کنید. (ب) آهنربایی به شکل استوانه قائم به طول L و سطح مقطع A به طور یکنواخت در امتداد موازی با محور استوانه، مغناطیده است و بردار مغناطش آن $\mathbf{M}_0$ است. آهنربا را در میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}_0$ قرار می دهیم. گشتاور نیروی وارد بر آهنربا را بر حسب چگالیهای قطب مغناطیسی آن محاسبه کنید.

۵.۹ بیضیواری که طول محوره های اصلی آن $2a$ ، $2a$ ، و $2b$ است، به طور یکنواخت در امتداد موازی با محور $2b$ مغناطیده است. بردار مغناطش بیضیوار $\mathbf{M}_0$ است. چگالیهای قطب مغناطیسی را برای این شکل هندسی پیدا کنید.

۶.۹ يك پوسته کروی به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 که در امتداد محور z به طور یکنواخت مغناطیده است، مفروض است. بردار مغناطش در پوسته برابر $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{k}$ است. پتانسیل نردهای φ^* را برای نقاط واقع بر محور z در داخل و در خارج پوسته به دست آورید.

۷.۹ يك آهنربای دائم به شکل استوانه قائم به طول L و به شعاع R طوری قرار داده شده که محور تقارن آن منطبق بر محور z است. مبدأ مختصات در مرکز آهنربا قرار دارد. اگر استوانه بردار مغناطش محوری یکنواختی برابر M داشته باشد: (الف) مطلوب است محاسبه $\varphi^*(z)$ بر روی نقاط واقع بر محور تقارن هم در داخل و هم در خارج آهنربا، و (ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف) میدان مغناطیسی $\mathbf{B}_z$ را بر روی محور تقارن، در داخل و خارج آهنربا محاسبه کنید.

۸.۹ کره ای از يك ماده مغناطیسی به شعاع R ، در مبدأ مختصات قرار دارد. بردار مغناطش به صورت $\mathbf{M} = (ax^2 + b)\mathbf{i}$ است که در آن a و b مقادیری ثابت اند. مطلوب است محاسبه کلیه چگالیهای قطب مغناطیسی و جریانهای مغناطش.

۹.۹ حلقه‌ای از آهن تابکاری شده به طول متوسط ۱۵ سانتیمتر با پیچهای چنبره‌ای که ۱۰۰ دورسیم پیچ دارد پیچیده شده است. میدان مغناطیسی را در حلقه محاسبه کنید. فرض کنید جریان در سیم پیچ (الف) ۱۰ره آمپر، (ب) ۲ره آمپر، و (ج) ۱ آمپر باشد.

۱۰.۹ حلقه‌ای از جنس آهن نرم که يك شكاف هوای ۱ سانتیمتری دارد مانند شكل ۱۴.۹ به شكل يك چنبره سیم پیچی شده است. طول متوسط حلقه آهن ۲۰ سانتیمتر، سطح مقطع آن ۴ سانتیمتر مربع، و تراوایی آن $\mu = 3000$ است که فرض می‌شود ثابت است. از سیم پیچ چنبره‌ای که شامل ۲۰۰ دور است جریانی به شدت ۱۰ آمپری گذرد. H و B را در داخل حلقه آهن و در شكاف هوا به دست آورید.

۱۱.۹ استوانه‌ای طویل به شعاع a و تراوایی μ را در میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 قرار می‌دهیم به طوری که محور استوانه عمود بر B_0 باشد. میدان مغناطیسی درون استوانه را محاسبه کنید. بایک ترسیم نیمه کمی خطوط میدان نوعی درون استوانه را نشان دهید. (فرض کنید که θ^* را می‌توانیم بر حسب هماهنگیهای استوانه‌ای $\cos \theta$ به طور کامل مشخص کنیم. چنین فرضی موجه است زیرا تمام شرایط مرزی را می‌توان بر حسب هماهنگیهای $\cos \theta$ برآورده کرد.)

۱۲.۹ يك سیم مسی مستقیم و طویل و يك سیم آهنی مستقیم و طویل، هر يك جریان یکسان I را حمل می‌کنند و در میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 قرار دارند. نشان دهید که نیروی وارد بر سیم آهنی تقریباً دو برابر نیروی وارد بر سیم مسی است. (دانه‌مایی: از نتیجه مسئله ۱۱.۹ استفاده کنید.)

۱۳.۹ يك سیم حامل جریان I در يك لوله آهنی استوانه‌ای شكل قرار دارد. شعاعهای داخلی و خارجی لوله a و b ، پذیرفتاری ثابت آن X است، و با سیم هم محصور است. چگالی جریان مغناطش و کل جریان مغناطش را پیدا کنید.

۱۴.۹ دو محیط مغناطیسی با يك فصل مشترك مسطح از یکدیگر جدا شده‌اند. نشان دهید که زوایای میان بردار عمود بر فصل مشترك و بردارهای میدانهای مغناطیسی در دو طرف آن، در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$\mu_2 \tan \theta_1 = \mu_1 \tan \theta_2$$

۱۵.۹ سیمی مستقیم، که حامل جریان I است، موازی صفحه‌ای نامتناهی و به فاصله d از آن قرار گرفته است. يك طرف صفحه هواست و سیم در آن قرار دارد، و طرف دیگر صفحه محیطی است با تراوایی ثابت μ . جریان تصوری را پیدا کنید که میدان مغناطیسی صحیح را در هوا به دست می‌دهد، هنگامی که (الف) $\mu = \infty$ ، (ب) $\mu = 0$ باشد. (حالت (الف) تقریبی از ماده فرومغناطیسی است و (ب) ابررسانا را توصیف می‌کند.)

۱۶.۹* عامل و امفناطش را برای استوانه طویلی محاسبه کنید که در امتداد عمود بر محور استوانه به طور دائم مغناطیده است و بردار مغناطش آن یکنواخت است.

۱۷.۹* يك پوسته استوانه‌ای طویل (شعاع خارجی b ، شعاع داخلی a و تراوایی نسبی K_m) در امتداد عمود بر میدان مغناطیسی B_0 قرار گرفته است. (الف) نشان دهید که میدان مغناطیسی B_i در ناحیه "خلا" در داخل پوسته با B_0 موازی است. (ب) نشان دهید که ضریب حفاظ مغناطیسی (که در زیر تعریف شده است) به صورت زیر است

$$h_m \equiv \frac{B_0}{B_i} = 1 + \frac{(K_m - 1)^2}{2K_m} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)$$

۱۸.۹ يك مدار مغناطیسی مطابق شکل زیر ۱۰۰ دور سیم پیچ دارد که جریان يك آمپر از آن می گذرد. سیم پیچ در ضلع سمت چپ مدار قرار دارد. ارتفاع مدار ۱۰ سانتیمتر، طول آن ۲۰ سانتیمتر، سطح مقطع اضلاع آن ۶ سانتیمتر مربع و تراوایی آن برابر $\mu_0 5000$ است که ثابت فرض می شود. اگر از نشت شار صرف نظر کنیم، شار مغناطیسی را در ضلع وسط و در ضلع سمت راست مدار محاسبه کنید.



۱۹.۹ يك مدار مغناطیسی، نظیر شکل ۱۷.۹، از يك آهنربای دائمی به طول ۸ سانتیمتر و مسیری از جنس آهن نرم به طول ۱۶ سانتیمتر، و يك شكاف هوا به عرض ۸ سانتیمتر، تشکیل شده است. سطح مقطع متوسط آهن و آهنربا ۴ سانتیمتر مربع است، حال آنکه سطح مقطع مؤثر شكاف هوا ۳ سانتیمتر مربع است. تراوایی نسبی آهن ۵۰۰۰ است. (الف) چگالی شار مغناطیسی را در شكاف، موقعی که آهنربا از هریک از مواد مختلف زیر ساخته شده باشد، محاسبه کنید: اکسید تاجوش، فولاد کوبالتی ۳۵ درصد، از نشت شار صرف نظر کنید. (ب) ابعاد مدار مغناطیسی را از يك جهت تغییر می دهیم: شكاف هوا را به ۸ میلیمتر کاهش می دهیم. محاسباتی را که در قسمت (الف) خواسته شده است تکرار کنید.

۲۰.۹ میدان مغناطیسی را در کره‌ای که به طور یکنواخت مغناطیده شده برای هریک از موادی که در شکل ۹.۹ نشان داده شده‌اند، محاسبه کنید.

۲۱.۹ يك مدار مغناطیسی نظیر شکل ۱۷.۹ دارای آهنربایی از جنس آلنیکو V به طول

۱۰ سانتیمتر، مسیری از جنس آهن نرم به طول ۱۶ سانتیمتر و يك شكاف هوا به عرض ۱ سانتیمتر است. همچنین این مدار ۸۰۰ آمپر - دور سیم پیچ دارد (در جهتی که به شار تولید شده توسط آهنربا كمك می کند). چگالی شار مغناطیسی در شكاف هوا را پیدا کنید (ازنشت شار صرف نظر کنید، برای آهن نرم $K_m = 5000$ است، و فرض کنید که سطح-مقطعه‌های آهنربا، آهن نرم، و شكاف هوا یکسان است).

نظریه میکروسکوپی مغناطیس

در فصل قبل جنبه‌های ماکروسکوپی مغناطش بررسی شد. خواص مغناطیسی ماده صریحاً به کمک تابع M مورد مطالعه قرار گرفتند، و این تابع خود به کمک پارامترهایی که با تجربه تعیین می‌شوند، به میدان مغناطیسی ربط داده شد. اکنون از دید میکروسکوپی به ماده نگاه می‌کنیم (یعنی به آن به صورت مجموعه‌ای از اتمها یا مولکولها می‌نگریم) تا ببینیم پاسخ مولکولهای جداگانه به میدان مغناطیسی وارد بر آنها چگونه است. اگر این روش به طور کامل انجام شود، نهایتاً می‌بایست به طور نظری عبارتهایی برای پذیرفتاری و روابط $B-H$ را برای تمام انواع مواد به دست آوریم. چنین روشی مسلماً بیرون از قلمرو این کتاب است؛ با وجود این، می‌توانیم نسبتاً به سادگی نشان دهیم که انواع مختلف رفتارهای مغناطیسی چگونه به وجود می‌آیند، و به علاوه، می‌توانیم عبارتهایی را به دست آوریم که در برخی حالتها مقدار تقریبی پذیرفتاری را پیشگویی کنند. بحث کاملتری درباره مطالب این فصل در کتب مربوط به فیزیک حالت جامد یافت می‌شود.^۱

در توصیف ماکروسکوپی یاد بردار میدان سروکار داشتیم، B و H ، که آنها را با رابطه $B = \mu_0 (H + M)$ به هم مربوط کردیم. از دیدگاه میکروسکوپی اختلاف بین B و H به طور عمده از میان می‌رود، زیرا که سروکار ما با مجموعه‌ای از مولکولها در خلا^۲

* این فصل را می‌توان حذف کرد بی‌آنکه پیوستگی مطالب کتاب از دست برود.

۱. به فصلهای ۱۴ و ۱۵ کتاب آشنایی با فیزیک حالت جامد اثر کیتل (از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی) مراجعه شود.

است (یعنی با مجموعه‌ای از دوقطبیهای مغناطیسی یا گروههای دوقطبی). آنچه مورد نظر ماست میدان مغناطیسی در نزدیکی يك مولکول در خلا است و یا در مکان يك مولکول وقتی که آن مولکول از دستگاه خارج شده باشد. پس $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m$. در اینجا شاخص m به معنای میکروسکوپی است ولی در بخشهای بعدی این فصل، نماد $\mathbf{B}_m$ (و $\mathbf{H}_m$) به مقدار خاصی از میدان میکروسکوپی، یعنی، میدان در مکان يك مولکول اطلاق خواهد شد.

رسم برای این است که به هنگام بحث در مورد میدان میکروسکوپی درون ماده به جای آنکه $\mathbf{B}_m$ را به میدان $\mathbf{B}$ ربط دهیم، $\mathbf{H}_m$ را به میدان ماکروسکوپی $\mathbf{H}$ مربوط کنیم، زیرا هم $\mathbf{H}$ و هم $\mathbf{H}_m$ را می توان به سادگی بر حسب انتگرالهایی از توزیع جریان و توزیع دوقطبی نوشت. ولی تفاوتی نمی کند که $\mathbf{H}_m$ را حساب کنیم یا $\mathbf{B}_m$ را، زیرا فرق این دو فقط در ضریب مقیاس μ_0 است.

۱.۱۰ میدان مولکولی در درون ماده

میدان مغناطیسی را که بر هم کنش آن با جریانهای اتمی در يك اتم یا مولکول مؤثر است، میدان مولکولی $\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m$ می نامند. در برخی کتب درسی آن را میدان موضعی می نامند. این میدان عبارت است از میدان مغناطیسی در يك موضع مولکولی (یا اتمی) در ماده. این میدان به توسط تمام چشمه های خارجی و تمام دوقطبیهای مولکولی درون ماده، به استثنای مولکول (یا اتم) واقع در نقطه مورد مطالعه، تولید می شود. واضح است که لزومی ندارد $\mathbf{B}_m$ با میدان مغناطیسی ماکروسکوپی یکسان باشد، زیرا مقدار اخیر به نیروی وارد بر يك عنصر جریان، که ابعادش در مقایسه با ابعاد مولکولی بزرگ است، مربوط می شود.

میدان مغناطیسی مولکولی را می توان به روشی مشابه باروش ۱.۵ (مربوط به میدان الکتریکی مولکولی در دی الکتریکها) محاسبه کرد. يك جسم مادی به شکل اختیاری در نظر می گیریم و برای سهولت فرض می کنیم که به طور یکنواخت مغناطیده است و بردار مغناطش آن $\mathbf{M}$ است. قطعه کوچکی از این جسم را برمی داریم و يك حفره کروی در اطراف نقطه ای که میدان مولکولی باید در آنجا محاسبه شود ایجاد می کنیم. ماده ای را که باقی مانده است به مثابه يك پیوستار در نظر خواهیم گرفت، یعنی، آن را از دید ماکروسکوپی بررسی خواهیم کرد. سپس ماده ای را که برداشته ایم مولکول به مولکول در درون حفره می گذاریم، بجز مولکولی که در مرکز حفره است و در آنجا می خواهیم میدان مولکولی را محاسبه کنیم. با مولکولهایی که بدین گونه به جای خود گذاشته می شوند باید، نه به مثابه يك پیوستار، بلکه به مثابه دوقطبیهای جداگانه یا گروههای دوقطبی رفتار کرد.

میدان ماکروسکوپی $\mathbf{H}$ ، یعنی شدت مغناطیسی در نمونه، را می توان بر طبق

معادله (۲۷.۹) به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\sigma_M(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da'$$

که در آن انتگرالها تمام چشمه‌های $\mathbf{J}$ ، ρ_M ، و σ_M را در برمی گیرند. میدان مولکولی $\mathbf{H}_m$ را هم می توان به همین روش بیان کرد، جز اینکه در این مورد سهمهای مربوط به سطح حفره و تک تک دوقطیبه های درون حفره نیز باید اضافه شوند. کنار گذاشتن انتگرال $\rho_M(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2$ در حجم حفره ضرورت خاصی ندارد، زیرا برای نمونه ای که به طور یکنواخت مغناطیده است $\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ بدین ترتیب

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \mathbf{H}_s + \mathbf{H}' \quad (1.10)$$

که در آن $\mathbf{H}$ شدت میدان مغناطیسی ماکروسکوپی در نمونه، $\mathbf{H}_s$ سهم چگالی سطحی قطب $\sigma_M = \mathbf{M}_n$ بر روی سطح حفره، و $\mathbf{H}'$ سهم دوقطیبه های مختلف درون حفره اند. به کمک محاسبات مربوط در بخش ۱.۵، می بینیم که $\mathbf{H}_s$ برابر است با

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{3} \mathbf{M} \quad (2.10)$$

به علاوه، سهم دوقطیبه ها به صورت زیر است

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{4\pi} \sum_i \left[\frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i}{r_i^5} - \frac{\mathbf{m}_i}{r_i^3} \right] \quad (3.10)$$

این عبارت که در آن r_i فاصله دوقطبی i ام از مرکز حفره است، همان شکل جمله دوقطبی الکتریکی $\mathbf{E}'$ در بخش ۱.۵ را دارد. پس اگر توجهمان را به دسته نسبتاً بزرگی از مواد که برای آنها رابطه (۳.۱۰) صفر می شود معطوف سازیم، معادله (۱.۱۰) به صورت زیر خلاصه می شود

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{1}{3} \mathbf{M} \quad (4.10)$$

و

$$\mathbf{B}_m = \mu_0 \mathbf{H}_m \quad (5.10)$$

معادله های (۴.۱۰) و (۵.۱۰) میدان مولکولی را بر حسب شدت میدان مغناطیسی ماکروسکوپی و بردار مغناطش درون جسم نمونه به دست می دهند. برای اکثر مواد دیامغناطیسی و پارامغناطیسی، عبارت $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ فوق العاده کوچک و قابل چشمپوشی است، ولی برای اجسام فرومغناطیسی این جمله تصحیحی بسیار با اهمیت است.

۲.۱۰ منشأ دیامغناطیس

برای محاسبه پذیرفتاری دیامغناطیسی مجموعه‌ای از اتمها، باید از حرکت الکترونی درون خود اتم اطلاعی داشته باشیم. فرض می‌کنیم که هر الکترون بر روی نوعی مدار به دور هسته اتمی خود گردش کند، و به منظور سادگی مدار را دایره‌ای به شعاع R در صفحه‌ای عمود بر میدان مغناطیسی اعمال شده انتخاب می‌کنیم. مکانیک کوانتومی به ما می‌آموزد که هر چند این تصویر به طور تقریبی درست است ولی الکترون‌ها در مدارهای کاملاً معینی نمی‌گردند. برای حل دقیق مسئله باید معادله شرودینگر را برای الکترون اتم در میدان مغناطیسی حل کنیم؛ با این همه، محاسبات نسبتاً ساده «کلاسیکی» نیز مرتبه بزرگی پذیرفتاری دیامغناطیسی را به طور صحیح به دست می‌دهند.

قبل از آنکه میدان مغناطیسی اعمال شود، الکترون در مدار خود در حال تعادل است

$$F_q = m_e \omega_0^2 R \quad (6.10)$$

در این رابطه F_q نیروی الکتریکی است که الکترون را به دور اتم خود در گردش نگه می‌دارد، ω_0 فرکانس زاویه‌ای الکترون در مدارش، و m_e جرم الکترون است. با اعمال میدان مغناطیسی نیروی اضافی $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m$ بر الکترون وارد می‌شود؛ با فرض اینکه الکترون در همان مدار قبلی باقی بماند خواهیم داشت

$$F_q \pm e\omega R B_m = m_e \omega^2 R$$

که از ترکیب آن با معادله (۶.۱۰) نتیجه می‌شود

$$\pm e\omega B_m = m_e (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \quad (7.10)$$

مقدار $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$ تغییر فرکانس زاویه‌ای الکترون است. پس بسته به جزئیات هندسی مدار الکترون (یعنی بسته به جهت $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_m$ نسبت به $\mathbf{F}_q$) سرعت الکترون در مدارش افزایش یا کاهش می‌یابد، ولی در هر حال تغییر گشتاور مغناطیسی مداری در جهت مخالف میدانی است که اعمال می‌شود. خواننده می‌تواند صحت این حکم را به آسانی تحقیق کند. حتی برای قویترین میدانهایی که بتوان در آزمایشگاه به وجود آورد (در حدود 100 T) $\Delta\omega$ در مقایسه با ω_0 بسیار کوچک است، پس رابطه (۷.۱۰) را می‌توان همواره به صورت تقریبی زیر نوشت

$$\Delta\omega = \pm \frac{e}{2m_e} B_m \quad (8.10)$$

کمیت $(e/2m_e)B_m$ به فرکانس لارمور معروف است.

تا اینجا ما این مطلب را تنها فرض کرده‌ایم که الکترون در همان مدار قبلی‌اش باقی می‌ماند. ما این فرض را همراه با تعادل نیروها به کار بردیم تا معادله (۸.۱۰) را به دست آوریم. برای آنکه الکترون در مدارش بماند، تغییر انرژی جنبشی آن، که از قانون القای فاراده به دست می‌آید، باید با معادله (۸.۱۰) سازگار باشد. وقتی میدان مغناطیسی برقرار می‌شود، در مقدار شار مغناطیسی که از مدار می‌گذرد تغییری به وجود می‌آید که با $\pi R^2 \Delta B_m$ داده می‌شود. این شار از تعداد Δn حلقه الکترونی می‌گذرد، که Δn تعداد دورانهایی است که الکترون در آنای مدتی که در آن میدان تغییر می‌کند انجام می‌دهد. شار مغناطیسی متغیر، طبق قانون فاراده، emf به صورت زیر تولید می‌کند

$$\mathcal{E} = \pi R^2 \frac{dB_m}{dt} \Delta n = \pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \quad (9.10)$$

در این فرایند انرژی داده شده به الکترون برابر با $e\mathcal{E}$ است، که به صورت تغییری در انرژی جنبشی ظاهر می‌شود، پس

$$\frac{1}{2} m_e R^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = e \pi R^2 \frac{dn}{dt} \Delta B_m \quad (10.10)$$

اما ΔB_m همان مقدار نهایی میدان B_m است، و مقدار متوسط dn/dt برابر است با $(\omega + \omega_0)/4\pi$ پس

$$\Delta \omega = \frac{e}{2m_e} B_m$$

که با معادله (۸.۱۰) در توافق است. بنا بر این، فرض ثابت بودن مدار به هیچ تناقضی میان معادله (۹.۱۰) و معادله نیرو منجر نمی‌شود. دیا مغناطیس نتیجه عمل قانون لنز در مقیاس اتمی است. در اثر اعمال میدان مغناطیسی، جریانهای الکترونی در هر اتم به نحوی تغییر می‌کنند که به تضعیف اثر این میدان کمک کنند. تغییر سرعت زاویه‌ای که معادله (۸.۱۰) پیشگویی می‌کند در گشتاور مغناطیسی تغییری ایجاد می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \Delta m &= - \frac{e}{2\pi} \pi R^2 \frac{e}{2m_e} B_m \\ &= - \frac{e^2}{2m_e} R^2 \mu_0 H_m \end{aligned} \quad (11.10)$$

برای پیدا کردن بردار مغناطش، این نتیجه باید برای تمام الکترونهای واقع در واحد حجم

جمع شود. برای جسمی که دارای N مولکول در واحد حجم باشد و تمام مولکولهای آن از یک نوع باشند

$$\mathbf{M} = -\frac{Ne^{\gamma}\mu_o\mathbf{H}_m}{\gamma m_e} \sum_i R_i^{\gamma} \quad (۱۲.۱۰)$$

که در آن جمعبندی روی الکترونهاى يك مولکول است. برای مواد دیامغناطیس تفاوت $\mathbf{H}_m$ با $\mathbf{H}$ خیلی کم است، پس پذیرفتاری دیامغناطیسی برابر است با

$$\chi_m = -\frac{Ne^{\gamma}\mu_o}{\gamma m_e} \sum_i R_i^{\gamma} \quad (الف ۱۳.۱۰)$$

این نتیجه بر مبنای این فرض به دست آمده است که تمام الکترونها در صفحات عمود بر میدان $\mathbf{H}_m$ می گردند. وقتی صفحه مدار مایل باشد، به طوری که بردار عمود بر مدار بامیدان زاویه θ_i بسازد، فقط مؤلفه $\mathbf{H}_m$ در امتداد این بردار عمود $(H_m \cos \theta_i)$ در تغییر سرعت زاویه ای الکترون مؤثر است. به علاوه، مؤلفه Δm در امتداد میدان به نسبت $\cos \theta_i$ کوچکتر است. پس تقریب بهتری برای پذیرفتاری دیامغناطیسی به صورت زیر است

$$\chi_m = -\frac{Ne^{\gamma}\mu_o}{\gamma m_e} \sum_i R_i^{\gamma} \cos^{\gamma} \theta_i \quad (ب ۱۳.۱۰)$$

خاصیت دیامغناطیس ظاهراً در تمام انواع ساده یافت می شود، ولی اثر آن غالباً به وسیله آثار قویتر پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی که می توانند با این خاصیت همراه باشند، مخفی می شود. خاصیت دیامغناطیس خصوصاً در موادی بارز است که کلاً از اتمها یا یونهای با «پوسته های بسته الکترونی» تشکیل شده باشند، زیرا در این موارد تمام تأثیرات پارامغناطیسی حذف می شوند.

۳.۱۰ منشأ پارامغناطیس

حرکت مداری هریک از الکترونها را در یک اتم یا مولکول می توان بر حسب يك گشتاور مغناطیسی توصیف کرد. این مطلب مستقیماً از معادله (۲۲.۸) نتیجه می شود. به علاوه، می دانیم که الکترون يك خاصیت فطری دارد که به چرخش ذاتی یا اسپین، مشهور است و يك گشتاور مغناطیسی ذاتی به این باردرد حال چرخش تعلق می گیرد. بنابراین، هر مولکول يك گشتاور مغناطیسی $\mathbf{m}_i$ دارد که عبارت است از جمع برداری گشتاورهای مغناطیسی اسپینی و مداری الکترونهاى مختلف مولکول. به طور خلاصه، پارامغناطیس نتیجه این امر است که این گشتاورهای مولکولی تمایل دارند خود را با جهت میدان اعمال شده همسو

کنند، درست نظیر مدار جریان معادله (۱۹۰۸) که تمایل دارد خود را بامیدان همسو کند. البته وضعیت آن قدر هم نظیر وضعیت مدار جریان سر راست نیست. در واقع دواشکال وجود دارد: (۱) در حضور میدان مغناطیسی حرکتهای الکترونی کوآنتیده اند، به طوری که سمتهگیری هر گشتاور اسپینی یا مداری نسبت به جهت میدان در یکی از امتدادهای مشخصی است که این امتدادها مجموعه گسسته ای را تشکیل می دهند. به علاوه، هیچ دو الکترونی در یک مولکول نمی توانند حالت کوآنتومی یکسانی را اشغال کنند، به طوری که اگر در هر مولکول درست به تعداد کافی الکترون وجود داشته باشد به طوری که تمام «پوسته های الکترونی» را پر کنند آن وقت تمام سمتهگیریهایی ممکن باید اشغال شوند و m_i صفر می شود. البته پارامغناطیس تنها هنگامی می تواند ظاهر شود که $m_i \neq 0$ باشد. (۲) حرکت الکترونی درون اتم که باعث بروز m_i می شود همچنین یک اندازه حرکت زاویه ای نسبت به هسته اتمی ایجاد می کند؛ در واقع m_i به طور خطی با این اندازه حرکت زاویه ای مربوط می شود. در این شرایط گشتاور نیروی مغناطیسی مستقیماً گشتاور دوقطبی m_i را بامیدان همسو نمی کند، بلکه سبب می شود که این گشتاور حول میدان با زاویه میل ثابتی حرکت تقدیمی کند. ۱. اتمها (یا مولکولها) در دستگاه مادی ما بایکدیگر در تماس گرمایی اند و در یک گاز یا یک مایع، دائماً بایکدیگر برخورد می کنند؛ در یک جسم جامد اتمها نوسانات گرمایی دارند. در چنین شرایطی m_i های مختلف می توانند انرژی مغناطیسی را با انرژی گرمایی محیط اطراف خود مبادله کنند و از یک حالت حرکت تقدیمی به حالتی دیگر با زاویه میل متفاوت گذر کنند. انرژی گرمایی دستگاه می کوشد طوری عمل کند که برای m_i سمتهگیری کاملاً کتره ای ایجاد کند، ولی سمتهگیریهایی هم راستا بامیدان یا نزدیک به آن انرژیهای مغناطیسی کمتری دارند و در نتیجه مرجع اند. وضع کاملاً شبیه است به وضع مولکولهای قطبی در میدان الکتريکی که در بخش ۳۰۵ مورد بحث قرار گرفت.

برای ماده ای که تماماً از یک نوع مولکول تشکیل شده است، و هر مولکول گشتاور مغناطیسی m_0 دارد، سمتهگیری نسبی تقریباً از تابع لانژون (رابطه ۲۱۰۵) به دست می آید، که در آن

$$y = \frac{m_0 \mu_0 H_m}{kT} \quad (14.10)$$

بردار مغناطش از رابطه زیر به دست می آید

$$|M| = Nm_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (الف 15.10)$$

۱. بحث حرکت تقدیمی m_i در یک میدان مغناطیسی یکنواخت در بسیاری از کتب درسی آمده است. به عنوان مثال رجوع کنید به صفحات ۱۷۶-۱۷۷ از کتاب H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1950), pp. 176-177.

که در آن N تعداد مولکولها در واحد حجم است. به استثنای دماهای نزدیک صفر مطلق، تابع لانژون را می توان تقریباً با جمله اول بسط رشته توانی آن، برابر دانست. بدین ترتیب

$$\mathbf{M} = \frac{Nm_o^2}{3kT} \mu_o \mathbf{H}_m \quad (15.10 \text{ ب})$$

که از آن پذیرفتاری پارامغناطیسی به دست می آید

$$\chi_m = \frac{Nm_o^2 \mu_o}{3kT} \quad (16.10)$$

بر طبق نظریه اتمی، m_o در حدود چند مگنتون بور است (۱ مگنتون بور مساوی است با $eh/4\pi m_o$ ، که در آن h ثابت پلانک است). از معادله های (۱۶.۱۰) و (۱۳.۱۰ ب) برای مرتبه بزرگی χ_m مقادیری به دست می آید که با مقادیرهای مندرج در جدول ۱۰.۹ در توافق است.

نتایج این بخش، به طور خلاصه چنین است: برای آنکه دستگاهی خواص پارامغناطیسی از خود بروز دهد، اتمها (یا مولکولها) ی آن دستگاه باید گشتاورهای مغناطیسی دائمی داشته باشند، و این گشتاورها تمایل دارند که با میدان اعمال شده همسو شوند. گشتاورهای مولکولی مختلف واجفته شده هستند، یعنی، هر يك حول میدان مغناطیسی به طور انفرادی (نه به طور هماهنگ) حرکت تقدیمی می کنند، ولی به علت تماس گرمایی با محیط اطراف خود می توانند مبادله انرژی کنند. جز در دماهای نزدیک به صفر مطلق توأم با میدانهای بسیار قوی، مغناطش از مقدار مربوط به حالت اشباع آن، که در آن حالت تمام گشتاورهای دو-قطبی همسو هستند، بسیار کمتر است.

۴.۱۰ نظریه فرومغناطیس

در اجسام فرومغناطیس گشتاورهای مغناطیسی اتمی (یا مولکولی) حتی مان بودن میدان مغناطیسی خارجی نیز تقریباً به طور کامل همسو هستند. علت این همسودگی وجود میدان مولکولی $\mathbf{H}_m$ است که، بر طبق معادله (۴.۱۰)، با صفر شدن $\mathbf{H}$ صفر نمی شود، مگر آنکه $\mathbf{M}$ نیز به طور همزمان صفر شود. هر بردار مغناطش، $\mathbf{M}$ ، باعث ایجاد يك میدان مولکولی می شود، ولی جز در موردی که این میدان مولکولی همان مغناطش $\mathbf{M}$ را، که بنا بر فرض درجسم موجود است، ایجاد کند جواب مسئله خود سازگار نیست. مسئله این است که تعیین کنیم تحت چه مجموعه ای از شرایط، مغناطش می تواند به وسیله میدان مولکولی که خودش به وجود می آورد برقرار بماند.

لازم است که رابطه (۴.۱۰) را تا حدودی عمومیت دهیم. برای میدان مولکولی می نویسیم $\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \gamma \mathbf{M}$ ، که به ازای $\mathbf{H} = 0$ به صورت زیر در می آید

$$H_m = \gamma M \quad [۴.۱۰ الف]$$

برطبق نظریه ساده بخش ۱۰۱۰، داریم $\gamma = ۱/۳$. اگر مجموع جمله‌های معادله (۳.۱۰) صفر نشود، γ ممکن است $۱/۳$ نباشد؛ ولی در هر حال انتظار داریم که مقدار γ در حدود همین مرتبه بزرگی باشد.

ماده‌ای را در نظر می‌گیریم که کلا از یک نوع اتم تشکیل شده است و گشتاور مغناطیسی هراتم آن m_0 است. تعداد N اتم در واحد حجم وجود دارد. اگر قرار باشد که گشتاورهای اتمی تا حدود زیادی همسوسه باشند، M باید کسر قابل ملاحظه‌ای از Nm_0 باشد؛ به عبارت دقیقتر، فرض می‌کنیم که رابطه زیر برقرار باشد

$$M > ۰.۷ N m_0 \quad (۱۷.۱۰)$$

این شرط، برطبق معادله (۱۵.۱۰) الف) به این معنی است که $\gamma > ۰.۷ [\coth y - (۱/y)]$ ، یا $y > ۳$ (در معادله (۱۴.۱۰) تعریف شده است). پس

$$y = \frac{m_0 \mu_0 H_m}{kT} > ۳$$

که وقتی با معادلات (۴.۱۰ الف) و (۱۷.۱۰) ترکیب شود، نتیجه زیر را به دست می‌دهد

$$۰.۷ \frac{\gamma N \mu_0 m_0^2}{kT} > ۳ \quad (۱۸.۱۰)$$

که (تقریباً) شرط وقوع پدیده فرومغناطیس است.

در بخش گذشته گفته شد که برطبق پیشگویی نظریه اتمی، m_0 در حدود چند مگنتون بور است. برای اساس، معادله (۱۸.۱۰) نیاز به γ بی در حدود $۱۰^۳$ دارد که چند مرتبه بزرگی از آنچه از محاسبات بخش ۱۰۱۰ می‌توان به دست آورد بزرگتر است. از این رو، چنین برمی‌آید که منشأ فرومغناطیس به میزان قابل ملاحظه‌ای از وضعیت معادل آن در فرو-الکتریسته (که در بخش ۴.۵ بررسی شد) پیچیده‌تر است.

در سال ۱۹۰۷ پی‌یر وایس^۱ نظریه فرومغناطیس خود را فرمولبندی کرد. وایس به نقش اساسی میدان مولکولی پی‌یرد. وی نتوانست بزرگی مقدار γ را توضیح دهد، ولی آن را به عنوان یک واقعیت پذیرفت و بر مبنای آن به تکمیل نظریه خود پرداخت. پیشگوییهای نظریه وی با آزمایش مطابقت نزدیکی داشت. به این دلیل میدان مولکولی معادله (۴.۱۰ الف) را غالباً میدان مولکولی وایس می‌نامند.

حدود بیست سال بعد هایزنبرگ^۲، منشأ بزرگی مقدار γ را توضیح داد. هایزنبرگ

1. P. Weiss, *Journal de Physique*, vol. 6, p. 667 (1907).

2. W. Heisenberg, *Zeitschrift für Physik*, vol. 49, p. 619 (1928).

نشان داد که اولاً تنها گشتاورهای مغناطیسی اسپینی در ایجاد میدان مولکولی شرکت می کنند، و ثانیاً این میدان اساساً توسط نیروهای الکتروستاتیکی به وجود می آید. وی براساس مکانیک کوانتومی نشان داد که وقتی اسپینهای اتمهای مجاور از حالت همسویی موازی به حالت همسویی پادموازی تغییر می کنند، باید در توزیع بار الکترونی درون اتمها تغییرات همزمانی حاصل شود. تغییر توزیع بار، انرژی الکتروستاتیکی دستگاه را تغییر می دهد، و در برخی موارد، همسویی موازی (یعنی، فرومغناطیس) را ارجح می دارد. انرژی وابسته به اسپین، یعنی انرژی که به پیکربندی اسپینی دستگاه مربوط است، را می توان بر حسب نیرویی (یا گشتاور نیرویی) که در اثر تغییر این پیکربندی بر یکی از اتمها وارد می شود بیان کرد. نتیجه آنکه میدان معادل متناسب خواهد بود با M ، اما با ضربی که به جزئیات توزیع بار در اتم مورد بحث بستگی دارد.

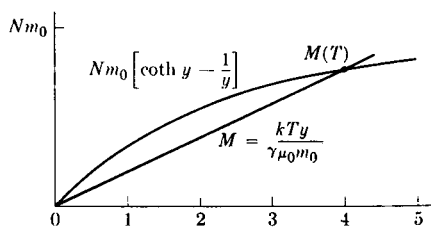
با کاربرد نظریه وایس - هایزنبرگ می توان رابطه تغییر مغناطش یک جسم فرومغناطیس را با دما پیشگویی کرد. واضح است که این نظریه، فرومغناطیس را به صورت حالت حدی پارامغناطیس در یک میدان مغناطیسی فوق العاده قوی توصیف می کند، که البته این میدان باید از خود مغناطش به وجود آمده باشد. از ترکیب معادله (۴.۱۰ الف) با معادله های (۱۴.۱۰) و (۱۵.۱۰ الف) نتیجه می شود

$$M = Nm_0 \left[\coth y - \frac{1}{y} \right] \quad (۱۹.۱۰)$$

و

$$M = \frac{kTy}{\gamma\mu_0 m_0} \quad (۲۰.۱۰)$$

مغناطش خود به خود، یعنی مغناطش در میدان خارجی صفر، برای یک دمای مفروض از حل همزمان معادلات (۱۹.۱۰) و (۲۰.۱۰) نتیجه می شود. این کار را به آسانی به روش ترسیمی انجام می دهیم: M را بر حسب y برای هر دو معادله (۱۹.۱۰) و (۲۰.۱۰)، نظیر



@QuarkBook

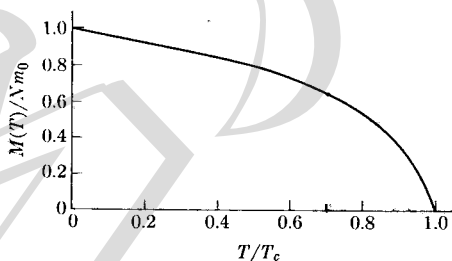
H-H-M

شکل ۱۰.۱۰ تعیین مغناطش خود به خود $M(T)$ به کمک تابع لانژون.

شکل ۱۰.۱۵، رسم می‌کنیم. مغناطش $M(T)$ که از تقاطع دو منحنی به دست می‌آید با هر دو معادله سازگار است. با افزایش دما شیب منحنی خطی، معادله (۲۰.۱۵)، زیادتر می‌شود، ولی معادله (۱۹.۲۵) بی‌تغییر می‌ماند. لذا نقطه تقاطع در شکل به سمت چپ حرکت می‌کند و برای مغناطش خود به خود مقدار کمتری به دست می‌آید. بالاخره به دمایی می‌رسیم که در آن معادله (۲۰.۱۵) در مبدأ مختصات با (۱۹.۱۵) مماس می‌شود؛ در این دما و دماهای بالاتر مغناطش خود به خود صفر می‌شود. این دما، دمای کوری^۱ T_c است که بالاتر از آن مغناطش خود به خود از میان می‌رود و خواص پارامغناطیسی معمولی نتیجه می‌شود. ترسیمی از منحنی $M(T)$ بر حسب دما، که به روش بالا به دست آمده است، در شکل ۲۰.۱۵ نشان داده شده است. این منحنی با مقادیر تعیین شده تجربی مغناطش خود به خود برای يك جسم فرومغناطیسی توافق تقریبی دارد.^۲

۵.۱۵ حوزه‌های فرومغناطیسی

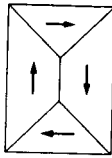
همان‌طور که در بخش قبل گفتیم يك جسم فرومغناطیس در دماهایی کمتر از دمای کوری باید تقریباً تا حد اشباع مغناطیده باشد (صرف نظر از وضعیت‌های گذشته آن). ظاهراً این مطلب با تجربه مغایرت دارد. مثلاً می‌دانیم که يك قطعه آهن می‌تواند هم در حالت مغناطیده و هم در



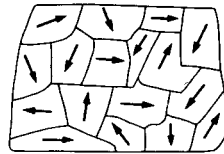
شکل ۲۰.۱۵ مغناطش يك ماده فرومغناطیسی به صورت تابعی از دما. T_c به دمای کوری موسوم است. (منحنی نمایش داده شده با کمک تابع کلاسیک لانژون محاسبه شده است؛ تصحیحات مربوط به مکانیک کوانتومی شکل منحنی را تا حدودی تغییر می‌دهد و آن را با داده‌های تجربی در توافق کامل می‌آورد.)

1. Curie

۲. چنانچه جزئیات مربوط به تصحیحات کوانتومی در نظریه‌ای که در اینجا عرضه شد در نظر گرفته شود، منحنی نظری با مقادیر تجربی به خوبی در توافق خواهد بود.

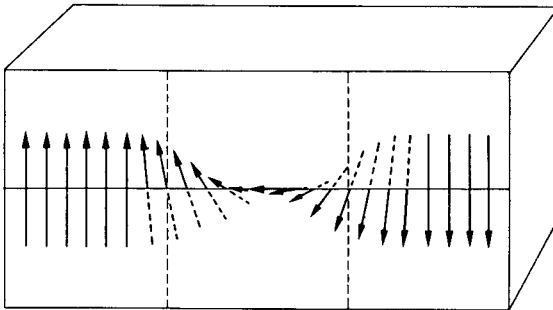


(الف)



(ب)

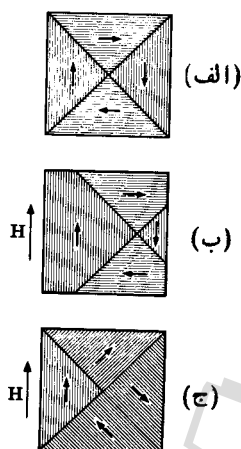
شکل ۳.۱۰ ساختارهای حوزه فرومغناطیسی: (الف) تک بلور، (ب) جسم چند بلوری. پیکانها معرف جهت مغناطش اند.



شکل ۴.۱۰ ساختار ناحیه گذار یا «دیواره بلوخ» بین حوزه‌ها در ماده فرومغناطیسی.

حالت نامغناطیده موجود باشد. جواب این باطنمای ظاهری این است که یک ماده فرومغناطیس به حوزه‌هایی تجزیه می‌شود، هر حوزه بر طبق نتایج بخش قبل کاملاً مغناطیده است ولی حوزه‌های مختلف سمتگیریهای کثرتی دارند (شکل ۳.۱۰) و بنا بر این از دیدگاه میکروسکوپی تصویری نامغناطیده عرضه می‌کنند. موجودیت این حوزه‌ها برای اولین بار توسط وایس در سال ۱۹۰۷ فرض گرفته شد.

در عبور از یک حوزه به حوزه مجاور آن در طی حدود ۱۰۰ اتم، بردار گشتاور اتمی m_0 به تدریج از جهت اصلی خود به جهت جدید می‌چرخد (شکل ۴.۱۰). این ناحیه بین حوزه‌ها را دیواره حوزه می‌نامند. به نظر می‌آید که گشتاور اسپینی اتمی، در ناحیه دیواره تحت تأثیر میدان مولکولی ضعیفتری قرار می‌گیرد تا در درون خود حوزه. این مشاهده خود وجود یک پیکر بندی تک حوزه‌ای را ارجح می‌دارد. از طرف دیگر جسمی که تنها یک حوزه دارد باید میدان مغناطیسی خارجی شدیدی را برقرار نگه دارد، و حال آنکه «انرژی مغناطیسی» مربوط به ساختار میدان در یک جسم چند حوزه‌ای کمتر است. لذا ساختار چند



شکل ۵.۱۰. مغناطش يك ماده فرومغناطیسی:
(الف) نامغناطیده، (ب) مغناطیدگی به وسیله حرکت دیواره حوزه، (ج) مغناطیدگی به وسیله چرخش حوزه.

حوزه‌ای از لحاظ انرژی معمولاً ارجح است. جنبه‌های ماکروسکوپی مغناطش در مواد فرومغناطیسی به تغییرات در پیکربندی حوزه‌ها مربوط می‌شوند. افزایش مغناطش ناشی از تأثیر يك میدان خارجی با دوفرايند مستقل حاصل می‌شود؛ با افزایش حجم حوزه‌هایی که امتدادشان بامیدان مطابقت دارد در مقابل کاهش حجم حوزه‌هایی که امتدادشان مطابق با جهت میدان نیست (حرکت دیواره حوزه) یا با چرخش مغناطش حوزه به طرف جهت میدان. این دوفرايند در شکل ۵.۱۰ رسم شده‌اند.

درمیدانهای خارجی ضعیف مغناطش معمولاً با حرکت دیواره حوزه تغییر می‌کند. درمواد خالصی که فقط شامل يك فازند، حرکت دیواره تا حدود زیادی در ناحیه میدان ضعیف برگشت پذیر است. درمیدانهای قویتر مغناطیدگی با حرکت برگشت ناپذیر دیواره، و سرانجام با چرخش حوزه انجام می‌شود؛ در این حالتها وقتی میدان مغناطیسی خارجی حذف شود، ماده به صورت مغناطیده باقی می‌ماند.

مطالعه تجربی حوزه‌ها با شیوه‌ای که اولین بار توسط بی‌تر^۱ ابداع شد امکان پذیر شده است. مقداری گرد مغناطیسی بسیار نرم را روی سطح جسم نمونه می‌پاشیم؛ ذرات گرد را که در امتداد مرزهای حوزه‌ها جمع می‌شوند، با میکروسکوپ می‌توان مشاهده کرد. با این شیوه حتی مشاهده حرکت دیواره حوزه تحت تأثیر يك میدان مغناطیسی خارجی نیز امکان-

1. F. H. Bitter, *Physical Review* 41, p, 507 (1932).

برای شرح مختصر تکنیک وی مراجعه کنید به

B. D. Cullity, *Introduction to Magnetic Materials* (Reading Mass: Addison Wesley, 1972), p. 293.

پذیراست. اندازه حوزه‌ها بسته به نوع ماده آنها و وضع سابقشان و عاملهای دیگر تفاوت می‌کند؛ اندازه‌های معمولی آنها بین ۶-۱۰ تا ۲-۱۰ سانتیمتر مکعب است.

۶.۱۰ فریتها

برطبق نظریه فرومغناطیس هاینبرگ، تغییر در اسپین اتمهای مجاور از حالت همسویی موازی به حالت همسویی پاد موازی تغییری در انرژی الکتروستاتیکی به همراه دارد. اگر باین تغییر انرژی اتمها ایجاد همسویی موازی ارجح باشد، و در عین حال اندازه تغییر کافی باشد، ماده متشکل از چنین اتمهایی فرومغناطیس است. اگر باین تغییر انرژی ایجاد همسویی پاد موازی ارجح باشد، بازهم امکان ایجاد يك ساختار اسپینی منظم وجود دارد، ولی در این مورد در طی سرتاسر بلور، جهت اسپینها به طور متناوب از اتمی به اتم دیگر تغییر می‌کند.

هر ساختار اسپینی منظم با برآیند گشتاور مغناطیسی صفر را پادفرومغناطیس می‌نامند (شکل ۶.۱۰ ب). عمومترین ساختار اسپینی منظم شامل هردو مؤلفه «اسپین بالا» و «اسپین پایین» است ولی برآیند گشتاور مغناطیسی آن در یکی از این جهات مخالف صفر است؛ چنین ماده‌ای فری مغناطیس (آهنربای فریتی) یا به عبارت ساده فریت نامیده می‌شود. ساده‌ترین فریتها که از لحاظ مغناطیسی مورد توجه اند عبارت اند از اکسیدهایی با فرمول شیمیایی MOFe_2O_4 که در آن M يك یون فلز دوظرفیتی است نظیر Co ، Ni ، Mn ، Cu ، Mg ، Zn ، Cd ، یا آهن دوظرفیتی، این فریتها به صورت ساختار بلوری پیچیده‌ای متبلور می‌شوند که به ساختار امپینل موسوم است. مثال کلاسیک فریت، کانه آهن مغناطیسی یا مغناطیس معدنی (Fe_2O_4) است که از زمانهای قدیم شناخته شده است.



شکل ۶.۱۰ نمایش طرحواره اسپینهای اتمی در ساختارهای اسپینی منظم: (الف) فرومغناطیس، (ب) پاد فرومغناطیس، (ج) فری مغناطیس.

فریتها از نظر فنی اهمیت فوق العاده‌ای دارند، زیرا علاوه بر مغناطش اشباع نسبتاً بزرگشان از نظر رسانایی الکتریکی ضعیف‌اند. لذا در فرکانسهای بالا، که اتلاف ناشی از جریان گردابی در مواد رسانا مسئله‌ای جدی محسوب می‌شود، از آنها می‌توان استفاده کرد. مقاومت ویژه فریتها نوعاً در محدوده ۱ تا ۱۰^۴ اهم متر است؛ به منظور مقایسه، مقاومت ویژه آهن تقریباً ۱۰^{-۷} اهم متر است.

۷.۱۰ خلاصه مطالب

مغناطش ماکروسکوپی M يك ماده مغناطیسی از گشتاور دو قطبی مغناطیسی مولکولی (یا مؤلفه آن) ناشی می‌شود، و این گشتاور در پاسخ به میدان موضعی در مکان مولکول، یعنی میدان مولکولی H_m ، به وجود می‌آید. میدان مولکولی به میدان خارجی H و نیز به خود مغناطش بستگی دارد. سهم مربوط به مغناطش، که از میدانهای مغناطیسی دو قطبی همه مولکولهای دیگر ناشی می‌شود، و در قیاس با مورد دی‌الکتریک نتیجه زیر را به دست می‌دهد

$$H_m = H + \frac{1}{3}M$$

برای اکثر مواد خطی تا حد قابل چشمپوشی کوچک است. علت این امر کوچک بودن پذیرفتاری مغناطیسی در رابطه زیر است

$$M = \chi_m H$$

با این همه در مواد فرومغناطیس مغناطش خود به خود وجود دارد، زیرا سهم مغناطش در میدان مولکولی مؤثر ضریبی به مراتب بزرگتر از ۱/۳ دارد.

۱. همه مولکولها در اثر تغییر شکل توزیع بار الکترونی در يك میدان مغناطیسی گشتاور دو-قطبی مغناطیسی القایی پیدا می‌کنند. پاسخ همیشه طوری است که میدان خارجی را تضعیف می‌کند، یعنی سهم (دیامغناطیسی) مربوط در پذیرفتاری همیشه منفی است. بایک تقریب خطی به پذیرفتاری دیامغناطیسی ثابت می‌رسیم

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e} \sum_i R_i$$

۲. مولکولهایی که گشتاور دو قطبی مغناطیسی دائم m دارند يك اثر اضافی مربوط به سم‌گیری عرضه می‌کنند. مانند مورد مولکولهای قطبی در يك میدان الکتریکی، این اثر به طور تقریبی به وسیله تابع لانژون توصیف می‌شود. جز در نزدیکی صفر مطلق، پذیرفتاری

پارا مغناطیسی حاصل برابر است با

$$\chi_m = \frac{Nm_0\mu_0}{3kT}$$

۳. برای درک فرومغناطیس، فرض می شود

$$H_m = H + \gamma M$$

که در آن $\gamma \gg 1/3$. (این قسمت از يك انرژی مکانیک کوانتومی ناشی می شود، که به سمتگیری نسبی گشتاورهای مغناطیسی اسپینی بستگی دارد؛ این انرژی به انرژی مغناطیسی $H \cdot m_0$ اضافه می شود و بنابراین می توان آن را بر حسب يك میدان مغناطیسی مؤثر توصیف کرد، گرچه منشأ آن الکتروستاتیکی است.) در این صورت تا وقتی که T کمتر از دمای کوری باشد، جوابی با $H = 0$ ، $M \neq 0$ در این معادله و معادله لانژون صدق می کند.

۴. حتی در دمایی پایینتر از دمای کوری، يك قطعه با ابعاد ماکروسکوپی از جسم فرو - مغناطیسی ممکن است به خاطر ساختار حوزه های اش گشتاور مغناطیسی کل نداشته باشد.

مسائل

۱۰۱۰ مگنتون بور به صورت گشتاور مغناطیسی الکترون در حال گردش در «مدار کلاسیک بور» در اتم هیدروژن، تعریف می شود. این مدار، مداری مستدیر است که طول آن دقیقاً برابر يك طول موج دوپودی است و شتاب جذب به مرکز حرکت دایره ای آن به وسیله نیروی جاذبه کولنی تأمین می شود. نشان دهید که يك مگنتون بور برابر است با $eh/4\pi m_e$ که در آن m_e جرم الکترون و h ثابت پلانک است.

۲۰۱۰ مگنتون بور واحد طبیعی اندازه گیری گشتاور مغناطیسی اتم است. گشتاور مغناطیسی در اتم را بر حسب مگنتون بور برای آهن، نیکل و کوبالت در شرایط مغناطش اشباع محاسبه کنید. از داده های جدول ۲۰۹ استفاده کنید.

۳۰۱۰ شدت نسبی برهم کنش بین دو دوقطبی مغناطیسی نوعی را در مقایسه با برهم کنش بین دو دوقطبی الکتریکی نوعی محاسبه کنید. برای روشن شدن: گشتاور نیروی وارد بر يك دوقطبی از طرف دوقطبی دیگر را حساب کنید وقتی که آن دو عمود بر یکدیگر و به فاصله يك آنگستروم از یکدیگر قرار گرفته باشند؛ فرض کنید هر دوقطبی مغناطیسی مساوی ۱ مگنتون - بور، و هر دو قطبی الکتریکی مساوی $e \times (0.1 \text{ \AA})$ باشد. این محاسبه نشان می دهد که مقدار برهم کنش مغناطیسی بنیادی چندین مرتبه بزرگی از برهم کنش الکتریکی در ماده کوچکتر است.

۴.۹۵ پذیرفتاری دیامغناطیسی نئون را در دما و فشار متعارف (صفر درجه سلسیوس و يك اتمسفر فشار) محاسبه کنید. فرض کنید فقط هشت الکترون خارجی در هراتم در این امر سهیم باشند، و شعاع متوسط مدار این الکترونها $R = 40 \times 10^{-9} \text{ cm}$ باشد.

۵.۹۵ مغناطش يك جسم فرومغناطیس در دمای کوری به صفر می رسد. در شکل ۱.۱۰ دمای کوری با خط راستی که در مبدأ مختصات بر تابع لانژون مماس است نمایش داده می شود. با استفاده از مقدار تجربی دمای کوری برای آهن، γ آهن را تعیین کنید.

۶.۹۵ طبق تعریف نسبت ژیرومغناطیسی يك توزیع جریان عبارت است از نسبت گشتاور مغناطیسی به اندازه حرکت زاویه ای آن. نسبت ژیرومغناطیسی کره ای به جرم M و بار Q را که با سرعت زاویه ای ω حول محوری که از مرکز آن می گذرد می چرخد، محاسبه کنید. فرض کنید جرم به طور یکنواخت در سراسر حجم کره، و بار الکتریکی به طور یکنواخت در سطح کره توزیع شده است.

القای الکترومغناطیسی

القای نیروی محرکه الکتریکی توسط تغییر شار مغناطیسی برای اولین بار در اوایل قرن نوزدهم توسط فاراده و هنری مشاهده شد. برپایه آزمایشهای این دانشمندان دستگاههای جدید امروزی از قبیل مولدها، میدلها و مانند آنها به وجود آمده اند. این فصل به طور عمده به فرمولبندی ریاضی قانون القای الکترومغناطیسی و کاربرد آن در موارد ساده می پردازد. معادله مشخصه الکتروستاتیک عبارت بود از

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

یا صورت انتگرالی آن

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

این معادلات مستقیماً از قانون کولن نتیجه می شوند، و نیروی مغناطیسی ناشی از جریانهای پایا در آنها تغییری ایجاد نمی کند. لیکن، این معادلات برای میدانهای کلترکه وابسته به زمان اند به کار نمی روند، و ما در این فصل همین میدانها را بررسی می کنیم. نیروی محرکه الکتریکی، یا emf، به دور یک مدار را به صورت زیر تعریف می کنیم

@Quark_Book

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}$$

این emf، برای میدانهای E و B ایستا همیشه برابر با صفر بود. اکنون مواردی را بررسی می‌کنیم که این کمیت صفر نیست. از آنجا که میدان E را نمی‌توانیم به کمک قانون کولن تعریف کنیم، لذا این سؤال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان آن را تعریف کرد. این میدان به گونه‌ای تعریف می‌شود که نیروی لورنتس، یعنی

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

همیشه برابر با نیروی الکترومغناطیسی وارد بر بار آزمون q باشد.

۱۰۱۱ القای الکترومغناطیسی

نتایج حاصل از تعداد زیادی آزمایش را می‌توان چنین خلاصه کرد که همراه با تغییر شار مغناطیسی در هر مدار، emf به صورت زیر ایجاد می‌شود

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (۲۰۱۱)$$

معلوم شده است که این نتیجه، که به قانون القای الکترومغناطیسی فاساراده موسوم است، به روش تغییر شار مغناطیسی بستگی ندارد - مقدار $\mathbf{B}$ را در نقاط مختلف داخل مدار می‌توان به هر شیوه‌ای تغییر داد. تشخیص این نکته بسیار مهم است که معادله (۲۰۱۱) قانونی است تجربی و مستقل و نمی‌توان آن را از سایر قوانین تجربی به دست آورد، و برخلاف آنچه گاهی گفته می‌شود، این قانون محققاً از کاربرد قانون بقای انرژی در توازن انرژی جریانه‌ها در میدانهای مغناطیسی نتیجه نمی‌شود. چون بنا به تعریف داریم

$$\mathcal{E} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad [۱۰۱۱]$$

و

$$\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۳۰۱۱)$$

معادله (۲۰۱۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۴۰۱۱)$$

اگر مدار صلب و ساکن باشد، مشتق بر حسب زمان را می‌توان به زیرانتگرال برد، که در این

صورت به يك مشتق پاره‌ای بر حسب زمان مبدل می‌شود. به علاوه از قضیه استوکس می‌توان استفاده کرد و انتگرال خطی $\mathbf{E}$ را به انتگرال سطحی $\nabla \times \mathbf{E}$ تبدیل کرد. نتیجه این تبدیلات به صورت زیر است.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (5.11)$$

چون این رابطه برای تمام سطوح ثابت S باید صادق باشد، پس

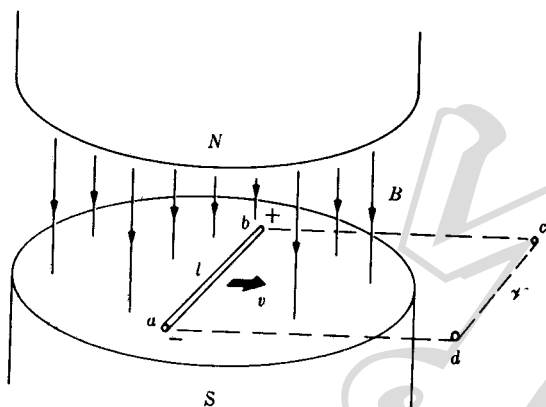
$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.11)$$

که شکل دیفرانسیلی قانون فاراده است. این، تعمیم حالت $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ است که در مورد میدانهای ایستا صادق است. (حالتی که در آن محیط در حرکت است، و سایر مسائل پیچیده‌تر، احتیاج به بررسی دقیقتری دارند که از سطح این کتاب خارج است.) علامت منفی در قانون فاراده حاکی از آن است که emf القایی در جهتی است که با تغییراتی که آن را تولید می‌کنند مخالفت می‌کند، و این امر را به آسانی می‌توان نشان داد. بنا بر این اگر سعی کنیم شار مغناطیسی را در مداري افزایش دهیم، emf القایی جریانهای را در جهتی ایجاد می‌کند که سبب کاهش شار شود. چنانچه سعی کنیم قطب آهنربایی را در حلقه سیم پیچی وارد کنیم، جریانهای تولید شده به وسیله emf القایی میدانی مغناطیسی تولید می‌کنند که تمایل به دفع قطب مزبور خواهد داشت. تمام این پدیده‌ها را می‌توان در قانون لنز خلاصه کرد که به صورت زیر بیان می‌شود

در صورت بروز تغییر در يك دستگاه مغناطیسی، چیزی رخ می‌دهد که با آن تغییر مخالفت می‌کند.

فایده عملی قانون لنز را نباید دست کم گرفت. در بسیاری از موارد این قانون سریعترین راه برای کسب اطلاعات درباره واکنشهای الکترومغناطیسی محسوب می‌شود حتی اگر روشهای دیگری در دسترس باشند، این قانون وسیله باارزشی برای امتحان عرضه می‌کند. برای درك عمیقتر قانون فاراده شاید مفید باشد که مثالی را در نظر بگیریم که معمولاً به عنوان نمونه‌ای از این قانون تلقی می‌شود، لیکن آن را می‌توان به طور کامل بر حسب نظریه الکتروستاتیک که در فصلهای پیش تکوین یافت، تحلیل کرد. فرض کنید که سیم فلزی مستقیمی به طول l ، با سرعت v در راستایی عمود بر طولش حرکت می‌کند. مطابق شکل ۱۰۱۱، فرض کنید میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ در جهت عمود بر صفحه‌ای که سیم در آن حرکت می‌کند، وجود دارد. بر بارهای آزاد سیم نیروی لورنتس وارد می‌شود

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.11)$$



شکل ۱۰۱۱ ولتاژ تولید شده توسط سیمی که در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند.

این نیرو به علت وجود جمله $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ، سبب می‌شود بارهای مثبت و منفی به دو انتهای متقابل سیم رانده شوند. در حالت پایا، وقتی بارهای آزاد نسبت به سیم حرکت نمی‌کنند، نیروی کل وارد بر هر یک از بارها باید برابر با صفر باشد؛ یعنی، نیروی مغناطیسی در هر نقطه از سیم باید با یک نیروی الکتریکی به همان بزرگی ولی با علامت مخالف، که ناشی از جدایی بارهاست، در توازن باشد

$$E = vB \quad (۸.۱۱)$$

اگر میدان B یکنواخت باشد، آنگاه E در امتداد سیم ثابت است، و اختلاف پتانسیل بین دو سر سیم برابر است با

$$\Delta\phi = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = El \quad (۹.۱۱)$$

اگر این اختلاف پتانسیل را $\mathcal{V}$ بنامیم، آنگاه از ترکیب (۸.۱۱) با (۹.۱۱) رابطه زیر نتیجه می‌شود

$$\mathcal{V} = Blv \quad (۱۰.۱۱)$$

در این مثال میدان B مستقل از زمان است، و بنا بر این $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ و $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ به مسیر بستگی ندارد؛ به ویژه، اگر مدار $abcd$ را در نظر بگیریم که تا خارج از میدان مغناطیسی ادامه دارد، آنگاه اختلاف

پتانسیل در امتداد مسیر $bcda$ نیز $\mathcal{V}$ است. در واقع، اگر bc و da توسط سیمهای کاملاً رسانا متصل شوند، $\mathcal{V}$ برابر خواهد بود با ولتاژ بین دوسر c و d واقع در خارج میدان مغناطیسی. با توجه به این که شار Φ در مدار $abcd$ مطابق با رابطه

$$d\Phi/dt = B dA/dt = B l dx/dt = -Blv$$

تغییر می کند، سمت راست معادله (۱۰.۱۱) را می توان طور دیگری بیان کرد. به این ترتیب

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11.11)$$

که درست به صورت قانون فاراده، یعنی معادله (۲.۱۱) است، با این تفاوت که $\mathcal{V}$ به مفهومی که در (۱۰.۱۱) تعریف شد emf نیست، زیرا برای هر مدار بسته مربوط به این مسئله $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ است. با نوشتن معادله (۱۰.۱۱) بر حسب نماد گذاری برداری، این معادله را می توانیم تعمیم دهیم. اگر جهت $\mathbf{v}$ نسبت به $\mathbf{l}$ اختیاری باشد، آن وقت تنها آن مؤلفه از $\mathbf{v}$ که بر $\mathbf{l}$ عمود است در $\mathcal{V}$ سهم خواهد بود. از این رو $\mathcal{V}$ متناسب است با $\mathbf{l} \times \mathbf{v}$. برای $\mathbf{B}$ اختیاری، فقط مؤلفه ای که بر صفحه $\mathbf{l}$ و $\mathbf{v}$ عمود باشد در $\mathcal{V}$ سهم خواهد بود. چون $\mathbf{l} \times \mathbf{v}$ بر صفحه $\mathbf{l}$ و $\mathbf{v}$ عمود است، $\mathcal{V}$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{V} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v} \quad (12.11)$$

ولتاژ داده شده در معادله (۱۲.۱۱) را گاهی emf حرکتی می نامند.

اکنون این مسئله را از دید سیم بررسی می کنیم، یعنی، فرض کنیم که در دستگاه مختصاتی باشیم که با سیم حرکت می کند؛ به این ترتیب در این دستگاه، سیم ساکن است و آهنربا با سرعت $\mathbf{v}$ به سمت چپ در شکل ۱۰.۱۱ حرکت می کند. به آسانی می توان قبول کرد که، اگر با سیم حرکت کنیم، باز هم همان جدایی بارها و همان اختلاف پتانسیل بین دوسر سیم را مشاهده خواهیم کرد. لیکن توضیح مسئله به کلی متفاوت است؛ در این دستگاه هیچ نیروی مغناطیسی نمی تواند وجود داشته باشد، زیرا سیم ساکن است. از طرفی میدان مغناطیسی، دیگر نسبت به زمان ثابت نیست. در هر نقطه، با عبور لوله متحرک آهنربا از آن نقطه، میدان مغناطیسی از B به تقریباً صفر تغییر می کند. خواهیم دید که معادله تغییر یافته تاو، یعنی معادله (۶.۱۱)، به تنهایی کافی است تا همین نتیجه $\mathcal{V}$ را برای اختلاف پتانسیل در این دستگاه مختصات نیز به دست آوریم. در حالت پایا نیروی وارد بر بار آزاد داخل سیم باید همچنان برابر صفر باشد

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = 0$$

میدان مغناطیسی وجود ندارد زیرا $\mathbf{v} = 0$. بنابراین میدان الکتریکی باید در داخل سیم صفر باشد

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} = \mathbf{E}_\lambda + \mathbf{E}_\gamma \quad (13.11)$$

در این حالت نیز یک میدان $\mathbf{E}_\lambda$ ناشی از جدایی بارها موجود است که با میدانی که در مورد پیش داشتیم یکسان است؛ این میدان در داخل سیم با میدان $\mathbf{E}_\gamma$ وابسته به میدان مغناطیسی متغیر خنثی می‌شود

$$\nabla \times \mathbf{E}_\gamma = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

اگر مجدداً منحنی بسته $abca$ را در نظر بگیریم

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= 0 + \mathcal{V} \end{aligned}$$

جمله اول در طرف راست صفر است زیرا $\mathbf{E}$ در داخل سیم صفر است، و انتگرال دوم در امتداد مسیر $bcda$ چیزی است که ما آن را در مورد پیش، $\mathcal{V}$ نامیدیم. بنابراین از اینجا و از رابطه (۲.۱۱) دوباره نتیجه می‌گیریم که

$$\mathcal{V} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad [11.11]$$

پس معادلهٔ تعمیم یافتهٔ $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ ، یعنی (۶.۱۱)، همراه با معادلهٔ (۷.۱۱) برای نیروی لورنتس، در هریک از دو دستگاه مختصات لخت نتیجهٔ یکسان، یعنی معادلهٔ (۱۱.۱۱)، را به دست می‌دهد. بنابراین معادلهٔ (۶.۱۱) اعتبار عمومی دارد. چون نتیجهٔ انتگرالی معادلهٔ (۱۱.۱۱) در هر دو دستگاه مختصات صدق می‌کند، لذا غیر منطقی نخواهد بود اگر آن را در هر دو مورد قانون فاراده بنامیم، اگرچه به معنی دقیق کلمه، فقط در مورد دوم است که یک $\mathbf{emf}$ ، بنا به تعریف (۱۱.۱۱)، وجود دارد. در برخی موارد ممکن است مستقیماً معلوم نباشد که برای محاسبهٔ Φ در معادلهٔ (۱۱.۱۱) چه مداری باید به کار رود، مسئلهٔ ۴.۱۱ مثالی است از این موارد. معادلاتی که همواره در تمام دستگاه‌های مختصات لخت برای میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ صادق اند عبارت‌اند از معادلات (۶.۱۱) و (۷.۱۱). به هنگام تعیین $\mathbf{emf}$ یا « $\mathbf{emf}$ حرکتی»

۱. در فصل ۲۲، از دید دیگر، درخواهیم یافت که میدان $E_\gamma = vB$ که در معادلات (۸.۱۱) و (۱۳.۱۱) صدق می‌کند، از تبدیل نسبیتی لورنتس میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در دستگاه مختصات «متحرک» ناشی می‌شود. به جای نیروی مغناطیسی که در دستگاه «متحرک» صفر می‌شود، نیروی مربوط به این میدان قرار می‌گیرد.

اگر از این معادلات استفاده کنیم هیچ ابهامی به وجود نخواهد آمد. این مثال از آن رو که یک نمونه اصلی از مدارهای الکتریکی عملی است درخور توجه بیشتری است. اگر بین دوسر c و d مقاومتی قرار گیرد، جریان I در مدار برقرار می‌شود.^۱ در این مورد یک نیروی مکانیکی وارد بر سیم (یا بر آهنربا، در مورد دوم) لازم است تا سرعت ثابت v را حفظ کند، به طوری که مجموع نیروی خارجی و نیروی مغناطیسی BII وارد بر سیم برابر با صفر شود. توان ورودی نیروی مکانیکی خارجی توان تلف شده $I^2 R$ را در مقاومت جبران می‌کند. تا آنجا که به ولتاژ دو سر c و d مربوط است، فرقی نمی‌کند که در مولد، سیم حرکت کند یا آهنربا (معمولاً سیم حرکت می‌کند). در هر یک از دو مورد، برای هر مسیری که میدان مغناطیسی مولد را احاطه نکند (به ویژه، هر مسیر محدود به فضای آزمایشگاه) داریم $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. در دو مثال مورد بحث ما، معادله تعمیم یافته زیر

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [۶.۱۱]$$

برای هر دو مورد صادق است؛ در اینجا در دستگاه مختصات آهنربا $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ بود، و لذا یک تحلیل الکتروستاتیکی امکان پذیر شد. لیکن غلط خواهد بود اگر نتیجه گیری کنیم که همواره می‌توان دستگاه مختصاتی یافت که در آن $\partial \mathbf{B} / \partial t$ برابر صفر شود. مثال سوم، که بر شکل ۱۰۱۱ مبتنی است، این نکته را نشان خواهد داد. فرض کنید که نه سیم حرکت می‌کند و نه آهنربا؛ لیکن فرض کنید آهنربا یک آهنربای الکتریکی است که بزرگی میدان آن را می‌توان با افزایش یا کاهش جریان در سیم پیچهایش زیاد یا کم کرد. اکنون دیگر هیچ دستگاه مختصاتی یافت نمی‌شود که در آن $\partial \mathbf{B} / \partial t$ صفر شود. با این همه، معادله (۶.۱۱) باز هم صادق است، و قانون فاراد، یعنی معادله (۲.۱۱)، $\mathcal{E}$ را برای هر مدار (مثلاً، $abcd a$) بدست می‌دهد. در مبدلها و سایر وسایلی که اجزای آنها حرکت مکانیکی ندارند، یعنی در وسایلی که موضوع بقیه این فصل را تشکیل می‌دهند، وضعیت چنین است.

۲.۱۱ خود القای

در این بخش رابطه بین شار مغناطیسی و جریان وابسته به یک مدار منزوی را بررسی می‌کنیم و از آن برای معرفی یک پارامتر مدار، یعنی خود القای، استفاده می‌کنیم. شار مغناطیسی که از یک مدار منزوی می‌گذرد به شکل هندسی این مدار بستگی دارد، و مطابق معادله (۲.۶.۸)

۱. البته، به سبب طول متناهی آهنربا، این مولد نمی‌تواند از نظر عملی یک مولد جریان مستقیم محسوب شود؛ اما اگر سیم به عقب و جلو حرکت کند، جریانی متناوب تولید خواهد شد (ر.ک. مسئله ۵.۱۱).

تابعی است خطی از جریان مدار. بنا براین برای هر مدار صلب و ساکن تغییرات شار فقط از تغییرات جریان ناشی می‌شود. یعنی

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (14.11)$$

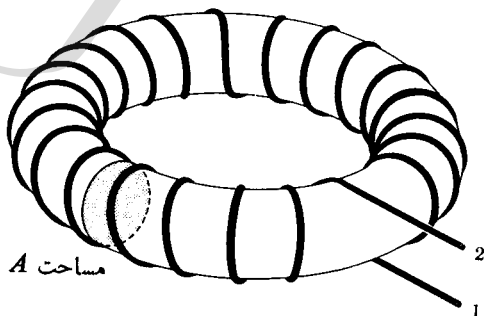
این معادله حتی وقتی که معادله (۲۶.۸) هم برقرار نباشد صادق خواهد بود، تنها شرط آن است که Φ فقط به جریان بستگی داشته باشد. اما اگر معادله (۲۶.۸) معتبر باشد، یا به‌طور کلیتر، چنانچه Φ مستقیماً با جریان متناسب باشد، در آن صورت $d\Phi/dI$ مقدار ثابتی است برابر با Φ/I . در هر حال، خود القا، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \quad (15.11)$$

وقتی تمیز بین این مقدار و Φ/I ضروری باشد، $d\Phi/dI$ را القای نهوی می‌گویند؛ به هر حال بهتر است واژه القا (یا خود القا) به معادله (۱۵.۱۱) اطلاق شود، مگر اینکه تعریف دیگری در نظر بسازد. از معادله‌های (۱۴.۱۱)، (۱۵.۱۱) و (۲.۱۱) معلوم می‌شود که عبارت مربوط به emf القایی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (16.11)$$

که ارزش عملی قابل توجهی دارد.
به‌عنوان مثالی از کاربرد معادله (۱۵.۱۱) برای محاسبه القا، خود القای یک پیچ



شکل ۲۰۱۱ یک سیم پیچ چنبره‌ای

چنبره‌ای را محاسبه می‌کنیم. این پیچه در شکل ۲۰.۱۱ نشان داده شده است. معادله (۱۵.۱۱) برای همه مدار به کار می‌رود، یعنی نه تنها برای پیچه چنبره‌ای در شکل ۲۰.۱۱، بلکه همچنین برای مدار خارجی که به دوسر ۱ و ۲ وصل می‌شود. با به کار بردن سرهای تاب خورده یا یک کابل هم‌محور، که در واقع هیچ میدان مغناطیسی خارجی تولید نمی‌کنند، قسمت مولد میدان مدار خارجی را می‌توان به فواصل حتی الامکان دوردست انتقال داد تا در شار پیچه چنبره‌ای تأثیری نداشته باشد. هرگاه این کار انجام شود، هرگاه منظورمان از emf همان ولتاژ بین دوسر ۱ و ۲ باشد، آنگاه می‌توانیم از معادله (۱۵.۱۱) برای محاسبه القای پیچه چنبره‌ای استفاده کنیم. مطابق قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی در درون پیچه چنبره‌ای به صورت زیر است

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \quad (۱۷.۱۱)$$

که در آن N تعداد دورها، l طول متوسط و I شدت جریان در سیم پیچ است. (معادله‌های (۱۷.۱۱) و (۱۸.۱۱) تقریبی هستند زیرا در آنها از تغییرات میدان مغناطیسی در سطح مقطع صرف نظر شده است. در مسئله ۱۸.۱۱ جزئیات این تقریب در نظر گرفته شده است.) بنا بر این شاری که از هر دور سیم پیچ می‌گذرد عبارت است از

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 NIA}{l} \quad (۱۸.۱۱)$$

و مقدار کل شار برای N دور برابر است با

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} I \quad (۱۹.۱۱)$$

در نتیجه القا به آسانی به صورت زیر به دست می‌آید

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (۲۰.۱۱)$$

یکای القا در دستگاه mks هنری است، که بر طبق معادله (۱۶.۱۱) برابر است با یک ولت ثانیه بر آمپر، زیرا واحد emf ولت است. معادله (۲۰.۱۱) نشان می‌دهد که ابعاد μ_0 را، که قبلاً به صورت وبر بر آمپر-متر یا تسلا-متر بر آمپر داده شده بود، می‌توان بر حسب هنری بر متر نیز نوشت.

۳.۱۱ القای متقابل

در بخش گذشته فقط مدارهای منزوی بررسی شد، به طوری که همه شارهای که از مسداز می گذشت ناشی از جریان خود مدار بود. این محدودیت را با فرض اینکه n مدار به شماره های ۱، ۲، ... وجود داشته باشند، می توان از بین برد. در این صورت شارهای را که از یکی از این مدارها، مثلاً مدار i ام، می گذرد می توان چنین نوشت

$$\Phi_i = \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \dots + \Phi_{ii} + \dots + \Phi_{in} = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} \quad (21.11)$$

یعنی، می توان آن را به صورت مجموع شارهای ناشی از هر یک از n مدار در نظر گرفت، که در آن شار Φ_{i1} شار است که از i امین مدار در اثر مدار ۱ می گذرد، و به همین ترتیب. بنابراین emf القا شده در i امین مدار، یعنی $\mathcal{E}_i$ را می توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\frac{d\Phi_i}{dt} = -\left\{ \frac{d\Phi_{i1}}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_{ii}}{dt} + \dots + \frac{d\Phi_{in}}{dt} \right\} \\ &= -\sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dt} \end{aligned} \quad (22.11)$$

اگر هر مدار ساکن و صلب باشد، تغییرات Φ_{ij} ها فقط ناشی از تغییرات جریانها خواهند بود، یعنی

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt} \quad (23.11)$$

در صورتی که معادله (۲۶.۸) صادق باشد، آن وقت ضرایب $d\Phi_{ij}/dI_j$ ثابتهایی مستقل از جریان خواهند بود. چنانچه این ضرایب ثابت نباشند، ممکن است به سبب غیر خطی بودن محیط مغناطیسی وابسته به مدار، به جریان بستگی داشته باشند. به هر حال کمیت زیر

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}, \quad i \neq j \quad (24.11)$$

به عنوان القای متقابل مدارهای i و j تعریف می شود. بعداً خواهیم دید که $M_{ij} = M_{ji}$ و در نتیجه در اشخاصها هیچ گونه ابهامی به وجود نخواهد آمد. البته $d\Phi_{ii}/dI_i$ همان خود القای مدار i ام است که با نمادهای L_i یا M_{ii} نشان داده می شود. یکی القای متقابل بایکای خود القای یکی است، یعنی همان هنری است.

به عنوان مثال محاسبه القای متقابل، پیکربندی شکل ۲۰-۱۱ را در نظر می گیریم که به آن پیچۀ چنبره‌ای دیگری با N_2 دورسیم اضافه شده باشد. برای این حالت وجود جریان I_1 درسیم پیچ اول، میدان مغناطیسی زیر

$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

و در نتیجه شارهای

$$\Phi_{11} = \frac{\mu_0 N_1^2 A I_1}{l}$$

و

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A I_1}{l}$$

را تولید می کند. از این شارها نتیجه می گیریم که

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{l} \quad (25.11)$$

که همان نتیجه قبل است، و

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad (26.11)$$

با معکوس کردن این روش و در نظر گرفتن جریان I_2 خواهیم داشت

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{l} \quad (27.11)$$

و

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \quad (28.11)$$

که اثباتی است براینکه برای این مورد $M_{12} = M_{21}$. به علاوه، از ترکیب معادله‌های (۲۵.۱۱)، (۲۶.۱۱) و (۲۷.۱۱) نتیجه می گیریم که

@Quark_Book

$$M_{12} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (29.11)$$

معادله (۲۹.۱۱) حدی است برای القای متقابل دومدار، بدین معنی که همیشه القای متقابل مساوی یا کمتر است از ریشه دوم حاصلضرب خودالقاهای دو مدار. با توجه به این حد، غالباً يك ضریب k ، به نام ضریب جفت شدگی، به صورت زیر تعریف می شود

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad , \quad |k| \leq 1 \quad (۳۰.۱۱)$$

۴.۱۱ فرمول نویم

برای دومدار صلب وساکن در يك محیط خطی (برای مقاصد فعلی، خلاصه) القای متقابل به صورت زیر نوشته می شود

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} \quad (۳۱.۱۱)$$

این رابطه بدان جهت معتبر است که Φ_{21} با I_1 متناسب است، و به همین علت Φ_{21}/I_1 با $d\Phi_{21}/dI_1$ برابر می شود. در این حالت معادله (۲۶.۸) را برای محاسبه M_{21} می توان به کار برد. شارمغناطیسی با رابطه زیر داده می شود

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right\} \cdot \mathbf{n} \, da_2 \quad (۳۲.۱۱)$$

اما

$$\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (۳۳.۱۱)$$

پس

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \nabla_2 \times \left\{ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right\} \cdot \mathbf{n} \, da_2 \quad (۳۴.۱۱)$$

با به کار بردن قضیه استوکس برای تبدیل انتگرال سطحی، خواهیم داشت

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (۳۵.۱۱)$$

که به فرمول نویم برای القای متقابل مشهور است. تقارنی که قبلاً بدان اشاره شد اکنون

از معادله (۳۵.۱۱) معلوم می‌شود. فرمول نویسن برای خود القا نیز به کار می‌رود، و در این صورت آن را به شکل زیر می‌نویسند

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_1} \frac{dl_1 \cdot dl'_1}{|r_1 - r'_1|} \quad (36.11)$$

در کاربرد معادله (۳۶.۱۱) باید تاحدی دقت کرد زیرا که $r_1 = r'_1$ يك تکیه است، اما اگر توجه کافی شود، این معادله گاهی مفید خواهد بود. کاربرد معادله‌های (۳۵.۱۱) و (۳۶.۱۱) برای محاسبه القای معمولاً کار مشکلی است، مگر در مورد مدارهایی که شکل هندسی آنها ساده باشد. اما خصوصاً معادله (۳۵.۱۱) در مطالعه نیروها و گشتاور نیروهای وارد از مداری به مدار دیگر بسیار اهمیت دارد. از این نوع کاربرد در فصل ۱۲ استفاده خواهد شد.

۵.۱۱ القاگرها در اتصالهای متوالی و موازی

القاگرها را غالباً به طور متوالی و موازی به یکدیگر متصل می‌کنند، و نظیر اتصال مقاومتها و خازنها، دانستن نتیجه این نوع اتصالها مهم است. می‌توانیم از معادله $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$ شروع کنیم و القای مؤثر دو القاگر در اتصال موازی یا متوالی را به دست آوریم؛ اما چنین کاری به معنی نادیده گرفتن این واقعیت عملی است که يك القاگر همیشه مقاومت داخلی دارد. ساخت يك القاگر کامل از نظر عملی خیلی مشکلتراز ساخت يك خازن و یا يك مقاومت کامل است. به همین دلیل در این بخش در ترکیبهای متوالی و موازی القاگرها همواره مقاومتها را نیز منظور می‌کنیم.

برای دو القاگر متوالی، مدار شکل ۳.۱۱ مناسب است. در تعیین حاصل جمع افت ولتاژها در طول مدار لازم است توجه شود که M می‌تواند مثبت یا منفی باشد (با تغییر جهت هر يك از مدارهای C_1 یا C_2 ، علامت M در معادله (۳۵.۱۱) تغییر می‌کند). با در نظر گرفتن این نکته، مجموع افت ولتاژها برای شکل ۳.۱۱ چنین خواهد بود

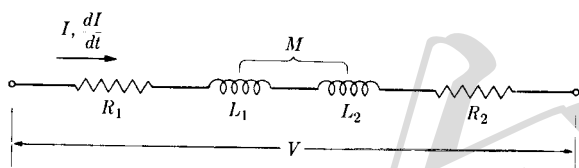
$$V + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = R_1 I + R_2 I$$

یا

$$V = R_1 I + L_1 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} + R_2 I + L_2 \frac{dI}{dt} + M \frac{dI}{dt} \quad (37.11)$$

@Quark_Book
H--M

این رابطه معادل است با



شکل ۳۰۱۱ اتصال متوالی دو القاگر

$$V = (R_1 + R_2)I + (L_1 + L_2 + 2M)\frac{dI}{dt} \quad (38.11)$$

پس این مدار شبیه آن است که مقاومتی که مقدار آن برابر $R_1 + R_2$ است با القاگری که خود القای آن برابر $L_1 + L_2 + 2M$ است، به طور متوالی بسته شده باشد. مقدار القای برای جفت شدگی مثبت (یعنی برای حالتی که شارهای ناشی از I_1 و I_2 در دو پیچچه همجهت اند) مساوی $L_1 + L_2 + 2|M|$ است، و برای جفت شدگی منفی مساوی $L_1 + L_2 - 2|M|$ است. راه دیگری برای بیان القای متقابل عبارت است از

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad -1 \leq k \leq 1 \quad (39.11)$$

بنابراین القای مؤثر مدار متوالی برابر است با

$$L_{\text{مؤثر}} = L_1 + 2k\sqrt{L_1 L_2} + L_2 \quad (40.11)$$

اگر بتوانیم k را تغییر دهیم می توانیم يك القاگر متغیر بسازیم. (در اوایل پیدایش رادیو، این یکی از راههای متداول برای میزان کردن مدارهای تشدید بود؛ فصل ۱۳ را ببینید.) اتصال موازی که در شکل ۴۰۱۱ نشان داده شده است به سادگی مدار متوالی نیست در حقیقت مداری که نشان داده شده است مانند يك مدار متوالی ساده $L - R$ رفتار نمی کند. بنابراین، نمی توان گفت که القای مؤثر و مقاومت مؤثر توابعی از L_1 ، L_2 ، R_1 ، و R_2 هستند. لیکن هرگاه R_1 و R_2 قابل چشمپوشی باشند، آنگاه خواهیم داشت

$$V = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

$$V = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \quad (41.11)$$

اگر ابتدا dI_1/dt و سپس dI_2/dt را بین دو معادله (۴۱.۱۱) حذف کنیم، نتیجه می گیریم که

$$V(L_2 - M) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_1}{dt}$$

$$V(L_1 - M) = (L_1 L_2 - M^2) \frac{dI_2}{dt} \quad (42.11)$$

پس از جمع کردن این دو، به دست می آوریم

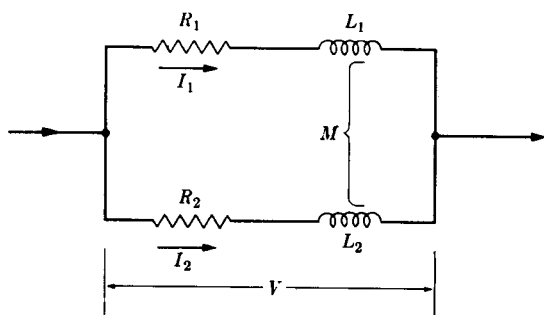
$$V = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{dI}{dt} \quad (43.11)$$

بنابراین القای مؤثر دو القاگر موازی عبارت است از

$$L_{\text{مؤثر}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (44.11)$$

که در آن بازهم علامت M بستگی به نحوه اتصال القاگرها دارد.

مهمترین مورد استفاده القاگرها در مدارهایی است که جریان متناوب دارند. برای مداری که در فرکانس خاصی کار می کند، مدار متوالی معادلی برای شکل ۴.۱۱ می توان پیدا کرد؛ اما، هم مقاومت معادل و هم القای معادل، هر دو، تابعی از فرکانس اند. همین بستگی آنها به فرکانس ریشه اشکالی است که قبلاً با آن روبه رو شدیم.



شکل ۴.۱۱ اتصال موازی دو القاگر.

۶.۱۱ خلاصه مطالب

در این فصل گامی فراتر از میدانهای ایستا برمی داریم و به مورد موسوم به میدانهای کند تغییر می پردازیم. تعمیم جدید معادلات میدان به صورت زیر است

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

این سومین معادله از معادلات چهارگانهٔ ماکسول است، که همراه با دو معادلهٔ واگرایی و نیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

همیشه برقرار است. (در این مرحله از به دست آوردن معادلات اساسی الکتریسته و مغناطیس، سه تا از چهار معادلهٔ ماکسول را به صورت نهایی در دست داریم. تنها لازم است که معادلهٔ $\mathbf{H}$ و نیز تعمیم داده شود.) این معادله به صورت دیفرانسیلی قانون فاراده معروف است؛ صورت انتگرالی آن عبارت است از

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

که در آن $\mathcal{E}$ عبارت است از emf به دور مدار ثابت C که بارابطهٔ زیر تعریف می شود

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

(ممکن است در برخی مسائل چنین پیش آید که بتوان دستگاه مختصات متحرکی یافت که در آن $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ باشد، و در نتیجه بتوان مسئله را به طریق الکتروستاتیکی تحلیل کرد، لیکن همواره لزوماً چنین وضعی پیش نمی آید.)

۱. آسانترین راه برای تعیین قطبیت درست يك ولتاژ القایی به کاربردن قانون لنز است.

۲. «emf حرکتی» سیم مستقیمی که در يك میدان مغناطیسی حرکت می کند برابر است با

$$\mathcal{V} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v}$$

۳. خود القای يك مدار (یا عنصر مداری) ثابت به صورت زیر تعریف می شود

$$L = \frac{d\Phi}{dI}$$

به طوری که

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

برای يك سیم پیچ چنبره‌ای (یا يك سیملوله طویل)، L به آسانی به صورت زیر به دست می آید

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

۴. القای متقابل دومدار به صورت زیر تعریف می شود

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}$$

به این ترتیب نتیجه می شود که

$$M_{ii} = L_i$$

و

$$M_{12} = M_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad |k| \leq 1$$

۵. القای معادل برای اتصال متوالی یا موازی القاگرهای خالص مطابق با فرمولهای مربوط در مورد مقاومتهاست، به شرط آنکه بتوان از القای متقابل و مقاومت ذاتی آنها صرف نظر کرد.

مسائل

۱.۱۱ يك رسانای فلزی به شکل قطعه سیمی به طول l با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ حرکت می کند. با بررسی تفصیلی نیروی لورنتس وارد بر الکترونهای درون سیم، نشان دهید که اختلاف پتانسیل دو انتهای سیم برابر است با: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{v}$.

۲.۱۱ يك میله فلزی به طول يك متر حول محوری که از يك انتهای میله و عمود بر آن می گذرد، با سرعت زاویه‌ای 12 rad/s می چرخد. صفحه دوران میله بر يك میدان

مغناطیسی یکنواخت T ۳۰ عمود است. emf حرکتی القایی بین دو انتهای میله را پیدا کنید.

۳.۱۱ در یک دستگاه شتابدهنده بتاترون، یونی به بار q و جرم m مداری مستدیر را در فاصله R از محور تقارن دستگاه، می‌پیماید. میدان مغناطیسی تقارن استوانه‌ای دارد، یعنی در صفحه مدار مؤلفه z میدان به صورت $B_z = B(r)$ است، که r فاصله تا محور تقارن است. نشان دهید که سرعت یون $v = qB(R)R/m$ است. اگر بزرگی میدان مغناطیسی کم کم افزایش یابد، نشان دهید که emf القایی در مدار یون طوری است که یون را شتابدار می‌کند. نشان دهید که برای اینکه یون در مدار خودش باقی بماند تغییرات شعاعی میدان B در نقاط داخل مدار در شرط زیر صدق می‌کند: میانگین فضایی افزایش $B(r)$ (وقتی میانگین بر روی سطح محصور توسط مدار محاسبه شود) باید برابر باشد با دو برابر افزایش $B(R)$ در همان بازه زمانی.

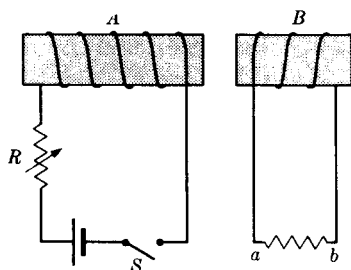
۴.۱۱ مولد همقطب فاراده متشکل است از دیسکی فلزی که در یک میدان مغناطیسی یکنواخت و عمود بر صفحه دیسک، می‌چرخد، نشان دهید که اختلاف پتانسیل ایجاد شده بین مرکز دیسک و محیط آن برابر است با $\mathcal{E} = f\Phi$ ، که در آن Φ شار گذرنده از دیسک و f فرکانس چرخش است. اگر f برابر با ۳۰۰۰ دور در دقیقه و $\Phi = 0.1 \text{ Wb}$ باشد، ولتاژ چقدر است؟

۵.۱۱ مولد جریان متناوب تشکیل شده است از پیچه‌ای با N دور سیم پیچ به مساحت A ، که در میدان B حول قطری عمود بر میدان می‌چرخد. فرکانس دوران f است. emf را در پیچه پیدا کنید. اگر $N = 100$ ، $A = 10^{-2} \text{ m}^2$ ، $B = 0.1 \text{ T}$ ، و $f = 2000 \text{ r/min}$ باشد، دامنه ولتاژ متناوب چقدر است؟

۶.۱۱ یک استوانه‌ای الکتریکی با گذردهی $\mathcal{E}$ حول محور خود با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. اگر یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\mathbf{B}$ ، موازی محور استوانه موجود باشد، بار قطبشی القایی در دی الکتریک را به دست آورید.

۷.۱۱ دو مدار جفت شده A ، B در وضعیت شکل ۵.۱۱ قرار گرفته‌اند. با استفاده از قانون لنز جهت جریان القایی در مقاومت ab را در موارد زیر پیدا کنید: (الف) پیچه B را به پیچه A نزدیک کنیم، (ب) مقاومت R را کاهش دهیم، (ج) کلید S را باز کنیم.

۸.۱۱ پیچه‌ای شامل ۱۰۰ دور با مقطع دایره‌ای به طور فشرده پیچیده شده است، به طوری که تمام حلقه‌ها تقریباً در یک صفحه قرار دارند. شعاع متوسط پیچه ۳ سانتیمتر است. پیچه حول یکی از قطرهایش با سرعت زاویه‌ای ۹۰۰ دور در دقیقه می‌چرخد. دیده می‌شود هنگامی که محور دوران قائم است، جذر میانگین مجذور emf حرکتی القایی در پیچه ۵۰ میلی ولت است. چه نتیجه‌ای درباره میدان مغناطیسی زمین در مکان پیچه می‌توانیم بگیریم؟



شکل ۵.۱۱

۹.۱۱ يك ديسك با سرعت زاویه‌ای ω حول محور خود می‌چرخد. ديسك از فلزی با رسانندگی σ ساخته شده، و ضخامت آن t است. ديسك چرخان را بین دو قطب آهنربایی قرار می‌دهیم که میدان مغناطیسی یکنواخت B را بر روی يك سطح مربع شکل کوچک به مساحت a^2 ، و به فاصله متوسط r از محور ديسك، ایجاد می‌کند؛ B بر ديسك عمود است. گشتاور نیروی تقریبی وارد بر ديسك را محاسبه کنید. (برای مقاومت «مدار جریان گردابی» مقدار مناسبی فرض کنید.)

۱۰.۱۱ يك پیچۀ چنبره‌ای شامل N دور، مطابق شکل ۲۰.۱۱، بر روی يك جسم نامغناطیسی پیچیده شده است. اگر شعاع متوسط پیچۀ b ، و شعاع مقطع جسم a باشد، نشان دهید که خود القای پیچۀ $L = \mu_0 N^2 (b - \sqrt{b^2 - a^2})$ است.

۱۱.۱۱ مداری تشکیل شده است از دو پوستۀ استوانه‌ای هم محور به شعاعهای R_1 و R_2 ($R_2 > R_1$) و طول یکسان L ، که به وسیلۀ صفحات انتهایی تخت به هم متصل شده‌اند. بار الکتریکی از يك پوسته پایین می‌رود و از طریق پوستۀ دیگر برمی‌گردد. خود القای این مدار چیست؟

۱۲.۱۱ پیچۀ چنبره‌ای مسئلۀ ۱۰.۱۱ ۱۵۰ دور دارد، $b = 4\text{ cm}$ و $a = 1.5\text{ cm}$ خود. القای پیچۀ بر حسب هنری چقدر است؟

۱۳.۱۱ دو حلقه سیم دایره‌ای کوچک (به شعاعهای a و b) در يك صفحه و به فاصله r از یکدیگر قرار دارند. چنانچه r آن قدر بزرگ باشد که بتوان از تقریب دوقطبی استفاده کرد، القای متقابل بین این دو حلقه را پیدا کنید.

۱۴.۱۱ دو حلقۀ دایره‌ای جریان با محورهای موازی به فاصله r از یکدیگر قرار دارند. فاصله r آن قدر زیاد است که می‌توان از تقریب دوقطبی استفاده کرد. نشان دهید چگونه باید یکی از حلقه‌ها را نسبت به دیگری قرارداد تا القای متقابل آنها صفر شود.

۱۵.۱۱ دودمدار زیرمفروض‌اند: يك سیم راست بسیار طویل، و يك مستطیل به ابعاد h و

d . مستطیل در صفحه‌ای که از سیم می‌گذرد قرار دارد و اضلاع به طول h آن موازی سیم و به فاصله‌های r و $r+d$ از سیم قرار دارند. القای متقابل دومی را محاسبه کنید.

۱۶.۱۱ دومی را زیر مفروضه‌اند: یک سیم مستقیم بسیار طویل، و دایره‌ای به شعاع a . دایره در صفحه‌ای که از سیم می‌گذرد قرار دارد و فاصله مرکز آن تا سیم r است. القای متقابل بین دومی را محاسبه کنید.

۱۷.۱۱ خط انتقالی تشکیل شده است از دو سیم بسیار طویل به شعاع a و به فاصله d از یکدیگر. خود القای این خط در واحد طول را حساب کنید، فرض کنید $d \gg a$ باشد تا بتوان از شار داخل خود سیمها صرف نظر کرد.

۱۸.۱۱ دو حلقه سیم دایره‌ای هم محور به شعاعهای a و b ، به فاصله محوری x از یکدیگر قرار دارند با استفاده از فرمول نویسن نشان دهید که القای متقابل حلقه‌ها برابر است با

$$M = \mu_0 (ab)^{1/2} \left[\left(\frac{r}{k} - k \right) K(k) - \frac{r}{k} E(k) \right]$$

که در آن

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + x^2}$$

و $K(k)$ و $E(k)$ انتگرالهای کامل بیضوی اند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$$

و

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$$

۱۹.۱۱ مسئله قبل را بار دیگر در نظر بگیرید. $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ در فرمول نویسن را مطابق قضیه دو جمله‌ای بسط دهید، و از نتیجه جمله به جمله انتگرال گیری کنید و رابطه زیر را به دست آورید

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2h^3} \left(1 + 3 \frac{ab}{h^2} + \frac{75}{8} \frac{a^2 b^2}{h^4} + \dots \right)$$

که در آن $h^2 = x^2 + (a+b)^2$ است.

۲۰.۱۱ دو مدار با ضرایب خود القای L_1 و L_2 و مقاومت‌های R_1 و R_2 نزدیک یکدیگر

قرار دارند. اگر القای متقابل مدارها M باشد و یک ولتاژ اعمالی $\mathcal{V}$ ناگهان به طور متوالی به یکی از آنها بسته شود، نشان دهید که بار الکتریکی به اندازه $Q = \mathcal{V}M/R_1 R_2$ در مدار دیگر به گردش درمی آید.

۲۱.۱۱ یک محیط نامغناطیسی رسانا با رسانندگی g مفروض است که تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی تابع زمان $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ قرار گرفته است. از صورت دیفرانسیلی قانون فاراده، معادله (۶.۱۱)، شروع کنید و نشان دهید که با فرض متجمع نشدن بار (یعنی $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$) چگالی جریان گردابی در محیط در معادله دیفرانسیل $\nabla^2 \mathbf{J} = g \mu_0 (\partial \mathbf{J} / \partial t)$ صدق می کند. ثابت کنید که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ نیز در همین معادله صدق می کنند.

۲۲.۱۱ نشان دهید که emf در یک مدار ثابت C از رابطه زیر به دست می آید

$$- \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

که در آن $\mathbf{A}$ پتانسیل برداری است.

۲۳.۱۱ فرض کنید که جریان در یک سیملوله بسیار طویل به طور خطی با زمان افزایش یابد، به طوری که $\partial B / \partial t = K$ باشد. میدان E را در داخل و خارج سیملوله پیدا کنید.

۲۴.۱۱ میدان E ی القایی توسط $\dot{\mathbf{B}} = \partial \mathbf{B} / \partial t$ را می توان به طور صریح به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

بامشتق گیری در داخل انتگرال صحت روابط $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ و $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ را تحقیق کنید. نشان دهید که شیب هر تابعی را که جواب معادله لاپلاس باشد می توان به $\mathbf{E}$ افزود.

۲۵.۱۱ «میدان بی نیرو» میسдانی است که برای آن $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ باشد. ثابت کنید که چنین میدان در معادله زیر صدق می کند

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\alpha^2 \mathbf{B}$$

که در آن α ثابت است. (داهنمایی: در میدان بی نیرو $\nabla \times \mathbf{B}$ با $\mathbf{B}$ موازی است.) ثابت کنید که $\mathbf{J}$ در همین معادله صدق می کند. نتیجه مسئله ۲۱.۱۱ را به کار ببرید و وابستگی زمانی چگالی جریان و میدانها را پیدا کنید.

انرژی مغناطیسی

برقراری میدان مغناطیسی مستلزم صرف انرژی است؛ این مطلب مستقیماً از قانون القای فاراداده نتیجه می‌شود. هرگاه چشمه ولتاژ $\mathcal{E}$ به‌مداری متصل شود، آنگاه، به‌طور کلی، جریان در مدار بارابطه زیر بیان می‌شود

$$\mathcal{E} + \mathcal{E} = IR \quad (۱.۱۲)$$

که در آن $\mathcal{E}$ مقدار emf القایی و R مقاومت مدار جریان است. کاری که $\mathcal{E}$ در حرکت دادن نموبار $dq = Idt$ در مدار انجام می‌دهد برابر است با

$$\begin{aligned} \mathcal{E} dq &= \mathcal{E} I dt = -\mathcal{E} I dt + I^2 R dt \\ &= I d\Phi + I^2 R dt \end{aligned} \quad (۲.۱۲)$$

رابطه دوم با استفاده از قانون فاراداده، معادله (۲.۱۱)، به‌دست می‌آید. جمله $I^2 R dt$ نشان‌دهنده تبدیل برگشت‌ناپذیر انرژی الکتریکی به گرماسی توسط مدار، لیکن این جمله فقط در مواردی برابر با تمامی کار ورودی است که تغییر شار صفر باشد. جمله اضافی، $I d\Phi$ ، کاری است که علیه emf القا شده در مدار انجام می‌شود، و عبارت است از آن قسمت از کار انجام شده به وسیله $\mathcal{E}$ که در تغییر ساختار میدان مغناطیسی مؤثر است. با کنار گذاشتن جمله $I^2 R dt$ ، می‌توان نوشت

$$dW_b = I d\Phi \quad (۳.۱۲)$$

که در آن شاخص b نشان می‌دهد که این کار را چشمه‌های خارجی انرژی الکتریکی (مثلاً باتریها) انجام داده‌اند. نمودار معادله (۳.۱۲) ممکن است مثبت یا منفی باشد. این نمودار وقتی مثبت است که تغییر شار $d\Phi$ مدار باشاری که در آن به وسیله جریان I ایجاد می‌شود همجهت باشد.

برای یک مدار صلب وساکن که بجز اتلاف گرمای ذول هیچ انرژی دیگری از دست نمی‌دهد (یعنی پسماند ندارد)، جمله dW_b برابر است با تغییر انرژی مغناطیسی مدار. درباره اتلاف پسماند در بخش ۴.۱۲ بحث می‌شود، لیکن در حال حاضر دستگاههای برگشت پذیر مغناطیسی را بررسی می‌کنیم. روش بررسی به آنچه که در فصل ۶ داشتیم بسیار نزدیک است.

۱.۱۲ انرژی مغناطیسی مدارهای جفت شده

در این بخش رابطه‌ای برای انرژی مغناطیسی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان که بایکدیگر برهم کنش دارند، به دست خواهیم آورد. اگر n مدار وجود داشته باشد، آنگاه مطابق معادله (۳.۱۲)، کار انجام شده بر علیه emfهای القایی با رابطه زیر داده می‌شود، که یک رابطه کلی است

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i \quad (4.12)$$

این رابطه بدون بستگی به چگونگی تولید نمودهای شار $d\Phi_i$ معتبر است. اما به خصوص حالتی مورد توجه ماست که در آن $d\Phi_i$ ها با تغییرات جریان در خود n مدار به وجود می‌آیند. در چنین شرایطی تغییرات شار مغناطیسی مستقیماً با تغییرات جریانها مربوط اند

$$d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} dI_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} dI_j \quad (5.12)$$

چنانچه مدارها صلب وساکن باشند، هیچ کار مکانیکی با این تغییرات شار مغناطیسی $d\Phi_i$ همراه نخواهد بود، و dW_b درست برابراست با تغییر در انرژی مغناطیسی دستگاه، یعنی برابراست با dU . توجه کنید که در اینجا ما خود را به مدارهای ساکن محدود می‌کنیم تا بتوانیم انرژی مغناطیسی را به عنوان یک جمله کار محاسبه کنیم. بعداً موردی را که مدارها نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند مطالعه خواهیم کرد، اما در آن صورت دیگر نخواهیم توانست dU را با dW_b یکی بدانیم.

انرژی مغناطیسی U برای دستگاهی متشکل از n مدار صلب وساکن با انتگرال گیری از معادله (۴.۱۲)، از وضع شار صفر (متناظر با همه I_i ها برابر صفر) تا مقادیر نهایی شارها،

به دست می آید. برای گروهی از مدارهای صلب که حاوی محیطهای مغناطیسی خطی باشند، یا درچنین محیطهایی قرارداشته باشند، Φ_i ها به طورخطی با جریان مدارها مربوط باشند و انرژی مغناطیسی به اینکـه جریـانها چگونـه به مقادیر نهایی خود رسیده اند بستگی ندارد. چون مورد مدارهای صلب و محیطهای خطی اهمیت بسیار دارد، توجه خود را به این مورد معطوف می کنیم.

چون انرژی نهایی به ترتیب تغییر جریانهـا بستگی ندارد، می توانیم طرح خاصی را اختیار کنیم که در آن W را به آسانی بتوان محاسبه کرد. در این طرح تمام جریانهـا (و در نتیجه تمام شارها) را به طور هماهنگ به مقدار نهایی شان می رسانیم، یعنی در هر لحظه از زمان تمام جریانهـا (و تمام شارها) کسریکسانی از مقادیر نهایی خود خواهند بود. مقدار این کسر را α می نامیم. اگر مقادیر نهایی جریانهـا با نمادهای

$$I_1, I_2, \dots, I_n$$

نمایش داده شوند، آن وقت در هر مرحله $I'_i = \alpha I_i$ ؛ به علاوه، $d\Phi_i = \Phi_i d\alpha$. انتگرال گیری از معادله (۴.۱۲) نتیجه می دهد

$$\int dW_b = \int_0^1 d\alpha \sum_{i=1}^n I'_i \Phi_i = \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i$$

بنابراین انرژی مغناطیسی برابر است با

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad (۶.۱۲) \quad (\text{مدارهای صلب، محیطهای خطی})$$

به کمک معادله (۵.۱۲)، که برای يك مدار صلب و دستگاه خطی مستقیماً قابل انتگرال گیری است، انرژی مغناطیسی را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} I_i I_j$$

$$= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \dots + \frac{1}{2} L_n I_n^2$$

$$+ M_{12} I_1 I_2 + M_{13} I_1 I_3 + \dots + M_{1n} I_1 I_n$$

$$+ M_{23} I_2 I_3 + \dots + M_{n-1, n} I_{n-1} I_n \quad (۷.۱۲)$$

(مدارهای صلب، محیطهای خطی)

در اینجا نتایج و علائم مربوط به بخشهای ۳.۱۱ و ۴.۱۱، یعنی $M_{ii} \equiv L_i$ و $M_{ij} = M_{ji}$ را به کار برده ایم.

برای دو مدار جفت شده، معادلهٔ اخیر به صورت زیر نوشته می شود

$$U = \frac{1}{\gamma} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{\gamma} L_2 I_2^2 \quad (۸.۱۲)$$

در اینجا برای سادگی، M را به جای M_{12} نوشته ایم. جملهٔ $M I_1 I_2$ ممکن است مثبت یا منفی باشد، اما انرژی کل مغناطیسی U باید به ازای کلیهٔ مقادیر جریانهای I_1 و I_2 مثبت (و یا صفر) باشد. اگر نسبت I_1/I_2 را با x نشان دهیم، خواهیم داشت

$$U = \frac{1}{\gamma} I_2^2 (L_1 x^2 + 2Mx + L_2) \geq 0$$

برای محاسبهٔ مقدار x ، که به ازای آن U کمینه (یا بیشینه) می شود، باید مشتق U را بر حسب x محاسبه کرد و مساوی صفر قرار داد. نتیجه چنین خواهد بود

$$x = -\frac{M}{L_1} \quad (۹.۱۲)$$

مشتق دوم U نسبت به x مثبت است، و این نشان می دهد که رابطهٔ (۹.۱۲) شرط کمینه بودن است. برای تمام مقادیر x انرژی مغناطیسی بزرگتر یا مساوی صفر است، به خصوص مقدار کمینهٔ U (که به ازای $x = -M/L_1$ به دست می آید) بزرگتر یا مساوی صفر است. پس

$$\frac{M^2}{L_1} - \frac{2M^2}{L_1} + L_2 \geq 0$$

یا

$$L_1 L_2 \geq M^2 \quad (۱۰.۱۲)$$

و این نتیجه ای است که در بخش ۳.۱۱ بیان شد ولی ثابت نشده بود.
برای يك تك مدار

$$\Phi = LI,$$

$$U = \frac{1}{\gamma} I \Phi = \frac{1}{\gamma} L I^2 = \frac{1}{\gamma} \frac{\Phi^2}{L} \quad (۱۱.۱۲)$$

۲۰۱۲ چگالی انرژی درمیدان مغناطیسی

معادله (۷.۱۲) انرژی مغناطیسی يك دستگاه جریان را برحسب پارامترهای مدار، یعنی جریانها والقاها تعیین می کند. این فرمولبندی بسیار مفید است، زیرا این پارامترها را می توان با اندازه گیری مستقیم به دست آورد. از طرف دیگر، فرمولبندی دیگری از انرژی مغناطیسی برحسب میدانهای برداری $\mathbf{B}$ و $\mathbf{H}$ بسیار جالب توجه خواهد بود، زیرا تصویری را عرضه می کند که در آن انرژی در خود میدان مغناطیسی ذخیره شده است. این تصویر را می توان تعمیم داد، همان گونه که در فصل ۱۶ انجام شده است، تا نشان داده شود که چگونه در فرایندهای غیر ساکن، انرژی در میدان الکترومغناطیسی منتقل می شود.

يك دسته مدار صلب حامل جریان را در نظر بگیرید که هیچ يك از آنها تا بینهایت ادامه ندارند، و در محیطی با خواص مغناطیسی خطی قرار گرفته اند. انرژی این دستگاه از معادله (۶.۱۲) به دست می آید. در بحث فعلی، برای سهولت، فرض می کنیم که هر مدار فقط از يك تك حلقه تشکیل شده است؛ در این صورت شار Φ_i به صورت زیر بیان می شود

$$\Phi_i = \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (۱۲.۱۲)$$

که در آن $\mathbf{A}$ پتانسیل برداری موضعی است. با قرار دادن این نتیجه در معادله (۶.۱۲) به دست می آوریم

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{C_i} I_i \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (۱۳.۱۲ \text{ الف})$$

می خواهیم معادله (۱۳.۱۲ الف) را به صورت کلیتری بیان کنیم. فرض کنید که مدارهای جریان مشخص شده با سیم نداریم، بلکه در عوض هر « مدار » مسیر بسته ای است در محیط (فرض می شود که محیط رساناست) که بر يك خط چگالی جریان منطبق است. معادله (۱۳.۱۲ الف) را می توان با تقریب خوبی برای این وضع به کار برد، مشروط بر اینکه تعداد بسیار زیادی از مدارهای فرضی (C_i) را در نظر بگیریم و جایگزینی $I_i d\mathbf{l}_i \rightarrow \mathbf{J} \, dv$ را انجام دهیم، و بالاخره $\int_V$ را به جای $\sum_i \oint_{C_i}$ قرار دهیم، بدین ترتیب

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \, dv \quad (۱۳.۱۲ \text{ ب})$$

معادله اخیر را با استفاده از معادله میدان $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ و اتحاد برداری (۸.۱.۱)

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$$

می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد

$$U = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, dv - \frac{1}{4} \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (۱۴.۱۲)$$

در اینجا S سطحی است که حجم V را محصور می‌کند. چون مطابق فرض هیچ يك از مدارهای جریان تا بینهایت ادامه ندارند، بهتر این است که سطح S را به فواصل بسیار دور ببریم تا تمام قسمتهای این سطح از جریانها دور باشند. طبعاً حجم دستگاه نیز باید متناسباً افزایش یابد. اما $\mathbf{H}$ دست کم به نسبت $1/r^2$ کوچک می‌شود، که در آن r فاصله مبدئی است در حوالی وسط توزیع جریان تا نقطه معینی بر روی سطح S . همچنین $\mathbf{A}$ دست کم به نسبت $1/r^2$ با فاصله کوچک می‌شود. مساحت سطح S با r^2 متناسب است. بنابراین، سهم انتگرال سطحی در معادله (۱۴.۱۲) با ازدیاد r به نسبت $1/r$ و یا تندتر نقصان می‌یابد، و وقتی S به سمت بینهایت میل کند، این انتگرال صفر می‌شود.

با حذف انتگرال سطحی در معادله (۱۴.۱۲) و بسط انتگرال حجمی بر روی تمام فضا، نتیجه می‌گیریم که

$$U = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, dv \quad (۱۵.۱۲)$$

در این رابطه $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ منظور شده است. این نتیجه کاملاً مشابه انرژی الکتروستاتیکی، یعنی معادله (۱۷.۶)، است. معادله (۱۵.۱۲) براساس معادله (۶.۱۲) به دست آمد، بنابراین این معادله به دستگاههایی محدود می‌شود که شامل محیطهای خطی مغناطیسی باشند.

با دلایلی مشابه آنچه در بخش ۳.۶ آمد، به مفهوم چگالی انرژی در میدان مغناطیسی می‌رسیم، یعنی به

$$u = \frac{1}{4} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (۱۶.۱۲ \text{ الف})$$

که برای اجسام مغناطیسی همسانگرد و خطی به صورت زیر درمی‌آید

$$u = \frac{1}{4} \mu H^2 = \frac{1}{4} \frac{B^2}{\mu} \quad (۱۶.۱۲ \text{ ب})$$

۳.۱۲ نیروها و گشتاور نیروهای وارد بر مدارهای صلب

تا اینجا چندین عبارت ریاضی مختلف برای انرژی مغناطیسی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان به دست آوردیم. این عبارتها با معادلات (۶.۱۲)، (۷.۱۲)، و (۱۵.۱۲) بیان شده‌اند. حال نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان نیرو، یا گشتاور نیروی وارد بر یکی از اجزای چنین دستگاهی را با دانستن انرژی مغناطیسی به دست آورد.

فرض کنید یکی از قسمت‌های دستگاه، بدون تغییر شکل، تحت تأثیر نیروهای مغناطیسی وارد بر آن به اندازه $d\mathbf{r}$ جابه‌جا شود، درحالی که همه جریانه‌ها ثابت بمانند. کار مکانیکی انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر دستگاه، مانند معادله (۳۲.۶)، عبارت است از

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (۱۷.۱۲)$$

مانند معادله (۳۷.۶)، در این شرایط کار ازدو قسمت تشکیل شده است

$$dW = dW_b - dU \quad (۱۸.۱۲)$$

که در آن dU تغییر انرژی مغناطیسی دستگاه، و dW_b کار انجام شده توسط منابع خارجی انرژی علیه emf‌های القایی است برای ثابت نگه داشتن جریانه‌ها.

قبل از آنکه بتوانیم برای پیدا کردن رابطه‌ای که U را به نیروی وارد بر قسمتی از دستگاه مربوط می‌سازد قدم دیگری برداریم، لازم است که dW_b را از معادله (۱۸.۱۲) حذف کنیم. این کار را برای دستگاهی متشکل از مدارهای صلب که در محیط‌های خطی مغناطیسی قرار گرفته‌اند به آسانی می‌توان انجام داد. هرگاه وضع هندسی دستگاه را تغییر دهیم بی آنکه هیچ جریانی تغییر کند، آنگاه برطبق معادله (۶.۱۲)

$$dU = \frac{1}{\mu_0} \sum_i I_i d\Phi_i$$

اما، از معادله (۴.۱۲) داریم

$$dW_b = \sum_i I_i d\Phi_i$$

بنابراین

$$dW_b = \mu_0 dU \quad (۱۹.۱۲)$$

با استفاده از این معادله برای حذف dW_b از معادله (۱۸.۱۲)، و پس از ترکیب نتیجه حاصل با معادله (۱۷.۱۲)، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

یا

$$\mathbf{F} = \nabla U$$

$$F_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_I \quad (20.12)$$

یعنی نیروی وارد بر مدار برابر است با شیب انرژی مغناطیسی، وقتی I ثابت نگه داشته شود. هر گاه مدار مورد نظر طوری مقید باشد که فقط حرکتی دورانی حول محوری انجام دهد، آنگاه می توان به جای معادله (۱۷.۱۲) از معادله زیر استفاده کرد

$$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = \tau_x d\theta_x + \tau_y d\theta_y + \tau_z d\theta_z$$

که در آن $\vec{\tau}$ گشتاور نیروی مغناطیسی وارد بر مدار و $d\vec{\theta}$ تغییر مکان زاویه ای است. تحت این شرایط داریم

$$\tau_x = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_x} \right)_I \quad (21.12)$$

و به همین ترتیب برای بقیه مؤلفه ها. نتایج (۲۰.۱۲) و (۲۱.۱۲) برای جریان ثابت به مورد الکتروستاتیکی با پتانسیل ثابت شباهت دارند. در آنجا انجام کار توسط باتری لازم بود تا پتانسیلها ثابت نگه داشته شوند.

در بعضی موارد جالب دیگر می توان شار گذرنده از مدارها را ثابت در نظر گرفت. در این صورت مطابق معادله (۴.۱۲)، $dW_\phi = 0$ ، و بنابراین می توان دستگاه را منزوی فرض کرد. در نتیجه

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dW = -dU$$

$$F_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_\phi \quad (22.12)$$

$$\tau_x = - \left(\frac{\partial U}{\partial \theta_x} \right)_\phi \quad (23.12)$$

درست نظیر مورد الکتروستاتیکی، برای اینکه بتوانیم از روش انرژی استفاده کنیم لازم

۱. در یک مدار معمولی باز هم به یک باتری نیاز داریم تا اختلاف توان $I^2 R$ را تأمین کند، اما ما این اتلاف را نادیده می گیریم. اگر سیمها ابرسانا باشند ($R=0$)، دستگاه را می توان واقعاً منزوی انگاشت.

است که U را به صورت تحلیلی بیسان کنیم، یعنی، بستگی خاص U به مختصات متغیر $(x, y, z, \theta_1, \theta_2 \text{ یا } \theta_3)$ باید داده شده باشد. در این صورت روش انرژی در محاسبه نیروها و گشتاور نیروها روشی بسیار مؤثر خواهد بود.

با ذکر دو مثال، کاربرد این روش را نشان می‌دهیم. تمرینهای دیگری از این قبیل در مسائل آخر فصل آمده است. در مثال اول، نیروی بین دومدار صلب حامل جریانهای ثابت را محاسبه می‌کنیم. انرژی مغناطیسی با معادله (۸.۱۲) داده شده است، و نیروی وارد بر مدار عبارت است از

$$\mathbf{F}_2 = \nabla_2 U = I_1 I_2 \nabla_2 M$$

در اینجا القای متقابل M طوری باید نوشته شود که بستگی آن به $\mathbf{r}_2$ مشخص باشد. فرمول نویسن، معادله (۳۵.۱۱) این بستگی را صریحاً نشان می‌دهد، پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (24.12) \end{aligned}$$

این رابطه تقارن مورد نظر، یعنی $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ را به وضوح نشان می‌دهد. اما قبلاً نیز رابطه‌ای برای نیروی بین دومدار، معادله (۲۵.۸)، داشتیم که با آنچه در بالا به دست آوردیم ظاهراً فرق می‌کند. در واقع این دو رابطه معادل‌اند و می‌توان صحت این موضوع را به آسانی بررسی کرد. ضرب سه گانه موجود در انتگرالده معادله (۲۵.۸) را بسط می‌دهیم

$$d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] = d\mathbf{l}_1 [d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)$$

انتگرالی که شامل جمله آخر در سمت راست است با معادله (۲۴.۱۲) یکی است؛ انتگرالی را که شامل جمله اول است می‌توان چنین نوشت

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} d\mathbf{l}_1 \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (25.12)$$

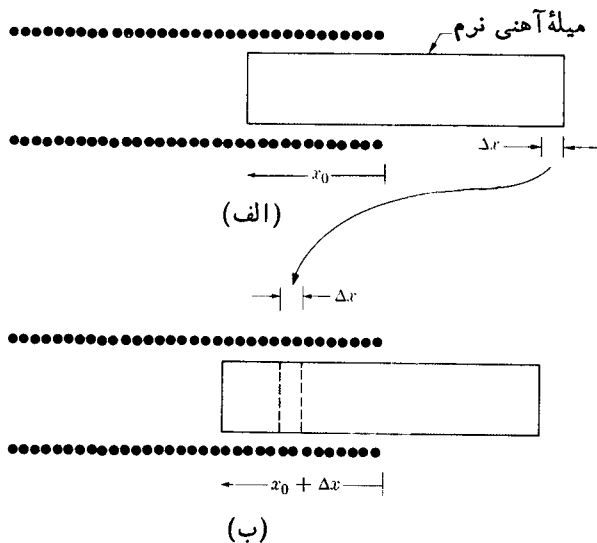
اما $d\mathbf{l}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ برابر است با حاصلضرب $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ در تصویر $d\mathbf{l}_2$ بر روی بردار $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. اگر $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ را به r_{21} نشان دهیم، آن وقت تصویر $d\mathbf{l}_2$ همان dr_{21} است. انتگرال بر روی C_2 را می‌توان برای مقدار ثابت $d\mathbf{l}_1$ حساب کرد

$$\oint_{C_2} \frac{dr_{21}}{r_{21}^2} = - \frac{1}{r_{21}} \Big|_a^a$$

حدود بالا و پایین انتگرال یکی است، زیرا مدار بسته است. پس رابطه (۲۵.۱۲) صفر می‌شود، و معادله (۲۴.۱۲) هم‌ارز است با معادله (۲۵.۸).

به عنوان دومین مثال، سیم‌لوله طویلی به طول l که N دور سیم‌پیچ دارد و جریان I از آن می‌گذرد را در نظر می‌گیریم. میله آهنی نازکی با تراوایی ثابت μ و سطح مقطع A را در امتداد محور سیم‌لوله وارد آن می‌کنیم. چنانچه میله را بیرون بکشیم تاجایی که تقریباً نیمی از طول آن در سیم‌لوله باقی بماند (شکل ۱۰.۱۲ الف)، نیرویی که می‌کوشد میله را به داخل سیم‌لوله برگرداند را به طور تقریب محاسبه کنید.

حل: چنانچه اثرهای لبه‌ای منظور شود، ساختار میدان مغناطیسی مربوط به این مسئله بسیار بغرنج است. اما خوشبختانه احتیاجی به پیدا کردن تمامی انرژی مغناطیسی دستگاه نیست، بلکه فقط محاسبه تفاوت انرژی برای دو پیکربندی دستگاه که در شکل ۱۰.۱۲ الف و ب نشان داده شده‌اند، کافی است. ساختار میدان در نقاط دور از دو انتهای میله و دو انتهای سیم‌لوله نسبتاً یکنواخت است. تفاوت اصلی میان پیکربندیهای الف و ب در این است که به طور مؤثر به اندازه طول Δx از انتهای راست میله (که در خارج میدان قرار دارد) به ناحیه میدان یکنواخت داخلی سیم‌لوله وارد می‌شود، و درجایی دور از



شکل ۱۰.۱۲ نیروی وارد بر میله‌ای از آهن نرم که وارد یک سیم‌لوله شده است (با استفاده از روش انرژی). H-M

تأثیر و امغانندۀ قطب آهن را قرار می گیرد. لذا، چون $\mathbf{H}$ در ناحیه Δx تقریباً طولی است، و چون مؤلفه مماسی $\mathbf{H}$ در مرز استوانه‌ای میله پیوسته است، از رابطه زیر استفاده می کنیم

$$U = \frac{1}{\mu_0} \int \mu H^2 dv$$

در این رابطه $\mathbf{H}$ در داخل و خارج از میله ثابت است زیرا I ثابت است. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} U(x_0 + \Delta x) &\approx U(x_0) + \frac{1}{\mu_0} \int_{A \Delta x} (\mu - \mu_0) H^2 dv \\ &= U(x_0) + \frac{1}{\mu_0} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2}{l^2} A \Delta x \end{aligned}$$

و بنا بر معادله (۲۰.۱۲)، مؤلفه x نیرو در جهت افزایش x_0 برابر است با

$$F_x \approx \frac{1}{\mu_0} (\mu - \mu_0) \frac{N^2 I^2}{l^2} A = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \mu_0 H^2 A \quad (26.12)$$

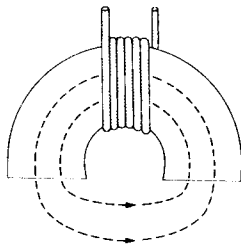
در مسئله ۷.۱۲، مثالی با Φ ثابت بررسی می شود.

* ۴.۱۲ اتلاف پسماند

در بخشهای گذشته بحث خود را به دستگاههای مغناطیسی برگشت پذیر، و در اکثر موارد به دستگاههای خطی، محدود کردیم. اینک می خواهیم درباره تغییرات انرژی در دستگاههای حاوی مواد آهنربای دائم، یعنی دستگاههایی که پسماند در آنها نقش مؤثری ایفا می کنند، صحبت کنیم. یک مدار الکتریکی به صورت پیچهای مرکب از N دور نزدیک به هم را در نظر می گیریم که یک جسم فرومغناطیسی را احاطه کرده است (شکل ۲۰.۱۲). اگر پیچه به یک چشمه انرژی خارجی متصل شود، کاری که در مقابل emf القایی در پیچه انجام می گیرد با معادله (۳۰.۱۲) داده می شود. ولی در معادله (۳۰.۱۲) تغییر شار $d\Phi$ عبارت است از کل تغییر شار از درون مدار. برای منظور فعلی مناسب این است که نماد $d\Phi$ را برای نشان دادن تغییر شار از درون یک تک دور از پیچه به کار ببریم. لذا، با فرض اینکه شار عبوری از تمام دورها یکی است، داریم

$$\delta W_b = NI \delta \Phi \quad (30.12 \text{ الف})$$

حال جسم فرومغناطیسی را به عنوان جزئی از یک مدار مغناطیسی در نظر می گیریم. در این



شکل ۲۰۱۲ یک جسم فرومغناطیسی که قسمتی از یک مدار مغناطیسی را تشکیل می‌دهد.

صورت NI را می‌توان با $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ ، به دور یک مسیر شار نوعی تعویض کرد، و معادله (۳۰۱۲ الف) را به شکل زیر نوشت^۱

$$\delta W_b = \oint \delta \Phi \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint A \delta B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

که در آن A سطح مقطع مربوط به عنصر طولی $d\mathbf{l}$ از مدار مغناطیسی است. چون $d\mathbf{l}$ همیشه بر مسیر شار مماس است، معادله بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\delta W_b = \oint A \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_V \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (۲۷.۱۲)$$

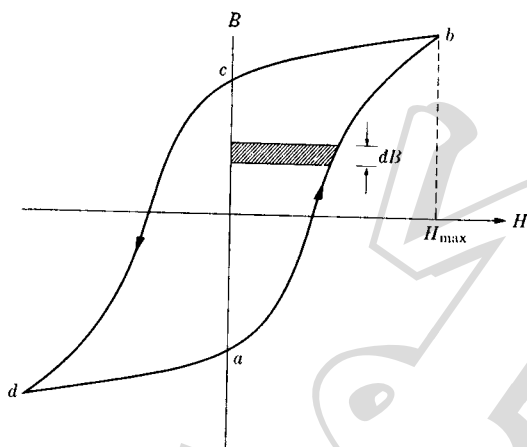
که در آن V حجم مدار مغناطیسی است، یعنی ناحیه‌ای از فضا که میدان مغناطیسی در آنجا صفر نیست.

اگر جسم فرومغناطیسی موجود در دستگاه خاصیت مغناطیسی برگشت پذیر داشته باشد، می‌توان از معادله (۲۷.۱۲)، از $\mathbf{B} = 0$ تا مقدار نهایی آن، انتگرال گرفت تا انرژی

۱. می‌توان تحلیلی را که در اینجا به کار رفته است با جان نشین کردن مدار مغناطیسی به وسیله تعداد زیادی مسیرهای شاد مغناطیسی (مدارهای مغناطیسی موازی) با طولهای مختلف، بر پایه استوارتری قرار داد. در این صورت معادله (۳۰.۱۲ الف) به شکل زیر درمی آید

$$\delta W_b = NI \sum_j \delta \Phi_j = \sum_j \oint_j \delta \Phi_j \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}_j$$

که در آن $\delta \Phi_j$ عبارت است از تغییر شار مربوط به یکی از این مسیرها. نتیجه نهایی، معادله (۲۷.۱۲)، تغییر نمی‌کند.



شکل ۳.۱۲ کار انجام شده در واحد حجم در طی یک چرخه در یک ماده فرومغناطیسی.

مغناطیسی دستگاه به دست آید. برای مواد خطی، انرژی به دست آمده با انرژی بیان شده توسط معادله (۱۵.۱۲) یکی است. ولی معادله (۲۷.۱۲) از این خیلی کلیتر است؛ این معادله کار انجام شده بر روی دستگاه مغناطیسی را، حتی در مواردی که پسماند وجود داشته باشد، به درستی پیشگویی می کند.

بنابر معادله (۲۷.۱۲)، هر تغییری در ساختار میدان مغناطیسی مستلزم مقدار

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (28.12)$$

کار در واحد حجم ماده مغناطیسی (یا خلاء) در دستگاه است. یک حالت جالب توجه آن است که ماده یک چرخه را طی کند، مثل وقتی که پیچهای که جسم را احاطه کرده است تحت تأثیر یک جریان متناوب قرار می گیرد. در یک چرخه، شدت مغناطیسی H (برای یک نقطه نوعی در جسم نمونه) از صفر شروع می شود، به بیشینه خود $H_{\max}$ افزایش می یابد، به $H_{\max}$ — کاهش می یابد، و سپس به صفر بازمی گردد. میدان مغناطیسی B نیز تغییرات مشابهی را نشان می دهد، با این تفاوت که برای یک فرومغناطیس نوعی نسبت به H عقب افتادگی خواهد داشت، و در نتیجه یک منحنی پسماند را طی می کند (شکل ۳.۱۲). کار ورودی لازم (در واحد حجم) برای تغییر میدان مغناطیسی بر روی منحنی پسماند از نقطه a به نقطه b ، یعنی

$$(w_b)_{ab} = \int_a^b H dB$$

درست مساوی است با مساحت سطح محصور بین منحنی پسماند در قسمت ab و محور B . این مساحت مثبت است، زیرا H و dB هر دو مثبت اند. سهم $(w_b)_{bc}$ نیز مساوی مساحت سطح بین قسمت دیگری از منحنی پسماند (bc) و محور B است، ولی باید منفی به حساب آید، زیرا که H و dB دارای جهات مخالف اند. مطالب مشابهی می توان در مورد $(w_b)_{cd}$ و $(w_b)_{da}$ بیان کرد. لذا در طی يك چرخه به دور حلقه پسماند، کار لازم در واحد حجم عبارت است از

$$w_b = \oint H dB \quad (29.12)$$

که مساوی است با مساحت محصور به وسیله حلقه پسماند. در پایان يك چرخه کامل، حالت مغناطیسی جسم همان است که در شروع چرخه بود؛ بنابراین «انرژی مغناطیسی» جسم به همان اندازه قبلی آن است. پس واضح است که معادله (29.12) معرف اتلاف انرژی است. این انرژی از دست رفته به صورت گرما ظاهر می شود، و از تغییرات برگشت ناپذیر در ساختار حوزه ای ماده نتیجه می شود. اتلاف پسماند عامل مهمی در مدارهای دارای جریان متناوب محسوب می شود. معادله (29.12) معرف اتلاف انرژی در واجد حجم دهر چرخه است؛ پس اتلاف انرژی در واحد زمان مستقیماً با فرکانس جریان متناوب متناسب است. طبق معادله (28.12) ، کار لازم جهت تغییر میدان مغناطیسی در واجد حجم ماده برابر است با

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \mu_0 H dH + \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (28.12 \text{ الف})$$

گاهی مناسب است در مورد جمله $\mu_0 H dH$ (کار انجام شده بر روی خلا) چنین بیندیشیم که، چه ماده ای در کار باشد و چه نباشد، وجود خواهد داشت. با این دید، جمله $\mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M}$ کار ویژه انجام شده بر روی ماده خواهد بود. این روشی است که معمولاً در کتب ترمودینامیک به کار می رود، و مبنای بحث فرایندهایی است نظیر «سردسازی مغناطیسی». چون انتگرال $\int H dH$ در يك چرخه کامل صفر می شود، معادله (29.12) معادل است با

$$w_b = \mu_0 \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M} \quad (29.12 \text{ الف})$$

با استفاده از $d(MH) \equiv H dM + M dH$ ، معادله بالا را به صورت زیر نیز می توان نوشت

$$w_b = \oint \mu_0 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{H} \quad (29.12 \text{ ب})$$

۵.۱۲ خلاصه مطالب

کاری که يك عامل خارجی، نظیر باتری، برای تغییر میدان مغناطیسی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان انجام می‌دهد برابر است با

$$dW_b = \sum_{i=1}^n I_i d\Phi_i$$

(در اینجا کاری را که برای تأمین اتلاف گرمای ژول در مدارهای مقاومت‌دار انجام می‌شود، منظور نکرده‌ایم.) انرژی پتانسیل مغناطیسی دستگاهی متشکل از مدارهای جریان و محیطهای مغناطیسی خطی عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i$$

که در آن

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} I_j$$

برای يك توزیع جریان پیوسته در محیطهای خطی، انرژی مغناطیسی عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv$$

که در آن پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ پتانسیلی است که چگالی جریان $\mathbf{J}$ تولید می‌کند. با انتگرال - گیری پاره‌ای، انرژی در مواد مغناطیسی خطی به يك انتگرال بر روی چگالی انرژی میدان مغناطیسی تبدیل می‌شود

$$U = \int u dv$$

که در آن چگالی انرژی برابر است با

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

۱. برای يك تك مدار

$$U = \frac{1}{2} I \Phi$$

با

$$\Phi = LI$$

۲. نیروی مغناطیسی وارد بر قسمتی از یک دستگاه منزوی، باشار ثابت ازدرون هر مدار، برابر است بامنفی شیب انرژی مغناطوساتیکتی

$$F_z = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_\Phi$$

اگر دستگاه منزوی نباشد، ولی در عوض جریان در هر مدار توسط يك عامل خارجی (باتری) ثابت نگه داشته شود، نیرو بارابطه زیر داده می شود

$$F_z = +\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_I$$

۳. با حضور ماده غیر خطی، و وجود پسماند، داریم

$$dw_b = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

در يك چرخه کامل از يك فرایند چرخه ای، داریم

$$w_b = \oint H dB = \mu_0 \oint H dM = -\mu_0 \oint M dH$$

مسائل

۱.۱۲ يك مدار جریان (که لزوماً صلب نیست) در میدان مغناطیسی مفروضی قرار دارد. نیروی مغناطیسی وارد بر هر عنصر $d\mathbf{l}$ از مدار برابر است با $I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. اگر مدار تحت تأثیر نیروهای مغناطیسی وارد بر آن به حرکت درآید به طوری که هر عنصر به اندازه $\delta \mathbf{r}$ جابه جا شود و جریان I در عین حال ثابت نگه داشته شود، بامحاسبه مستقیم نشان دهید که کار مکانیکی انجام شده توسط نیرو برابر است با $\delta W = I \delta \Phi$ که در آن $\delta \Phi$ شار اضافی است که ازدرون مدار می گذرد.

۲.۱۲ يك دسته مدار جریان که بایکدیگر برهم کنش دارند، در يك محیط مغناطیسی خطی قرار دارند. تمام مدارها بجز مدار ۱ ثابت نگه داشته می شوند، ولی مدار ۱ می تواند مثل يك جسم صلب حرکت کند. تمام جریانها توسط باتریهایی ثابت نگه داشته می شوند.

باترکیب معادلات (۴.۱۲)، (۶.۱۲) و (۸.۱۲) نشان دهید که کار مکانیکی انجام شده توسط مدار متحرک برابر است با $dW = I_\gamma d\Phi_\gamma$ که تغییر شار در مدار ۱ است.

۳.۱۲ دو مدار جریان که با یکدیگر برهم کنش دارند با القاهای $L_\gamma = \beta I_\gamma^2$ ، $L_\delta = \beta I_\delta^2$ مشخص می‌شوند، که در آنها β و δ ثابت‌اند. این دستگاه یک دستگاه مغناطیسی برگشت پذیر است ولی خطی نیست. انرژی مغناطیسی دستگاه را بر حسب جریانهای نهایی I_γ و I_δ محاسبه کنید. این کار را به دو روش انجام دهید: اول، جریانها را باهم به مقادیر نهایی شان ببرید؛ دوم در حالی که I_γ را برابر با صفر نگه می‌دارید I_δ را به مقدار نهایی آن ببرید، و سپس I_γ را تغییر دهید.

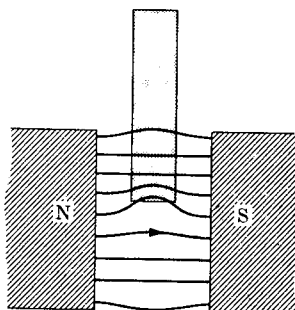
۴.۱۲ مداری به شکل یک حلقه دایره‌ای از سیم به شعاع b در مرکز حلقه بزرگتری به شعاع a قرار گرفته است، و $b \ll a$. مدار کوچکتر طوری نصب شده است که می‌تواند حول یکی از قطرهايش که در صفحه مدار بزرگتر واقع است بچرخد. از این مدارها جریانهای پایای I_γ و I_δ می‌گذرند. اگر زاویه بین بردارهای عمود بر دو مدار θ باشد، گشتاور نیروی وارد بر مدار چرخنده را پیدا کنید. جهت این گشتاور وقتی که جهات دوران I_γ و I_δ یکسان باشند، چیست؟

۵.۱۲* یک آهنربای الکتریکی به شکل U و به طول l ، که فاصله دو قطب آن مساوی d است، دارای تراوایی μ ، و مقطع مربعی به مساحت A است. این آهنربا N دور سیم پیچ حامل جریان I دارد. قطبهای این آهنربا باچه نیرویی میله‌ای از همان جنس و همان مقطع را می‌توانند نگه دارند؟

۶.۱۲ یک آهنربای دائم با مغناطش ثابت، و مداری که به یک باتری متصل است، تشکیل یک دستگاه منزوی را می‌دهند. فرض می‌کنیم مدار نسبت به آهنربا حرکت می‌کند، در عین حال جریان درون مدار ثابت نگه داشته می‌شود. کار مکانیکی انجام شده به وسیله مدار در مسئله ۱.۱۲ داده شده است. چه نتیجه‌ای درباره تغییر انرژی مغناطیسی این دستگاه می‌توانید بگیرید؟

۷.۱۲ میدان مغناطیسی بین دو قطب یک آهنربای الکتریکی نسبتاً یکنواخت است و در مقدار ثابت B_0 نگه داشته می‌شود. یک بره پارا مغناطیسی که فقط می‌تواند به طور عمودی حرکت کند، مطابق شکل ۴.۱۲، در این میدان گذاشته می‌شود. پذیرفتاری میله χ_m ، و سطح مقطع آن A است. (الف) نیروی وارد بر بره را محاسبه کنید. (ب) مقدار عددی نیرو را چنانچه جنس میله از تیتانیوم باشد پیدا کنید؛ $A = 1 \text{ cm}^2$ و $B_0 = 0.25 \text{ T}$.

۸.۱۲* مطابق نتیجه مسئله ۱.۱۲، نیروی وارد بر یک مدار جریان در یک میدان مغناطیسی مفروض با رابطه $\mathbf{F} = I \nabla \Phi$ داده می‌شود. اگر مدار خیلی کوچک باشد، میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ بر روی سطح محصور به وسیله مدار را می‌توان ثابت فرض کرد؛ به علاوه، خود مدار را نیز



شکل ۴۰۱۲ يك بره پارامغناطیسی كه بین صفحات دو قطب يك آهنربا قرار داده می‌شود.

می‌توان با گشتاور دو قطبی مغناطیسی اش $\mathbf{m}$ مشخص کرد. نشان دهید که وقتی میدان مغناطیسی مفروض در محل دو قطبی چشمه‌ای نداشته باشد (یعنی $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}_M$ صفر باشد)، نیروی وارد بر دو قطبی عبارت است از

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

۹۰۱۲ مدار صلبی که شامل يك دور حلقه سیم است، در يك میدان مغناطیسی شعاعی و متناسب با عکس مجذور فاصله، $\mathbf{B} = K\mathbf{r}/r^3$ ، قرار دارد. نشان دهید نیروی وارد بر مدار برابر است با $\mathbf{F} = KI\nabla\Omega$ ، که در آن Ω زاویه فضایی است که توسط مدار از مرکز میدان در بر گرفته می‌شود، و I شدت جریان در مدار است.

۱۰۰۱۲ مرکز يك مدار مسطح مستدیر به شعاع R که دارای يك دور سیم پیچ است روی محور x و به فاصله x از مبدأ قرار دارد. مدار حامل جریسان I است و جهت مثبت عمود بر صفحه آن در جهت $-x$ است. نیروی وارد بر مدار از طرف يك میدان شعاعی و واگرا از مرکز، یعنی $\mathbf{B} = K\mathbf{r}/r^3$ ، را حساب کنید.

۱۱۰۱۲ يك سیم‌لوله بسیار طویل، با N/I دور سیم پیچ در واحد طول و به شعاع R را در نظر بگیرید که میدان در داخل آن تقریباً یکنواخت و در خارج صفر است. نیروی شعاعی وارد بر يك دور از سیم پیچ، در واحد طول محیط، را از روی انرژی مغناطیسی پیدا کنید. (الف) فرض کنید که جریان I توسط يك باتری ثابت نگه داشته شود. (ب) با فرض اینکه شار ثابت بماند و دستگاه منزوی باشد (با سیم پیچهای ابررسانا) محاسبات را تکرار کنید.

۱۲۰۱۲ مثال شکل ۱۰۱۲ را برای انرژی مغناطیسی به صورت $U = 1/2 LI^2$ حل کنید. در اینجا $L = L(x_0)$ عبارت است از ضریب خود القای سیم‌لوله وقتی میله آهنی تا فاصله

x به درون سیملوله وارد شده باشد. فرض کنید که قطر میلۀ تقریباً به بزرگی قطر سیملوله باشد، و هر دو را به قدری طویل فرض کنید که اثرهای انتهایی قابل چشمپوشی باشند.

۱۳.۱۲ برای چنبرۀ مسئله ۱۰.۱۱ نیروی شعاعی وارد بر پیچۀ را وقتی که حامل جریان I است پیدا کنید. آیا گرایش این نیرو به منبسط کردن پیچۀ است یا به تنگ کردن آن؟

۱۴.۱۲ نیروی بین سیم مستقیم و مدار مربعی شکل مسئله ۱۵.۱۱ را، وقتی جریانها I_1 و I_2 هستند، پیدا کنید.

۱۵.۱۲ دوطرفه ابررسانای منزوی که جریانهایی از آنها می گذرد، طوری قرار گرفته اند که القای متقابلشان برابر با صفر است. اینک آنها را حرکت می دهیم به طوری که القای متقابلشان برابر M شود. اگر مدارهای یکسان باشند و جریان اولیه هر دو I_0 باشد، جریانهای نهایی I را پیدا کنید. خود القای هر مدار L است.

۱۶.۱۲ اگر V حجم تمامی فضا باشد، و چنانچه میدانها تنها توسط آهنرباها تولید شده باشند (یعنی جریانهای انتقالی وجود نداشته باشند)، ثابت کنید که $\oint_V \mathbf{H} \cdot d\mathbf{v} = 0$. آیا انرژی مغناطیسی برابر با صفر است؟

۱۷.۱۲ مساحت محصور بین دو منحنی پسماند شکل ۷.۹ را تخمیناً تعیین کنید و توان اتلافی ناشی از پسماند را در واحد حجم برای این مواد، به هنگام کار با جریان متناوب ۶۰ Hz، محاسبه کنید.

۱۸.۱۲ هستۀ آریمیچریک مولد از آهنی ساخته شده است که حلقۀ پسماند متوسط آن تحت شرایط کاری، دارای مساحتی برابر با ۲۰۰۰۵ ژول بر مترمکعب است. هسته استوانه ای است به طول ۴۰ متر و قطر ۱۵ متر. اگر آریمیچر با ۱۸۰۰۵ دور در دقیقه بچرخد، آهننگ تولید گرما در هسته را محاسبه کنید.

۱۹.۱۲ یک مدار جریان در میدان مغناطیسی مفروضی تحت تأثیر نیروهای مغناطیسی حرکت می کند. کار مکانیکی انجام شده به وسیلۀ مدار در مسئله ۱۰.۱۲ داده شده است. حال فرض کنید که مدار یک هدا اتمی است و جریان اتمی به علت اصول عمومی کوانتومی ثابت نگه داشته شده است (توجه کنید که از تغییر جزئی جریان به علت اثر دیامغناطیس صرف نظر می کنیم). تغییر انرژی مغناطیسی مدار چقدر است؟ نتیجۀ این مسئله اساس انرژی دو قطبی مغناطیسی در محاسبات بخش ۳.۱۰ است.

جریانهای کند تغییر

۱۰۱۳ مقدمه

در فصل ۷ با ایده مدار الکتریکی آشنا شدیم و جریانهایی که در این مدارها به علت ولتاژهای اعمال شده ثابت ایجاد می شد را تحلیل کردیم. اکنون می خواهیم این ایده ها را طوری بسط بدهیم که ولتاژهای کند تغییر و جریانهای کند تغییر حاصل از آنها را نیز در بر بگیرد. برای آنکه به طور صحیح درک کنیم منظور از «کند تغییر» چیست، باید معادلات ماکسول^۱ را به کار ببریم، اگرچه ایده های کلی را می توان بدون توسل به جزئیات این معادلات درک کرد. برای تغییرات سینوسی ولتاژ در مدارهایی که شامل عناصر خطی هستند (و این اساس نظریه مقدماتی مدار است) رفتار هر مدار با یک فرکانس ω مشخص می شود.^۲ یک موج الکترومغناطیسی با این فرکانس در خلا^۳ دارای طول موج $\lambda = 2\pi c/\omega$ است که در آن c سرعت نور است. شرط اصلی برای آنکه جریانی را که از یک مدار می گذرد کند تغییر

۱. در فصل ۱۶ معادلات ماکسول به تفصیل بحث شده است. برای علاقه مندان می ارزد مطالب فصل ۱۶ با مطالبی که در این فصل ارائه داده می شود ربط داده شوند. در این مفهوم، «کند تغییر» بدان معناست که ما از جریان جابه جایی، $\partial \mathbf{D} / \partial t$ ، که در بخشهای ۱۰۱۶ و ۲۰۱۶ درباره آن بحث شده چشم پوشی کنیم. پس همان طور که تاکنون فرض شده است داریم $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.
۲. کمیت ω گاهی فرکانس زاویه ای نامیده می شود و 2π برابر فرکانس است. به کار بردن ω به جای $2\pi f$ مزیت قابل ملاحظه ای در خیلی از بخشهای فیزیک دارد؛ به ویژه در بحث حاضر تعداد زیادی از مضربهای، 2π از معادلات مداری حذف می شوند.

طول مدار $L(m)$	طول موج $\lambda(m)$	$\omega(rad/s)$	فرکانس $f(Hz)$
6×10^5 (۶۰۰ کیلومتر)	6×10^6	۳۱۴	۵۰
۳۰	۳۰۰	6.28×10^6	10^6
۰.۳	۳	6.28×10^8	10^8
۰.۰۰۳	۰.۰۳	6.28×10^{10}	10^{10}

بنامیم این است که مدار مقدار قابل توجهی توان تابش نکند. برقراری این شرط مستلزم آن است که حداکثر بعد خطی سیستم، L ، خیلی کوچکتر از طول موج وابسته به فرکانس محرك درخلاء باشد، به عبارت دیگر

$$\omega \ll \frac{2\pi c}{L} \quad \text{یا} \quad L \ll \frac{2\pi c}{\omega} \quad (10.13)$$

اگر این شرط برقرار باشد، برای هر جزء dI مدار که حامل جریان I است در فاصله‌ای خیلی کمتر از یک طول موج، جزء مشابه dI وجود دارد که حامل همان جریان است. بنابراین، میدانهایی که این اجزا در فواصلی در حدود چند طول موج در تمام جهات تولید می کنند یکدیگر را حذف می کنند، و این نشان می دهد که میدانهای وابسته به مدار به ناحیه ای در نزدیکی مدار محدود خواهند بود. برای اینکه ببینیم چه محدودیتهای عملی توسط معادله (۱۰۱۳) ایجاد می شود، در تهیه جدول ۱۰۱۳ حداکثر بعد خطی مدار $L \sim \lambda/10$ به کار برده شده است. فرکانسهایی که انتخاب شده اند عبارت اند از: فرکانس برق شهر، فرکانس پایین رادیویی (باند پخش AM)، فرکانس بالای رادیویی (FM و تلویزیون) و فرکانس میکرو موج. واضح است که برای سه فرکانس اول مدارهای عادی شرط فوق را بر آورده می کنند؛ اما، برای فرکانس آخر باید مدار در مکعبی به ضلع ۳ میلی متر ساخته شود، در نتیجه کاربرد آن به مدارهای مجتمع (IC ها) محدود می شود. باید توجه داشت که در ۱۰۵ مگا هرتز طول موج و ابعاد مدار در حدود اندازه های آزمایشگاهی اند، و بنابراین در به کار بردن نظریه معمولی مدار در این فرکانس و فرکانسهای بالاتر باید با مراقبت عمل شود. در بقیه این فصل بدون اینکه صراحتاً تذکر بدهیم، فرض می شود که شرط تغییرات کند برقرار است.

۲.۱۳ رفتار گذرا و رفتار حالت پایا

اگر شبکه‌ای از اجزای غیر فعال در یک به یک یا چند چشمه ولتاژ وصل شود، جریان برقرار می‌شود. ماهیت ولتاژهای به کار رفته هر چه باشد، تغییرات اولیه جریانها نسبت به زمان غیر-تناوبی است. ولی، اگر ولتاژها نسبت به زمان به طور تناوبی تغییر کنند، در آن صورت بعد از گذشتن مدت زمان نسبتاً طولانی از اتصال ولتاژها ملاحظه خواهد شد که جریانها نیز نسبت به زمان تغییرات تناوبی دارند. (البته جریانها بعد از گذشت زمان بی نهایت، دقیقاً تناوبی خواهند شد، ولی هر گونه تقریب مطلوبی را برای تناوبی بودن آنها می‌توانیم با صبر کردن به حد کافی، به دست آوریم.) مناسب است که رفتار مدارها را بسته به اینکه رفتار تناوبی مهمتر باشد یا رفتار غیر تناوبی، از دو جنبه بررسی کنیم. رفتار تناوبی را رفتار حالت پایا و رفتار غیر تناوبی را رفتار گذرا می‌نامیم. در هر دو جنبه یک نوع معادلات انتگرال-دیفرانسیلی حاکم است، ولی روشهای مقدماتی که برای حل این دو مورد به کار می‌روند با هم فرق اساسی دارند. تحلیلی که مادر اینجا ارائه خواهیم کرد به تحلیل مقدماتی حالت گذرا (عمدتاً تحریک توسط ولتاژهای ثابت)، و تحلیل حالت پایا برای تحریکهای سینوسی محدود می‌شود. برای مطالعه جزئیات بیشتر به خواننده توصیه می‌شود که به کتابهای کلاسیک گیل‌مین، و بودا، و به کتابهای درسی مهندسی جدیدتر^۲ مراجعه کنند.

۳.۱۳ قوانین کیرشهوف

در فصل ۷ قوانین کیرشهوف را برای مدارهای جریان مستقیم (dc) معرفی کردیم؛ اکنون این قوانین را باید به جریانهای کند تغییر تعمیم دهیم. اولین تعمیم این است که باید توجه کنیم که نه تنها مقاومتها، بلکه خازنها و القاگرها نیز به عنوان اجزای مدار منظور شوند. بین دوسر هر کدام از این اجزا اختلاف پتانسیلی موجود است که باید در قانون مداری کیرشهوف در نظر گرفته شود. نام «افت-IR» دیگر برای تمام این اختلاف پتانسیلها مناسب نیست، بنابراین نام ولتاژ مخالف را برای مشخص کردن اختلاف پتانسیل بین دوسر هر جزء غیر

۱. ولتاژ ثابت باید به عنوان حالت خاصی از ولتاژ متناوب در نظر گرفته شود، حالتی که دوره تناوب آن بی نهایت یا فرکانس آن صفر است.

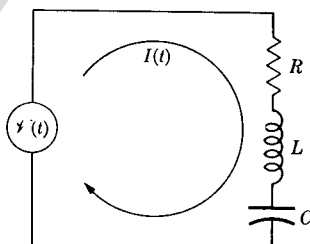
2. E. A. Guillemin, *Communication Networks*, 2 vols., John Wiley & Sons, New York, (1931 and 1935), and H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, D. Van Nostrand Co., Princeton. N. J. 1945).

3. N. Balabanian and T. Bickart, *Electrical Network Theory* (New York: Wiley, 1969); and J. B. Murdoch, *Network Theory* (New York: McGraw-Hill, 1970).

فعال مدار به کار می بریم. تعمیم دیگر اینکه باید ملاحظه کرد که هر دو قانون کیرشهوف باید در هر لحظه از زمان برقرار باشند، به عبارت دیگر، قوانین کیرشهوف باید برای مقادیر لحظه‌ای جریانها، ولتاژهای اعمال شده، و ولتاژهای مخالف، به کار روند. اکنون می توانیم قوانین کیرشهوف را به صورت زیر بیان کنیم

- I. جمع جبری جریانهای لحظه‌ای که به سمت يك نقطه اتصال جریان دارند، صفر است.
- II. جمع جبری ولتاژهای اعمال شده لحظه‌ای در يك حلقه بسته مسای است با جمع جبری ولتاژهای مخالف در آن حلقه.

مفهوم قانون اول روشن است: اگر جریانهایی که به سمت يك اتصال جریان دارند مثبت نامیده شوند در آن صورت جریانهایی را که در جهت مخالف اند باید منفی بنامیم، و این قانون می گوید که همان مقدار جرابانی که به نقطه اتصال وارد می شود باید از آن خارج شود. قانون دوم بیان کننده انتگرال میدان الکتریکی به دور حلقه است؛ اما لازم است که قرارداد علامت گذاری آن روشن شود. قرارداد علامت گذاری که در اینجا ما به کار می بریم به بهترین وجهی با ارجاع به يك حلقه تنهای ساده، مانند شکل ۱۰۱۳، روشن می شود. در این شکل يك ولتاژ اعمال شده، $\mathcal{V}(t)$ ، نشان داده شده است که به طور سری به مقاومت R ، خود القا L ، و خازن C متصل است. پیکانی که با $I(t)$ مشخص شده در شکل رسم شده است که برای نشان دادن جهت مثبتی است که (به طور اختیاری) برای جریان فرض می شود. تمام علامات سرانجام نسبت به این جهت مشخص می شوند. ولتاژ $\mathcal{V}(t)$ در صورتی مثبت است که جرابانی را که ایجاد می کند در همان جهت فرض شده حرکت کند. به عبارت دیگر، اگر انتهای بالایی در شکل ۱۰۱۳ نسبت به انتهای پایینی آن مثبت باشد، $\mathcal{V}(t)$ مثبت است. ولتاژ مخالف در مقاومت، درست مانند حالتی که جرابان مستقیم داریم، مساوی با IR است. اگر dI/dt مثبت باشد در خود القا emf القا می شود که جرابانی در جهت مخالف با جهت فرضی جرابان I به وجود می آورد، به عبارت دیگر، انتهای بالایی L باید نسبت به انتهای پایینی آن مثبت باشد. چون این جهت در مقایسه با جهت I همان جهت IR است، ولتاژ مخالف آن درست



شکل ۱۰۱۳ يك مدار متوالی متشکل از اجزای مدار.

مساوی $L(dI/dt)$ است.^۱ ولتاژ مخالف درخازن بستگی به بار روی خازن دارد، که بسته به اینکه صفحه بالایی یا پایینی خازن را در نظر بگیریم ممکن است مثبت یا منفی باشد. این اشکال را می توان با نوشتن معادله زیر برطرف کرد

$$Q = \int_{t_0}^t I(t) dt \quad (2.13)$$

در اینجا t_0 طوری انتخاب می شود که $Q(t_0)$ مساوی صفر باشد. با این انتخاب برای Q ، بار مثبت Q انتهای بالایی خازن را مثبت می کند و در نتیجه يك ولتاژ مخالف درخازن مساوی $+Q/C$ ایجاد می کند. قانون ولتاژ کیرشهوف برای مدار شکل ۱۰۱۳ عبارت است از

$$\mathcal{V}(t) = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I dt \quad (3.13)$$

که نمونه ای از معادله های انتگرال - دیفرانسیلی در نظریه مدار است.

۴.۱۳ رفتار گذرای مقدماتی

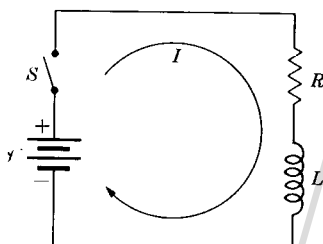
تنها رفتار گذرای را که در اینجا مورد بررسی قرار می دهیم مربوط است به اعمال ناگهانی يك ولتاژ ثابت $\mathcal{V}$ به شبکه ای از مقاومتها، خازنها و القاگرها، اولین مثال در این مورد مدار ساده RL در شکل ۲.۱۳ است. برای این مدار بعد از اینکه کلید S بسته می شود معادله (۳.۱۳) به صورت زیر در می آید

$$\mathcal{V} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (4.13)$$

قبل از اینکه کلید بسته شود جواب معادله مزبور به صورت بدیهی $I = 0$ است. معادله (۴.۱۳) يك معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت است و بنابراین همواره، با يك ثابت دلخواه در جواب، می توان آن را حل کرد. جواب آن عبارت است از

$$I(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} - Ke^{-tR/L} \quad (5.13)$$

۱. باید به این نکته توجه داشت که emf القایی به صورت $-L(dI/dt)$ نوشته می شود، ولی چون این يك emf است معمولاً در معادله در طرف مقابل ولتاژهای مخالف نوشته می شود. بنابراین با نوشتن $+L(dI/dt)$ برای ولتاژ مخالف، هیچ گونه تناقضی به وجود نمی آید.



شکل ۲۰۱۳ پاسخ گذرای يك مدار RL . نمودار مدار.

که در آن K ثابتی دلخواه است. چون مدار شامل يك خودالقاست که از تغییرات ناگهانی و سریع جریان جلوگیری می‌کند، مقدار جریان درست بعد از اتصال کلید باید مساوی مقدار جریان قبل از اتصال کلید باشد. به عبارت دیگر، باید مساوی صفر باشد. اگر در لحظه $t = t_0$ کلید وصل شود، لازم است که

$$\frac{\mathcal{V}}{R} - Ke^{t_0 R/L} = 0 \quad (۶.۱۳)$$

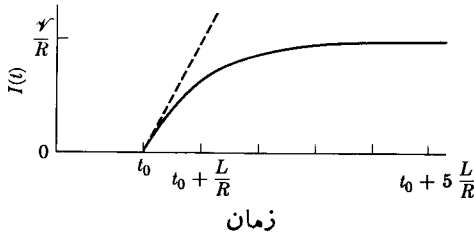
یا

$$K = \frac{\mathcal{V}}{R} e^{t_0 R/L} \quad (۷.۱۳)$$

در نتیجه جواب کامل به صورت

$$I(t) = \frac{\mathcal{V}}{R} [1 - e^{-R(t-t_0)/L}] \quad (۸.۱۳)$$

است که منحنی آن در شکل ۳۰۱۳ رسم شده است. چند حقیقت مفید را می‌توان به سادگی از معادله (۸.۱۳) و شکل ۳۰۱۳ به دست آورد. نخست، L/R دارای بعد زمان است و به نام ثابت زمانی خوانده می‌شود. چون $1/e \cong 0.368$ است، ثابت زمانی عبارت است از مدت زمان لازم برای آنکه جریان به ۰.۳۶۸ برابر مقدار نهایی اش ($\mathcal{V}/R$) برسد. در مدت پنج برابر ثابت زمانی جریان به ۰.۹۹۳ برابر مقدار نهایی اش می‌رسد که برای سهولت به خاطر سپردن آن را ۹۹٪ در نظر می‌گیریم. مقدار اولیه dI/dt درست همان جریان نهایی $\mathcal{V}/R$ تقسیم بر ثابت زمانی L/R است. به عبارت دیگر، مقدار مزبور طوری است که اگر افزایش جریان به همین میزان ادامه می‌داشت جریان در مدت يك ثابت زمانی به مقدار نهایی اش می‌رسید. سودمندی حقایق فوق در این است که با كمك آنها به سادگی

شکل ۳.۱۳ پاسخ گذرای یک مدار RL .

بارسم یک منحنی نمایی استاندارد می‌توانیم تابع نمایی مسائل ساده حالت گذرا را با تقریب یکی دودرصد محاسبه کنیم. خیلی از جنبه‌های دیگر یک مدار شامل مقاومت و خود القارا می‌توانیم بررسی کنیم، و همین روش را می‌توانیم برای مدارهای شامل خازن و مقاومت نیز به کار ببریم. در آخرین فصل مسائل متعددی برای این منظور داده شده است.

دومین مثالی که بررسی می‌شود یک مدار متوالی RLC است که به طور ناگهانی به یک ولتاژ ثابت $\mathcal{V}$ متصل می‌شود. چنین مداری در شکل ۴.۱۳، نشان داده شده است. بعد از اتصال کلید، معادله مناسبی که در مورد این مدار می‌توان نوشت به صورت زیر است

$$\mathcal{V} = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t) dt \quad (۹.۱۳)$$

که در آن بازهم t_0 زمانی است که بار خازن صفر است. برای سهولت فرض می‌شود که خازن در ابتدا بدون بار است و کلید S در لحظه $t_0 = 0$ بسته می‌شود. معادله (۹.۱۳) ممکن است نامأنوس باشد؛ ولی بایک بار مشتق گیری از آن نسبت به زمان به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} \quad (۱۰.۱۳)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم معمولی با ضرایب ثابت است (معادله نوسانگر هماهنگ). روش حل چنین معادلاتی مشهور است، در واقع برای حالت موجود، $d\mathcal{V}/dt = 0$ ، به شرط آنکه L و C هیچ یک صفر نباشند، جواب آن عبارت است از^۱

$$I = \{Ae^{i\omega_n t} + Be^{-i\omega_n t}\} e^{-Rt/2L} \quad (۱۱.۱۳)$$

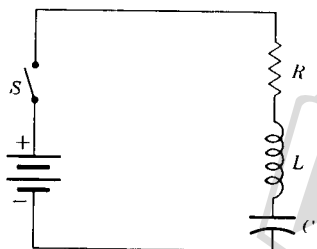
که در آن

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

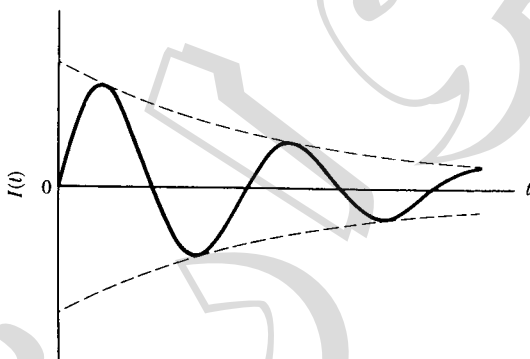
@Quark Book

H-M

۱. در اینجا i عدد موهومی واحد است، یعنی، $i \equiv \sqrt{-1}$.



شکل ۴۰۱۳ پاسخ گذرای يك مدار RLC . نمودار مدار.



شکل ۵۰۱۳ پاسخ گذرای يك مدار RLC .

اگر L یا C صفر باشد، ابهامی در معادله (۱۱.۱۳) به وجود می آید؛ ولی هنوز معادله (۱۵.۱۳) را می توان برای $L = 0$ حل کرد؛ در واقع جواب آن از معادله (۱۱.۱۳) ساده تر است. به علاوه، حالت $C = 0$ مربوط به حالت مدار باز است که جالب توجه نیست. برای کامل کردن این بحث، اگر $C = \infty$ باشد، که مربوط است به خارج کردن خازن از مدار، معادله (۱۱.۱۳) تبدیل به معادله (۵.۱۳) می شود، که اکنون باید دو ثابت دلخواه را با توجه به شرایط حدی انتخاب کنیم. البته این مطلب این حقیقت را منعکس می کند که وقتی از معادله (۹.۱۳) به معادله (۱۵.۱۳) می رویم تمام اطلاعات راجع به $\mathcal{C}$ را از دست می دهیم.

اکنون به حل معادله (۱۱.۱۳) بر می گردیم، که باید در آن ثابتهای A و B را تعیین کنیم. برای اینکه جریان مقداری حقیقی باشد، باید B مزدوج مختلط A باشد. چون کلید در لحظه $t = 0$ بسته می شود، در لحظه $t = 0$ جریان باید صفر باشد، یعنی دو تابع نمایی موهومی باید بایکدیگر ترکیب شوند تا نتیجه يك تابع سینوسی شود. با در نظر گرفتن این ملاحظات

به نتیجه زیر می‌رسیم

$$I(t) = De^{-Rt/\gamma L} \sin \omega_n t \quad (12.13)$$

که در آن D تنها ثابت حقیقی است که هنوز باید آن را حساب کنیم. این محاسبه با توجه به اینکه در $t=0$ مقادیر I و Q هر دو صفرند، انجام پذیر است. در نتیجه

$$\mathcal{V} = L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} \quad (13.13)$$

با به کار بردن این شرط اولیه، به دست می‌آید

$$D = \frac{\mathcal{V}}{\omega_n L} = \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}} \quad (14.13)$$

اکنون حل معادله کامل است. شدت جریان با فرکانس طبیعی

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

و بادامنه‌ای نوسان می‌کند که با گذشت زمان کاهش می‌یابد و با $De^{-Rt/\gamma L}$ داده می‌شود. این تغییرات در شکل ۵.۱۳ نشان داده شده است. اگر لحظه بستن کلید، t_0 ، صفر نباشد، تنها لازم است که t را با $t - t_0$ جایگزین کنیم.

با این مطلب، تحلیل مقدماتی حالت گذرا که بنا بود در اینجا عرضه کنیم، کامل می‌شود. بقیه این فصل به حالت پایای مدارهایی اختصاص دارد که با ولتاژهای سینوسی برانگیخته می‌شوند، یعنی حالتی که در آن بعد از گذشتن زمانی نسبتاً طولانی از لحظه اعمال ولتاژ محرک اطمینان حاصل می‌شود که اثرهای گذرا قابل چشمپوشی‌اند.

۵.۱۳ رفتار حالت پایای يك مدار ساده متوالی

اکنون رفتار مدار شکل ۵.۱۳ را در حالتی که به ولتاژ محرک زیر وصل شده است بررسی می‌کنیم

$$\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 \cos \omega t \quad (15.13)$$

در اینجا ω فرکانس مفروضی است که الزاماً برابر با ω_n نیست. به سادگی می‌توانستیم این

ولتاژ را به جای $\mathcal{V}(t)$ در معادله (۱۰.۱۳) یا معادله (۱۰.۱۳) قرار دهیم و معادله حاصل را حل کنیم؛ ولی برای حل آن بهتر آن است که توجه کنیم $\cos \omega t$ مساوی قسمت حقیقی $e^{i\omega t}$ است، اگر يك ولتاژ مختلط خیالی مثل $\mathcal{V}_1 + i\mathcal{V}_2$ در يك مدار به کار رود، جریان حاصل نیز حتماً به صورت مختلط $I_1 + iI_2$ خواهد بود (باید توجه داشت که $\mathcal{V}_1$ ، $\mathcal{V}_2$ ، I_1 و I_2 در اینجا مقادیر حقیقی هستند). با گذاشتن این مقادیر خیالی در معادله (۱۰.۱۳) خواهیم داشت

$$\frac{d\mathcal{V}_1}{dt} + i\frac{d\mathcal{V}_2}{dt} = \left(L\frac{d^2 I_1}{dt^2} + R\frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C} \right) + i \left(L\frac{d^2 I_2}{dt^2} + R\frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C} \right) \quad (16.13)$$

این معادله تنها در موردی صادق است که قسمتهای حقیقی دو طرف آن باهم و قسمتهای موهومی دوطرف آن نیز باهم مساوی باشند. بنابراین I_1 در معادله (۱۰.۱۳)، با $d\mathcal{V}_1/dt$ در طرف چپ آن، صدق می کند، و I_2 نیز در همان معادله (۱۰.۱۳)، با $d\mathcal{V}_2/dt$ در طرف چپ آن، صدق می کند. این بدان معنی است که اگر $\mathcal{V}(t)$ قسمت حقیقی يك تابع مختلط باشد، کافی است معادله (۱۰.۱۳) را با آن تابع مختلط برای $\mathcal{V}(t)$ حل کنیم و بعد جریان فیزیکی را با برداشتن قسمت حقیقی جواب مختلط، به دست آوریم. برای حالتی که مدار به ولتاژ محرك $\cos \omega t$ متصل می شود مناسب است که $e^{i\omega t}$ را به کار ببریم و قسمت حقیقی جواب را برای جریان فیزیکی انتخاب کنیم. در مواردی ممکن است که بهتر باشد $e^{i(\omega t + \varphi)}$ را به کار ببریم تا نتیجه تأثیر $\cos(\omega t + \varphi)$ را به دست آوریم که در آن يك زاویه فاز مفروض است.

اگر $e^{i\omega t}$ را در معادله (۱۰.۱۳) به کار ببریم، در این صورت جریان $I_1 e^{i\omega t}$ خواهد بود، که در اینجا I_1 يك ثابت مختلط است. با گذاشتن این مقادیر در معادله خواهیم داشت

$$i\omega \mathcal{V}_0 e^{i\omega t} = \left[-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right] I_0 e^{i\omega t} \quad (17.13)$$

و از تقسیم دوطرف معادله بالا به $i\omega$ ، داریم

$$\mathcal{V}_0 e^{i\omega t} = \left[R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right] I_0 e^{i\omega t} \quad (18.13)$$

که به صورت زیر است

$$\mathcal{V}_0 e^{i\omega t} = Z I_0 e^{i\omega t} \quad (19.13)$$

که در آن

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \quad (۲۰.۱۳ \text{ الف})$$

یا

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (۲۰.۱۳ \text{ ب})$$

کمیت Z مقاومت ظاهری مدار نامیده می‌شود و شامل دو قسمت است: قسمت حقیقی یا مقاومت (R) و قسمت موهومی یا واکنایی (X). واکنایی نیز به دو قسمت، واکنایی القایی $X_L = \omega L$ و واکنایی خازنی $X_C = -1/\omega C$ ، تقسیم می‌شود. اینکه مقاومت ظاهری مختلط است بدان معناست که شدت جریان و ولتاژ اعمال شده همفاز نیستند. گاهی بهتر است که مقاومت ظاهری را به صورت قطبی آن بنویسیم

$$Z = |Z|e^{i\theta} \quad (۲۱.۱۳)$$

که در آن

$$|Z| = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2} \quad (۲۲.۱۳)$$

و

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) \quad (۲۳.۱۳)$$

با به کار بردن این صورت برای مقاومت ظاهری، جریان مختلط را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I(t) = \frac{\mathcal{V}_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)} \quad (۲۴.۱۳ \text{ الف})$$

و جریان فیزیکی برابر است با

$$\frac{\mathcal{V}_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta) \quad (۲۴.۱۳ \text{ ب})$$

اگر θ بزرگتر از صفر باشد، جریان بعد از ولتاژ به یک فاز معین خواهد رسید، و می‌گوییم که از ولتاژ عقب مانده است. در حالت عکس، جریان از ولتاژ جلو می‌افتد. در همین جا مطالعه مدار ساده متوالی رسماً تکمیل می‌شود، گرچه بعداً ما نتیجه حاصل را با دقت بررسی خواهیم

کرد تا درك فیزیکی بیشتری دربارهٔ این وضعیت به دست آوریم.

۶.۱۳. اتصالیهای متوالی و موازی مقاومتهای ظاهری

اگر دو مقاومت ظاهری به طور متوالی به هم وصل شوند، از هر دوی آنها جریان یکسانی می گذرد. ولتاژهای^۱ دوسر آنها عبارت است از

$$V_1 = Z_1 I \quad \text{و} \quad V_2 = Z_2 I$$

اختلاف پتانسیل دوسر این ترکیب برابر

$$V_1 + V_2 = (Z_1 + Z_2) I$$

است. بنابراین، واضح است که اگر مقاومتهای ظاهری به صورت متوالی به هم وصل شوند، مقاومت ظاهری آنها با هم جمع می شود، به عبارت دیگر

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots \quad (\text{اتصال متوالی}) \quad (۲۵.۱۳)$$

بدین ترتیب معادلهٔ (۲۵.۱۳) الف) جمع سه مقاومت ظاهری است: مقاومت R

$$Z_1 = R$$

القای L

$$Z_2 = i\omega L$$

وخازن C

$$Z_3 = \frac{1}{i\omega C}$$

که هر سه به طور متوالی قرار دارند. باید به این نکته مهم توجه داشت که مقاومتهای ظاهری به صورت اعداد مختلط جمع می شوند. اگر $Z_1 = R_1 + iX_1$ و $Z_2 = R_2 + iX_2$ باشد، در این صورت داریم

$$Z = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + i(X_1 + X_2) \quad (۲۶.۱۳)$$

۱. در این قسمت و در بقیهٔ این فصل علامت V را به جای $\Delta\varphi$ برای اختلاف پتانسیل دو سر یک جزء مدار یا یک گروه از اجزای مدار به کار می بریم.

به شکل قطبی داریم

$$Z = |Z|e^{i\theta}, \quad |Z| = [(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2]^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2} \quad (27.13)$$

توجه کنید که بزرگی Z مساوی مجموع بزرگیهای Z_1 و Z_2 نیست. اگر مقاومت‌های ظاهری را به طور موازی به هم وصل کنیم، اختلاف پتانسیل دو سر تمام آنها یکسان خواهد بود و جریانهای آنها عبارت خواهند بود از $I_1 = V/Z_1$ و $I_2 = V/Z_2$. جریان کل برابر است با

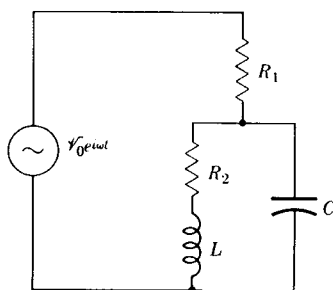
$$I = I_1 + I_2 + \dots = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \dots = V \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots \right)$$

که از آن روشن است که

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots \quad (\text{اتصال موازی}) \quad (28.13)$$

در اینجا نیز، جمع ما جمع اعداد مختلط است.

معادلات (25.13) و (28.13) اساس حل مسائلی هستند شامل ترکیبات پیچیده‌تری بایک ولتاژ محرك منفرد. به عنوان مثال، اکنون شکل ۶.۱۳ را در نظر می‌گیریم. مقاومت ظاهری شامل یک مقاومت است که به طور متوالی به ترکیب موازی یک خازن و یک القامتصل شده است. این را می‌توان به صورت زیر نوشت



شکل ۶.۱۳ یک نمونه از مدار ac.

$$Z = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2 + i\omega L} + \frac{1}{1/i\omega C}} \quad (۲۹.۱۳)$$

یا به صورتی دیگر داریم

$$Z = R_1 + \frac{R_2 + i\omega L}{1 + i\omega C(R_2 + i\omega L)} \quad (۳۰.۱۳)$$

یا

$$Z = R_1 + \frac{(R_2 + i\omega L)[(1 - \omega^2 LC) - i\omega R_2 C]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} \quad (۳۱.۱۳)$$

تنها کار با ارزش دیگری که می توان در اینجا انجام داد این است که قسمتهای حقیقی و موهومی را از هم جدا کنیم

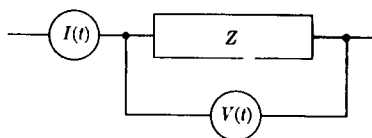
$$Z = R_1 + \frac{R_2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} + i \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R_2^2 C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_2^2 C^2} \quad (۳۲.۱۳)$$

اکنون که Z به دست آمد، می توانیم با تقسیم $e^{i\omega t}$ به Z شدت جریان را تعیین کنیم. مطالعه این مدار بعداً در بررسی پدیده تشدید دنبال خواهد شد.

۷.۱۳ توان و ضرایب توان

توانی را که به یک مقاومت می رسد می توان از حاصل ضرب اختلاف پتانسیل دوسر آن در شدت جریانی که از آن می گذرد به دست آورد. با وجود این، در حالت کلیتر، مثل مقاومت ظاهری که در شکل ۷.۱۳ نشان داده شده است، روش دقیقتری لازم است. اگر همان طور که نشان داده ایم، $V(t)$ و $I(t)$ به ترتیب ولتاژ و جریان مختلط باشند، در این صورت توان لحظه ای عبارت است از

$$P(t) = \operatorname{Re} I(t) \operatorname{Re} V(t) \quad (۳۳.۱۳)$$



شکل ۷.۱۳ اندازه گیری توان.

توان متوسط کمیت مهمتری است. مقدار متوسط توان را در یک دوره تناوب کامل یاد مدمت زمان طولانی (تعداد زیادی دوره تناوب) محاسبه می کنند. اگر فازها طوری انتخاب شوند که V حقیقی باشد، و مطابق معمول، $Z = |Z|e^{i\theta}$ ، در این صورت به سادگی می توان نشان داد که (مسئله ۱۱.۱۳)

$$\bar{P} = \overline{\operatorname{Re} I(t) \operatorname{Re} V(t)} = \frac{1}{\gamma} |I_0| |V_0| \cos \theta \quad (۳۴.۱۳)$$

ضریب $1/2$ در معادله (۳۴.۱۳) نشان دهنده این حقیقت است که متوسط $\sin^2 \omega t$ یا $\cos^2 \omega t$ مساوی $1/2$ است. ضریب جالب دیگر $\cos \theta$ است که نشان می دهد جریان و ولتاژ همفاز نیستند. غالباً $\cos \theta$ را ضریب توان مدار جریان متناوب (ac) می نامند. در بخش ۳.۱۷ نشان داده خواهد شد که

$$\overline{\operatorname{Re} (I_0 e^{i\omega t}) \operatorname{Re} (V_0 e^{i\omega t})} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{Re} (I_0^* V_0) \quad (۳۵.۱۳)$$

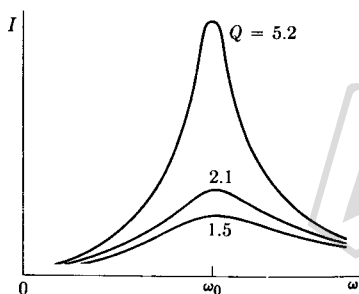
که در آن I_0^* مزدوج مختلط I_0 است. این رابطه که به راحتی می توان آن را به خاطر سپرد مستقیماً به معادله (۳۴.۱۳) منجر می شود. در خاتمه، خاطر نشان می کنیم که مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان اغلب با معادلات زیر تعریف می شوند

$$V_{\text{مؤثر}} = \frac{\sqrt{2}}{\gamma} |V_0|, \quad I_{\text{مؤثر}} = \frac{\sqrt{2}}{\gamma} |I_0| \quad (۳۶.۱۳)$$

اهمیت تعاریف بالا در این است که چنانچه مقدار معین V_{eff} به یک مقاومت اعمال شود، همان مقدار توان مصرفی خواهد داشت که یک ولتاژ ثابت با همان بزرگی به آن اعمال شود. مشخص کردن مقادیر مؤثر خیلی متداول است، مثلاً، خطوط ۲۲۰ ولت ac یعنی خطوطی که ولتاژ مؤثر آنها ۲۲۰ ولت است.

۸.۱۳ تشدید

معادله (۲۲.۱۳) نشان می دهد که مقاومت ظاهری یک مدار ساده متوالی LRC به فرکانس بستگی دارد، و مقدار آن به ازای $1/LC = \omega_0^2 \equiv \omega_c^2$ کمینه است. در این فرکانس مقاومت ظاهری درست مساوی R ، زاویه فاز صفر، و جریان بیشینه و بزرگی آن مساوی V_0/R است. این یک پدیده تشدید است که خیلی شبیه به پدیده تشدید است که در نوسان کننده های واداشته میرای مکانیکی مشاهده می شود. اگر جریان را به صورت تابعی از فرکانس



شکل ۸.۱۳ منحنیهای تشدید برای يك مدار متوالی RLC .

رسم کنیم، منحنی شکل ۸.۱۳ به دست می آید. در این شکل تعدادی منحنی رسم شده است که در تمام آنها مقادیر L و C یکی است ولی مقاومت متوالی با آنها از يك منحنی به منحنی دیگر فرق می کند. واضح است که هر چه مقاومت متوالی کوچکتر باشد منحنی تیزتر است. در فرکانسی که بزرگی مقاومت ظاهری $\sqrt{2}$ برابر R است، جریان به $\sqrt{2}/2$ برابر مقدار بیشینه خود افت می کند. در این فرکانس داریم

$$\left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = R \quad (۳۷.۱۳)$$

برای منحنیهایی که قله نسبتاً تیزی دارند، این وضع در مقادیری از ω که از ω_0 فاصله زیادی ندارند، حاصل می شود. بنابراین می توان نوشت، $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ ، و در نتیجه خواهیم داشت

$$\left| \omega_0 L + \Delta\omega L - \frac{1}{\omega_0 C} \frac{1}{1 + \Delta\omega/\omega_0} \right| = R \quad (۳۸.۱۳)$$

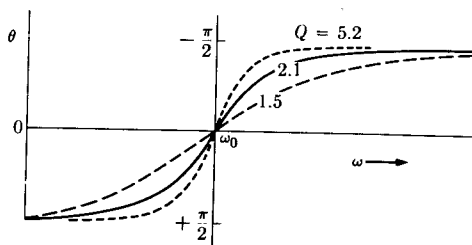
حال اگر $\omega_0 = 1/LC$ و $\omega_0^{-1} \cong 1 - \Delta\omega/\omega_0$ را به کار ببریم، نتیجه خواهد شد

$$2|\Delta\omega|L = R$$

یا

$$\frac{2|\Delta\omega|}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (۳۹.۱۳)$$

کمیت



شکل ۹.۱۳ زاویه فاز مقاومت ظاهری در یک مدار متوالی RLC.

$$Q = \omega_0 L / R \quad \text{یا} \quad Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} \quad (۲۰.۱۳)$$

مشخص کننده تیزی تشدید است و به ضریب کیفیت یا ضریب Q مدار مشهور است. از نظر عملی، می توان Q را تنها به عنوان خاصیت القاگر در نظر گرفت، زیرا بیشتر مقاومت متوالی که نمی توان از آن اجتناب کرد، مربوط به سیمی است که القاگر را با آن درست می کنیم. اما در یک بررسی دقیقتر معلوم می شود که در محاسبه Q ها اتلاف درخازنها را نیز باید در نظر گرفت. منحنیهای شکل ۸.۱۳ با مقادیر Q مربوط مشخص شده اند.

با تغییر دادن فرکانس منبع محرک، نه تنها بزرگی بلکه فاز جریان نیز تغییر می کند. این تغییرات فاز برای همان مقادیر Q شکل ۸.۱۳ در شکل ۹.۱۳ نشان داده شده اند. در فرکانسهای کمتر از فرکانس تشدید، زاویه فاز مقاومت ظاهری، منفی است؛ بنابراین فاز جریان مثبت است و جریان از ولتاژ جلومی افتد. در فرکانسهای بیشتر از فرکانس تشدید، برعکس است و جریان از ولتاژ عقب می افتد.

جالب است توجه کنیم که مدارهای معمولی تشدید امواج رادیویی که در وسایل ارتباطی وجود دارند، برخلاف اینکه ظاهراً موازی به نظر می رسند، مدارهای تشدید متوالی اند. در ساده ترین حالت این بدان علت است که توان محرک از طریق القا با L جفت می شود و در نتیجه به صورت یک emf که با L به طور متوالی وصل شده است، ظاهر می شود.

پدیده تشدید به مدارهای متوالی، نظیر آنچه هم اکنون بررسی شد محدود نمی شود؛ مدارهای موازی نیز ممکن است مشخصات تشدید از خود بروز دهند. مدار شکل ۶.۱۳ چنین تشدید را از خود بروز می دهد. تعریف فرکانس تشدید برای یک مدار تشدید موازی

به سادگی تعریف فرکانس تشدید برای يك مدار متوالی نیست، بعضی از امکانات برای این تعریف عبارت اند از (۱) $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ، (۲) فرکانسی که در آن مقاومت ظاهری [که با معادله (۳۱.۱۳) داده شده است] بیشینه است، یا (۳) فرکانسی که در آن ضریب توان مساوی با يك است. از هر يك از این سه انتخاب، فرکانس متفاوتی به دست می آید؛ ولی برای مدارهایی که Q ی بزرگ دارند این فرکانسها تقریباً یکسان اند. اولین انتخاب به مراتب از دو انتخاب دیگر در عمل مفیدتر است زیرا مستقیماً خیلی از نتایج مدارهای تشدید متوالی را برای حالت تشدید موازی قابل کاربرد می سازد. با به کار بردن معادله (۳۱.۱۳) برای محاسبه Z ، و قرار دادن $R_1 = 0$ و $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ، نتیجه بسیار جالبی به دست می آید. این نتیجه عبارت است از

$$Z = \omega_0 L \left[\frac{\omega_0 L}{R} - i \right], \quad (\omega = \omega_0) \quad (41.13)$$

برای مداری با Q ی بزرگ می توان از i صرف نظر کرد، نتیجه اینکه مقاومت ظاهری در حالت تشدید برابر است با Q برابر و اکنایی القایی در حالت تشدید.

موضوع مدارهای تشدید را می توان به تفصیل دنبال کرد، ولی دنبال کردن آن در اینجا قابل توجه نیست. بعضی از مسائل آخر فصل موضوع این بخش را گسترش می دهند، جزئیات کاملتر در کتب دیگری ارائه شده است.^۱

* ۹.۱۳ القاهای متقابل در مدارهای ac

در حل مسائل مدار ac که شامل القاهای متقابل اند مشکل کوچکی در تعیین علامت صحیح برای القای متقابل وجود دارد. این مشکل را می توانیم به سادگی بدین ترتیب حل کنیم که توجه کنیم علامت وابسته به القای متقابل به جهت مقروض برای جریانه‌ها در دو مدار و به طریقه‌ای که دو سیم پیچ به هم متصل شده اند، بستگی دارد. نماد M_{ij} را برای القای متقابل خالص بین دو مدار به کار خواهیم برد.

در فصل ۱۱ نشان دادیم که بزرگی emf تولید شده در سیم پیچ ۲ ناشی از تغییر جریان در سیم پیچ ۱ عبارت است از

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (42.13)$$

برای جریانه‌های سینوسی، با استفاده از نمادگذاری اعداد مختلط، داریم

$$\mathcal{E}_2 = i\omega M_{21} I_1 e^{i\omega t} \quad (43.13)$$

یا

$$\mathcal{E}_2 = i\omega M_{21} I_1 \quad (44.13)$$

در بحث زیر نماد M_{21} را به عنوان يك كميت مثبت در نظر خواهیم گرفت و علامت $\mathcal{E}_2$ را به طور صریح نشان خواهیم داد. به عبارت دیگر، در معادله (۴۴.۱۳) به جای M_{21} مقدار $+M_{21}$ را قرار خواهیم داد و M_{21} را يك كميت مثبت در نظر خواهیم گرفت. برای توضیح روش تعیین علامات، اکنون مدار شکل ۱۵.۱۳ را در نظر می گیریم. چنان که ملاحظه می شود دو مقاومت ظاهری Z_1 و Z_2 با يك القای متقابل ترکیب شده اند و به ولتاژ $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V} e^{i\omega t}$ وصل شده اند. القای متقابل را با نماد M_{12} نشان می دهیم و فرض می کنیم که عدد مثبتی است. نقاط سیاه در شکل پایانه هایی از دو سیم پیچ را نشان می دهند که به طور همزمان مثبت اند، به بیان دیگر، اگر يك جریان سینوسی از سیم پیچ پایینی طوری عبور کند که پایانه چپ آن را در زمان t_1 مثبت کند، در آن صورت ولتاژی که در سیم پیچ بالایی القا می شود در زمان t_1 پایانه چپ آن را مثبت خواهد کرد. معادله شاخه بالایی بر طبق قانون کیرشهوف عبارت است از

$$Z_1 I_1 + i\omega L_1 I_1 + i\omega M_{12} I_2 = \mathcal{V} \quad (45.13)$$

برای القای متقابل علامت مثبت را در نظر گرفته ایم زیرا يك جریان مثبت I_2 ، در شاخه بالایی ولتاژی ایجاد می کند که در همان جهت افت $I_1 R$ است. معادله دوم عبارت است از

$$i\omega M_{12} I_1 + Z_2 I_2 + i\omega L_2 I_2 = \mathcal{V} \quad (46.13)$$

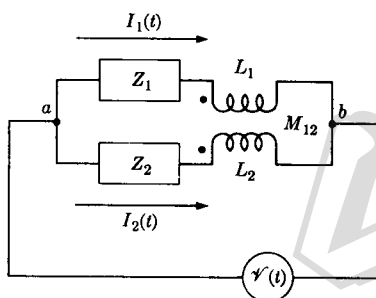
که در آن به دلیل تقارن $M_{12} = M_{21}$ نوشته شده است.

تعیین علامت بر همان مبنای قبلی انجام شده است، و می توان آن را بدین نحو بررسی کرد که توجه کنیم که M_{12} در معادله شاخه يك و M_{21} در معادله شاخه دو باید با علامت یکسانی ظاهر شوند. دستگاه معادلات (۴۵.۱۳) و (۴۶.۱۳) را می توان با روشهای استاندارد حل کرد و نتایج زیر را به دست آورد

$$I_1 = \mathcal{V} \frac{Z_2 + i\omega L_2 - i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2}$$

$$I_2 = \mathcal{V} \frac{Z_1 + i\omega L_1 - i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2} \quad (47.13)$$

از جمع دو معادله فوق جریان کل $I_1 + I_2$ به دست می آید



شکل ۱۰.۱۳ مدار با القای متقابل.

$$I = I_1 + I_2 = \mathcal{V} \frac{Z_1 + i\omega L_1 + Z_2 + i\omega L_2 - 2i\omega M_{12}}{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2} \quad (48.13)$$

ضریب $\mathcal{V}$ در طرف راست معادله بالا، عکس مقاومت ظاهری است که به دوسر مولد وصل شده است، یا عکس مقاومت ظاهری ویژه بین دو نقطه a و b . واضح است که اگر M_{12} صفر باشد، مقاومت ظاهری همان ترکیب موازی مقاومتهای ظاهری دو شاخه است. برای نحوه اتصالی که در شکل نشان داده شده است، وقتی M_{12} افزایش یابد مقاومت ظاهری نیز افزایش می یابد.

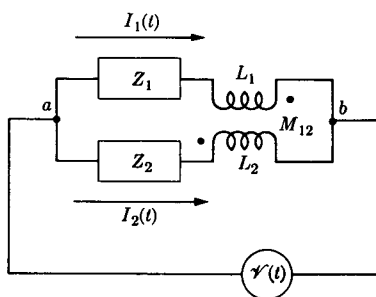
شکل ۱۱.۱۳ از مدار شکل ۱۰.۱۳ با تعویض دو انتهای یکی از سیم پیجهایی که القای متقابل دارند، به دست آمده است. توجه کنید که تنها اختلاف آن با شکل ۱۰.۱۳ در آن است که نقطه سیاه در سیم پیچ بالایی از سمت چپ آن به سمت راست منتقل شده است. نتیجه این است که باید علامت جمله M_{12} را در معادلات (۴۵.۱۳) و (۴۶.۱۳) عوض کرد، پس

$$\left. \begin{aligned} (Z_1 + i\omega L_1)I_1 - i\omega M_{12}I_2 &= \mathcal{V} \\ -i\omega M_{12}I_1 + (Z_2 + i\omega L_2)I_2 &= \mathcal{V} \end{aligned} \right\} \quad (49.13)$$

حال جریانهها به سادگی به دست می آیند و با ترکیب آنها مقاومت ظاهری به دست می آید

$$Z_{ab} = \frac{(Z_1 + i\omega L_1)(Z_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M_{12}^2}{Z_1 + i\omega L_1 + Z_2 + i\omega L_2 + 2i\omega M_{12}} \quad (50.13)$$

این نتیجه موقعی که القای متقابل صفر باشد، همان نتیجه حالت قبل است. رابطه بین Z_{ab} برای مقدار معینی از M_{12} و Z_{ab} برای $M_{12} = 0$ به طریق پیچیده ای به این پارامتر بستگی



شکل ۱۱.۱۳ مدار شکل ۱۰.۱۳ که در آن علامت القای متقابل معکوس شده است.

دارد. در اینجا فقط به بیان این مطلب اکتفا می‌کنیم که Z_{ab} ممکن است بزرگتر یا کوچکتر از Z_{ab} برای $M_{12} = 0$ باشد.

مدار اصلی برای مشهورترین دستگاه القای متقابل، یعنی مبدل، در شکل ۱۲.۱۳ نشان داده شده است. R_1 و R_2 مقاومت‌های سیم‌پیچ‌های اولیه (محرك) و ثانویه (تحرريك شده) هستند، L_1 و L_2 ضرایب خود القای آنهاست، و M القای متقابل (مثبت) بین آنهاست. مقاومت ظاهری باری است که به ثانویه متصل است، و $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$ ولتاژ دوسر سیم‌پیچ اولیه است. اگر فرض کنیم که جریانهای $I_1 e^{i\omega t}$ و $I_2 e^{i\omega t}$ در جهات نشان داده شده جاری هستند، در آن صورت قانون ولتاژ کیرشهوف ایجاب می‌کند که معادلات زیر برقرار باشند

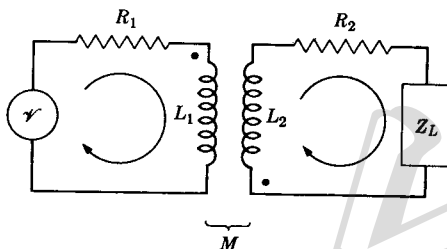
$$\left. \begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= I_1 R_1 + i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2 \\ 0 &= I_2 R_2 + i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1 + I_2 Z_L \end{aligned} \right\} \quad (51.13)$$

جوابهای این دو معادله عبارت‌اند از

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{Z_L + R_2 + i\omega L_2}{(R_1 + i\omega L_1)(Z_L + R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2} \mathcal{V}_0 \\ I_2 &= \frac{-i\omega M}{(R_1 + i\omega L_1)(Z_L + R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2} \mathcal{V}_0 \end{aligned} \right\} \quad (52.13)$$

این معادلات نسبتاً پیچیده، معرف جواب دقیقی برای مدار شکل ۱۲.۱۳ هستند. در بسیاری از موارد خیلی ساده‌تر است که یک مبدل ایده‌آل را در نظر بگیریم، یعنی، تبدیلی که برای آن روابط زیر صادق است

$$V_L = a \mathcal{V}_0, \quad I_2 = -\frac{I_1}{a} \quad (53.13)$$



شکل ۱۲.۱۳ مبدل.

که در آن ثابت a مستقل از فرکانس، V_L ولتاژ دوسر Z_L است، و سایر مقادیر همانهایی اند که در شکل ۱۲.۱۳ نشان داده ایم. با ضرب کردن دو معادله (۵۳.۱۳) در یکدیگر، می بینیم که این روابط مستلزم آن است که توان منبع $I_1 \mathcal{V}_0$ تماماً به بار $V_L I_1$ رسانده شود؛ به عبارت دیگر، در مبدل هیچ اتلافی وجود نداشته باشد. برای تضمین برقراری دومین رابطه از روابط (۵۳.۱۳) باید شرط زیر صادق باشد

$$\frac{Z_L + R_1 + i\omega L_1}{i\omega M} = a \quad (۵۴.۱۳)$$

این شرط در حالتی صادق خواهد بود که $\omega L_1 \gg |Z_L + R_1|$ باشد. شرایط مشابهی می توانیم پیدا کنیم که برقراری رابطه $V_L / \mathcal{V}_0 = a$ را تضمین کند. این شرایط پیچیده اند و به سادگی برآورده نمی شوند. در هر صورت، مبدل های عملی وجود دارند که روابط بالا در گستره وسیعی از فرکانسها برای آنها صادق اند. برای چنین دستگاههایی

$$I_1 = -\frac{I_2}{a}, \quad V_L = a \mathcal{V}_0$$

و

$$\frac{\mathcal{V}_0}{I_1} = -\frac{V_L}{a^2 I_2} = \frac{Z_L}{a^2} \quad (۵۵.۱۳)$$

رابطه اخیر نشان می دهد که یک مبدل به عنوان یک مبدل مقاومت ظاهری نیز عمل می کند، و نسبت تبدیل آن a^{-2} است. به عنوان تمرین می توانید نشان دهید که برای دو سیم پیچ که خیلی نزدیک به هم جفت شده باشند، $a = N_1 / N_2$ است، به عبارت دیگر، a مساوی نسبت تعداد دورهای دو سیم پیچ است.

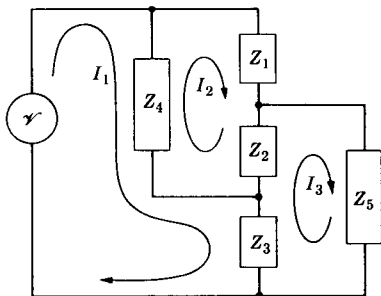
*۱۰.۱۳ معادلات حلقه‌ای و گره‌ای

مدارهای ac پیچیده‌تر را می‌توان به دو طریق بررسی کرد: یکی براساس قانون ولتاژ کیرشهوف که به تحلیل حلقه‌ای معروف است، و دیگری براساس قانون جریان کیرشهوف که به تحلیل گره‌ای مشهور است. هر یک از این روشها به‌نوبه خود مزایا و معایبی دارد. چون انتخاب روش مناسب، حل خیلی از مسائل را ساده‌تر می‌کند، در این بخش، هر دو روش را بررسی خواهیم کرد.

اولین قدم در به‌کاربردن تحلیل حلقه‌ای مشخص کردن حلقه‌هاست. این کار را می‌توان بدین ترتیب انجام داد که حلقه‌های بسته‌ای از جریان را در نظر بگیریم به‌طوری که حداقل یک جریان از هر جزء مدار بگذرد. مثلاً در شکل ۱۳.۱۳ سه حلقه نشان داده شده‌اند که با I_1 ، I_2 و I_3 مشخص شده‌اند. البته این تنها انتخاب ممکن نیست؛ چندین انتخاب دیگر نیز امکان‌پذیر و مفید است. با به‌کاربردن قانون ولتاژ کیرشهوف (II) در مورد هر یک از این سه حلقه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I_1(Z_3 + Z_4) - I_2 Z_4 - I_3 Z_3 &= \mathcal{V} \\ -I_1 Z_4 + I_2(Z_1 + Z_2 + Z_4) - I_3 Z_2 &= 0 \quad (56.13) \\ -I_1 Z_4 - I_2 Z_2 + I_3(Z_2 + Z_3 + Z_5) &= 0 \end{aligned}$$

توجه کنید که علامتهای منها به این علت ظاهر می‌شوند که مثلاً در حلقه یک، I_2 در Z_4 برخلاف جهت I_1 جریان دارد. معادلات (56.13) را می‌توان به آسانی با استفاده از روشهای ماتریسی حل کرد، که نتیجه آن عباراتی است برای مجموعه جریانهای حلقه‌ای در یک مدار. تذکر این نکته مفید است که معادلات حلقه‌ای را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت



@Quark_Book

شکل ۱۳.۱۳ مثال کاربرد تحلیل حلقه‌ای در مدارهای ac.

$$\sum_{j=1}^n Z_{ij} I_j = \mathcal{V}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (57.13)$$

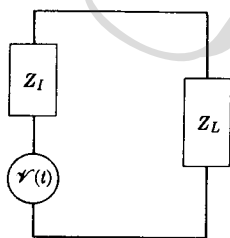
(در مدار بالا $n = 3$ است). در این نمادگذاری، $Z_{ij} = Z_{ji}$ است، که برای کنترل معادلات حلقه‌ای سودمند است.

به عنوان دومین مثال، مدار شکل ۱۴.۱۳ را در نظر بگیرید. معادلات مناسب این مدار عبارت‌اند از

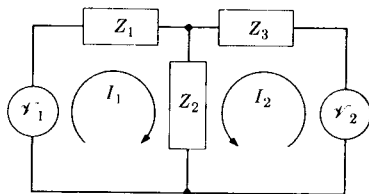
$$\begin{aligned} I_1(Z_1 + Z_2) + I_2 Z_2 &= \mathcal{V}_1 \\ I_1 Z_2 + I_2(Z_2 + Z_3) &= \mathcal{V}_2 \end{aligned} \quad (58.13)$$

هیچ دلیلی وجود ندارد که $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ همفاز باشند؛ اغلب همفاز نیستند ولی می‌توان آنها را به صورت $\mathcal{V}_1 = |\mathcal{V}_1| e^{i(\omega t + \phi)}$ و $\mathcal{V}_2 = |\mathcal{V}_2| e^{i(\omega t + \phi)}$ نوشت. در هر صورت بسیار مهم است که فازها را به طور صحیح مشخص کنیم، و این خیلی ساده انجام پذیر است، بدین ترتیب که فازهای نسبی را در $t = 0$ بررسی می‌کنیم و جهت‌ها (مثبت و منفی) را نسبت به جهت‌های جریان‌های مشخص شده حلقه‌ای تعیین کنیم. باید به این نکته مهم نیز توجه کنیم که به جز در حالتی که تمام مولدها دارای فرکانس یکسانی باشند، در حالات دیگر این روش به طور کامل با شکست روبرو می‌شود (به بیان صحیح‌تر، این مسئله تبدیل به برهمه‌ی دو مسئله مستقل می‌شود که هر کدام شامل یک مولد و یک فرکانس است).

قبل از اینکه وارد بحث معادلات گره‌ای بشویم، بهتر است درباره مولدهای ولتاژ و جریان صحبت کنیم. در قسمتهای قبل مسائل مداری بر حسب منابع خالص ولتاژ بیان شده بودند. چنین دستگاه‌های ایده‌آلی را نمی‌توان ساخت، بدیهی است که دستگاه‌های عملی همواره مقاومت ظاهری داخلی مشخصی دارند. بنابراین یک مولد عملی شامل یک منبع ولتاژ $\mathcal{V}(t)$ است که به طور متوالی به یک مقاومت ظاهری Z_I ، یعنی به مقاومت ظاهری داخلی،



شکل ۱۵.۱۳ مولد عملی که به یک بار Z_L متصل شده است.



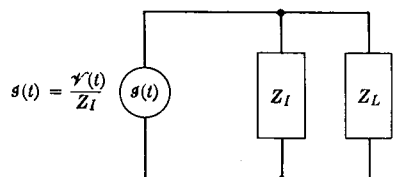
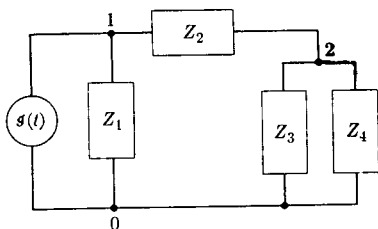
شکل ۱۴.۱۳ کاربردهای بیشتری از معادلات حلقه‌ای.

متصل شده است. چنین مولدی در شکل ۱۵.۱۳ نشان داده شده است که به بار Z_L متصل است. در مورد این مدار چند نکته را می توان تذکر داد. اولاً، برای آنکه حداکثر توان به بار خارجی منتقل شود باید $Z_L = Z_I^*$ باشد؛ به عبارت دیگر، قسمتهای حقیقی Z_L و Z_I باید مساوی باشند و قسمتهای موهومی آنها نیز باید باهم مساوی ولی علامت آنها مخالف باشد. اثبات این مطلب به عنوان یک مسئله داده شده است. ثانیاً، یک مولد ولتاژ، معادل یک مولد جریان است که با مقاومت ظاهری داخلی به طور موازی متصل شده است و شدت جریانی برابر با $I(t) = \mathcal{V}(t)/Z_I$ می دهد. این وضعیت معادل برای مدار شکل ۱۵.۱۳ در شکل ۱۶.۱۳ نشان داده شده است. برای نشان دادن معادل بودن دو مدار تنها کافی است توجه کنیم که یک مولد جریان ایده آل در هر باری که به دوسر آن وصل شود، جریانی برابر $I(t)$ برقراری کند. علاوه بر این، معادل بودن آن دو بدین معنی است که در مسائل مدار مولدها را می توان بسته به راحتی کار به عنوان مولد ولتاژ یا به عنوان مولد جریان به حساب آورد. معادلات گره ای برای یک مدار را می توان با به کار بردن قانون جریان کیرشهوف (I) برای هر گره در شبکه به دست آورد. در اینجا گره به معنی نقطه ای است که در آن سه جزء مدار یا بیشتر به یکدیگر متصل می شوند. در این روش قانون ولتاژ کیرشهوف (II) به طور خودکار صادق خواهد بود. می توان شکل ۱۷.۱۳ را به عنوان مثالی ساده در مورد کاربرد معادلات گره ای در نظر گرفت. با فرض اینکه جمع جبری جریانهایی که به هر یک از گره ها می رسند برابر با صفر است، معادلات گره ای به دست می آیند. گره ها شماره گذاری می شوند، و شماره صفرا از گره ای شروع می شود که پتانسیل آن برای مدار، پتانسیل مرجع است. اگر پتانسیل گره ۵ را صفر فرض کنیم در این صورت در گره ۱ خواهیم داشت

$$I(t) = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_1 - V_2}{Z_2} \quad (۵۹.۱۳)$$

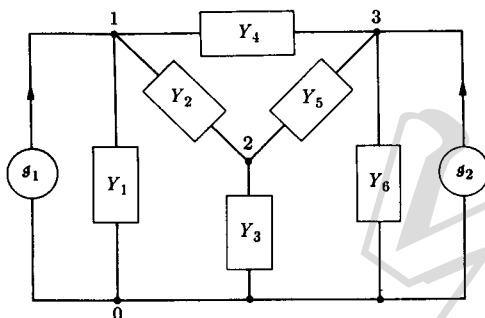
که در آن V_1 و V_2 به ترتیب پتانسیلهای گره های ۱ و ۲ هستند. در گره ۲ داریم

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{Z_2} + \frac{V_2}{Z_3} + \frac{V_2}{Z_4} \quad (۶۰.۱۳)$$



شکل ۱۷.۱۳ مثالی از روش تحلیل گره ای دزمدارهای ac.

شکل ۱۶.۱۳ یک «مولد جریان» که معادل مولد ولتاژ شکل ۱۵.۱۳ است.



شکل ۱۸.۱۳ مدار دیگری که مثالی است از روش تحلیل گره‌ای.

قبل از اینکه به حل مسئله ادامه دهیم، مشاهده می‌کنیم که کمیتی که عکس مقابمت ظاهری باشد برای سهولت انجام محاسبات بسیار مناسب است. چنین کمیتی را رسانایی ظاهری می‌نامند و با نماد Y نشان می‌دهند، $Y = 1/Z$. رساناییهای ظاهری در اتصال موازی باهم جمع می‌شوند، در صورتی که در اتصال متوالی معکوس آنها باهم جمع می‌شود، اگر معادلات (۵۹.۱۳) و (۶۰.۱۳) را بر حسب رساناییهای ظاهری بنویسیم نتیجه خواهد شد

$$g(t) = (Y_1 + Y_2)V_1 - Y_2V_2$$

$$0 = -Y_2V_1 + (Y_2 + Y_3 + Y_4)V_2 \quad (۶۱.۱۳)$$

که تا اندازه‌ای ساده‌ترند. اگر این معادلات را باهم حل کنیم ولتاژهای گره‌ها، V_1 و V_2 به دست می‌آیند.

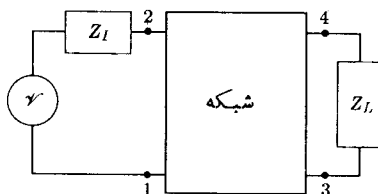
مثال دیگری از کاربرد معادلات گره‌ای را در نظر می‌گیریم، و آن حل مداری است که در شکل ۱۸.۱۳ نشان داده شده است. در این مورد معادلات گره‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$g_1 = Y_1V_1 + Y_2(V_1 - V_2) + Y_4(V_1 - V_3)$$

$$0 = Y_2(V_2 - V_1) + Y_3V_2 + Y_5(V_2 - V_3) \quad (۶۲.۱۳)$$

$$g_2 = Y_6V_3 + Y_5(V_3 - V_2) + Y_4(V_3 - V_1)$$

می‌توان این معادلات را با روشهای استاندارد حل کرد و ولتاژهای گره‌ها را به دست آورد. اینکه با حل این معادلات ولتاژها به جای جریانه‌ها به دست می‌آیند مزیت بزرگی است، مخصوصاً در مدارهای ارتباطاتی.



شکل ۱۹.۱۳ يك شبکه چهار سر.

* ۱۱.۱۳ مقاومت ظاهری نقطه تحريك و مقاومت ظاهری انتقال

اکنون می‌خواهیم تعاریف ساده‌ای برای مقاومت ظاهری نقطه تحريك و مقاومت ظاهری انتقال برای يك شبکه چهارسر بدهیم. بدین علت این تعاریف را در اینجا می‌دهیم که این واژه‌ها به کرات در کتب فنی به چشم می‌خورند، و گاهی برای افراد مبتدی اشکال جدی ایجاد می‌کنند. يك شبکه چهارسر در نظر بگیرید، و دوسر ۱ و ۲ را ورودی، و دوسر ۳ و ۴ را خروجی بنامید. اگر چنانکه در شکل ۱۹.۱۳ نشان داده شده است، يك مولد با ولتاژ $\mathcal{V}$ و مقاومت ظاهری داخلی Z_I به دوسر ۱ و ۲ متصل شود و يك مقاومت ظاهری Z_L بین دوسر ۳ و ۴ وصل شود، جریانی برابر با I_I از Z_I ، و جریانی برابر با I_L از Z_L عبور خواهد کرد. مقاومت ظاهری نقطه تحريك Z_D ، عبارت است از

$$Z_D = \frac{\mathcal{V}}{I_I} \quad (۶۳.۱۳)$$

و مقاومت ظاهری انتقال، Z_T ، عبارت است از

$$Z_T = \frac{\mathcal{V}}{I_L} \quad (۶۴.۱۳)$$

باید توجه کرد که Z_T و Z_D هر دو هم به ساختار داخلی شبکه بستگی دارند و هم به Z_L و Z_I .

بحث مختصر بالا نمی‌تواند حق مطلب را درباره نظریه شبکه‌ها ادا کند. برای جزئیات این موضوع پیچیده باید به کتابهای کلاسیکی مانند کتاب گیل مین و کتابهای متعدد جدیدتر مراجعه شود.

۱۲.۱۳ خلاصه مطالب

جریان و ولتاژ کیرشهوف است که در اینجا این قوانین باید در هر لحظه از زمان اعمال شوند. جریان و ولتاژ یک مساومت خطی به طور لحظه‌ای، مطابق قانون اهم، به یکدیگر مربوط اند

$$V_R = RI$$

قوانین مشابه برای یک القای خطی و یک خازن خطی عبارت‌اند از

$$V_L = L \frac{dI}{dt}$$

$$V_C = \frac{1}{C} Q$$

که در آن $I = dQ/dt$. برای یک حلقه منفرد که حاوی ولتاژ اعمال شده $\mathcal{V}(t)$ باشد، قوانین کیرشهوف معادله دیفرانسیل زیر را نتیجه می‌دهند

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \mathcal{V}(t)$$

(برای شبکه‌ای پیچیده‌تر، دستگاهی از یک چنین معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی نتیجه می‌شود). جواب کلی این معادله ترکیبی است از جواب خصوصی آن (جواب حالت پایا)، با جواب کلی معادله همگن متناظر آن که از قرار دادن $\mathcal{V}(t) = 0$ عاید می‌شود (جواب گذرا). ثابتهای دلخواه در جواب گذرا چنان انتخاب می‌شوند که شرایط اولیه را برآورده کنند.

۱. جواب گذرا تابعی نمایی از t است؛ اگر ناممختلط باشد، قسمت موهومی از نظریه‌ی نمایانگر نوسان Q و I است. قسمت حقیقی نمایانگر رفتار فروافتی (رفتار گذرا) است، هر چه R بزرگتر باشد زمان فروافت کوچکتر است. برای اکثر مدارهای عملی، زمان فروافت نوعاً در حدود کسری از ثانیه است.

۲. رفتار حالت پایا تنها برای یک ولتاژ اعمال شده سینوسی (ac) مورد بحث قرار گرفته است. (ولتاژ ثابت حالت خاص فرکانس صفر است؛ بستگی دلخواه به زمان را می‌توان با ترکیب فوریه نمایش داد). چنانچه ولتاژ اعمالی $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 \cos \omega t$ را به صورت مختلط زیر نشان دهیم

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 e^{i\omega t}$$

جریان حالت پایا نیز که همان فرکانس را دارد به صورت زیر خواهد بود

$$I = I_0 e^{i\omega t}$$

مقاومت ظاهری که کمیتی مختلط است به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathcal{V} = ZI$$

موقعی که Z به صورت قطبی بیان شود

$$Z = |Z| e^{i\theta}$$

بزرگی آن، $|Z|$ ، دامنه جریان را به دست می دهد

$$|I_0| = \mathcal{V}_0 / |Z|$$

و θ زاویه فاز جریان نسبت به ولتاژ اعمال شده را می دهد. قانون اهم و تعمیمهای آن روابط زیر را می دهند

$$Z_R = R$$

$$Z_L = i\omega L$$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

زیرا $I = i\omega Q$ است.

۳. تحلیل رفتار حالت پایای مدارهای خطی ac دقیقاً مشابه تحلیل مدارهای dc است و مقاومت ظاهری مختلط به صورت تعمیمی از مقاومت dc به کار می رود.

۴. اتلاف توان لحظه ای عبارت است از $P(t) = \text{Re } I(t) \text{ Re } V(t)$. برای حالت ac میانگین زمانی آن برابر است با

$$\bar{P} = \frac{1}{2} |I_0| |V_0| \cos \theta$$

ضریب توان، $\cos \theta$ ، برای يك مقاومت خالص ۱ است و برای يك القای خالص یا يك خازن خالص صفر است. ولتاژ و جریان «مؤثر» عبارت اند از $|V_0|/\sqrt{2}$ و $|I_0|/\sqrt{2}$. عبارت معادلی برای میانگین زمانی توان ac عبارت است از

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re}(I^* V)$$

۵. بر حسب تابعی از فرکانس، يك مدار متوالی در نزدیکی $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ تشدید از خود بروز می‌دهد، در فرکانس تشدید، $|Z|$ کمینه است و $|I_0|$ بیشینه. تیزی تشدید با سارابطه زیر داده می‌شود

$$Q = \frac{\omega_0}{2|\Delta\omega|} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

يك مدار موازی نیز در نزدیکی $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ تشدید دارد که در آنجا $|Z|$ بیشینه است و $|I_0|$ کمینه.

۶. مبدل متداولترین عنصر مدار با القای متقابل است. مبدل ایده‌آل مبدلی است که برای آن نسبت جریان ثانویه به جریان اولیه برابر است با عکس نسبت ولتاژ ثانویه به ولتاژ اولیه.

مسائل

۱۰.۱۳ يك القا به ضریب خود القای ۲ هنری و يك مقاومت ۳ اهمی با يك باتری ۵ ولتی و يك کلید به‌طور متوالی به هم متصل شده‌اند. جریان و تغییرات جریان نسبت به زمان (dI/dt) را در مدار در زمانهای زیر بعد از اتصال کلید به دست آورید: (الف) ۳ ر ثانیه، (ب) ۱ ثانیه، (ج) ۴ ثانیه.

۲.۱۳ مداری شامل خود القای L_0 ، مقاومت R_0 ، و باتری $\mathcal{E}_0$ ، جریان پایایی دارد که $I = \mathcal{E}_0/R_0$ است. کلیدی در این مدار وجود دارد که در لحظه $t = 0$ باز می‌شود و جرقه‌ای در دو سر کلید ایجاد می‌کند. اگر مقاومت جرقه با k/I داده شده باشد، که در آن ثابت $k < \mathcal{E}_0$ است، جریانی را که از جرقه می‌گذرد بر حسب تابعی از زمان تعیین کنید. مقدار نهایی جریان پایایی که از جرقه می‌گذرد چقدر است؟

۳.۱۳ خازن C ، مقاومت R ، و باتری $\mathcal{E}_0$ با يك کلید به‌طور متوالی به هم متصل شده‌اند. کلید در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر بار روی خازن، Q ، را بنویسید. Q را بر حسب تابعی از زمان تعیین کنید.

۴.۱۳ خازن C با بار Q دفعتاً به‌طور متوالی به مقاومت R و خود القای L متصل می‌شود. جریان را بر حسب تابعی از زمان تعیین کنید. نشان دهید که سه نوع حل مختلف موجود است، که بستگی به این دارد که $R^2 - 4L/C$ کوچکتر، مساوی یا بزرگتر از صفر باشد. حالت اول به نام کند میرا، حالت دوم به نام میرای بهرانی و حالت سوم به نام تند میرا خوانده می‌شود.

۵.۱۳ خازن واقعی C که به صورت موازی يك مقاومت نشستی R دارد، به صورت متوالی به يك خود القای ایده‌آل L وصل شده است. $|Z|$ را محاسبه کنید؛ با فرض آنکه R بزرگ

است، مقادیر تقریبی آن را در فرکانسهای زیاد و در فرکانسهای کم و در تشدید بدست آورید. منحنی تقریبی $|Z|$ را بر حسب ω ترسیم کنید.

۶.۱۳ مسئله ۵.۱۳ را با فرض آنکه يك خازن نشی با خود القای کامل در اتصال موازی باشد، تکرار کنید.

۷.۱۳ مدار شکل ۱.۱۳ شامل يك خازن اضافی C' است که با ترکیب کامل RLC به طور موازی متصل شده است. $C' = 10\mu F$ و $C = 100\mu F$, $L = 1H$, $R = 100\Omega$. منحنی مقاومت ظاهری $|Z|$ را بر حسب فرکانس از صفر تا $f = 10^4 Hz$ رسم کنید.

۸.۱۳ يك ترکیب متوالی از مقاومت R و خود القای L به طور موازی به ترکیبی متوالی از مقاومت R و خازن C متصل شده است. نشان دهید که اگر $R^2 = L/C$ باشد مقاومت ظاهری مستقل از فرکانس است.

۹.۱۳ مقاومتی به صورت يك سیم پیچ دارای مقاومت dc ۹۰۰۰ اهم و ضریب خود - القای ۸ میکروهنری است. زاویه فاز مقاومت ظاهری آن در $1000 Hz$ چیست؟ يك خازن، بدون آنکه تغییر فاحشی در مقاومت ایجاد کند، به طور موازی با مقاومت متصل می شود تا زاویه فاز را در $1000 Hz$ به صفر کاهش دهد. به ازای چه مقادیری از فرکانس زاویه فاز کمتر از موقعی است که خازن اضافه نشده بود؟

۱۰.۱۳ (الف) خازن C در اتصال موازی با مقاومت R است و مقاومت ظاهری این ترکیب Z است. فرض کنید مقاومت ظاهری ترکیب متوالی خازن C' با مقاومت R' همان مقدار Z باشد. برای ω ی مقروض، مقادیر C' و R' را بر حسب R و C بدست آورید. (ب) ضریب اتلاف به صورت $D = \omega R' C'$ تعریف می شود. نشان دهید که $D = 1/\omega RC$ و نشان دهید که فاز جریان $\theta = \tan^{-1}(-1/D)$ است.

۱۱.۱۳ معادله (۳۴.۱۳) را برای متوسط زمانی اتلاف توان در مداری که جریان ac آن $I(t) = I_0 e^{j\omega t}$ و $V(t) = ZI(t)$ است، ثابت کنید.

۱۲.۱۳ يك مولد ac با مقاومت ظاهری داخلی Z_I به يك مقاومت ظاهری بار Z_L که متغیر است به طور متوالی وصل شده است. ثابت کنید موقعی حداکثر توان به مقاومت ظاهری بار منتقل می شود که $Z_L = Z_I^*$ باشد.

۱۳.۱۳ در مدار شکل ۶.۱۳ مقادیر $C = 2\mu F$, $L = 4mH$, $R_1 = 25\Omega$ و $R_2 = 40\Omega$ داده شده اند. فرکانسهای مربوط به موقعیتهای زیر را پیدا کنید: (الف) موقعی که $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ، (ب) موقعی که مقاومت ظاهری حداکثر است، (ج) موقعی که جریانی که از R_1 می گذرد بولتاژ مولد هم فاز است.

۱۴.۱۳ نشان دهید که ضریب کیفیت را، که در متن درس تعریف شد، می توان به صورت

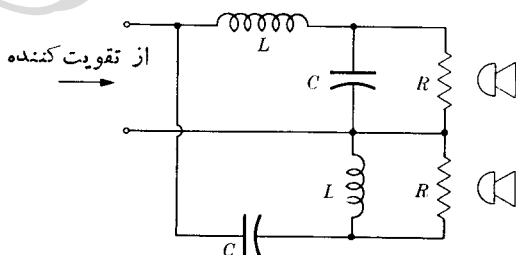
زیر بیان کرد: 2π برابر حداکثر انرژی ذخیره شده در مدار، تقسیم بر انرژی تلف شده در یک سیکل. این بیان گاهی به عنوان تعریف Q به کار می رود و مستقل از پارامترهای ویژه مدار است.

۱۵.۱۳ یک شبکه متقاطع برای یک دستگاه استریو (hi-fi) باید طوری طرح شود که دو بلندگو (هر یک به مقاومت R) به خروجی یک تقویت کننده بسته شوند. یکی از بلندگوها باید بیشتر فرکانسهای بالا و دیگری بیشتر فرکانسهای پایین را بگیرد. این شبکه در شکل ۲۰.۱۳ نشان داده شده است. دو خازن هر یک به ظرفیت C و دو القاگر هر یک به ضریب القای L اند. (الف) برای هر R معلوم، رابطه ای میان L و C برقرار کنید به طوری که شبکه برای تقویت کننده در تمام فرکانسهای بار مقاومتی خالص (R) باشد. (ب) فرکانس تقاطع، ω_c ، طبق تعریف فرکانسی است که در آن فرکانس هر یک از دو بلندگو نصف توان تقویت کننده را دریافت کند. اگر R و ω_c معلوم باشند، L و C را به دست آورید.

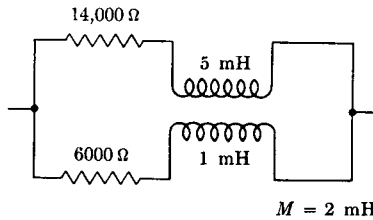
۱۶.۱۳ خازنی به ظرفیت ۱ میکرو فاراد را ابتدا با وصل کردن به یک باتری تا ۱۰۰ ولت باردار می کنیم؛ سپس آن را از باتری قطع می کنیم و بار آن را داخل یک سیم پیچ ۳۰۰ دوری که به دور یک حلقه چنبره ای پیچیده شده است تخلیه می کنیم. شعاع متوسط چنبره ۲۰ سانتیمتر و سطح مقطع آن ۴ سانتیمتر مربع است و یک شکاف هوای ۲ میلیمتری دارد (به شکل ۱۴.۹ مراجعه کنید). با چشم پوشی از اتلاف در سیمهای مسی، پس ماند و هدر رفتن از حاشیه ها، بیشینه میدان مغناطیسی را که در شکاف هوا ایجاد می شود حساب کنید. تراوایی نسبی چنبره را ۵۰۰۰ بگیرید.

۱۷.۱۳ یک اختلاف پتانسیل یک ولتی در فرکانس $f = 10^6/\pi$ Hz به دو سر مدار شکل ۲۱.۱۳ اعمال می شود. القای متقابل سیم پیچها به نحوی است که مخالف یکدیگرند. جریان را در شاخه بالایی پیدا کنید.

۱۸.۱۳ در یک مبدل توان ۶۰ سیکلی (که نسبت دورهای آن ۲ به ۱ است) ضریب خود-القای سیم پیچ اولیه ۱۰۰ هنری و مقاومت dc آن ۲۰ اهم است. ضریب جفت شدگی بین اولیه و ثانویه نزدیک به یک است. اگر اولیه به اختلاف پتانسیل ۱۰۰۰ ولت وصل



شکل ۲۰.۱۳



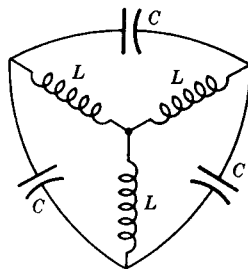
شکل ۲۱.۱۳

شود، جریان را در اولیه در دو حالت زیر حساب کنید (الف) وقتی مدار ثانویه باز است، (ب) وقتی يك مقاومت بار ۲۵ اهمی در مدار ثانویه وجود دارد.

*۱۹.۱۳ سه خازن مشابه و سه خودالقای مشابه آنطور که در شکل ۲۲.۱۳ نشان داده شده است به هم متصل اند. فرکانسهای تشدید این دستگاه را به دست آورید. (داهنمایی: تحلیل حلقه‌ای را در مورد جریانها برای يك فرکانس فرضی ω به کار ببرید و نشان دهید که سه معادله حاصل فقط برای يك مقدار معین ω بایکدیگر سازگارند.)

۲۰.۱۳ در مدار شکل ۱۴.۱۳ داریم $Z_1 = 2 + 5i$ ، $Z_2 = 8 - i$ ، $Z_3 = 4 + 3i$. مولدهای ولتاژ با یکدیگر همفازند و $\mathcal{E}_1 = 10V$ و $\mathcal{E}_2 = 2V$. جریانهای I_1 و I_2 را تعیین کنید.

۲۱.۱۳ در مدار شکل ۱۷.۱۳ داریم $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_1 e^{i\omega t}$ و به جای Z_4 يك مولد جریان $\mathcal{I}_4 e^{i\omega t}$ قرار گرفته است. دو مولد جریان با یکدیگر همفازند. Z_1 و Z_3 خازنهایی اند که واکنشایی آنها به ترتیب ۴۰ و ۶۰ اهم است. Z_2 يك مقاومت خالص ۲۵ اهمی است. فرض کنید $\mathcal{I}_1 = 5A$ و $\mathcal{I}_2 = 25A$. ولتاژهای گره‌ای را در نقاط ۱ و ۲ نسبت به نقطه ۰ تعیین کنید.



شکل ۲۲.۱۳

فیزیک پلاسما

گازهایی که تا حد زیادی یونیده باشند، رساناهای خوبی برای الکتریسیته هستند. ذرات باردار در چنین گازی با میدان الکتر و مغناطیسی موضعی برهم کنش می کنند؛ به علاوه، حرکت متشکل این حاملهای بار (جریانها، افت و خیزهای چگالی بار) می تواند میدانهای مغناطیسی و الکتریکی تولید کند. هنگامی که گاز یونیده تحت تأثیر یک میدان الکتریکی ساکن قرار بگیرد، حاملهای بار در این گاز به سرعت طوری مجدداً توزیع می شوند که قسمت اعظم گاز در مقابل میدان محافظت می شود. لانگمویر^۱ ناحیه هایی از گاز را که نسبتاً خالی از میدان است، و در آنجا بارهای فضایی مثبت و منفی تقریباً در توازن اند، پلاسما خواند، و بار فضایی یا نواحی میدان قوی روی مرز پلاسما را پوشینه نامید.

به طور معادل، می توان گفت که یک گاز یونیده که در یک فاصله کوچک نسبت به سایر طولهای فیزیکی مورد نظر تعداد زیادی ذرات باردار برای حفاظت از خود از لحاظ الکتر و ستاتیکی دارد پلاسماست. یک تعریف نسبتاً دقیقتر بر حسب فاصله حفاظت در بخش ۱۰۱۴ داده خواهد شد. در ابتدا پلاسما در ارتباط با الکتر و نیک گازی مورد نظر بود (تخلیه الکتریکی در گازها، قوسهای الکتریکی، شعله ها)؛ اما اکنون بیشتر در جهت حل مسائل اختر فیزیک نظری و مسئله مهار یونها در رآکتورهای گرما هسته ای (گداخت) مطالعه

* این فصل را می توان بدون آنکه به تداوم بحث لطمه ای بخورد، حذف کرد.

1. Langmuir, *Physical Review*, 33, p. 954 (1929).

می‌شود. بحث کاملتر این موضوع در کتابهای مربوط به فیزیک پلاسما یافت می‌شود.^۱ زمینه کلی مطالعاتی که برهم کنش گازهای یونیده بامیدانهای الکترومغناطیسی تابع زمان را در برمی گیرند دینامیک پلاسما خوانده می‌شود. برای بسیاری از مسائل در این زمینه که از مهمترین و جالبترین مسائل اند، غیرممکن است که بتوان پلاسما را کاملاً بسایک فرمولبندی مطلقاً ماکروسکوپی، بررسی کرد. در عوض، لازم است آنچه را که اصطلاحاً نظریه جنبشی خوانده می‌شود، به کار ببریم. حرکت یونها و الکترونها منفرد را باید مطالعه کرد؛ و برخورد آنها با ذرات دیگر را باید از طریق حل معادله انتقال بولتزمن به حساب آورد. بنابراین برای مسائل پلاسما یک فرمولبندی دقیق وجود دارد ولی به طور کلی حل آنها بجز در مواردی که تعدادی از جملات معادله بولتزمن قابل صرف نظر کردن باشند، بسیار مشکل است. با وجود این، سه نوع فرمولبندی تقریبی وجود دارد که به کمک آنها می‌توان بینش زیادی درباره آنچه در داخل پلاسما اتفاق می‌افتد، به دست آورد.

اولین روش، نظریه تعادل است. این روش مبتنی بر این فرض است که برخوردهای بین ذرات باردار برای برقراری توزیع سرعت مشهور ماکسول - بولتزمن در داخل پلاسما کافی است:

$$N_j(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z = N_{0j} \left(\frac{m_p}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_p v^2 / 2kT} dv_x dv_y dv_z$$

که در آن N_{0j} تعداد ذرات نوع j موجود در واحد حجم پلاسماست، v_x (الی آخر) مؤلفه‌های سرعت اند، m_p جرم ذرات نوع j و T دمای مطلق است. بنابراین خواص انتقال و خواص جنبشی را می‌توان بر حسب این توزیع سرعت محاسبه کرد.

دومین روش تقریبی عبارت است از نظریه مدار که حرکت ذرات باردار (یونها و الکترونها) را در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی مشخص شده از قبل بررسی می‌کند. این میدانها می‌توانند هم تابع مکان و هم تابع زمان باشند. هنگامی که برخوردهای بین ذرات نقش عمده ندارند، به عبارت دیگر، هنگامی که مسافت آزاد میانگین برای برخوردها در مقایسه با ابعاد مشخصه مدار بزرگ است، نظریه مدار تقریب خوبی برای حرکت ذره در پلاسماست. تحت این شرایط اثر برخوردها می‌تواند به عنوان یک اختلال در نظر گرفته شود، و مسئله عمده این است که کاری کنیم که میدان الکترومغناطیسی «مشخص شده از قبل» خود سازگار باشد؛ به بیان دیگر، میدان مشخص شده از قبل باید برابر مجموع میدانهای خارجی و میدان ایجاد شده توسط ذرات دوران کننده باشد.

سومین روش تقریبی، فرمولبندی هیدرومغناطیسی است که در آن از معادلات الکترو-مغناطیس کلاسیک (معادلات ماکسول) همراه با معادلات کلاسیک حرکت سیالات استفاده

می‌شود. واضح است که بحث هیدرومغناطیسی تنها يك توصیف ما کروسکوپی از پلاسماست؛ این بحث هنگامی که مسافت آزاد میانگین در مقایسه با فواصل فیزیکی مورد نظر در سیستم پلاسما خیلی کوچک باشد، تقریب خوبی است. تصویر هیدرومغناطیسی برای مبحث حرکت جمعی ذرات در پلاسما، مثلاً مبحث نوسانات پلاسما، برای شروع خیلی خوب است. روش دقیق نظریه جنبشی برای پلاسما خارج از محدوده این کتاب است. با استفاده از تقریب‌هایی که در بالا مطرح شد می‌توان درباره بسیاری از خواص مهم پلاسماها بحث کرد. برای سادگی فرض می‌کنیم که پلاسما متشکل است از الکترون‌ها (e^-) و یون‌هایی که در مجموع تنها يك بار مثبت دارند (e^+)؛ ممکن است اتم‌های خنثی نیز وجود داشته باشند، ولی ما از پیچیدگی‌هایی مثل برخورد‌های یوننده و باز ترکیب الکترون‌ها و یون‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم.

در بخش ۱۰۱۴ و مجدداً در بخش ۸۰۱۴، ما به پلاسمایی که در شرایط ساکن یا حالت پایاست برمی‌خوریم که در آن نظریه تعادل کاملاً مناسب است. از طرف دیگر، در بخش‌های ۲۰۱۴ و ۳۰۱۴، بیشتر با حرکت مجزای ذرات سروکار خواهیم داشت که در آن نظریه مدار قابل استفاده است. بالاخره، در بخش‌های ۴۰۱۴ تا ۷۰۱۴ درباره بعضی از جنبه‌های دینامیکی پلاسما بحث خواهیم کرد و این کار را در چارچوب هیدرومغناطیسی انجام خواهیم داد.

۱۰۱۴ خنثایی الکتریکی در پلاسما

یکی از مهمترین خواص پلاسما این است که می‌کوشد از نظر الکتریکی خنثی بماند؛ به عبارت دیگر، پلاسما می‌کوشد که بارهای مثبت و منفی فضایی را در هر جزء حجم ما کروسکوپی متوازن کند. يك عدم توازن جزئی در چگالی‌های بار فضایی، باعث ایجاد نیروهای قوی الکتروستاتیکی می‌شود که هر جا که مقدور باشد در جهت حفظ خنثایی عمل می‌کنند. از طرفی، اگر پلاسما عمداً تحت تأثیر يك میدان الکتریکی خسارچی قرار بگیرد، چگالی‌های بار فضایی طوری خود را تنظیم می‌کنند که قسمت عمده پلاسما از تأثیر میدان محافظت شود. حال يك مثال نسبتاً ساده را بررسی می‌کنیم. فرض کنید بار کروی $+Q$ داخل يك پلاسما بشود و در نتیجه پلاسما را تحت تأثیر يك میدان الکتریکی قرار دهد. در واقع، بار $+Q$ به تدریج خنثی می‌شود زیرا مدام ذرات باردار پلاسما با آن برخورد می‌کنند، ولی اگر جسم باردار از لحاظ فیزیکی فوق‌العاده کوچک باشد، این عمل مدت زیادی طول می‌کشد. در این مدت، از نظر انرژی برای الکترون‌ها بهتر خواهد بود که به طرف این بار نزدیک شوند، در صورتی که یون‌های مثبت سعی می‌کنند از این بار دور شوند. تحت شرایط تعادل (به بخش ۳۰۵ رجوع کنید)، احتمال وجود ذره‌ای باردار در ناحیه‌ای به خصوص که انرژی پتانسیل آن U است، متناسب است با ضریب بولتزمن، $\exp(-U/kT)$. بنابراین چگالی الکترون N_e با معادله زیر داده می‌شود

$$N_e = N_0 \exp\left(e \frac{\varphi - \varphi_0}{kT}\right) \quad (۱۰۱۴)$$

که در آن φ پتانسیل موضعی، φ_0 پتانسیل مرجع (پتانسیل پلاسما)، T دمای مطلق پلاسما و k ثابت بولتزمن است. N_0 چگالی الکترونی در ناحیه‌هایی است که در آنجا $\varphi = \varphi_0$ است.

اگر در ناحیه‌هایی که در آنجا پتانسیل برابر φ_0 است، چگالی یون مثبت نیز، N_0 باشد، چگالی یون مثبت N_i با معادله زیر داده می‌شود

$$N_i = N_0 \exp\left(-e \frac{\varphi - \varphi_0}{kT}\right) \quad (۲۰۱۴)$$

پتانسیل φ از حل معادله پواسون به دست می‌آید

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} (N_i e - N_e e) = \frac{2N_0 e}{\epsilon_0} \sinh\left(e \frac{\varphi - \varphi_0}{kT}\right) \quad (۳۰۱۴ \text{ الف})$$

این معادله دیفرانسیل غیرخطی است، بنا بر این باید به‌طور عددی انتگرال گیری شود. از طرف دیگر، يك جواب تقریبی برای معادله (۳۰۱۴ الف) که در دمای زیاد دقیق است، برای منظور ما در اینجا کافی است. اگر $kT > e\varphi$ باشد، $\sinh(e\varphi/kT) \approx e\varphi/kT$ است و

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{2N_0 e^2}{\epsilon_0 kT} (\varphi - \varphi_0) \quad (۳۰۱۴ \text{ ب})$$

که جواب این معادله به‌صورت زیر است

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{h}\right) \quad (۴۰۱۴)$$

در اینجا r فاصله از بارکروی $+Q$ است و h فاصله حفاظ دبی است که با معادله زیر داده می‌شود

$$h = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{2N_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (۵۰۱۴)$$

@Quark_Book

بنا بر این توزیع مجدد الکترون‌ها و یون‌ها در گاز به نحوی است که بار Q را کاملاً در فاصله‌ای

چند برابر h مستور می‌کند.

يك گاز یونیده در صورتی پلاسما خوانده می‌شود که طول دبی، h ، در مقایسه با سایر ابعاد فیزیکی مورد نظر، کوچک باشد. مادامی که گاز تا اندازه زیادی یونیده باشد، این امر محدودیت چندانی ایجاد نمی‌کند؛ در $T = ۲۰۰۰\text{K}$ و N_0 برابر با $۱۰^{۱۸}$ الکترون یا یون بر متر مکعب، طول دبی برابر $m \cdot ۱۰^{-۶} \times ۲۲$ است.

۲.۱۴ مدارهای ذره و حرکت رانشی (سوقی) در پلاسما

مداریك ذره باردار q را که در میدان الکتریکی و مغناطیسی از قبل مشخص شده‌ای حرکت می‌کند، می‌توان مستقیماً از معادله نیرو به دست آورد

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (۶.۱۴)$$

خواهیم دید که بهتر است با میدانهایی که پیکربندی نسبتاً ساده‌ای دارند شروع کنیم و سپس محاسبات را به میدانهایی که در فضا به کندی تغییر می‌کنند تعمیم دهیم.

اعمال يك میدان الکتریکی ثابت روی پلاسما خیلی جالب توجه نیست زیرا پلاسما با ایجاد پوشینه نازکی از بار فضایی که قسمت عمده پلاسما را از تأثیر میدان حفاظت می‌کند، خود را با میدان وفق می‌دهد. از طرفی، يك میدان مغناطیسی ثابت باعث می‌شود که ذرات بدون تغییری در توزیع بار فضایی حول خطوط میدان بچرخند.

مورد اول. میدان مغناطیسی یکنواخت. $\mathbf{E} = 0$.

این همان حرکتی است که در مسئله ۱.۸ شرح داده شد، ولی چون این حرکت اساس حرکت‌های پیچیده تر مداری را در پلاسماها تشکیل می‌دهد، ما آن را در اینجا به تفصیل بررسی می‌کنیم. اما، تأکید می‌کنیم که مورد اول برای خیلی از وضعیت‌های دیگر، علاوه بر پلاسماها، قابل کاربرد است، مثلاً این مورد اساس عمل شتاب‌دهنده‌های ذرات مثل سیکلوترون و بتاترون است.

نیروی لورنتس همواره بر سرعت $\mathbf{v}$ ذره باردار عمود است؛ بنابراین انرژی جنبشی ذره ثابت باقی می‌ماند

$$K = \frac{1}{2} m_p v^2 = \text{const.} \quad (۷.۱۴)$$

که در آن m_p جرم ذره است. بهتر است سرعت $\mathbf{v}$ را به دو مؤلفه تجزیه کنیم: $\mathbf{v}_{||}$ موازی با $\mathbf{B}$ و $\mathbf{v}_{\perp}$ در سطح عمود بر $\mathbf{B}$. چون میدان روی $\mathbf{v}_{||}$ تأثیری ندارد $K_{||} = \frac{1}{2} m_p v_{||}^2$

نیز ثابت باقی می ماند. در نتیجه

$$K_{\perp} = \frac{1}{2} m_p v_{\perp}^2 = K - K_{\parallel} \quad (۸.۱۴)$$

نیز ثابت حرکت است.

نیروی لورنتس شتاب روبه مرکز فراهم می آورد. بنابراین

$$qv_{\perp} B = \frac{m_p v_{\perp}^2}{R}$$

و R (شعاع مدار) با معادله زیر داده می شود

$$R = \frac{m_p v_{\perp}}{qB} \quad (۹.۱۴)$$

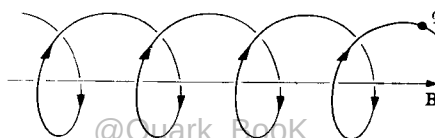
شعاع R اغلب به نام شعاع لارمور ذره خوانده می شود. حرکت کامل ذره باردار به صورت چرخش ذره در یک مدار (مدار لارمور) همراه با حرکت یکنواخت مرکز مدار، یا مرکز داهنما، در امتداد خط میدان مغناطیسی، توصیف می شود. حرکت مارپیچی حاصل در شکل ۱۰۱۴ نشان داده شده است.

میدان مغناطیسی طوری عمل می کند که باخم کردن مسیر ذرات در مدارهای دایره ای، پلاسما را محصور نگه دارد. البته در امتداد میدان محصورشدگی مشاهده نمی شود. برای یونها و الکترونهايي که انرژی جنبشی یکسان $K_{\perp}$ دارند، الکترونها در مدارهای خیلی کوچکتری دوران می کنند، نسبت شعاع لارمور یون به الکترون برابر است با جذر نسبت جرم آنها.

یک کمیت جالب که بعداً آن را به کار خواهیم برد گشتاور مغناطیسی ذره چرخان است. بر حسب تعریف، گشتاور مغناطیسی، m ، با معادله زیر داده می شود

جریان $\times$ مساحت $m =$

$$= \frac{qv_{\perp}}{2\pi R} \pi R^2 = \frac{K_{\perp}}{B} \quad (۱۰.۱۴)$$



شکل ۱۰۱۴ حرکت ذره در یک میدان مغناطیسی یکنواخت.

باتوجه به شکل ۱۰۱۴ می بینیم که m درجهت مخالف میدان مغناطیسی است و بنابراین یک گشتاور دیامغناطیسی است.

مورد دوم. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت. $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

اگر یک میدان الکتریکی و یک میدان مغناطیسی به طور همزمان روی پلاسما اعمال شوند و $\mathbf{E}$ عمود بر $\mathbf{B}$ باشد، پلاسما تمایلی به ایجاد پوشینه ندارد؛ درواقع، خواهیم دید که بارهای فضایی مثبت و منفی با یکدیگر در یک جهت رانده می شوند. برای سادگی، سرعت $\mathbf{v}$ ذره را به صورت زیر می نویسیم

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_d + \mathbf{v}' \quad (11.14)$$

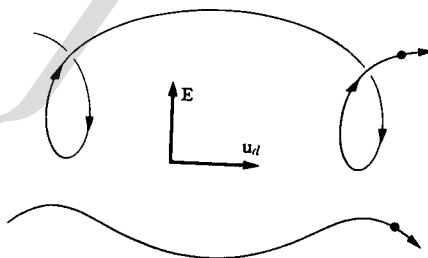
دراین صورت می توان معادله (۶.۱۴) را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u}_d \times \mathbf{B} + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}) \quad (12.14)$$

می توان $\mathbf{u}_d$ را طوری انتخاب کرد که دو جمله اول طرف راست این معادله یکدیگر را حذف کنند

$$\mathbf{u}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (13.14)$$

نیروی باقی مانده، $q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}$ ، درست برابر همان نیرویی است که در مورد اول بررسی شد. بنابراین حرکت کلی ذره از سه جمله تشکیل شده است: (الف) سرعت ثابت $\mathbf{v}'_{||}$



شکل ۲۰۱۴ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی عمود برهم. حرکت ذره در صفحه عمود بر میدان مغناطیسی. این شکل مسیر دو یون با بار مخالف یکدیگر و اندازه حرکتهای اولیه مختلف را نشان می دهد.

موازی با $\mathbf{B}$ ، (ب) چرخش حول خطوط میدان مغناطیسی با فرکانس زاویه‌ای $\omega_c = qB/m_p$ و (ج) یک سرعت رانشی ثابت $u_d = E/B$ عمود بر هر دو بردار $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$. دو مثال از این نوع حرکت در شکل ۲.۱۴ نشان داده شده است.

سرعت u_d که با معادله (۱۳.۱۴) تعریف شده است، سرعت رانشی پلاسما یا سرعت رانش الکتریکی نامیده می‌شود. باید به این نکته مهم توجه داشت که u_d به بار، جرم، یا سرعت ذره بستگی ندارد؛ بنابراین تمام اجزای پلاسما با یکدیگر در یک امتداد رانده می‌شوند، گرچه چرخش انفرادی آنها ممکن است بسیار متفاوت باشد.

معادله (۱۳.۱۴) به صورت غیرنسبیتی به دست آمد؛ اگر u_d یا v به c (سرعت نور) نزدیک شوند، در آن صورت، معادله (۱۱.۱۴) باید با عبارتی که با تبدیل لورنتس سازگار است، جایگزین شود. از طرفی، از این جایگزینی نتیجه خواهد شد که معادله (۱۳.۱۴) برای سرعت رانشی مادی که $|\mathbf{E}| < c|\mathbf{B}|$ باشد همواره صحیح است. اگر $|\mathbf{E}| > c|\mathbf{B}|$ باشد، میدان مغناطیسی نمی‌تواند از حرکت ذره در جهت $\mathbf{E}$ جلوگیری کند.

مورد سوم. میدان مغناطیسی نسبت به زمان ثابت، ولی تابع فضا. $\mathbf{E} = 0$.

فرض کنیم که ذره‌ای باردار در یک میدان مغناطیسی تقریباً یکنواخت حرکت می‌کند که در آن خطوط میدان به تدریج در فضا همگرا می‌شوند. حرکت ذره را می‌توان به عنوان اختلالی از مدار مارپیچی شکل ۱۰.۱۴ بررسی کرد.

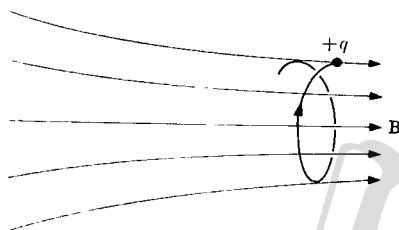
حرکت شبیه است به آنچه در شکل ۳.۱۴ نشان داده شده است؛ خواننده به آسانی می‌تواند تحقیق کند که نیرویی وجود دارد که می‌کوشد ذره را به داخل ناحیه‌ای که میدان مغناطیسی آن ضعیف‌تر است بکشد. برای آنکه مسئله به طور دقیق مشخص شود، فرض می‌کنیم که خط شاری که از مرکز رانه‌ها می‌گذرد، بر محور z منطبق و میدان مغناطیسی تقارن سمتی حول محور z داشته باشد. از مؤلفه z معادله (۶.۱۴) داریم

$$F_z = m_p \frac{dv_z}{dt} = qv_\theta B_r|_{r=R} \quad (14.14)$$

اما $\mathbf{B} = 0$ ، ∇ ، یا برای حالت مورد نظر

۱. ساده‌ترین راه بحث درباره موردی که در آن $|\mathbf{E}|$ کمتر از $c|\mathbf{B}|$ است ولی در مقایسه با آن کوچک نیست، این است که با یک تبدیل لورنتس هم سرعت ذره و هم میدانها را تبدیل کنیم. سرعت دستگاه متحرک با u_d [معادله (۱۳.۱۴)] و نیرو در دستگاه متحرک با معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}) \left(\frac{c^2 - u_d^2}{c^2} \right)^{1/2}$$



شکل ۳.۱۴

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

چون خطوط میدان به تدریج همگرا می‌شوند، می‌توان $\partial B_z / \partial z$ را روی سطح مقطع مدار ثابت گرفت، در نتیجه خواهیم داشت

$$B_r|_{r=R} = -\frac{1}{2} R \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (۱۵.۱۴)$$

به علاوه، v_θ شبیه به $v_\perp$ در مورد اول است. با قرار دادن این مقادیر در معادله (۱۴.۱۴) نتیجه خواهد شد

$$\begin{aligned} m_p \frac{dv_{||}}{dt} &= -\frac{1}{2} q R v_\perp \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= -m \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (۱۶.۱۴)$$

که شکل اخیر با استفاده از معادله (۱۵.۱۴) به دست آمده است.

انرژی جنبشی کل ذره، K ، در میدان مغناطیسی تغییر نمی‌کند، زیرا نیروی لورنتس که همواره عمود بر سرعت است هیچ کاری انجام نمی‌دهد. $K_\perp$ که در معادله (۸.۱۴) تعریف شد، و همچنین $K_{||}$ ، در اینجا ثابت نیستند، ولی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_p v_{||}^2 \right) &= \frac{d}{dt} (K - K_\perp) \\ &= -\frac{dK_\perp}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} (m B_z) \end{aligned} \quad (۱۷.۱۴)$$

که شکل اخیر از معادله (۱۵.۱۴) نتیجه می‌شود. از طرفی، می‌توان معادله (۱۶.۱۴) را در $v_{||} = \partial z / \partial t$ ضرب کرد و نتیجه زیر را به دست آورد

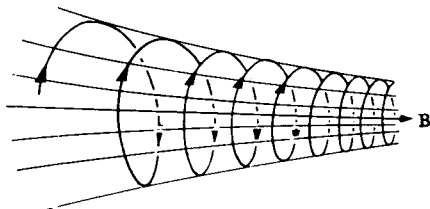
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_p v_{||}^2 \right) &= -m \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= -m \frac{dB_z}{dt} \end{aligned} \quad (۱۸.۱۴)$$

که در آن d/dt نماینده مشتق زمانی است که در طول مسیر دینامیکی گرفته می‌شود. از مقایسه معادله‌های (۱۷.۱۴) و (۱۸.۱۴) ملاحظه می‌شود که گشتاور مغناطیسی m يك ثابت حرکت است. ولی باید تأکید کرد که این يك نتیجه تقریبی است و تا مادامی که B_z به کندی تغییر کند، صادق است. اگر $\mathbf{B}$ در فواصلی از مرتبه R زیاد تغییر کند، تقریبهایی که در اثبات معادله (۱۸.۱۴) به کار رفت، صادق نخواهد بود.

یکی دیگر از مطالبی که مورد توجه ماست، این واقعیت است که ذره مجبور است روی سطح لوله شار حرکت کند. دلیل این مطلب این است که شار مغناطیسی که از مدار عبور می‌کند، عبارت است از

$$\begin{aligned} \Phi &= B_z \pi R^2 = \pi B_z \frac{m_p^2 v_{\perp}^2}{q^2 B_z^2} \\ &= \frac{2\pi m_p}{q^2} \frac{K_{\perp}}{B_z} = \frac{2\pi m_p}{q^2} m \end{aligned} \quad (۱۹.۱۴)$$

که در آن m ثابت است. حرکت ذره در شکل ۴.۱۴ به طور طر حوار نشان داده شده است. مؤلفه z (مؤلفه موازی) نیرو، معادله (۱۶.۱۴)، همواره در جهتی است که ذره را به داخل



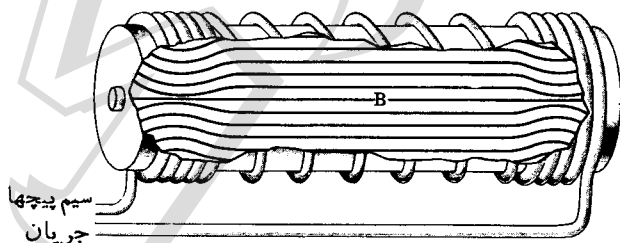
شکل ۴.۱۴ ذره در مسیری مارپیچی که مرتباً تنگتر و فشرده‌تر می‌شود می‌چرخد و سرانجام منعکس شود. H--

قسمت ضعیفتر میدان شتاب می‌دهد. بدین ترتیب ذرات چرخانی که به نواحی قویتر میدان نزدیک می‌شوند، کند می‌شوند، به عبارت دیگر $v_{||}$ کاهش می‌یابد. از طرف دیگر، اصل بقای انرژی ایجاب می‌کند که همزمان با کاهش $v_{||}$ حرکت مداری $v_{\perp}$ باید سریعتر شود. اگر میدان مغناطیسی به حد کافی همگرا باشد، ذره در مسیری مارپیچی که مرتباً تنگتر می‌شود می‌چرخد تا سرانجام به ناحیه میدان ضعیفتر منعکس شود.

۳.۱۴ آینه‌های مغناطیسی

نتایج بخش قبل نشان می‌دهند که یک میدان مغناطیسی که تدریجاً همگرا می‌شود، در اصل، می‌تواند پلاسما را محصور کند. در امتداد عمود بر جهت اصلی میدان، مسیر ذرات در مدارهای دایره‌ای خم می‌شود؛ در امتداد جهت اصلی میدان، سرعت ذرات تدریجاً کم می‌شود تا سرانجام توسط خطوط میدان همگرا منعکس شوند. این پیکربندی میدان را آینه مغناطیسی می‌نامند. در هر دستگاه محصورسازی حداقل باید دو آینه به کار رود؛ دستگاهی از این نوع در شکل ۵.۱۴ نشان داده شده است.

با وجود این، دستگاه آینه نمی‌تواند تمام ذرات را محصور کند. خطوط میدان را نمی‌توان تا حد یک نقطه همگرا کرد؛ بنابراین یک میدان مغناطیسی، B_m ، بزرگ (ولی نه بی‌نهایت بزرگ) در روی آینه وجود دارد. اگر ذره «انرژی جنبشی محوری» بسیار زیادی داشته باشد، میدان آینه آن را بر نمی‌گرداند، می‌تواند از دستگاه خارج شود. چون گشتاور مغناطیسی یک ثابت حرکت است، بنابر معادله (۱۰.۱۴)، خواهیم



طول در امتداد استوانه

شکل ۵.۱۴ دستگاه آینه مغناطیسی.

داشت

$$\frac{K_{\circ\perp}}{B_{\circ}} = \frac{K_{\perp}}{B_{\perp}}$$

در اینجا شاخص ۰ به ناحیه مرکزی شکل ۵.۱۴ و شاخص ۱ به نقطه انعکاس مربوط می شود. در هر صورت، در نقطه انعکاس، $K_{\perp} = K$ است. به علاوه، K ، انرژی جنبشی کل، يك ثابت حرکت است. برای اینکه ذره منعکس شود، میدان آینه B_m باید بزرگتر از $B_{\perp}$ باشد؛ یعنی

$$B_m > B_{\perp} = \frac{K}{K_{\circ\perp}} B_{\circ}$$

یا

$$\frac{K_{\circ\perp}}{K} > \frac{B_{\circ}}{B_m} \quad (۲۰.۱۴ الف)$$

اگر سرعت اولیه $v_{\circ}$ با امتداد میدان زاویه $\theta_{\circ}$ بسازد، در این صورت $v_{\circ\parallel} = v_{\circ} \cos \theta_{\circ}$ و $v_{\circ\perp} = v_{\circ} \sin \theta_{\circ}$. بنابراین، معادله (۲۰.۱۴ الف)، به عنوان شرط انعکاس، به شکل زیر درمی آید

$$\sin^2 \theta_{\circ} > \frac{B_{\circ}}{B_m} \quad (۲۰.۱۴ ب)$$

مثلاً، اگر میدان آینه صد برابر شد بدتر از $B_{\circ}$ باشد، در این صورت ذراتی که بردار سرعتشان زاویه ای کمتر از ۶ درجه با امتداد میدان می سازد، از دستگاه خارج می شوند. برخورد میان ذرات در ناحیه مرکزی دستگاه آینه يك توزیع سرعت همسانگرد تولید می کند. بنابراین نتیجه نهایی این برخوردها این است که تعدادی از ذرات دائماً به ناحیه ای از فضای سرعت پراکنده می شوند که بتوانند از دستگاه خارج شوند. در نتیجه این برخوردها ذرات می توانند به طور عمود بر امتداد میدان نیز «پخش» و سرانجام خارج شوند.

۴.۱۴ معادلات هیدرومغناطیسی

حرکتهای جمعی ذرات در پلاسما، مانند «اثر تنگش» و نوسانات پلاسما به بهترین وجه در فرمولبندی هیدرومغناطیسی بررسی می شوند. بنابراین توصیف، پلاسما به عنوان يك سیال کلاسیک در نظر گرفته می شود که از معادلات متعارف هیدرودینامیک پیروی می کند. ولی، این سیال از نظر الکتریکی رساناست و بنابراین باید نیروهای الکترومغناطیسی را صریحاً به حساب آورد.

نیروی وارد بر واحد حجم پلاسما را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (21.14)$$

که در آن $\mathbf{J}$ چگالی جریان و p فشار سیال است. نیروهای دیگر، مثل نیروهای گرانشی و چسبندگی را نیز می‌توان منظور کرد، اما در اینجا برای سادگی از آنها چشمپوشی می‌کنیم. به علت خنثی بودن تقریبی الکتریکی پلاسما، لازم نیست جمله $\rho \mathbf{E}$ را همراه با جملات دیگر نیرو در معادله (۲۱.۱۴) منظور کنیم. البته، در معادله پواسون باید انحراف از خنثی بودن را در نظر گرفت، ولی اغلب در معادلات دینامیکی از آنها چشمپوشی می‌شود. برای توازن اندازه حرکت لازم است که

$$\begin{aligned} \zeta \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \zeta \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \\ &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \end{aligned} \quad (22.14)$$

که این معادله حرکت (یا معادله اوپلر) سیال است. در اینجا ζ ، چگالی جرمی پلاسما و $\mathbf{v}$ سرعت سیال آن است. در مسائلی که حرکت هیدرودینامیکی خیلی بزرگ نیست، می‌توان غالباً از جمله‌ای که شامل $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ است، صرف نظر کرد.^۱ گاهی ساده‌تر است که جمله $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ در معادله (۲۱.۱۴) را به عنوان جمله‌ای تغییر کرد که قسمتی از آن ناشی از «فشار مغناطیسی» است. این کار را می‌توان به کمک قانون مداری آمپر، معادله (۲۹.۹)، که برای حالت پلاسما به صورت زیر است

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (23.14)$$

و به کمک اتحاد برداری زیر

$$\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \left(\frac{1}{2} B^2 \right) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (24.14)$$

انجام داد. بدین ترتیب

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B} \\ &= -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned} \quad (25.14)$$

۱. اگرچه در مسائل جریان پایا که در آنها جمله $\partial \mathbf{v} / \partial t$ صریحاً صفر می‌شود، نمی‌توان از آن صرف نظر کرد.

بنابراین، کمیت $B^2/2\mu_0$ ، که چگالی انرژی مغناطیسی است، نقش فشار مغناطیسی p_m را بازی می‌کند

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (26.14)$$

به هر حال، باید تأکید کرد که $-\nabla p_m$ در اغلب موارد فقط قسمتی از نیروی مغناطیسی را به دست می‌دهد؛ باقیمانده نیرو از جمله $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$ ($1/\mu_0$) به دست می‌آید. هنگامی که $\mathbf{J} = 0$ است، دوجمله طرف راست معادله (25.14) یکدیگر را حذف می‌کنند.

به عنوان مثالی از سودمندی مفهوم فشار مغناطیسی، یک میدان مغناطیسی تک‌جهت را در نظر بگیریم. معادله $\mathbf{B} \cdot \nabla = 0$ تضمین می‌کند که $\mathbf{B}$ در امتداد میدان تغییر نکند. چون تغییرات مکانی فقط می‌توانند در امتدادهای عمود بر $\mathbf{B}$ صورت گیرند، برای این مورد نتیجه می‌شود که $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = 0$. بنابراین معادله (21.14) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{F}_v = -\nabla(p + p_m)$$

و شرط لازم برای تعادل حالت ساکن هر جزء حجم عبارت است از

$$p + p_m = \text{const.}$$

به عبارت دیگر، برای این مثال، مجموع فشار سیال و فشار مغناطیسی باید مستقل از مکان باشد.

علاوه بر معادله (22.14) و معادلات ماکروسکوپی حاکم بر الکتروستاتیک و مغناطیس، ما به دو رابطه اضافی دیگر احتیاج داریم تا فرمولبندی هیدرومغناطیسی را کامل کنیم. این دو رابطه عبارت‌اند از (۱) معادله پیوستگی برای سیال پلاسما

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\xi \mathbf{v}) = 0 \quad (27.14)$$

و (۲) معادله‌ای که $\mathbf{J}$ را به کمیت‌های میدان مربوط سازد. رابطه اخیر صرفاً تعمیمی از قانون اهم است که تحت شرایط معین می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\mathbf{J} = g(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (28.14 \text{ الف})$$

۱. معادلات ماکسول در بخش ۲۰.۱۶ آمده‌اند. خواننده توجه خواهد کرد که در معادله (10.16)، قانون اصلی مداری آمپر، با منظورداشتن جریان جابه‌جایی $\partial \mathbf{D} / \partial t$ تغییر یافته است. عملاً، جریان جابه‌جایی نقش مهمی در اغلب پدیده‌های هیدرومغناطیسی بازی نمی‌کند.

در اینجا $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ میدان الکتریکی حرکتی است که در اثر حرکت هیدرودینامیکی پلاسما در میدان مغناطیسی به وجود آمده است، و g رسانندگی پلاسماست.

تقریبی که غالباً در نظر گرفته می شود تقریب رسانندگی بینهایت است. مزیت این تقریب در آن است که می توان معادلات هیدرومغناطیسی را به کمک آن خیلی ساده کرد و تصویر بسیار واضحی از فرایندهایی که در پلاسما صورت می گیرد به دست داد. در بعضی مسائل، به خصوص در مسائل اختر فیزیکی، این تقریب کاملاً خوب است. برای حالت رسانندگی بینهایت، قانون اهم به شکل زیر در می آید

$$g \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (28.14 \text{ ب})$$

رسانندگی بینهایت (یا، برای مقاصد عملی، رسانندگی خیلی زیاد) پیامد بسیار مهمی دارد. این پیامد آن است که شار مغناطیسی در داخل پلاسما منجمد می شود. اگر معادله (28.14 ب) باشکله دیفرانسیلی قانون القای فاراده ترکیب شود، خواهیم داشت

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (29.14)$$

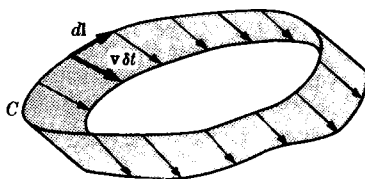
با انتگرال گیری از مؤلفه عمودی این معادله روی يك سطح ثابت S نتیجه می شود

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_S \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \, da$$

یا

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v}) \quad (30.14)$$

که در آن C منحنی بسته ثابتی در فضا است که پلاسما در اثر حرکت هیدرودینامیکی از آن عبور می کند. از شکل ۶.۱۴ می بینیم که $\oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{v}$ را می توان به عنوان افزایش در واحد زمان مساحت سطح کلاهکی در نظر گرفت که منحنی C محصور می کند، و $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \times \mathbf{v}$ شار مغناطیسی مربوط به این افزایش مساحت است. طبق معادله (30.14) تغییر در واحد زمان شار از میان منحنی بسته C درست همان چیزی است که ما باید از نظر هندسی بر این اساس که تمام خطوط شار همراه با سیال حرکت می کرد، محاسبه می کردیم. بنابراین به این نتیجه می رسیم که خطوط میدان مغناطیسی در داخل ماده رسانای کامل، «منجمد» شده اند.



شکل ۶.۱۴

۵.۱۴ اثر تنگش

تمایل یک جریان الکتریکی شدید در فشرده ماندن در جهت عرضی، هنگام تخلیه در داخل پلاسما، به «اثر تنگش» معروف است. عامل اصلی که باعث تنگش می‌شود، عبارت است از برهم‌کنش جریان بامیدان مغناطیسی خودش، یا به عبارت دیگر، عبارت است از نیروی جاذبه بین رشته‌های موازی جریان. اثر تنگش اولین بار توسط بنت، و بعداً به طور مستقل توسط تانکس پیش‌بینی شد.^۱ تصویر دیگری از تنگش را که تا اندازه‌ای با تصویر بنت اختلاف دارد و ناپایداری ذاتی آن را نشان می‌دهد، رزنبلات داده است.^۲

یک تخلیه جریان با تقارن استوانه‌ای را در داخل پلاسما در نظر بگیرید. از قانون مداری آمپر، میدان مغناطیسی در فاصله r از محور تخلیه با معادله زیر داده می‌شود

$$B(r) = \frac{\mu_0}{r} \int_0^r J(r') r' dr' \quad (۳۱.۱۴)$$

از این معادله نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial r} &= -\frac{\mu_0}{r^2} \int_0^r J(r') r' dr' + \mu_0 J(r) \\ &= -\frac{1}{r} B(r) + \mu_0 J(r) \end{aligned} \quad (۳۲.۱۴)$$

نیروی مغناطیسی در واحد حجم عبارت است از

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -J(r)B(r)\mathbf{a}_r, \quad (۳۳.۱۴)$$

1. W. Bennett, *Physical Review*, **45**, 890 (1934); L. Tonks, *Physical Review*, **56**, 369 (1939).

2. M. Rosenbluth, «Dynamics of a Pinched Gas,» from *Magnetohydrodynamics*, edited by Rolf Landshoff (Stanford University Press, 1957).

که در آن a_r بردار یک‌ه‌ای درجهت r است. با حذف $J(r)$ بین (۳۲.۱۴) و (۳۳.۱۴) نتیجه می‌شود

$$F_v = -\frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{1}{\mu_0 r} B^2 \quad (34.14)$$

این نیرو را می‌توان به یک فشار معادل، p_{eq} تبدیل کرد، به این صورت که بنویسیم $F_v = -\partial p_{eq} / \partial r$ و سپس از آن انتگرال بگیریم

$$p_{eq} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{1}{\mu_0} \int_0^r \frac{B^2}{r} dr \quad (35.14)$$

آنچه مخصوصاً مورد نظر ماست، فشار روی مرزهای عرضی تخلیه است. به پیروی از پیشنهاد رزنبلات، ما بررسی خود را به موردی که در آن رسانندگی زیاد است یعنی، موردی که در آن خطوط میدان مغناطیسی نمی‌توانند زیاد به داخل سیال رسانا نفوذ کند محدود می‌کنیم. در این مورد، انتگرال موجود در معادله (۳۵.۱۴) شامل هیچ سهمی از ناحیه تخلیه نیست. در مرز تخلیه ($r = R$) فشار درست همان مقداری است که ما آن را فشار مغناطیسی، p_m نامیدیم

$$p_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2(R) \quad (36.14)$$

از معادله (۳۵.۱۴) واضح است که فشار مغناطیسی در ناحیه خارج یکنواخت، ولی در داخل تخلیه صفر یا خیلی کوچک است. بنابراین اثر تنگش را می‌توان ناشی از ایجاد ناگهانی یک فشار مغناطیسی در ناحیه خارج از تخلیه، دانست.

تنگش تخلیه منجر به تراکم پلاسما می‌شود. اگر تنگش می‌توانست به نحو پایداری منقبض شود، این عمل تاجایی ادامه می‌یافت که فشار مغناطیسی در ناحیه خارج مساوی فشار سیال در داخل تخلیه شود. حال پلاسما را مانند یک گاز کامل در نظر می‌گیریم که فشار سیال آن $p = NkT$ است. از این رو، در شعاع نهایی تخلیه، R ، داریم

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2(R) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi^2 R^2} I^2 = NkT$$

که در آن I عبارت است از جریان در داخل تخلیه. این عبارت را می‌توان برای جریان حل کرد

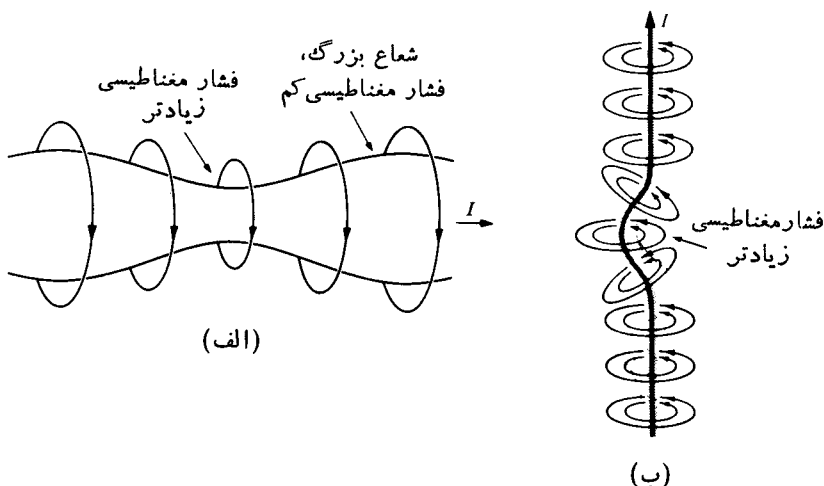
۱. عدم نفوذ خطوط میدان از نتایج بخش قبل و از این حقیقت نتیجه می‌شود که هم جریان و هم میدان مغناطیسی در داخل تخلیه، هر دو در ابتدا خیلی کوچک‌اند.

$$I^2 = 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right)^{-1} \pi R^2 N k T$$

$$= 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right)^{-1} A_0 N_0 k T$$

که در آن با توجه به اصل بقای ذرات از رابطه $A_0 N_0 = \pi R^2 N$ استفاده کرده ایم. در اینجا A_0 سطح مقطع اولیه تخلیه، N_0 چگالی ذره اولیه آن، $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ ، و $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ثابت بولتزمن است. برای به دست آوردن دمای 10^8 کلوین، که برای یک رآکتور گرما هسته ای (گداخت) لازم است، با A_0 برابر 0.04 متر مربع و N_0 برابر 10^{21} ذره بر متر مکعب، جریان تنگشی حدود یک میلیون آمپر لازم است.

مشاهده می شود که تنگش پدیده ای است که ذاتاً ناپایدار است. فشار مغناطیسی روی مرز تخلیه به شعاع تخلیه و همچنین به جزئیات هندسی آن بستگی دارد. اگر تغییرات فشار ناشی از آشفته گیهای کوچک چنان باشند که باعث افزایش آنها شوند، آشفته گیها رشد خواهند کرد. چینه های کوچک روی سطح احاطه کننده تخلیه، همچنین تابها جزو این گروه از آشفته گیها یند که باعث به وجود آمدن ناپایداریهای سوسیسی و تابی در پلاسمای تنگیده می شوند (شکل ۷.۱۴).



شکل ۷.۱۴ ناپایداریها در پلاسمای تنگیده: (الف) ناپایداری

سوسیسی، (ب) ناپایداری تابی
@Quark_Book
H--M

۶.۱۴ دستگاههای محصور سازی مغناطیسی برای گداخت گرما هسته‌ای کنترل شده

بیشتر توجه کنونی ما به فیزیک پلاسما از نیاز به توسعه منابع بدیل انرژی و امکان استفاده از پلاسمای گرما هسته‌ای دوتریوم و تریتیوم به عنوان منبع انرژی ناشی می‌شود. اثر تنگش که در بخش قبل درباره آن بحث شد و مفهوم آینه مغناطیسی (بخش ۳.۱۴) هر دو، به منظور محصور سازی پلاسمای گرما هسته‌ای به روش مغناطیسی، در دستگاههای رآکتور گداخت آزمایشی به کار می‌روند. هر چند که اثر تنگش فطرتاً ناپایدار است، می‌توان با افزودن مؤلفه‌های دیگری به میدان مغناطیسی و با بهینه‌سازی پارامترهای طرح، پایداری آن را بهبود بخشید.

یکی از کمیت‌های مهم برای طرح دستگاههای رآکتور گداخت نسبت فشار جنبشی $(p = NkT)$ است به فشار کل (فشار جنبشی به علاوه فشار مغناطیسی p_m). این نسبت را با نماد β نشان می‌دهند

$$\beta = \frac{p}{[B^2/2\mu_0 + p]} = \frac{NkT}{[B^2/2\mu_0 + NkT]} \quad (37.14)$$

که در آن N مجموع چگالی‌های یون و الکترون در پلاسماست. رآکتورهای گداخت را عموماً با مقدار β ی آنها مشخص می‌کنند. مقادیر کمتر از ۰.۱۵ را β ی پایین و مقادیر بین ۰.۱۵ تا ۱ را β ی بالا می‌گویند. پلاسما یا دوتریوم است یا یک پلاسمای دوتریوم - تریتیوم بادمای بیش از $10^8 K$ و چگالی تعداد آن بین $10^{19} m^{-3}$ تا $10^{22} m^{-3}$ است. محصور سازی لازم نیست که مطلق و دائمی باشد، ولی باید دوره آن (τ) به حد کافی طولانی باشد تا انرژی تولید شده در واکنش گرما هسته‌ای بتواند از انرژی مصرف شده در برقراری شرایط پلاسمایی بیشتر شود. اعتقاد بر این است که در صورت برقرار شدن شرط لایسون محصور سازی در حد مناسبی است. این شرط عبارت است از

$$T > 10^8 K \text{ در } N_i \tau > 10^{20} m^{-3}s \quad (38.14)$$

که در آن N_i چگالی یون در پلاسماست.

فعالترین زمینه تحقیقات مربوط به محصور سازی مغناطیسی شامل رده‌ای از رآکتور هاست که برای محصور سازی پلاسماهای چنبره‌ای شکل طراحی شده‌اند، و مهمترین آنها رآکتورهای توکامک است. نام این رآکتور از یک رشته آزمایشهای توکامک که در سازمان انرژی اتمی کورخاتوف در مسکو انجام شده گرفته شده است، ولی اکنون این نام به آن رده از رآکتورهای آزمایشی اطلاق می‌شود که با تنگش پخشی چنبره‌ای مشخص می‌شوند. توکامک دستگاهی است با مقدار β ی پایین تا متوسط. میدان مغناطیسی در

پلاسمای این رآکتور یک مؤلفه قطبیوار^۱ و یک مؤلفه چنبره‌ای دارد، مؤلفه قطبیوارناشی ازجریانی است که در پاسخ به میدان الکتریکی چنبره‌ای برقرار می‌شود، و مؤلفه چنبره‌ای توسط پیچ‌های خارجی ایجاد می‌شود، لذا خطوط میدان بر ایند یک سری منحنی‌های مارپیچی در درون پلاسمای چنبره‌ای شکل هستند. هم‌اکنون در سراسر جهان چندین دستگاه توکامک وجود دارد که از آن میان می‌توان «چنبره بزرگ پرینستون» را که یکی از بزرگترین رآکتورهای آمریکاست نام برد؛ این ماشین با جریان پلاسمایی کار می‌کند که حداکثر آن ۱۶ میلیون آمپر است.

رآکتور گداخت تا - تنگش و رآکتور آینه مغناطیسی مثالهایی از وسایل آزمایشی اند که مقدار β ی آنها زیاد است. در مفهوم تا - تنگش از پلاسمای چنبره‌ای شکل استفاده می‌شود، ولی چگالی پلاسمای آن به مراتب از توکامک بیشتر است. آینه مغناطیسی یک دستگاه محصورسازی کامل نیست، زیرا پلاسما از انتهای آن به خارج نشت می‌کند؛ با وجود این، این دستگاه می‌تواند توان باریکه‌ای را که به آن تزریق می‌شود تقویت کند. آینه مغناطیسی وسیله‌ای با مقدار β ی زیاد است ولی چگالی پلاسمایی که در آن به کار می‌رود از رآکتور تا - تنگش کمتر است.^۲

۷.۱۴ نوسانهای پلاسما و حرکت موجی

یکی از خواص جالب پلاسما توانایی آن در حفظ نوسانات و انتشار امواج است. انواع مختلف رفتار نوسانی امکان پذیر است، و به علت مشخصه غیر خطی معادلات هیدرودینامیک، این نوسانات می‌توانند کاملاً پیچیده باشند. با وجود این، لازم است که ما توجه خود را

۱. اگر پلاسمای چنبره‌ای را قطع کنیم (مثلاً، در شکافی که در شکل ۱۴.۹ با d مشخص شده است) و آن را به صورت استوانه مستقیمی درآوریم، آنگاه مؤلفه قطبیوار همان مؤلفه سمتی و مؤلفه چنبره‌ای همان مؤلفه محوری خواهد بود.
۲. برای بحث مفصلتری درباره دستگاههای رآکتور گداخت آزمایشی خواننده می‌تواند به یکی از مقالات جامع زیر رجوع کند.

«Fusion Reactor Systems» by F. L. Ribe, *Reviews of Modern Physics*, 47, 7 (1975).

«The Tokamak Approach in Fusion Research» by B. Coppi and J. Rem, *Sci. Am*, 227, no. 1 (July 1972).

«The Prospects of Fusion Power» by W. C. Gough and B. J. Eastland, *Sci. Am*, 224, no. 2 (Feb. 1971).

«Fusion Energy in Context: Its Fitness for the Long Term» by J. P. Holdren, *Science*, 200, 168 (April 1978).

به موارد نسبتاً ساده‌ای که در آزمایشهای تحت کنترل مشاهده شده است محدود کنیم.

مورد ۱. نوسانهای الکتروستاتیکی الکترون پلاسما

نوسانهای الکتروستاتیکی در پلاسما اولین بار توسط تانکس و لانگمویر^۱ بررسی شدند. در واقع، دو نوع نوسان الکتروستاتیکی ممکن وجود دارد: (۱) نوسانهای با فرکانس زیاد که آنقدر سریع اند که یونهای سنگین نمیتوانند انجام دهند، و (۲) نوسانهای یونها که آنقدر آهسته اند که الکترونها همواره به طور آماری در اطراف یونها توزیع میشوند. ما تنها مورد اول را که به نوسانهای الکترون معروف است بررسی می‌کنیم.

توجه خود را به ناحیه‌ای از پلاسما معطوف می‌کنیم که حاوی چگالی یکنواختی از یونهای مثبت، N ، باشد. یون منفی وجود ندارد. در ابتدا، الکترونها نیز چگالی یکنواخت N دارند، ولی فرض کنید که هر الکترون به اندازه ξ در جهت x تغییر مکان می‌یابد؛ ξ از مختصات y و z مستقل و در مرزهای پلاسما صفر است. تغییر مکان الکترونها باعث ایجاد آشفتگی در پلاسمای خنثی می‌شود و در نتیجه آن یک بار الکتریکی در هر جزء حجم $\Delta x \Delta y \Delta z$ به وجود می‌آید

$$\begin{aligned}\delta\rho \Delta x \Delta y \Delta z &= -Ne \Delta y \Delta z \left[\xi - \left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x \right) \right] \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z Ne \frac{\partial \xi}{\partial x}\end{aligned}$$

حرکت الکترونها یک میدان الکتریکی $\mathbf{E}(x, t)$ ایجاد می‌کند که به علت تقارن مسئله در جهت x است. بنابراین

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \delta\rho$$

یا

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon_0} Ne \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

که اگر از معادله اخیر انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$E = \frac{Ne}{\epsilon_0} \xi \quad (39.14)$$

در اینجا، ثابت انتگرال گیری صفر در نظر گرفته شده است، زیرا تشکیل پوشینه، پلاسما را از میدان الکتریکی یکنواخت محافظت می کند.

نیروی وارد بر هر الکترون برابر است با $-eE$ ، که بر طبق معادله (۳۹.۱۴)، با تغییر مکان ξ متناسب است. همچنین دیده می شود که این یک نیروی برگرداننده است. بنابراین، هر الکترون در اطراف مکان اصلی خود با یک حرکت هماهنگ ساده نوسان می کند. معادله حرکت برای هر الکترون به صورت زیر است

$$m_e \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{Ne^2}{\epsilon_0} \xi = 0 \quad (40.14)$$

بنابراین، فرکانس پلاسما، $f_p = \omega_p / 2\pi$ ، با معادله زیر تعریف می شود

$$\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (41.14)$$

که در آن m_e جرم الکترون است. به عنوان یک مثال عددی، چنانچه چگالی ذره برابر با 10^{18} الکترون بر متر مکعب باشد، خواهیم داشت: $f_p = 9.0 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$.

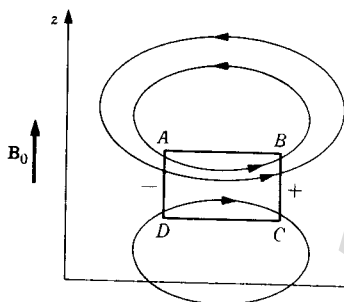
مورد ۲. امواج هیدرومغناطیسی یا امواج آلفن

امواج هیدرومغناطیسی نشان دهنده انتشار واقعی موج در محیط رسانایی است که تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی ثابت قرار گرفته باشد. این رفتار، که اولین بار توسط آلفن^۱ در سال ۱۹۴۲ پیش بینی شد، با فرمولبندی هیدرومغناطیسی پلاسما که در بخش ۴.۱۴ بررسی شد سازگار است.

قبل از شروع به بررسی و حل معادلات دیفرانسیل، می خواهیم فرایندهای فیزیکی پلاسما را تا آنجا که امکان دارد از یک دیدگاه مقدماتی بررسی کنیم. یک پلاسمای نامتناهی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت $\mathbf{B}_0$ که در امتداد محور z است، قرار گرفته است. اگر به قسمتی از پلاسما، قسمت مستطیلی $ABCD$ در شکل ۸.۱۴ که به موازات محور y امتداد دارد، سرعت $\mathbf{v}$ در جهت مثبت محور y داده شود، آنگاه به حاملهای بار (یونها و الکترونها) نیرویی معادل

$$q_i(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0)$$

وارد می شود و این نیرو سعی می کند حاملهای مثبت و منفی را از یکدیگر جدا کند. بنابراین،



شکل ۸.۱۴ قسمت $ABCD$ ی پلاسما در جهت مثبت z حرکت می کند. جریانهای که به وجود می آیند به صورت طرحواره رسم شده اند.

قسمت $ABCD$ به صورت يك منبع emf حرکتی درمی آید، و انتهای سمت راست آن می کوشد به طور مثبت و انتهای سمت چپ به طور منفی باردار شود. ولی چون ما بایک محیط رسانا سروکار داریم، پلاسمایی که در ناحیه خارجی $ABCD$ قرار گرفته است، مدار الکتریکی را کامل می کند. تعدادی از خطوط جریان در شکل نشان داده شده اند.

اکنون جریان القایی بامیدان مغناطیسی B_0 برهم کنش می کند. به سادگی می توان تحقیق کرد که چگالی نیروی $\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0$ در قسمت $ABCD$ طوری است که بسا حرکت آن مخالفت می کند، در صورتی که نیروی وارد بر قسمت های خارجی پلاسما طوری است که در جهت مثبت z به آن شتاب می دهد. سرانجام $ABCD$ کند می شود و حرکت خود را به قسمت های مجاور پلاسما منتقل می کند. این عمل همین طور ادامه می یابد، و تمام فرایند تکرار می شود. بدین ترتیب آشفتگی هر چه فراتر در جهت $\pm z$ انتشار می یابد.

اکنون به معادلات دیفرانسیل برمی گردیم. فرض کنید $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ ، که در آن $\mathbf{B}_0$ میدان ثابت یکنواخت موازی با محور z است، و $\mathbf{B}_1$ میدان مغناطیسی است که توسط جریان های القایی به وجود آمده است. با به کار بردن نتایج بند قبل به عنوان راهنما، می خواهیم ساده ترین نوع حرکت موجی را پیدا کنیم که مؤلفه های J_x ، E_x ، v_y و B_{1y} آن غیر صفر و سایر مؤلفه های آن صفر باشند. از قانون مداری آمپر داریم

$$-\frac{\partial B_{1y}}{\partial z} = \mu_0 J_x \quad (۲۲.۱۴)$$

و معادله اوپلر سیال، معادله (۲۲.۱۴)، در رابطه زیر را به دست می دهد

$$\zeta \frac{\partial v_y}{\partial t} = -J_x B_0 \quad (۲۳.۱۴ \text{ الف})$$

و

$$0 = J_x B_{\perp y} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (۴۳.۱۴ \text{ ب})$$

می‌توان معادلات (۴۳.۱۴) را با معادله (۴۲.۱۴) ترکیب کرد و نتایج زیر را به دست آورد

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu_0 \zeta} \frac{\partial B_{\perp y}}{\partial z} \quad (۴۴.۱۴)$$

و

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial (B_{\perp y}^2)}{\partial z} \quad (۴۵.۱۴)$$

قانون تعمیم یافته اهم را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} E_x &= -v_y B_0 + \frac{1}{g} J_x \\ &= -v_y B_0 - \frac{1}{g\mu_0} \frac{\partial B_{\perp y}}{\partial z} \end{aligned} \quad (۴۶.۱۴)$$

بالاخره، قانون فاراده نتیجه زیر را به دست می‌دهد

$$\frac{\partial B_{\perp y}}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (۴۷.۱۴)$$

اگر v_y را بین معادلات (۴۴.۱۴) و (۴۶.۱۴)، و E_x را بین معادله حاصل و معادله (۴۷.۱۴) حذف کنیم، با فرض اینکه ζ ثابت است، خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 B_{\perp y}}{\partial t^2} = \frac{B_0^2}{\mu_0 \zeta} \frac{\partial^2 B_{\perp y}}{\partial z^2} + \frac{1}{g\mu_0} \frac{\partial^2 B_{\perp y}}{\partial z^2 \partial t} \quad (۴۸.۱۴)$$

که این معادله حاکم بر انتشار امواج آلفن است.

اگر رسانندگی g ی پلاسما بینهایت بود، در آن صورت (۴۸.۱۴) با معادله موجی که درباره حل آن در بخشهای ۴.۱۶ و ۵.۱۶ بحث خواهیم کرد، یکسان می‌شد. در این شرایط، معادله (۴۸.۱۴) موج تخت غیر میرایی را توصیف می‌کند که به موازات محور z

با سرعت فاز زیر در حرکت است

$$v_p = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \zeta}} \quad (۴۹.۱۴)$$

به عنوان يك مثال عددی، فرض کنید $B_0 = 0.01 \text{ T}$ ، $\zeta = 10^{-5} \text{ kg/m}^3 = 10^{-8} \text{ g/cm}^3$ ؛

در این صورت $v_p = 2800 \text{ m/s}$.

برای آنکه ببینیم در صورت بینهایت نبودن رسانندگی نتیجه حاصل چیست، جوابی را به شکل زیر برای معادله (۴۸.۱۴) در نظر می‌گیریم

$$B_y = b_y \exp [\alpha z + i\omega t]$$

این جواب در صورتی قابل قبول است که

$$\alpha^2 = \frac{-\omega^2}{v_p^2 + i\omega/g\mu_0} \quad (۵۰.۱۴)$$

و v_p همان باشد که در معادله (۴۹.۱۴) تعریف شد. برای میرایی کوچک

$$\alpha \approx \pm \left(i \frac{\omega}{v_p} + \frac{\omega^2}{2g\mu_0 v_p^2} \right) \quad (۵۱.۱۴)$$

بنابراین جواب معادله (۴۸.۱۴) يك موج تخت میراست که در جهت $\pm z$ انتشار می‌یابد. فاصله δ که در آن دامنه موج به $1/e$ مقدار اولیه اش کاهش می‌یابد، عبارت است از

$$\delta = \frac{2g\mu_0 v_p^2}{\omega^2} = \frac{2gB_0^2}{\mu_0^{1/2} \zeta^{1/2} \omega^2} \quad (۵۲.۱۴)$$

۸.۱۴ کاربرد کاوه‌ها برای اندازه‌گیریهای پلاسما

يك پلاسما حاوی الکترونها، یونها، و احتمالا اتمهای خنثی است. الکترونها انرژی خودشان را از میدانهای الکتریکی موجود در مرز پلاسما و همچنین از برخوردهای یونندهای باعث به وجود آمدنشان می‌شود، کسب می‌کنند. سرعت الکترونها از طریق برخورد بایونها کمتر می‌شود. بنابراین، می‌توانیم درباره دمای الکترون، T_e ، صحبت کنیم. در واقع، برای پلاسماهایی که در آزمایشگاه تولید می‌شوند (جرقه‌ها، تخلیه‌های الکتریکی)، ملاحظه می‌شود که توزیع سرعت الکترونها به صورت توزیع ماکسول - بولتزمن است، که

البته این بدان معنی است که می‌توان الکترون‌ها را با دمایی مشخص کرد. دمای الکترون در پلاسماهای معمولی که از جرقه تولید می‌شود در گستره چند هزار تا $50,000\text{K}$ است. بحث اخیر، تا حدودی، در مورد یون‌های سنگین نیز صادق است؛ ولی یون‌ها با الکترون‌ها لزوماً دمای یکسانی ندارند. اگر بین انرژی جنبشی متوسط یون‌ها و الکترون‌ها اختلاف قابل توجهی وجود داشته باشد، در این صورت برای از بین رفتن اختلاف انرژی، هر ذره نیاز به هزاران برخورد دارد، و این امر ممکن است به زمانی بیش از عمر متوسط هر یون در سیستم نیاز داشته باشد.

کمیت‌های جالبی که باید تعیین شوند عبارت‌اند از دماهای ذرات، چگالی‌های ذرات، و چگالی‌های جریان‌های کتره‌ای در پلاسما. لانگمویر و مات - اسمیت^۱ نشان داده‌اند که با وارد کردن یک الکترون و فلزی کوچک، یا یک «کاوه»، به داخل پلاسما و اعمال پتانسیل‌های مختلف به آن و اندازه‌گیری جریان‌های جمع شده متناظر، می‌توان بعضی از کمیت‌های بالا را به‌طور تجربی تعیین کرد. الکترونی که در پتانسیل پلاسما نباشد، با پوشینه‌ای احاطه می‌شود که پلاسما را از میدان آشفته ساز الکترون محافظت کند. این پوشینه، در بیشتر موارد کاملاً نازک است، و اگر کاوه در پتانسیل منفی، صفر، یا اندکی مثبت نسبت به پلاسما نگه داشته شود، توده پلاسما را خیلی کم آشفته می‌سازد.

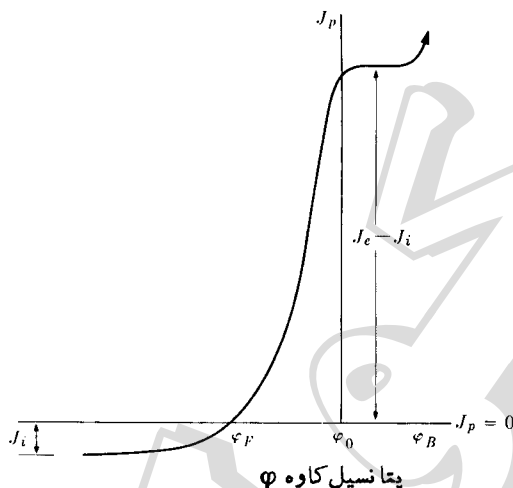
در شکل ۹.۱۴، رابطه ولتاژ - جریان برای یک کاوه نوعی نشان داده شده است. هنگامی که کاوه در پتانسیل پلاسما باشد، هم جریان کتره‌ای الکترون‌ها و هم جریان کتره‌ای یون‌ها را جمع‌آوری می‌کند. ولی جریان کتره‌ای الکترون خیلی بزرگتر از جریان کتره‌ای یون است، به‌طوری که بر جریان اخیر غالب است، دلیل این مطلب آن است که الکترون‌ها میانگین سرعت‌هایی به مراتب بزرگتر از یون‌ها دارند. وقتی کاوه را منفی کنیم، الکترون‌ها را دفع می‌کند و در نتیجه جریان الکترون کاهش می‌یابد؛ در نقطه ϕ_p معروف به پتانسیل شناوری، جریان خالص از کاوه صفر است؛ بالاخره، اگر کاوه را به اندازه کافی منفی کنیم، فقط چگالی جریان یون J_i جمع‌آوری می‌شود. اگر کاوه را نسبت به پلاسما اندکی مثبت کنیم، یون‌ها دفع می‌شوند و چگالی جریان الکترون J_e جمع‌آوری می‌شود. اگر کاوه را بیشتر مثبت کنیم، مانند یک آتود ثانویه عمل می‌کند و رفتار جریان - ولتاژ پیچیده می‌شود، که جزئیات آن بستگی به ماهیت پلاسما دارد.

پلاسمایی را در نظری می‌گیریم که حاوی یون‌های مثبت (یک بار یونیده) و الکترون‌هاست. در ناحیه خنثی، چگالی یون مساوی چگالی الکترون است

1. I. Langmuir and H. Mott - Smith, *General Electric Review*, 27, 449, (1924); *Physical Review*, 28, 727 (1926).

برای بحث جدیدتری درباره کاوه‌های الکترونیکی به کتب زیر رجوع کنید

F. F. Chen, *op. cit.*, or Chapter 4 of *Plasma Diagnostic Techniques*, edited by R. H. Huddleston and S. L. Leonard (New York: Academic Press, 1965).



شکل ۹.۱۴ مشخصه جریان - ولتاژ کاوه‌ای که داخل پلاسما شده است.
 ϕ_0 پتانسیل پلاسماست.

$$N_i = N_e = N_0 \quad (۵۳.۱۴)$$

اگر توزیع الکترون بادمای T_e مشخص شود، در این صورت بنا بر نظریه جنبشی، چگالی جریان کتره‌ای الکترون عبارت است از

$$J_e = \frac{1}{4} N_0 e \bar{v} = N_0 e \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} \quad (۵۴.۱۴)$$

که در آن $\bar{v}$ میانگین سرعت گرمایی الکترونهاست. این جریان الکترون جمع‌آوری شده در واحد سطح کاوه در ناحیه $\phi = \phi_0$ تا $\phi = \phi_B$ است. اگر کاوه را منفی کنیم، چگالی جریان الکترون کاهش می‌یابد، زیرا تنها کسری از الکترونها انرژی کافی دارند تا به‌سد پتانسیل نفوذ کنند

$$J'_e = J_e \exp \left(e \frac{\phi - \phi_0}{kT_e} \right) = \frac{1}{4} N_0 e \bar{v} \exp \left(e \frac{\phi - \phi_0}{kT_e} \right), \quad \phi \leq \phi_0 \quad (۵۵.۱۴)$$

از طرف دیگر، چگالی جریان یون یعنی J_i ، در ناحیه پتانسیل منفی، ثابت است. بنابراین جریان کل کاوه عبارت است از

$$J_p = J_e \exp\left(e \frac{\varphi - \varphi_0}{kT_e}\right) - J_i$$

که از آن دمای الکترون به دست می آید

$$T_e = \frac{e}{k} \left[\frac{d}{d\varphi} \ln(J_p + |J_i|) \right]^{-1} \quad (۵۶.۱۴)$$

اکنون می توان N_0 چگالی ذره را از معادله (۵۴.۱۴) با استفاده از مقدار تجربی J_p مربوط به ناحیه مسطح در سمت راست φ_0 در شکل، تعیین کرد. باید توجه داشت که معادله (۵۶.۱۴) و شکل مشخصه $J_p - \varphi$ به قدر مطلق φ بستگی ندارند؛ بنابراین پتانسیل کاوه می تواند نسبت به هر پتانسیل ثابتی (مثلاً، پتانسیل یک الکتروود) در پلاسما اندازه گیری شود.

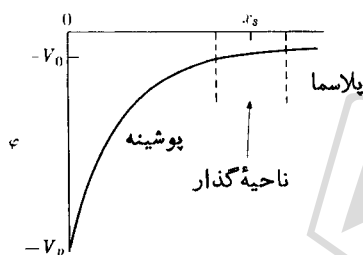
منحنیهای مشخصه کاوه کاملاً درک شده اند، ولی قبل از اینکه بتوانیم اطلاعات به دست آمده از اندازه گیریهای کاوه را بدون ابهام تعبیر کنیم، لازم است شرایط معینی برقرار باشد: (۱) کاوه باید در مقایسه با مسافت آزاد میانگین الکترونها و یونها کوچک باشد، (۲) پوشینه باید در مقایسه با ابعاد کاوه کوچک باشد، (۳) یونش در پوشینه باید قابل چشمپوشی باشد، (۴) گسیل ثانوی از کاوه باید قابل چشمپوشی باشد، و (۵) باید هیچ نوسانی در پلاسما وجود نداشته باشد. علاوه بر این شرایط، به طور ضمنی فرض شده است که میدان مغناطیسی وجود ندارد؛ کاربرد کاوه ها در پلاسماهای حاوی میدانهای مغناطیسی را بوهم، بورهوپ، و ماسی^۱ بررسی کرده اند.

ما این بخش را با بحثی در مورد پوشینه احاطه کننده کاوه که به طور منفی باردار شده است، خاتمه می دهیم. معادله حاکم بر پتانسیل φ در ناحیه پوشینه، معادله پواسون است

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} e(N_i - N_e) \quad (۵۷.۱۴)$$

که در آن N_i و N_e چگالیهای موضعی یون و الکترون اند. منحنی تقریبی φ نسبت به فاصله از کاوه در شکل ۱۵.۱۴ رسم شده است. برای سادگی می توان از رابطه $\varphi = -V$ استفاده کرد، که در آن V یک کمیت مثبت است، و چون ضخامت پوشینه در مقایسه با ابعاد کاوه کوچک است، می توانیم معادله (۵۷.۱۴) را به صورت یک بعدی آن به کار ببریم

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon_0} e(N_i - N_e) \quad (۵۸.۱۴)$$



شکل ۱۰.۱۴ منحنی پتانسیل نسبت به فاصله از کاوه.

الکترونها تقریباً به نحوی آماری در پوشینه توزیع شده‌اند

$$N_e = N_0 \exp \left[\frac{-e(V - V_0)}{kT_e} \right] \quad (۵۹.۱۴)$$

که در آن N_0 چگالی الکترون در پتانسیل $-V_0$ پلاسماست. چگالی یون به طریق زیر به جریان یون J_i ، مربوط می‌شود

$$J_i = N_i e v_i = N_i e \sqrt{\frac{2eV}{m_i}} \quad (۶۰.۱۴ \text{ الف})$$

در پلاسما، خارج از پوشینه جریان یون با معادله زیر داده می‌شود

$$J_i = N_0 e v_{i_0} = N_0 e \sqrt{\frac{2eV_0}{m_i}} \quad (۶۰.۱۴ \text{ ب})$$

به شرطی که پتانسیل پلاسما، $-V_0$ ، نسبت به نقطه‌ای اندازه‌گیری شود که در آنجا یونهای مثبت تشکیل می‌شوند. بنابراین

$$N_i = N_0 \sqrt{\frac{V_0}{V}} \quad (۶۱.۱۴)$$

با قراردادن معادلات (۵۹.۱۴) و (۶۱.۱۴) در معادله (۵۸.۱۴)، معادله معروف به معادله پوشینه پلاسما به دست می‌آید

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon_0} N_0 e \left[V_0^{1/2} V^{-1/2} - \exp \left(\frac{-e(V - V_0)}{kT_e} \right) \right] \quad (۶۲.۱۴)$$

می‌توان معادلهٔ اخیر را در dV/dx ضرب کرد و از حاصل ضرب آن انتگرال گرفت. در این صورت خواهیم داشت

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 = \frac{1}{\epsilon_0} N_0 e \left[\sqrt{2} V_0^{1/2} V^{1/2} + \frac{kT_e}{e} \exp \frac{-e(V-V_0)}{kT_e} \right] + C \quad (۶۳.۱۴)$$

که در آن ثابت C از این شرط به دست می‌آید که در لبهٔ پوشینه، یعنی جایی که $V = V_0$ است، $dV/dx = 0$ است. بنابراین

$$C = -\frac{1}{\epsilon_0} N_0 [2eV_0 + kT_e] \quad (۶۴.۱۴)$$

برای کلیهٔ نقاط داخل پوشینه $(dV/dx)^2 \geq 0$ است؛ با بررسی معادلهٔ (۶۳.۱۴) می‌توان دید که این شرط فقط در صورتی صادق است که

$$V_0 \geq \frac{kT_e}{2e} \quad (۶۵.۱۴)$$

رابطهٔ بالا را اولین بار بوهم خاطر نشان کرده است.^۱ به عبارت دیگر، برای تشکیل یک پوشینهٔ پایدار، باید حداقل انرژی جنبشی یون‌هایی که از پلاسما به پوشینه می‌رسند برابر با نصف kT_e باشد. چون پوشینه‌های پایدار همواره تحت این شرایط تشکیل می‌شوند، معادلهٔ (۶۵.۱۴) به طور مؤثر V_0 را تعیین می‌کند؛ در واقع، علامت نامساوی در (۶۵.۱۴) را اغلب می‌توان با علامت مساوی تعویض کرد.

با انتگرال‌گیری از معادلهٔ (۶۳.۱۴) می‌توان ضخامت پوشینه را به دست آورد؛ ما این کار را فقط برای کاهه‌های خیلی منفی انجام می‌دهیم که در مورد آنها می‌توان از N_e چشم‌پوشی کرد. در این مورد

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 &\approx \frac{4N_0 e V_0}{\epsilon_0} \left[\left(\frac{V}{V_0} \right)^{1/2} - 1 \right] \approx \frac{4N_0 e V_0^{1/2} V^{1/2}}{\epsilon_0} \\ &= 2 \sqrt{\frac{2m_i}{e}} \frac{1}{\epsilon_0} J_i V^{1/2} \end{aligned} \quad (۶۶.۱۴)$$

که اگر از آن انتگرال بگیریم نتیجه خواهد شد

$$x_s = \frac{4\epsilon_0^{1/2} V_p^{3/4}}{3(\lambda m_i/e)^{1/4} J_i^{1/2}} \quad (۶۷.۱۴)$$

۹.۱۴ خلاصه مطالب

گازهای بسیار یونیده رساناهای الکتریکی خوبی هستند؛ پلاسما آن ناحیه‌ای از یک گاز بسیار یونیده است که در آنجا میدان الکتریکی ساکن و چگالی بار خالص تقریباً صفر است. سه شیوه متفاوت برای تحلیل پلاسما عبارت‌اند از نظریه جنبشی تعادل، نظریه مدار، و نظریه هیدرومغناطیسی ماکروسکوپی.

۱. نظریه تعادل، که مبتنی بر عامل آماری بولتزمن است، نشان می‌دهد که چنانچه بار خارجی Q در پلاسما قرار داشته باشد در فاصله‌ای موسوم به طول دبی توسط پلاسما محافظت می‌شود. یعنی، پتانسیل کولنی حفاظت نشده $Q/4\pi\epsilon_0 r$ با

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/h}$$

تعویض می‌شود، که در آن طول دبی h عبارت است از

$$h = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{n e^2}}$$

۲. نظریه مدار مبتنی است بر حرکات ذره تحت تأثیر نیروی

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

در یک میدان مغناطیسی یکنواخت، ذره‌ای به جرم m_p به آزادی در امتداد خط میدان حرکت می‌کند و در عین حال به دور آن می‌چرخد؛ مدار حاصل مارپیچی است که شعاع آن، معروف به شعاع لارمور، برابر است با

$$R = \frac{m_p v_{\perp}}{qB}$$

گشتاور مغناطیسی یک ذره آزاد از نوع دیامغناطیسی است. اگر میدان نایکنواخت باشد، هنگامی که ذره در امتداد خطوط همگرای میدان به درون میدان قوی‌تر حرکت کند به دور مارپیچ تنگتری خواهد چرخید؛ و در عین حال حرکت محوری آن کند و نهایتاً معکوس خواهد شد. نتیجه حاصل یک آینه مغناطیسی است.

۳. شیوه هیدرومغناطیسی مبتنی است بر قانون نیروی ماکروسکوپی برای حجم واحد

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

که در اینجا p فشار سیال است. گاهی جمله اول را می توان به تقریب برابر با $-\nabla p_m$ گرفت که در آن «فشار مغناطیسی» برابر است با چگالی انرژی

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

اثر تنگش مغناطیسی را می توان به صورت تراکم پلاسما در اثر فشار مغناطیسی خارج آن بررسی کرد.

۴. شیوه تحلیل ماکروسکوپی به امواج پلاسمایی نیز منجر می شود. امواج «الکتروستاتیکی» نوساناتی هستند که، برای الکترونها، در طول موج بینهایت فرکانس آن عبارت است از

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}}$$

امواج «آلفن» در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 ، با سرعت فازی حرکت می کنند که برابر است با

$$v_p = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

مسائل

۱.۱۴ شرط لازم برای آنکه نظریه مدار تقریب خوبی برای حرکت الکترون در پلاسما باشد، عبارت است از $\tau \gg 2\pi m_e / Be$ ، که در آن τ زمان متوسط میان دو برخورد است (به فصل ۷ رجوع کنید) و $2\pi m_e / Be$ دوره تناوب سیکلوترون در میدان مغناطیسی B است. نشان دهید که این بیان معادل است با $\eta \ll \eta_H$ که در آن $\eta_H \equiv B / N_e e$ مقاومت ویژه هال^۱ است.

۲.۱۴ در یک مسئله هیدرومغناطیسی با جریان پایا $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{J}$ ، و $\mathbf{B}$ بریکدیگر عمودند. فرض کنید $\mathbf{v}$ در جهت x است و $\mathbf{J}$ ، و $\mathbf{B}$ فقط توابعی از x اند. همچنین فرض کنید سطح مقطع کانال (عمود بر x) مستقل از x است. نشان دهید که

$$v = v_0 - \frac{1}{2\epsilon_0 v_0} \left[2B_0 \int J dx + \mu_0 \left(\int J dx \right)^2 \right]$$

@Quark Book

H--M

که در آن v سرعت درهنگامی است که $\zeta = \zeta_0$ و $B = B_0$ باشد.

۳.۱۴ معادله (۶۵.۱۴) را با بررسی معادله (۶۳.۱۴) نسبت به همسایگی $V \approx V_0$ به دست آورید.

۴.۱۴ مشخصه جریان - ولتاژ برای کاوه‌ای که در داخل پلاسمای يك لامپ تخلیه جریان فرو برده شده ، اندازه گیری شده است. سطح مقطع کاوه ۵۵ سانتیمتر مربع است. تمام ولتاژها نسبت به يك پتانسیل مرجع ثابت اندازه گیری شده‌اند

ولت، φ_p	میلی آمپر، I	ولت، φ_p	میلی آمپر، I
۴۰۰۰	-۲۰۰۵	۳۵۰۰	-۰۰۳۴
۳۹۰۰	-۲۰۰۴	۳۴۰۰	-۰۰۰۹۶
۳۸۰۰	-۷۰۵	۳۳۰۰	-۰۰۰۱۱
۳۷۰۰	-۲۰۷	۳۱۰۰	+۰۰۰۳۳
۳۶۰۰	-۰۰۹۸	۲۹۰۰	+۰۰۰۴۱

دمای الکترون در پلازما، چگالی الکترون، و پتانسیل شناوری کاوه را تعیین کنید.

*۵.۱۴ کره همگنی به شعاع a و رسانندگی الکتریکی σ' با سرعت v_0 - در داخل سیال ناچسبنده و تراکم‌ناپذیری با رسانندگی σ ، در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 حرکت می‌کند. سرعت v_0 موازی B_0 است. اتلاف ژول را که در اثر جریانهای القایی در سیستم نتیجه می‌شود ، محاسبه و با مساوی قرار دادن نتیجه با میزان هدر رفتن انرژی مکانیکی توسط کره $(F \cdot v_0)$ ، نیروی کششی F را محاسبه کنید. فرض کنید که جریان سیال جریان پتانسیلی است ؛ یعنی ، فرض کنید در دستگاه مختصاتی که در آن کره در حال سکون است ، سرعت سیال نسبت به مرکز کره بامعادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{4} a^2 \nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r} / r^3)$$

برای بحث این مسئله ومسائل مربوط، به مقاله زیر رجوع کنید

خواص الکترومغناطیسی ابررساناها

۱۰۱۵ تاریخ ابررسانایی

ابررسانایی را اولین بار کمرلین اونس^۱ در سال ۱۹۱۱ در شهر لیدن (هلند) کشف کرد. اونس مشاهده کرد که هنگامی که نمونه‌ای از جیوه سرد می‌شد، در دمای 4.2 K مقاومتش ناگهان از بین می‌رفت و ظاهراً کاملاً بدون مقاومت می‌شد. در یک آزمایش حساستر که در آن از یک جریان پایدار القا شده در یک حلقه سیم ابررسانا استفاده شد، اونس برآورد کرد که مقاومت در حالت ابررسانایی حداکثر 10^{-12} برابر مقاومت در حالت معمولی است. اخیراً در انستیتو تکنولوژی ماساچوست معلوم شد که یک جریان القایی چند صد آمپری در یک حلقه سربی ابررسانا، در مدت لااقل یک سال، تغییری در اندازه جریان نشان نمی‌دهد؛ این نتیجه دلیل محکمی است بر این موضوع که مقاومت در حالت ابررسانایی در واقع صفر است. با این آزمایش‌های اولیه، یک رشته تحقیقات برای تعیین مشخصات این اثر جدید به راه افتاد و تاکنون معلوم شده است که بیش از ۲۰ عنصر و صدها آلیاژ و ترکیبات بین‌فلزی ابررسانا وجود دارد. گستره دمای گذار ابررساناها از خیلی پایینتر از 1 K (مثلاً 0.12 K) برای هافنیوم) تا حدود 20 K (مثلاً 23 K برای ترکیب Nb_3Ge) است. دمای گذار، پادمای بحرانی، دمایی است که در آن ماده از حالت معمولی به حالت ابررسانایی می‌رسد و مشخصه ماده به خصوص مورد نظر است. دمای بحرانی تا حدودی، هم به درجه خلوص شیمیایی و هم به درجه کامل بودن متالورژیکی نمونه مورد آزمایش بستگی دارد. در واقع، ناهمگنی‌ها در خلوص و کرنش نمونه به طور کلی باعث گسترش گستره دمای گذار بین حالات معمولی

وابررسانایی می‌شود؛ گستره دمای گذار نمونه خالصی که به‌خوبی تابکاری شده باشد، می‌تواند کمتر از 0.001K باشد.

اگر يك میدان مغناطیسی به‌اندازه کافی بزرگ موازی با يك سیم ابررسانا اعمال شود، مشاهده می‌شود که نمونه به‌حالت معمولی بازمی‌گردد. اندازه میدانی که باعث این گذار می‌شود هم به‌ماده و هم به‌دما بستگی دارد و میدان بحرانی نامیده می‌شود. اگر میدان در جهات دیگری اعمال شود نمونه، هنگامی که میدان واقعی در هر نقطه روی سطح آن به میدان بحرانی برسد، شروع به رسیدن به حالت معمولی می‌کند. نمودار دما - میدان مربوط را که می‌توان رسم کرد، اصولاً از نظر ترمودینامیکی همان معنای نمودار دما - فشاری را دارد که برای گذارهای فاز معمولی رسم می‌کنیم، و خود منحنی را می‌توان به‌عنوان مرز فاز بین دو حالت ترمودینامیکی معمولی و ابررسانایی در نظر گرفت. این منحنی معمولاً سهمی شکل است و با تقریب خوبی با معادله زیر داده می‌شود

$$H_c = H_0 [1 - (T/T_c)^2]$$

که در آن H_c میدان بحرانی، T دمای مطلق (یا کلوین) مشاهده است، و T_c و H_0 نشان دهنده مشخصات نمونه هستند (دمای بحرانی در میدان صفر و میدان بحرانی در دمای صفر مطلق). نا‌همگنی‌ها علاوه بر گسترش مرحله گذار، می‌توانند تأثیر محسوسی روی H_c نیز داشته باشند و گاهی اندازه آن را ده‌ها برابر افزایش می‌دهند. چنین تأثیرهایی در کاربردهای میدانهای مغناطیسی قوی، حائز اهمیت فوق‌العاده است.

در اوایل تاریخ ابررسانایی، کاربرد معادلات ماکسول در مورد رسانای کامل به این نتیجه منجر شد که تغییرات میدان مغناطیسی نسبت به زمان در داخل ابررسانا باید صفر باشد. بنا بر این، بسته به اینکه نمونه در حضور یا غیاب يك میدان مغناطیسی خارجی تا پایینتر از دمای گذارش سرد شود، شار مغناطیسی می‌بایست یا حبس شود و یا طرد. این ایده آن قدر پذیرفته شده بود که تنها مدت‌ها بعد در سال ۱۹۳۳ (۲۲ سال بعد از کشف ابررسانایی) مایسنر و اوکسلفلد^۱ برای اولین بار آن را به‌صورت تجربی آزمایش کردند. نتایج تجربیات آنها ثابت کرد که این فرضیه غلط است و در تمام حالات، صرف‌نظر از اینکه ضمن سرد شدن نمونه به میدان مغناطیسی داخل و یا از آن خارج شده باشد، میدان مغناطیسی درون ابررسانا صفر است. این اثر به طرد شار مغناطیسی، یا آن‌طور که متداولتر است اثر مایسنر معروف است. يك بیان دیگر، که اصولاً با بیان بالا معادل است، این است که بگوییم ابررسانا چنان رفتار می‌کند که گویی تراوایی مغناطیسی آن صفر است، یا آنکه پذیرفتاری دیامغناطیسی کامل دارد. این مطلب به‌سادگی نشان می‌دهد که شکل نمونه اثرهای مهمی خواهد داشت، و این اثرها تنها هنگامی ساده‌اند که نمونه به شکل يك استوانه طویل و محورش با میدان مغناطیسی اعمال شده موازی باشد. اهمیت اصلی اثر مایسنر این است که نشان

می‌دهد ابررسانا تنها دارای خاصیت رسانندگی بینهایت نیست، بلکه خواص الکترومغناطیسی پیچیده‌تری دارد. هر توجیه رضایتبخشی از ابررسانایی باید به طریق طبیعی این اثر را توضیح دهد.

کارهای زیادی از لحاظ نظری تا کنون انجام شده است. شروع این مطالعات نظری با کاربرد ترمودینامیک در مورد گذار توسط کی‌سام^۱ در سال ۱۹۲۴ بوده است. سپس در سال ۱۹۳۴ گورتر و کاسیمیر^۲ گذار مرتبه دوم و خواص دیگر را بر اساس مدل دوشاره‌ای از لحاظ پدیده شناختی توجیه کردند. این موضوع در سال ۱۹۳۵ به کمک نظریه پدیده شناختی لندن و لندن^۳ در مورد خواص الکترو دینامیکی ابررساناها دنبال شد. در این نظریه دو معادله دیگر به معادلات ماکسول اضافه شد تا جوابگوی اثر مایسنر باشد. در این فصل ماعدماً با معادلات لندن کار خواهیم داشت. از سال ۱۹۳۵، تا ۱۹۵۰ که اثر ایزوتوپ کشف شد^۴، کارهای نظری عمده‌ای صورت نگرفت. ولی، در سال ۱۹۵۰، فرولیش^۵ بر اساس برهم کنش میان الکترون‌ها و اتم‌های مرتعش در شبکه بلور، نظریه‌ای را توسعه داد که اثر ایزوتوپ را توجیه می‌کرد، اما در پیش‌بینی دیگر خواص حالت ابررسانایی با شکست روبه‌رو می‌شد. بعدها (در ۱۹۵۷)، باردین، کوپر، و شریفی^۶ یک نظریه میکروسکوپی یا کوآنتوم مکانیکی برای ابررسانایی مطرح کردند که کاملاً موفق بوده است. این نظریه (نظریه BCS) به نحوی کاملاً طبیعی گذار فاز مرتبه دوم، اثر مایسنر، و دیگر خواص ترمودینامیکی و الکترومغناطیسی ابررساناها را توضیح می‌دهد. جایزه نوبل فیزیک در سال ۱۹۷۲ به خاطر این کار تحقیقاتی به باردین، کوپر، و شریفی اعطا شد. بر اساس نظریه BCS، ابررسانایی به صورت گذار فازی جلوه می‌کند که ناشی از زوج شدن الکترون‌هاست. این زوج شدن از برهم کنش الکترون‌ها با ارتعاشهای شبکه‌ای ماده حاصل می‌شود. ازجمله‌ای، ابررسانایی مشابه چگالش بوز-اینشتین زوج الکترون‌های مقید است، هر دو اثر (ابررسانایی و چگالش بوز-اینشتین) در اساس اثرهایی کوآنتوم مکانیکی‌اند و تعبیر ساده کلاسیکی ندارند. ظاهراً نظریه BCS می‌تواند تمامی نتایج پدیده شناختی مربوط به ابررسانایی را، لااقل به طور کیفی، پیشگویی کند.

برای کاربردهای فنی ابررسانایی، ماده‌ای مورد نیاز است که در میدانهای مغناطیسی

1. W. H. Keesom

2. C. J. Gorter, H. B. G. Casimir

3. F. London, H. London

۴. آزمایشهایی که روی عناصر ابررسانا با ترکیب ایزوتوپی متغیر انجام شده است نشان می‌دهند که $T_c M^{1/2} \approx \text{const.}$ ، که در آن M جرم ایزوتوپی است. اولین کارهای تجربی را ای. ماکسول و سی. ا. رینولدز و همکارانش انجام دادند. اکنون این اثر به اثر ایزوتوپ معروف است و نشان دهنده این است که برهم کنشهای میان الکترون‌های ابررسانایی و مغز یونی در یک شبکه بلوری نقش مهمی در ابررسانایی بازی می‌کنند.

5. H. Fröhlich

6. J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer

قوی ابررسانا باقی بماند، و برای این منظور باید از ابررسانای نوع II استفاده شود. این نوع ابررسانایی، شکل پیچیده‌تری از ابررسانایی است که در آن، فراتر از مقدار به‌خصوصی از میدان مغناطیسی که H_{c1} نامیده می‌شود، شار مغناطیسی شروع به نفوذ به درون ماده می‌کند، هر چند که ماده تا هنگامی که میدان مغناطیسی به مقدار بسیار بالاتری (میدان بحرانی بالایی H_{c2}) نرسیده باشد، ابررسانا باقی می‌ماند. ماده نوع II بین H_{c1} و H_{c2} ، اثر مایسنر کاملی از خود بروز نمی‌دهد و همچنین از لحاظ کمی از معادلات لندن پیروی نمی‌کند؛ با وجود این، ابررسانایی نوع II نیز با نظریه BCS توضیح داده می‌شود. در بعضی از مواد H_{c2} بسیار بالاست؛ برای مثال، در Nb_3Sn در دمای 4.2K مقدار H_{c2} 10 مگاگس برابر است با 10 تسلا . در این فصل ما فقط با ابررسانایی نوع ساده‌تر (به نام نوع I) کار خواهیم داشت.

موضوع ابررسانایی آن قدر توسعه یافته که به یکی از شاخه‌های غنی تحقیقی تبدیل شده است، با وجود این، دو نظریه پدیده‌شناختی مکمل (نظریه دوشاره‌ای کاسیمیر-گورتر و نظریه لندن) همراه با هم برای مطالعه بسیاری از مسائل شامل ابررساناها کافی هستند. نظریه کاسیمیر-گورتر اصولاً درباره مسائل ترمودینامیکی بحث می‌کند و در نتیجه در اینجا فقط به طور جنبی مورد نظر ماست. ولی نظریه لندن، که عمده‌تاً افزایش تعداد معادلات ماکسول است، به این منظور پرداخته شده است که یک نظریه الکترومغناطیسی مناسب برای توضیح وضعیتهایی باشد که شامل ابررساناهاست. ما بقی این فصل به توسعه نظریه لندن و کاربردش در مورد تعداد کمی از وضعیتهای ساده مربوط می‌شود. در این فصل بیشتر سعی ما فراهم آوردن مبنایی است برای بررسی مسائل ماکروسکوپی الکترومغناطیس شامل ابررسانا و نه تجسس در نظریه‌های میکروسکوپی کنونی در مورد ابررسانایی.

۲.۱۵ رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل ابررساناها

در بخش قبل متذکر شدیم که ابررساناها دو خاصیت منحصر به فرد از خود بروز می‌دهند. رسانندگی آنها، همان طور که آزمایشهای اصلی اونس و آزمایشهای بعدی نشان دادند، اساساً بینهایت است؛ همچنین آنها شار مغناطیسی را همان طور که آزمایش مایسنر-اوکسفلد نشان می‌دهد، به طور کامل طرد می‌کنند (به شرطی که میدان مغناطیسی در روی سطح ابررسانا در هیچ جا از میدان بحرانی بیشتر نباشد). این خواص از این لحاظ که هیچ یک از دیگری نتیجه نمی‌شود مستقل از یکدیگرند، ولی البته هر دو باید از نظریه‌های رضایتبخش ابررسانایی نتیجه شوند، که می‌شوند. برای اینکه به طور روشنتر ببینیم که مستقل بودن آن دو خاصیت از یکدیگر چه معنایی دارد، می‌توانیم بررسی یک رسانای کامل در میدان مغناطیسی را که اکنون دیگر به صورت کلاسیک درآمده است، ذکر کنیم.

کره‌ای را در نظر بگیرید که رسانندگی آن را بتوان به نحوی از یک مقدار معین به بینهایت تغییر داد. مثلاً، ما می‌توانیم رسانندگی یک ابررسانا را با تغییر دماش تغییر دهیم. هنگامی که رسانندگی بینهایت است، میدان الکتریکی در تمام نقاط داخل ابررسانا صفر

است و در نتیجه تاو آن و $\partial \mathbf{B} / \partial t$ نیز صفرند. بنابراین اگر کره در يك میدان یکنواخت $\mathbf{B}_0$ سرد شود (یعنی رسانندگی کامل به دست آورد)، چگالی شار در داخل کره تا زمانی که رسانندگی کامل از بین نرود، $\mathbf{B}_0$ باقی می ماند. از طرف دیگر، اگر کره در میدان صفر سرد شود، چگالی شار تا زمانی که رسانندگی کامل از بین نرود، حتی اگر مثلاً کره را در يك میدان خارجی در آغاز یکنواخت قرار دهیم، صفر باقی می ماند. بنابراین رسانندگی کامل طرد شار را ایجاب نمی کند، و در نتیجه $\mathbf{B} = 0$ فرضی است که باید به طور جداگانه به صورت يك اصل موضوع معرفی شود. به طریق مشابه $\mathbf{B} = 0$ دلیل بر رسانندگی کامل نیست، زیرا در ماده ای با پذیرفتاری $\chi_m = -1$ همواره $\mathbf{B} = 0$ است، و این امر امکان رسانندگی ماده را محدود نمی کند.

در این فصل در درجه اول جنبه های مغناطیسی ابررسانایی مورد نظر ماست (رسانندگی بینهایت بیشتر بررسی خواهد شد ولی نقش مهمی در مسائلی که در اینجا بررسی می شوند، نخواهد داشت)، و فرمول بندی مناسب برای آن به دست خواهد آمد. نخستین روش، که با آنچه تا کنون انجام شده است (به فصل ۹ مراجعه کنید) فرق چندانی ندارد، این است که بگوییم در داخل ابررسانا $\mathbf{B} = \mu_0 [\mathbf{H} + \mathbf{M}] = 0$ و در مرزهای بین ابررساناها و محیطهای دیگر، مؤلفه مماسی $\mathbf{H}$ و مؤلفه عمودی $\mathbf{B}$ پیوسته هستند. در این روش، ما به ابررسانا به مثابه ماده ای مغناطیسی با پذیرفتاری $\chi_m = -1$ ، یعنی، محیطی که خاصیت دیامغناطیسی کامل دارد می نگریم. در سطح ابررسانا، جریانهای هفاطش با چگالی سطحی $[\mathbf{M}_{\text{داخل}} - \mathbf{M}_{\text{خارج}}] = \mathbf{n} \times \mathbf{J}_M$ (آمپر بر متر) جریان می یابند، که در آن $\mathbf{n}$ برداریکه عمود بر سطح به طرف خارج است (توجه کنید که خارج $\mathbf{M}$ معمولاً صفر است)؛ در داخل ابررسانا، جریانهای هفاطش حجمی با چگالی $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ جریان می یابند (به فصل ۹، مخصوصاً بخش ۱۰.۹ مراجعه کنید).

در توصیفی مشابه، فرض می کنیم در داخل ابررسانا $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$ و يك جریان سطحی حقیقی خارج $\mathbf{j}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$ (چون فرض می شود که داخل $\mathbf{H}$ صفر است) جریان دارد. در این توصیف، هیچ نوع جریانی در داخل ابررسانا وجود ندارد. این دو توصیف از ابررسانا آن قدر از یکدیگر متفاوت به نظر می آیند که بی مورد نیست پرسیم چگونه به یکدیگر مربوط می شوند. بیان معمول در این مورد آن است که بگوییم این دو توصیف هنگامی که به طور مناسبی تعبیر شوند، با یکدیگر معادل اند. با وجود این، مناسب به نظر می رسد که مسئله را با تفصیل بیشتری بررسی کنیم. نخست توجه می کنیم که بین جریانهای حقیقی انتقالی و جریانهای مغناطشی دو اختلاف وجود دارد. نخستین اختلاف این است که جریانهای انتقالی چشمه هایی برای $\mathbf{H}$ هستند در صورتی که جریانهای انتقالی و مغناطشی هردو چشمه هایی برای $\mathbf{B}$ هستند. چون $\mathbf{B}$ کمیت میدان مغناطیسی قابل دسترسی است ولی $\mathbf{H}$ اصولاً به این خاطر تعریف شد که يك میدان مغناطیسی داشته باشیم که توسط جریانهای انتقالی مشخص شود، این نخستین تمایز بین دو نوع جریان به وضوح مناسب ولی تا حدودی ساختگی است. دومین اختلاف این است که جریانهای انتقالی در مواد معمولی اتلافی هستند (به عبارت

دیگر، باعث گرمایش ژولی می شوند)، در صورتی که جریانهای مغناطیسی چنین نیستند. ولی برای ابررساناها، حتی این اختلاف نیز از بین می رود. به علاوه، چون می توان نشان داد که مغناطش ابررسانا ناشی از اسپینهای نیست (و در نتیجه مربوط به حرکتهای مداری حاملهای بار می شود)، به نظر می رسد که دو توصیف معادل باشند. يك بیان فشرده دیگر این است که بگوییم چون تنها $\mathbf{B}$ قابل اندازه گیری است، $\mathbf{M}$ و $\mathbf{H}$ را بر طبق قواعد نسبتاً دلخواهی انتخاب کنیم، به شرطی که مقادیر $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}_M$ را بر طبق این انتخاب مشخص کنیم و بدانیم که در يك ابررسانا نمی توان آنها را از یکدیگر تمیز داد.

برای بیشتر کاری که در زیر انجام خواهیم داد، توصیف $\mathbf{H}, \mathbf{M} \neq 0$ مناسب است. این بدان دلیل است که این روش تعمیم طبیعی آن چیزی است که قبلاً در مورد مواد معمولی انجام شده است و نیز به این دلیل که این فرمولبندی به مسائل با مقادیر مرزی معمولیتر منجر می شود. ولی در بخش بعد، دو مسئله را بررسی خواهیم کرد و هر يك از آن دو را در هر دو فرمولبندی قرار خواهیم داد تا معادل بودن آنها روشن شود.

۳.۱۵ مثالهایی شامل طرد کامل شار

برای درك بیشتر ایده هایی که در بخش قبل بیان شد، دو مثال مقدماتی را مطالعه خواهیم کرد: يك کره ابررسانا در يك میدان مغناطیسی که به طور مجانبی یکنواخت است و يك استوانه ابررسانای بی نهایت طویل حامل جریان. هر دو فرمولبندی بخش ۲.۱۵ را به کار خواهیم برد تا صریحاً نشان دهیم که در این حالات با یکدیگر معادل اند.

ابتدا کره ابررسانایی به شعاع a را در نظر بگیرید که در میدان خارجی یکنواخت $\mathbf{B}_0 \mathbf{k}$ قرار گرفته است. در فرمولبندی اول، که در آن ابررسانا به مثابه يك ماده مغناطیسی در نظر گرفته می شود، مسئله با مقادیر مرزی به شکل زیر درمی آید

$$\text{در خارج: } \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_0 \mathbf{k} \quad \text{هنگامی که } r \rightarrow \infty$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1-15)$$

$$\text{در داخل: } \mathbf{B} = 0, \mathbf{H} = -\mathbf{M}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (2-15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$$

$$B_r \text{ پیوسته} : r = a \text{ در}$$

$$H_\theta \text{ پیوسته} \quad (۳.۱۵)$$

تنها معادله غیر عادی $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ است که بر این اساس مبتنی است که در داخل کره ابررسانا هیچگونه قطب مغناطیسی وجود ندارد. با این معادلات می توان دو پتانسیل نرده ای مغناطیسی، φ^* در خارج و φ^* در داخل را معرفی کرد. هر دو در معادله لاپلاس صدق می کنند و از آنها می توان با گرفتن منفی شیب، میدان $\mathbf{H}$ را به دست آورد. با استفاده از مختصات کروی و با به حساب آوردن اولین معادله (۱.۱۵) به طور صریح، خواهیم داشت

$$\varphi^* = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} c_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \quad (۴.۱۵)$$

از این معادله داریم

$$B_r = B_0 \cos \theta + \mu_0 \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) c_l r^{-(l+2)} P_l(\cos \theta) \quad (\text{در خارج}) \quad (۵.۱۵)$$

چون $\mathbf{B}$ در داخل صفر است و B_r در عبور از $r = a$ پیوسته است، هر يك از c_l ها به استثنای c_1 باید صفر باشند و $c_1 = -B_0 a^3 / 2\mu_0$ ، بدین ترتیب مسئله به ازای $r > a$ بدون توسل به شرط مرزی روی مؤلفه مماسی $\mathbf{H}$ ، به طور کامل حل می شود؛ تنها چیزی که وارد شده است، $\mathbf{B} = 0$ در داخل و پیوستگی مؤلفه عمودی $\mathbf{B}$ در $r = a$ است. در داخل کره، پتانسیل φ^* باید در $r = 0$ منظم باشد، و برای آنکه با شرایط مرزی سازگار باشد، تنها می تواند شامل $P_1(\cos \theta)$ باشد. بنابراین، $\varphi^* = d_\varphi r \cos \theta$ و d_φ عدد ثابتی است که باید تعیین شود. با مشتق گیری، $H_r = -d_\varphi \cos \theta$ و $H_\theta = d_\varphi \sin \theta$. چون در خارج $H_\theta = -3/2(B_0/\mu_0) \sin \theta$ نتیجه می شود که $d_\varphi = -3B_0/2\mu_0$. هیچگونه جریان سطحی حقیقی وجود ندارد، ولی به علت ناپیوستگی $\mathbf{M}$ ، يك جریان مغناطش سطحی برابر با $\mathbf{j}_M = -3/2(B_0/\mu_0) \sin \theta \mathbf{a}_\phi$ وجود دارد. این نتایج را می توان به صورت زیر خلاصه کرد

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = B_0 \mathbf{k} - B_0 \frac{a^3}{r^3} \cos \theta \mathbf{a}_r - \frac{1}{2} B_0 \frac{a^3}{r^3} \sin \theta \mathbf{a}_\theta \quad \text{در خارج:}$$

$$B = 0; \quad \mathbf{H} = \frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \mathbf{k}; \quad \mathbf{M} = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \mathbf{k} \quad \text{در داخل:} \quad (۶.۱۵)$$

$$\mathbf{j}_M = -\frac{3}{2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin \theta \mathbf{a}_\phi \quad \text{در } r = a$$

فرمولبندی دوم برای ناحیه خارجی به همین صورت است ولی برای ناحیه داخلی به شکل $\mathbf{B}=\mathbf{H}=\mathbf{M}=\mathbf{0}$ در می آید. در سطح نیز یک جریان حقیقی به صورت زیر خلاصه کرد

$$\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}=\mathbf{B}_0\mathbf{k}-\mathbf{B}_0\frac{a^3}{r^3}\cos\theta\mathbf{a}_r-\frac{1}{2}\mathbf{B}_0\frac{a^3}{r^3}\sin\theta\mathbf{a}_\theta \quad \text{در خارج:}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}=\mathbf{M}=\mathbf{0} \quad \text{در داخل:} \quad (7.15)$$

$$\mathbf{j}_s=-\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\sin\theta\mathbf{a}_\varphi \quad \text{در } r=a$$

اکنون شاید ارتباط بین دو توصیف روشن شده باشد. در خارج، هر دو یکسان اند، همانطور که باید باشند، و گرنه می توانستیم آزمایش ساده ای طرح کنیم تا توسط آن توصیف صحیح انتخاب شود. در داخل، هر دو توصیف نتیجه $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ را می دهند، ولی $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ در یک توصیف، مقداری متناهی دارند و در توصیف دیگر هر دو صفرند. اما از نظر تجربی $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ هیچکدام قابل مشاهده نیستند، و در نتیجه این اختلاف حائز اهمیت نیست. در هر دو مورد جریانهای سطحی یکسانی وجود دارند؛ ولی در یک مورد جریان به عنوان جریان انتقالی در نظر گرفته می شود، در صورتی که در حالت دیگر آن را جریان مغناطش می نامیم. نام گذاری جریان تنها از این لحاظ که باید در داخل ابررسانا این نام گذاری با $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ سازگار باشد، حائز اهمیت است. مثلاً، هنگامی که ما گشتاور مغناطیسی کره ابررسانایی را محاسبه می کنیم، یا باید از $\mathbf{j}_M$ استفاده کنیم یا از $\mathbf{M}$ ، ولی نه از هر دو؛ در صورتی که یک $\mathbf{j}_s$ حقیقی همیشه در ایجاد گشتاور مغناطیسی وارد می شود.

دومین مثالی که باز هم تمیز ناپذیری جریانهای انتقالی ابررسانایی و جریانهای مغناطش را نشان می دهد، مثال یک استوانه بی نهایت طویل ابررسانای حامل جریان است. ولی قبل از اینکه این مسئله را به تفصیل مطالعه کنیم، باید توجه کنیم که همواره مجموع $\mathbf{J}$ و $\mathbf{J}_M$ در داخل یک ابررسانای کامل، صفر است. این مطلب از $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ نتیجه می شود، که آن هم نتیجه می دهد: $\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{0}$ ، و این، به نوبه خود، نتیجه می دهد

$$\nabla\times\mathbf{H}+\nabla\times\mathbf{M}=\mathbf{J}+\mathbf{J}_M=\mathbf{0}$$

این بحث را در مورد یک سطح ناپذیر نمی توان به کاربرد، و ممکن است در آنجا یک جریان سطحی کل معین $\mathbf{j}_s+\mathbf{j}_M$ جاری باشد. لیکن، این بحث به وضوح نشان می دهد که جریان کل همواره یک جریان سطحی است.

اکنون با در نظر گرفتن سیمی به شعاع a و حامل جریان I (در جهت مثبت z)، از قانون آمپر ملاحظه می کنیم که در خارج از سیم (در مختصات استوانه ای)

ما باید در مورد چگالی جریان در سیم فرضیه‌ای بکنیم. از طرف دیگر چون مؤلفه مماسی H در سطح پیوسته است، این فرض نباید شامل جریانهای سطحی شود. ساده‌ترین امکان چگالی بکنواخت است: $\mathbf{J} = (I_0/\pi a^2)\mathbf{k}$. در این صورت در داخل داریم

$$\mathbf{M} = -\frac{I_0}{2\pi} \frac{r}{a^2} \mathbf{a}_\theta \quad \text{و} \quad \mathbf{H} = \frac{I_0}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\theta$$

جدول ۱۰۱۵ سیم ابررسانای حامل جریان

فرمولبندی ۲ (طرد شار به وسیله جریانهای انتقالی سطحی)	فرمولبندی ۱ (ابررسانا به عنوان يك ماده مغناطیسی با $\chi_m = -1$)

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H} \neq 0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \mathbf{a}_\theta \quad \text{در خارج:}$$

$$\mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = 0$$

در داخل:

$$\mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{H} = \frac{I_0 r}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{M} = 0$$

$$\mathbf{M} = -\frac{I_0 r}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{J} = \frac{I_0}{\pi a^2} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{J}_M = 0$$

$$\mathbf{J}_M = -\frac{I_0}{\pi a^2} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}_M = 0$$

$$\mathbf{j}_M = (I_0/2\pi a)\mathbf{k} \quad \text{در } r = a$$

$$\mathbf{j}_S = (I_0/2\pi a)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}_S = 0$$

@Quark_Boo H--M

چگالی جریان مغناطش عبارت است از $\mathbf{J}_M = -(I_0/\pi a^2)\mathbf{k}$ ، و در سطح يك چگالی جریان مغناطش سطحی وجود دارد

$$\mathbf{j}_M = +\mathbf{a} \times \left(\frac{I_0}{2\pi a} \mathbf{a}_\theta \right) = \frac{I_0}{2\pi a} \mathbf{k}$$

که درست برای حمل جریان کل I_0 کافی است. در توصیف دیگر فرض می شود که در داخل $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{M} = 0$ ، و بنا بر این لازم است که جریان کلا روی سطح، با چگالی جریان سطحی حقیقی $\mathbf{j}_s = (I_0/2\pi a)\mathbf{k}$ ، جاری باشد. این دو توصیف که در جدول ۱۰.۱۵ آمده اند یکدیگر معادل اند، مگر اینکه بتوانیم روشی برای جدا کردن جریانهای انتقالی از جریانهای مغناطشی در ابررساناها، یا طریقی برای اندازه گیری مستقیم $\mathbf{H}$ یا $\mathbf{M}$ در داخل ابررسانا پیدا کنیم.

در دو مسئله ای که هم اکنون بررسی شد، فرمولبندی $\mathbf{M} = \mathbf{H} = 0$ از لحاظ سادگی مزیت آشکاری دارد. ولی، برای مسائل پیچیده تر، به ویژه آنهایی که شامل ضرایب بزرگ و مغناطش اند، فرمولبندی مغناطش توزیع شده، سودمند است. هر يك از این دو روش را می توان به کاربرد، نتایج آنها معادل خواهد بود، ولی نباید آنها را در يك مسئله منفرد مخلوط کرد.

۴.۱۵ معادلات لندن

در بخش قبل، پردازش بر اساس توصیف بسیار ایده آلی از ابررسانا، بررسی شد. این توصیف بسیاری از چهره های قابل مشاهده ابررسانایی را باز تولید می کند، ولی نمی تواند توجیه مناسبی برای بعضی جزئیات که به سادگی قابل مشاهده هستند ارائه کند. با شروع از مفهوم رسانندگی کامل و انجام يك اصلاح مناسب برای منظور کردن اثر مایسنر، می توانیم نظریه بهتری را مطرح کنیم.

در يك رسانای کامل (نه يك ابررسانا) حاملهای بار تحت تأثیر هیچ گونه نیروی کند کننده ای نیستند؛ در نتیجه در میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ ، بر طبق رابطه زیر حرکت می کنند

$$m_p \dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} \quad (۸.۱۵)$$

که در آن m_p جرم حامل بار و $\dot{\mathbf{v}}$ شتاب آن است. ولی اگر $\mathbf{v}$ میانگین سرعت حاملهای بار باشد و n حامل بار در واحد حجم وجود داشته باشد، چگالی جریان $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$ است. بنابراین شکل دیگری برای معادله (۸.۱۵) عبارت است از

$$\dot{\mathbf{J}} = (nq^2/m_p)\mathbf{E} \quad (۹.۱۵)$$

که در آن $\dot{\mathbf{J}} = d\mathbf{J}/dt$ با محاسبهٔ تاور این معادله و با استفاده از $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ خواهیم داشت

$$\nabla \times \dot{\mathbf{J}} = -(nq^\gamma/m_p)\dot{\mathbf{B}} \quad (10.15)$$

بافرض اینکه میدانها آهسته تغییر می کنند و با به کار بردن $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ برای حذف $\dot{\mathbf{J}}$ خواهیم داشت

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = -(nq^\gamma/m_p)\dot{\mathbf{B}} \quad (11.15)$$

بافرض $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ و با استفاده از تعریف لاپلاسی بردار (و با $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) نتیجه خواهد شد

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{B}} = (\mu_0 nq^\gamma/m_p)\dot{\mathbf{B}} \quad (12.15)$$

اهمیت این معادله وقتی کاملاً معلوم می شود که يك رسانای کامل نیمه نامتناهی که با صفحه $z=0$ محدود شده است و در جهت مثبت z امتداد دارد را در نظر بگیریم. فرض کنید که درست روی سطح $z=0$ ، $\dot{B}_x = \dot{B}_y = \dot{B}_z = 0$ و $\dot{B}_x$ به x و y بستگی ندارد. در این صورت معادله ای که B_x را تعیین می کند، عبارت است از

$$\frac{d^2 \dot{B}_x}{dz^2} = \frac{\mu_0 nq^\gamma}{m_p} \dot{B}_x \quad (13.15)$$

جواب عمومی این معادله به صورت زیر است

$$\dot{B}_x = Ae^{-\sqrt{\mu_0 nq^\gamma/m_p} z} + Be^{\sqrt{\mu_0 nq^\gamma/m_p} z}$$

جواب به طور نمایی افزایش یا بنده را به این علت که تعبیر فیزیکی ندارد، کنار می گذاریم و A را طوری انتخاب می کنیم که در $z=0$ مقدار صحیح $\dot{B}_x$ را بدهد؛ در این صورت

$$\dot{B}_x = \dot{B}_{x0} e^{-\sqrt{\mu_0 nq^\gamma/m_p} z} \quad (14.15)$$

به سادگی می توان تحقیق کرد که $\sqrt{m_p/\mu_0 nq^\gamma}$ دارای بعد طول است، و برای q و m_p مربوط به الکترون و n مربوط به يك الکترون در اتم، این طول در حدود 10^{-8} متر است. بنابراین معادله (12.15) نشان می دهد که در داخل يك رسانای کامل، مشتق زمانی $\mathbf{B}$ با فاصله از سطح به طور نمایی به سمت صفر میل می کند. بدین ترتیب، در داخل يك رسانای

۱. این فرض ایجاب می کند که از جریان جا به جایی، $\partial \mathbf{D}/\partial t$ ، که در بخشهای ۱.۱۶ و ۲.۱۶ بحث می شود، چشمپوشی کنیم.

کامل، به جز در یک لایه سطحی نازک، $\mathbf{B}$ خیلی کوچک است. این یک اصلاح قابل قبول برای نتیجه به دست آمده قبلی است که در داخل یک رسانای کامل در همه جا $\mathbf{B} = 0$ است. تحلیلی که هم اکنون مطرح شد، دوباره نشان می دهد که رسانندگی کامل به طرشار منجر نمی شود. با وجود این، این تحلیل همچنین نشان می دهد که چگونه طرشار را می توان در یک نظریه وارد کرد. اگر معادله (۱۲.۱۵) رفتار $\mathbf{B}$ را به جای $\mathbf{B}$ توصیف می کرد، در این صورت خود $\mathbf{B}$ به طور نمایی از مقدارش در روی سطح به صفر در داخل ابر رسانا کاهش می یافت. همین موضوع انگیزه طرح نظریه ای برای رفتار الکترومغناطیسی ابر رساناها توسط لندن و لندن بود.^۱

در این نظریه فرض می شود که جریان کل می تواند به یک ابر جریان $\mathbf{J}_s$ ، یک جریان اتلافی $\mathbf{J}_{diss}$ و یک جریان جا به جایی $\mathbf{J}_{disp}$ تجزیه شود

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{diss} + \mathbf{J}_{disp} \quad (15.15)$$

جریانهای اتلافی و جا به جایی از معادلات $\mathbf{J}_{diss} = g\mathbf{E}$ و $\mathbf{J}_{disp} = \partial\mathbf{D}/\partial t$ پیروی می کنند. می ماند اینکه $\mathbf{J}_s$ را به میدان الکترومغناطیسی ارتباط دهیم. این کار با شروع از معادله (۱۵.۱۵)، معادلات ماکسول، و معادله ساختمندی لندن [که شکل آن شبیه به معادله (۱۰.۱۵) است ولی به جای مشتقات $\mathbf{B}$ و $\mathbf{J}$ شامل خود آنهاست]، انجام پذیر است. اگر این روش به دقت دنبال شود، می توان نشان داد که برای فرکانسهای کمتر از حدود 10^{11} سیکل بر ثانیه، هم $\mathbf{J}_{diss}$ و هم $\mathbf{J}_{disp}$ در مقایسه با $\mathbf{J}_s$ قابل چشم پوشی اند. می خواهیم بدون اینکه وارد جزئیات بحث شویم، این نتیجه را مسلم فرض کنیم، یعنی، $\mathbf{J}_{diss} \approx 0$ و $\mathbf{J}_{disp} \approx 0$ ؛ چنین فرضی حداقل برای مسائل جریان پایا از نوعی که در این فصل مطالعه شد، قابل قبول است. جریان باقی مانده $\mathbf{J}_s$ هم شامل جریانهای انتقالی است و هم شامل جریانهای مغناطیسی و در نتیجه، از معادله ماکسول (۵۱.۸)، داریم

$$\mathbf{J}_s = (1/\mu_0)\nabla \times \mathbf{B} \quad (16.15)$$

برای به دست آوردن معادله ای که شامل متغیرهای میدان به جای مشتقات آنها باشد، لندن رابطه زیر را به عنوان یک اصل موضوع در نظر گرفت

$$\mu_0 \nabla \times \mathbf{J}_s = -(1/\lambda^2)\mathbf{B} \quad (17.15)$$

اختلاف این معادله با معادله (۱۰.۱۵) در این است که این معادله $\mathbf{J}_s$ و $\mathbf{B}$ را به جای $\mathbf{J}$ و $\mathbf{B}$ در بر می گیرد. بنابراین، این معادله به معادله ای منجر می شود که شبیه به معادله (۱۲.۱۵) است منتها به جای مشتقات میدانها در مورد خود میدانها به کار می رود. همچنین، یک عمق

نفوذ پدیده شناختی (λ) به عنوان يك پارامتر مخصوص معرفی شده است که مشخصه ماده ابررساناست (μ_0 به این دلیل ظاهری می شود که λ بعد طول داشته باشد). معادله (۱۷.۱۵) به اثر مایسنر منجر خواهد شد ولی برای منظور کردن رسانندگی، بینهایت، باید به طور جداگانه فرض کنیم که

$$\mu_0 \mathbf{J}_s = (1/\lambda^2) \mathbf{E} \quad (18.15)$$

البته معادله اخیر نقش دیگری در مسائل مورد مطالعه در اینجا بازی نمی کند. می توان از ترکیب معادلات (۱۶.۱۵) و (۱۷.۱۵) نتیجه زیر را به دست آورد

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -(1/\lambda^2) \mathbf{B} \quad (19.15)$$

چون $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ، معادله بالا را می توان به صورت زیر نوشت

$$\nabla^2 \mathbf{B} = (1/\lambda^2) \mathbf{B} \quad (20.15)$$

معادله (۲۰.۱۵) را می توان در مورد يك بره نیمه نامتناهی، درست مثل معادله (۱۳.۱۵)، حل کرد. جواب آن، یعنی رابطه زیر

$$B_x(z) = B_{x0} e^{-z/\lambda} \quad (21.15)$$

نشان می دهد که هنگام نفوذ دبره، $\mathbf{B}$ به جای $\mathbf{B}$ به طور نمایی کاهش می یابد. این تعمیم مطلوبی برای $\mathbf{B} = 0$ در داخل ابررساناست.

عمق نفوذ λ در اینجا به عنوان يك پارامتر پدیده شناختی معرفی شده است؛ ولی نظریه های متعددی ساخته شده است که در آنها سعی می شود اندازه λ را تخمین بزنند. ما بیشتر به تعیین λ از طریق آزمایش علاقه مندیم. يك روش واضح آن خواهد بود که يك سیملوله با يك مغزی ابررسانا ساخته شود. ضریب القای چنین سیملوله ای اگر ابررسانای آن کامل باشد و کاملاً تمام حجم احاطه شده توسط سیملوله را پر کند، خیلی کوچک خواهد بود. از طرف دیگر، اگر عمق نفوذ غیر صفر بود، در آن صورت ضریب القای آن حدودی بزرگتر می شد. اگر عمق نفوذ کسر قابل ملاحظه ای از شعاع سیملوله باشد، عمق نفوذ را می توان از اندازه گیریهای ضریب القا استنتاج کرد. امکان انجام دادن چنین کاری بستگی دارد به نسبت حجمی که میدان در آن نفوذ می کند، به حجم کل نمونه. واقعیت آن است که λ حدود چند میلیونیم سانتیمتر است، و در نتیجه آزمایش ساده ای که در بالا مطرح شد نتایج قابل ملاحظه ای به بار نخواهد آورد. لیکن می توان با استفاده از نمونه ای که نسبت سطح به حجم آن بزرگ باشد، برای اشکال فایق آمد. اولین آزمایشهای موفقیت آمیز از این نوع، توسط شوئنبرگ^۱

در سال ۱۹۳۹ بایک کلوئید جیوه انجام شد. این آزمایشها به طور قاطع نشان دادند که میدان مغناطیسی به داخل کره های کوچک ابررسانای جیوه ای نفوذ می کند و عمق نفوذ به دما بستگی دارد. آزمایشهای اصلی شوئبرگ، که تاکنون توسعه و تکامل بیشتری یافته اند، نشان داد که مفهوم عمق نفوذ معتبر و مهم است.

معادلات (۱۵.۱۵)، (۱۷.۱۵)، و (۱۸.۱۵)، همراه با چهار معادله ماکسول را اغلب به طور جمعی معادلات ماکسول - لندن می نامند و برای بحث در مسائل الکترومغناطیس شامل ابررساناها بسیار سودمندند.

همان طور که از بحث بالا آشکار است، مفهوم طرد کامل شار، یک ایده آل سازی است. به جای طرد کامل، شار مغناطیسی در لایه نازکی از سطح ابررسانا نفوذ می کند، و بر طبق نظریه لندن، به طرف داخل به طور نمایی کاهش می یابد. چگالی جریان سطحی، $\mathbf{j}_M$ (یا بر حسب موردی که داریم، $\mathbf{j}_S$) نیز یک ایده آل سازی است. در اینجا دوباره چگالی ابرجریان $\mathbf{j}$ در یک لایه سطحی نازک گسترش و به طرف داخل به طور نمایی کاهش می یابد. بدین ترتیب، در نظریه لندن $\mathbf{j}_M$ وجود ندارد و فقط یک چگالی کل ابرجریان $\mathbf{j}$ موجود است. در بخش بعد، دو مسئله ای را که قبلاً مطالعه کردیم، با به کار بردن معادلات ماکسول - لندن حل خواهیم کرد.

* ۵.۱۵ مثالهایی شامل معادلات لندن

برای درک بهتر معادلات ماکسول - لندن، اکنون آنها را برای به دست آوردن جوابهای کاملتر مسائلی که در بخش ۳.۱۵ بررسی شدند، به کار می بریم. اولین مسئله در مورد یک کره ابررسانا به شعاع a است که در یک میدان خارجی قرار گرفته است و میدان در فواصل دور یکسواخت و مساوی با $\mathbf{B}_0 \mathbf{k}$ است. معادلاتی که میدانها در آنها صدق می کنند عبارت اند از

$$\text{در خارج: } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$(22.15) \quad \text{در داخل: } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = (1/\lambda^2) \mathbf{B},$$

که در آن λ (عمق نفوذ) به عنوان یک پارامتر پدیده شناختی در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی که باید برآورده شوند عبارت اند از

$$\text{در } r = \infty: \quad \mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$$

$$(23.15) \quad \text{در } r = a: \quad B_r \text{ و } B_\theta \text{ پیوسته هستند}$$

از این شرایط مرزی تنها شرطی که به تفسیر بیشتر احتیاج دارد پیوستگی B_θ در $a = r$ است. این شرط از این فرض نتیجه می شود که ابرجریانها (هم انتقالی و هم مغناطیسی) هرگز بینهایت نیستند (این فرض بابحنی که در پایان بخش قبل مطرح شد سازگار است). به عبارت دیگر، هیچ گونه جریان سطحی $\mathbf{j}_M$ یا $\mathbf{j}_S$ وجود ندارد. در این مورد مؤلفه های مماسی $\mathbf{H}$ و $\mathbf{M}$ هر دو پیوسته اند، و بنابراین مؤلفه مماسی $\mathbf{B}$ نیز پیوسته است.

حل معادلات برای میدان در خارج از کره هیچ گونه دشواری تولید نمی کند. درست مثل بخش ۳.۱۵ می توان يك پتانسیل نرده ای مغناطیسی معرفی کرد که در معادله لاپلاس صدق کند و يك جواب عمومی به دست آورد. ولی برای ناحیه داخلی باید معادله $\nabla^2 \mathbf{B} = (1/\lambda^2) \mathbf{B}$ را حل کرد. اگر در مختصات کروی لاپلاسی يك بردار را می توانستیم تنها با گرفتن لاپلاسی هر يك از مؤلفه های آن به دست آوریم، در آن صورت جوابهای این معادله نیز به آسانی پیدا می شدند. ولی این مطلب صادق نیست، و در عوض باید تاو تاو بردار محاسبه شود. نتیجتاً، حتی در این مسئله ساده مؤلفه های r و θ ی معادله $\nabla^2 \mathbf{B} = (1/\lambda^2) \mathbf{B}$ هم شامل B_r و هم شامل B_θ هستند. این پیچیدگی نسبتاً مشهور است و روشهای جامعی برای حل معادله برداری هلمهولتز توسعه یافته است.^۱ ولی، توسعه و کاربرد این روشها تا حدودی خارج از حوزه این کتاب است. در نتیجه از نتایج بخش ۳.۱۵ استفاده می کنیم تا شکل جواب را به صورت يك فرض آغازین حدس بزنیم. جواب نهایی که بدین ترتیب حاصل می شود قابل توجیه است زیرا در معادلات و شرایط مرزی صدق می کند و جواب این معادلات و شرایط مرزی یکتا است. البته یکتا بودن جواب را می توان اثبات کرد، ولی در اینجا دانسته فرض خواهد شد.

در بخش ۳.۱۵ دیدیم که تنها جمله $P_1(\cos \theta)$ در φ^* در جواب ناحیه خارج از کره باقی ماند. فرض می کنیم که این مطلب برای نظریه ماکسول - لندن نیز صادق است و فرض می کنیم که

$$\mathbf{B}(r, \theta) = B_0 \mathbf{k} - b \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left[\cos \theta \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \sin \theta \mathbf{a}_\theta \right] \quad (\text{در خارج}) \quad (24.15)$$

این معادله خیلی شبیه به اولین معادله از معادلات (۷.۱۵) است، تنها تفاوت میان آن دو در این است که به جای B_0 در آن قسمت از میدان که مربوط به مغناطش کره می شود، b آمده است. مقدار b از روی شرایط مرزی تعیین می شود. برای ناحیه داخل کره، بخش ۳.۱۵ راه حل چندانی به دست نمی دهد؛ با وجود این از شکل $\mathbf{M}$ که در آنجا یافت شد، و از این حقیقت که در معادله (۲۴.۱۵) B_r از طریق $\cos \theta$ به θ بستگی پیدا می کند در صورتی که B_θ از طریق $\sin \theta$ به θ بستگی دارد، يك فرض قابل قبول می تواند به صورت زیر

باشد

$$B_r = u(r) \cos \theta \quad (\text{در داخل}) \quad (۲۵.۱۵ \text{ الف})$$

$$B_\theta = v(r) \sin \theta \quad (\text{در داخل}) \quad (۲۵.۱۵ \text{ ب})$$

دو تابع $u(r)$ و $v(r)$ باید طوری تعیین شوند که $\nabla^2 \mathbf{B} = (1/\lambda^2) \mathbf{B}$ و نیز شرایط مرزی در $r = a$ برآورده شوند. این شرایط مرزی عبارت‌اند از

$$u(a) = B_0 - b \quad (۲۶.۱۵ \text{ الف})$$

$$v(a) = -B_0 - b/2 \quad (۲۶.۱۵ \text{ ب})$$

با بسط $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$ و با استفاده از شکل‌های فرض شده (۲۵.۱۵)، معادلات زیر را برای u و v به دست خواهیم آورد

$$r \frac{dv}{dr} + v + u = -\frac{r^2}{2\lambda^2} u \quad (۲۷.۱۵ \text{ الف})$$

و

$$r^2 \frac{d^2 v}{dr^2} + 2r \frac{dv}{dr} + r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2} v \quad (۲۷.۱۵ \text{ ب})$$

با مشتق‌گیری از معادله (۲۷.۱۵ الف) نسبت به r و تفریق نتیجه حاصل از معادله (۲۷.۱۵ ب) خواهیم داشت

$$v = -u - \frac{1}{2} r u' \quad (۲۸.۱۵)$$

با به کار بردن این نتیجه برای حذف v و dv/dr از معادله (۲۷.۱۵ الف)، معادله‌ای برای u به دست می‌آید

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 2r \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{\lambda^2} u \quad (۲۹.۱۵)$$

با معرفی ξ توسط رابطه $\xi = ru$ و تغییر متغیر مستقل به $\rho = r/i\lambda$ ، به معادله‌ای برای توابع k روی بسط از درجه اول می‌رسیم [معادله (۸۴.۱۷) با $L=1$]. با به کار بردن جواب $j_1(r/i\lambda)$ از جدول ۲.۱۷ (صفحه ۴۸۳)، معادله زیر به عنوان جوابی که در مبدأ متعارف است، به دست می‌آید

$$u(r) = c(\lambda/r)^2 [\sinh(r/\lambda) - (r/\lambda) \cosh(r/\lambda)] \quad (30.15)$$

از معادلات (28.15) و (29.15) درمی یابیم که

$$v = \frac{c}{2} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2} \right) \sinh\left(\frac{r}{\lambda}\right) - \left(\frac{r}{\lambda} \right) \cosh\left(\frac{r}{\lambda}\right) \right] \quad (31.15)$$

در اینجا حل رسمی مسئله کامل شده است، فقط می ماند استفاده از معادلات (26.15)، (30.15) و (31.15) برای تعیین b و c . نتیجه عبارت است از

$$c = -3B_0 \left(\frac{a}{\lambda} \right) / \sinh\left(\frac{a}{\lambda}\right) \quad (32.15)$$

$$b = B_0 \left[1 + 3 \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{\lambda}{a} \right) \coth\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right] \quad (33.15)$$

انتظار می رود که به ازای مقادیر کوچک λ/a میدانها با آنچه در بخش 3.15 برای کره ابررسانای کامل به دست آمد تفاوت زیادی نداشته باشند. می توان صحت این مطلب را با استفاده از این حقیقت که مقدار $\coth x$ برای مقادیر بزرگ x به صورت نمایی به یک میل می کند، تحقیق کرد. بنابراین

$$b \simeq B_0 \left(1 - 3 \frac{\lambda}{a} + 3 \frac{\lambda^2}{a^2} + \dots \right), \quad \frac{\lambda}{a} \ll 1 \quad (34.15)$$

که نشان می دهد اولین جمله تصحیح برای میدان خارج از کره از مرتبه λ/a است. دومین مثال برای حل معادلات لندن سیم طویل حامل جریان است. فرض می کنیم شعاع سیم a ، عمق نفوذ آن λ ، و جریان خارجی (حقیقی) کل آن I_0 است. در خارج از سیم، $\mathbf{H}$ با معادله آمپر داده می شود و $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. بنا براین

$$H_r = H_z = B_r = B_z = 0; \quad B_\theta = \mu_0 H_\theta = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi r} \quad (\text{در خارج}) \quad (35.15)$$

در داخل، $\mathbf{B}$ در معادله زیر صدق می کند

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} \quad (36.15)$$

از روی تقارن، $\mathbf{B}$ تنها یک مؤلفه θ دارد و این مؤلفه فقط به r بستگی دارد. در این صورت

معادله (۳۶.۱۵) به صورت زیر درمی آید

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} B_\theta + r \frac{d}{dr} B_\theta - \left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) B_\theta = 0 \quad (37.15)$$

این درست معادله بسل است به ازای شاخص يك و شناسه ir/λ . جوابی که در مبدأ بینهایت نیست عبارت است از

$$B_\theta = AJ_1(ir/\lambda) \quad (38.15)$$

ضریب A از مساوی قرار دادن B_θ در داخل با B_θ در خارج، در $r=a$ ، تعیین می شود. نتیجه عبارت است از

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a} \frac{J_1(ir/\lambda)}{J_1(ia/\lambda)} \quad (\text{در داخل}) \quad (39.15)$$

چون $J_1(ir/\lambda) = iI_1(r/\lambda)$ که در آن I_1 تابع بسل تغییر یافته است، معادله (۳۹.۱۵) را می توان بر حسب توابع استاندارد جسدول بندی شده نوشت. از این نتیجه می توانیم میدانهای دیگر و توزیع جریان را محاسبه کنیم و می توانیم نشان دهیم که میدان و چگالی جریان کل به صورت نمایی با فاصله از سطح سیم کاهش می یابند. ولی این جزئیات را به بخش تمرینها واگذار می کنیم.

این بحث خواص الکترومغناطیسی ابررساناها، الزاماً به صورت ناقص ارائه شد، به ویژه اینکه از مسائل شامل میدانهای تابع زمان و از نظریه میکروسکوپی ابررسانایی چشمپوشی شده است. بسیاری از این مطالب در کتابهای جدید درباره ابررسانایی بحث شده اند.^۱ دو کتاب قدیمیتر برای تکمیل مطالب این فصل، عبارت اند از کتاب لندن^۲ و کتاب شوئنبرگ^۳.

1. A. C. Rose - Innes and E. H. Rhoderick, *Introduction to Superconductivity*. Second Edition (New York: Pergamon, 1977); and M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (New York: McGraw - Hill, 1975); *Superconductivity in Science and Technology*, M. H. Cohen, editor (Chicago: University of Chicago Press, 1968).

2. F. London, *Superfluids. The Macroscopic Theory of Superconductivity*, Vol. I (New York: Wiley, 1950; New York: Dover Publications, 1961).

3. D. Shoenberg, *Superconductivity*, Second Edition (London: Cambridge University Press, 1965).

۶.۱۵ خلاصه مطالب

ابررساناها رده نسبتاً بزرگی از مواد را تشکیل می‌دهند که در دماهای پایین، معمولاً پایینتر از 4K ، گذار فازی به حالت ابررسانایی دارند. این گذار علاوه بر بستگی به دما به میدان مغناطیسی نیز بستگی دارد، و در میدانهای شدیدتر از میدان بحرانی H_c ماده به حالت معمولی برمی گردد. به طور ایده آل

$$H_c = H_0 [1 - (T/T_c)^2]$$

رفتار الکتریکی و مغناطیسی در حالت ابررسانایی را به ساده ترین وجه می توان توسط معادلات ساختمندی $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ و $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ توصیف کرد که در آنها پارامترهای مواد، مقادیر فرین زیر را دارند

$$g = \infty, \quad \chi_m = -1 \quad (\mu = 0)$$

این مقادیر، رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل را نشان می‌دهند. خاصیت دیامغناطیسی کامل ایجاب می‌کند که در درون ابررسانا چگالی شار B و چگالی جریان J هر دو صفر باشند و جریانهای ابررسانایی در سطح جاری باشند. معادلات لندن توصیف دقیقتری به دست می‌دهند. در این معادلات، معادلات خطی ساختمندی با معادلات دیفرانسیل زیر جایگزین می‌شوند

$$\mu_0 \mathbf{J} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathbf{E}$$

$$\mu_0 \nabla \times \mathbf{J} = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathbf{B}$$

از این معادلات، همراه با معادلات ماکسول در خلا، چنین نتیجه می‌شود که چگالی شار و چگالی جریان در درون ابررسانا به جای آنکه به طور ناگهانی به صفر نزول کنند، با فاصله از سطح به طور نمایی (با عمق نفوذ λ) کاهش می‌یابند.

۱. برای مسائلی که در آنها ابررسانا در میدان مغناطیسی واقع است، فرمولبندی ساده $\chi_m = -1$ ، $\mu = 0$ ، بسیار مناسب است. نتایج با آنچه توسط روشهای فصل ۹ به دست آمد، تنها با جایگزین کردن $\mu = 0$ ، یکسان است.

۲. در یک فرمولبندی مشابه، که می‌تواند برای مسائلی شامل ابررساناهای حامل جریان خارجی مناسبتر باشد، فرض می‌شود که در داخل ابررسانا $\chi_m = 0$ و $\mu = \mu_0$ است. شرط $\mathbf{B} = 0$ با قرارداد $\mathbf{M} = 0 = \mathbf{H}$ در داخل ابررسانا برقرار می‌شود، و شرایط مرزی با این فرض که جریانهای ابررسانایی مناسبی در سطح ابررسانا جریان دارند برآورده می‌شوند.

این دو فرمولبندی بایکدیگر معادل‌اند، ولی در يك مسئله مفروض تنها یکی از آن دو باید انتخاب و دنبال شود.

مسائل

۱.۱۵ استوانه ابررسانای بینهایت بلندی به شعاع a را در نظر بگیرید که در يك میدان مغناطیسی عرضی قرار گرفته است. در فواصل دور از استوانه میدان یکنواخت، و اندازه‌اش B_0 است. میدانها را در داخل و در خارج از استوانه و چگالی جریان را در داخل استوانه و روی سطح آن محاسبه کنید. فرض کنید که خواص ابررسانایی توسط خاصیت دیامغناطیسی کامل و رسانندگی کامل توصیف می‌شوند. دو فرمولبندی معادل را مقایسه کنید.

۲.۱۵ بره ابررسانای بی نهایت بزرگی به ضخامت d را در نظر بگیرید که دو سطح آن در $z=0$ و $z=d$ قرار دارند، در خارج از بره میدان مغناطیسی یکنواخت و موازی با سطوح آن است، $B_x = B_0$. با استفاده از معادلات لندن و عمق نفوذ پدیده شناختی λ ، میدان و چگالی جریان را در داخل بره به دست آورید.

۳.۱۵ با استفاده از معادلات لندن و عمق نفوذ پدیده شناختی λ ، محاسبات مسئله ۱.۱۵ را انجام دهید.

۴.۱۵ با استفاده از معادلات لندن و شروع از نتایجی که در معادلات (۳۵.۱۵) تا (۳۹.۱۵) توسعه داده شد، بحث میدانهای تولید شده توسط سیم بی نهایت طویل حامل جریان را کامل کنید. (الف) J را در داخل استوانه محاسبه کنید. (ب) درباره کاهش نمایی B در ناحیه نزدیک به سطح استوانه بحث کنید.

۵.۱۵ کره ابررسانایی به شعاع a را در نظر بگیرید که در يك میدان مغناطیسی قرار گرفته و این میدان در فواصل دور از کره یکنواخت و اندازه‌اش B_0 است. با استفاده از فرمولبندی بخش ۵.۱۵ به عنوان مبنا، مطالب زیر را فراهم آورید: (الف) بسطی برای $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$ و از آن معادلاتی را که مؤلفه‌های $\mathbf{B}$ در داخل کره در آن صدق می‌کنند. (ب) اثباتی برای معادله (۲۷.۱۵). (ج) يك بحث کمی درباره کاهش نمایی B در ناحیه نزدیک به سطح کره.

معادلات ماکسول

۱۰۱۶ تعمیم قانون آمپر. جریان جابه‌جایی

در فصل ۹ دیدیم که میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریان، در قانون مداری آمپر صدق می‌کند

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (۱۰۱۶)$$

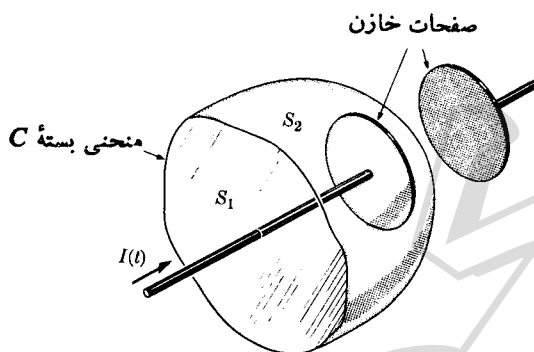
اکنون ما این قانون را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که گاهی باشکست روبه‌رو می‌شود، و برای آن تعمیمی پیدا می‌کنیم که همیشه معتبر باشد.

مداری را که در شکل ۱۰۱۶ نشان داده شده است در نظر بگیرید، این مدار شامل يك خازن كوچك با صفحات موازی است که با جریان ثابت I باردار می‌شود (احتیاجی نیست علت به وجود آمدن جریان را بدانیم). چنانچه قانون آمپر را دربارهٔ منحنی بسته C و سطح S_1 به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = I \quad (۲۰۱۶)$$

از طرف دیگر، چنانچه قانون آمپر را در مورد منحنی بسته C و سطح S_2 به کار ببریم، چون J در تمام نقاط روی سطح S_2 مساوی صفر است خواهیم داشت

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (۳۰۱۶)$$



شکل ۱۰۱۶ منحنی بسته C و دو سطح S_1 و S_2 برای بررسی قانون مداری آمپر.

معادلات (۲.۱۶) و (۳.۱۶) بایکدیگر متناقض اند و بنابراین هر دو نمی توانند صحیح باشند. اگر فرض کنیم که منحنی بسته C به فاصله خیلی زیادی از خازن قرار گرفته است، واضح است که این وضعیت با موارد استاندارد قانون آمپر که در فصل ۸ مطالعه کردیم، فرق زیادی ندارد. بدین ترتیب می توان تصور کرد که معادله (۲.۱۶) صحیح است، زیرا این معادله به خصوصیت جدید، یعنی خازن بستگی ندارد. از طرفی به دست آوردن معادله (۳.۱۶) مستلزم در نظر گرفتن خازن است، بنابراین چنین به نظر می رسد که معادله (۳.۱۶) احتیاج به تصحیح دارد. چون این معادلات با انتگرال گیری از معادله (۳.۰۹)، یعنی

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.16)$$

به دست آمدند، این معادله نیز مستلزم تصحیح است. تصحیح مناسب را بدین ترتیب می توان انجام داد که توجه کنیم علت اختلاف نتایج معادلات (۲.۱۶) و (۳.۱۶) در این است که انتگرالهای طرف راست این دو معادله متفاوت اند. به بیان ریاضی

$$\int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_2 \, da - \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_1 \, da \neq 0 \quad (5.16)$$

S_1 و S_2 روی هم يك سطح بسته را تشکیل می دهند (در C به یکدیگر وصل می شوند)؛ با وجود این $\mathbf{n}_2$ به سمت خارج و $\mathbf{n}_1$ به سمت داخل است. با در نظر گرفتن این مطلب، می توان معادله (۵.۱۶) را به صورت زیر نوشت

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da \neq 0 \quad (6.16)$$

بدیایان فیزیکی، جریان انتقالی خالص از سطح بسته $S_1 + S_2$ صفر نمی‌شود زیرا بار در روی صفحه خازن درون سطح بسته انباشته می‌شود. بقی بار، بنا بر معادله‌های (۶.۷) و (۷.۷)، مستلزم آن است که

$$\oint_{S_1+S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv \quad (۷.۱۶)$$

زیرا در داخل حجم V که با $S_1 + S_2$ احاطه شده است، چگالی بار ρ در روی صفحه خازن نسبت به زمان تغییر می‌کند. صورت دیفرانسیلی معادله (۷.۱۶) با معادله پیوستگی زیر بیان می‌شود

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (۸.۱۶)$$

اکنون روشن است که معادله (۴.۱۶) از چه نظر غلط است: اگر واگرایی آن را محاسبه کنیم، داریم

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

زیرا واگرایی ناو هر بردار همواره صفر است. بنابراین رابطه $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ، که معادله (۴.۱۶) آن را ایجاب می‌کند، در وضع مورد بررسی ما با بقی بار ناسازگار است، لذا باید به سمت راست معادله (۴.۱۶) جمله‌ای اضافه شود که $\partial \rho / \partial t$ را در معادله (۸.۱۶) بدهد. از رابطه بین ρ و جابجایی الکتریکی، یعنی

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (۹.۱۶)$$

می‌توان دید که این جمله اضافی چه می‌تواند باشد. با قراردادن ρ از معادله (۹.۱۶) در معادله (۸.۱۶) به دست می‌آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

اگر جمله $\partial \mathbf{D} / \partial t$ به معادله (۴.۱۶) اضافه شود، در آن صورت واگرایی آن به نحو صحیح معادله (۸.۱۶) را خواهد داد. (البته، تا فصل ۱۱، ما فرض می‌کردیم که میدانها به زمان بستگی ندارند، لذا کاربرد معادله (۴.۱۶) به همان صورت صحیح بود. در فصلهای ۱۱ تا ۱۵ فرض شد که میدانها «کند تغییر» اند، یعنی از $\partial \mathbf{D} / \partial t$ در مقایسه با $\mathbf{J}$ چشمپوشی شد.) با منظور کردن $\partial \mathbf{D} / \partial t$ قانون تعمیم یافته آمپر به صورت زیر به دست می‌آید

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (۱۰.۱۶)$$

معرفی جمله دوم در سمت راست معادله بالا، که به جریان جابه‌جایی معروف است، یکی از بزرگترین کارهای ماکسول در نظریه الکترومغناطیس است.

۲.۱۶ معادلات ماکسول و مبانی تجربی آنها

معادله (۱۰.۱۶) یکی از مجموعه معادلاتی است که به معادلات ماکسول معروف‌اند. این مجموعه معادلات کلاً شامل معادله (۱۰.۱۶) و سه معادله دیگر است که قبلاً با آنها آشنایی پیدا کردیم، یعنی

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad [۱۰.۱۶]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad [۶.۱۱] \quad (۱۱.۱۶)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad [۲۹.۴] \quad (۱۲.۱۶)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad [۳۰.۸] \quad (۱۳.۱۶)$$

هر کدام از این معادلات نماینده تعمیم یک دسته از مشاهدات تجربی‌اند: معادله (۱۰.۱۶) تعمیم قانون آمپر است، معادله (۱۱.۱۶) صورت دیفرانسیلی قانون القای الکترومغناطیسی فاراده است، معادله (۱۲.۱۶) تعمیم قانون گاوس است که خود از قانون کولن نتیجه می‌شود، معادله (۱۳.۱۶) را معمولاً می‌گویند نماینده این واقعیت است که هر گز قطب‌نهای مغناطیسی مشاهده نشده است.

واضح است که معادلات ماکسول بیان ریاضی نتایج تجربی خاصی هستند. از این رو نمی‌توان آنها را اثبات کرد؛ با وجود این، می‌توان قابلیت کاربرد آنها را برای هر وضعیتی تحقیق کرد. در نتیجه کارهای تجربی بسیار گسترده، اکنون معلوم شده است که معادلات ماکسول را می‌توان تقریباً در کلیه وضعیتهای ماکروسکوپی به کاربرد و این معادلات اغلب خیلی شبیه به اصل بقای اندازه حرکت، به عنوان اصول راهنما به کار می‌روند. اینها معادلات بنیادی هستند که بر میدانهای الکترومغناطیسی حاصل از چگالیهای چگال بار و جریان ($\mathbf{J}$ و ρ) حاکم‌اند. اگر موادی موجود باشند، برای آنکه بتوانیم معادلات ماکسول را به کار ببریم، باید معادلات ساختمندی مناسب را نیز بدانیم (یا به طور تجربی و یا از نظریه میکروسکوپی مربوط به ماده نوع به خصوص). این معادلات بدین صورت‌اند: $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$

و $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$. همچنین چگالی جریان $\mathbf{J}$ در ماده سهمی را که معادله ساختمندی سومی، $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$ می دهد نیز شامل است، و این معادله نیز باید به طور تجربی یا به طور نظری معلوم باشد. وقتی معادله نیروی لورنتس، $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ، که اثر میدانها بر روی ذرات باردار را توصیف می کند، با این معادلات جفت شود، مجموعه قوانینی به دست می آید که توصیف کلاسیک کاملی برای ذرات با برهم کنش الکترومغناطیسی فراهم می آورد.

هم اکنون دیدیم که جریان جا به جایی که در بخش قبل معرفی شد برای آنکه بقای بار داشته باشیم ضروری است، و هنگامی که آن را در معادلات ماکسول وارد کردیم، این معادلات معادله پیوستگی را ایجاد می کنند، به گونه ای که لازم نیست که این معادله را به مجموعه معادلات بنیادی بیافزاییم. معادلات ماکسول دو پیامد جالب دیگر نیز دارند که در بخش بعد به آنها خواهیم پرداخت. خواهیم دید که این پیامدها نیز به طور قاطعی به جریان جا به جایی بستگی دارند.

۳.۱۶ انرژی الکترومغناطیسی

در فصل ۶ نشان دادیم که کمیت زیر

$$U_E = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dv \quad (۱۴.۱۶)$$

را می توان انرژی پتانسیل الکتریسیته ساکن دستگاه بارهایی دانست که میدان الکتریکی مربوط را ایجاد می کنند. این نتیجه را با محاسبه کار انجام شده برای ایجاد میدان، به دست آوردیم. به طریق مشابه، در فصل ۱۲، کمیت زیر

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \quad (۱۵.۱۶)$$

را به عنوان انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی معرفی کردیم. اکنون قابلیت کار برد این عبارات را در مورد وضعیتهای غیر ساکن بررسی می کنیم.

اگر حاصل ضرب نرده ای معادله (۱۵.۱۶) را با $\mathbf{E}$ به دست آوریم و معادله حاصل را از حاصل ضرب نرده ای معادله (۱۱.۱۶) در $\mathbf{H}$ کم کنیم، نتیجه معادله زیر خواهد بود

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (۱۶.۱۶)$$

می توان با استفاده از اتحاد زیر، طرف چپ معادله بالا را به صورت واگرایی يك تابع نوشت

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (۱۷.۱۶)$$

اگر محیطی که معادله (۱۷.۱۶) را در مورد آن به کار می‌بریم خطی و غیر پاشنده باشد، به عبارت دیگر اگر $\mathbf{D}$ متناسب با $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ متناسب با $\mathbf{H}$ باشند، در این صورت مشتقات زمانی طرف

۱. محیط خطی و غیر پاشنده محیطی است که در آن $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ و ϵ و μ آن کمیت‌هایی مستقل از متغیرهای میدان و صریحاً به زمان بستگی نداشته باشند، يك مورد قابل توجه که غیر-خطی است، در محیطهای فرومغناطیس اتفاق می‌افتد، که در آن رابطه بین میدان مغناطیسی و شدت مغناطیسی نه تنها به شدت میدان، بلکه به تاریخچه قبلی محیط نیز بستگی دارد. با وجود این، باید توجه داشت که ناهمسانگردی به تنهایی نمی‌تواند روابط زیر را از اعتبار بیندازد

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad \text{و} \quad \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

در مورد محیطهای ناهمسانگرد، رابطه بین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{D}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D_i = \sum_{j=1}^r \epsilon_{ij} E_j$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \epsilon_{ij} \left(E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial t} E_j \right)$$

استدلالی ساده بر اساس بقای انرژی (Wooster, *Crystal Physics*, Cambridge University Press, 1938., p.277) نشان می‌دهد که $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ با استفاده از این نتیجه برای تعویض i و j در جمله آخر خواهیم داشت

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r E_i \epsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t}$$

اگر $[\epsilon_{ij}]$ مجموعه‌ای از اعداد ثابت مستقل از $\mathbf{E}$ و t باشد، آن‌گاه

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^r E_i \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^r \epsilon_{ij} E_j = \sum_{i=1}^r E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که ناهمسانگردی به تنهایی محدودیتی برای این اثبات ایجاد نمی‌کند.

راست معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

و

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^2 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

با استفاده از این روابط، معادله (۱۷.۱۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (18.16)$$

اولین جمله سمت راست معادله بالا، عبارت است از مشتق زمانی مجموع چگالیهای انرژی الکتریکی و مغناطیسی؛ جمله دوم، در اکثر موارد، به‌ویژه چنانچه $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ باشد، درست برابر منفی گرمای ژول ایجاد شده در واحد حجم است.

با انتگرال‌گیری از معادله بالا روی حجم ثابت V که با سطح بسته S مسدود شده باشد، خواهیم داشت

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (19.16)$$

با استفاده از قضیه واگرایی درست چپ این معادله، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم

$$\oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv$$

با نوشتن معادله بالا به صورت زیر

$$-\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv + \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} da \quad (20.16)$$

واضح است که جمله $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ از دو قسمت تشکیل شده است. یکی آهنگ تغییر انرژی الکترومغناطیسی ذخیره شده در حجم V نسبت به زمان، و دیگری یک انتگرال سطحی. طرف چپ معادله (۲۰.۱۶) توان انتقال یافته به میدان الکترومغناطیسی از طریق حرکت بارهای آزاد در حجم V است. چنانچه در حجم V منبع emf وجود نداشته باشد، طرف چپ

معادله (۲۰.۱۶) منفی و برابر است با منفی گرمای ژول تولید شده در واحد زمان. با وجود این، در بعضی موارد، طرف چپ معادله (۲۰.۱۶) ممکن است مثبت باشد. فرض کنید که ذره باردار q با سرعت ثابت $\mathbf{v}$ تحت تأثیر نیروهای مکانیکی، الکتریکی، و مغناطیسی حرکت می‌کند؛ آهنگ کاری که نیروی مکانیکی روی ذره انجام می‌دهد برابر است با

$$\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = -q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = -q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

اما بنا بر معادله (۴.۷)، چگالی جریان عبارت است از

$$\mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i$$

بنابراین آهنگ کاری که نیروی مکانیکی (در واحد حجم) انجام می‌دهد برابر است با

$$\sum_i N_i \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v}_i = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

و این چگالی توان به میدان الکترومغناطیسی انتقال می‌یابد.

چون انتگرال سطحی در معادله (۲۰.۱۶) تنها شامل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است، می‌توان این جمله را به عنوان آهنگ عبور انرژی از این سطح تعبیر کرد. بنابراین معادله (۲۰.۱۶) بیان‌کننده بقای انرژی در حجم ثابت V است. اکنون به معادله دیفرانسیل مربوط (۱۸.۱۶) برمی‌گردیم. خواهیم دید این معادله بیان‌کننده بقای موضعی انرژی در هر نقطه است. اگر علامتهای اختصاری زیر را به کار ببریم

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (۲۱.۱۶)$$

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (۲۲.۱۶)$$

آنگاه معادله (۱۸.۱۶) ایجاب می‌کند که در هر نقطه معادله زیر برقرار باشد

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (۲۳.۱۶)$$

شکی نیست که $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ کاری است که میدان موضعی روی ذرات باردار در واحد حجم انجام می‌دهد. قبلاً ما u را به عنوان چگالی انرژی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی تعبیر کرده بودیم. اگر $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$ باشد، در آن صورت معادله (۲۳.۱۶) بقای موضعی انرژی

را بیان خواهد کرد: در هر نقطه آهنگ تغییر انرژی میدان برابر است با اتلاف توان در واحد حجم. از طرف دیگر، اگر $\nabla \cdot \mathbf{S} \neq 0$ ولی $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0$ باشد (برای مثال در یک محیط نارسانا)، آنگاه

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (24.16)$$

این معادله از نظر ریاضی دقیقاً همانند معادله پیوستگی بار الکتریکی (۸.۱۶) است، بجز آنکه چگالی انرژی u به جای چگالی بار ρ نشسته است. اگر بنا باشد معادله (۲۴.۱۶) نیز بقای انرژی را توصیف کند، $\nabla \cdot \mathbf{S}$ می‌بایست نمایانگر واگرایی چگالی جریان انرژی، یا (به بیان دیگر)، آهنگ جریان انرژی در واحد سطح باشد. معمولاً خود بردار $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ را، که به بردار پوئینتینگ مشهور است، به عنوان جریان موضعی انرژی در واحد سطح در نظر می‌گیرند.^۱ ما این تعبیرها را برای u و $\mathbf{S}$ به کار خواهیم برد، هر چند که می‌دانیم آنچه تعبيرش مستقیماً از معادلات ماکسول مورد نیاز است، مشتق زمانی u و واگرایی $\mathbf{S}$ است. به هر جهت تنها این کمیت‌های اخیر از نظریه‌ی یکی قابل اندازه‌گیری‌اند. اما، همان‌طور که معادله (۲۵.۱۶) بیان‌کننده بقای انرژی به صورت انتگرالی است، معادله (۲۳.۱۶) نیز به‌طور موضعی بقای انرژی را بیان می‌کند.

۴.۱۶ معادله موج

یکی از مهمترین پی‌آمدهای معادلات ماکسول، معادلات انتشار موج الکترومغناطیسی در محیط خطی است. معادله موج برای $\mathbf{H}$ را می‌توان با گرفتن تاو از (۱۵.۱۶) به‌دست آورد

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

با قرار دادن $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$ و با این فرض که g و ϵ ثابت‌اند، خواهیم داشت

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = g \nabla \times \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}$$

فرض می‌کنیم $\mathbf{E}$ تابع خوش رفتاری باشد، و از این رو در اینجا ترتیب مشتق‌گیری زمانی و

۱. هنوز بحث وجدل در این باره ادامه دارد. برای بحث جدیدی در این باره به مقاله زیر رجوع کنید

و مکانی را عوض کرده ایم. اکنون می توانیم معادله (۱۱.۱۶) را به کار ببریم و $\nabla \times \mathbf{E}$ را حذف کنیم و بدین ترتیب معادله زیر را به دست آوریم

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (25.16)$$

که در آن رابطه $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ با μ ثابت به کار رفته است. حال با استفاده از اتحاد برداری

$$\nabla \times \nabla \times = \nabla \nabla \cdot - \nabla^2 \quad (26.16)$$

معادله زیر را به دست می آوریم

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (27.16)$$

چون μ ثابت است

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

در نتیجه جمله اول سمت چپ معادله (۲۷.۱۶) صفر می شود و معادله نهایی موج به صورت زیر به دست می آید

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (28.16)$$

بردار $\mathbf{E}$ نیز در همین معادله موج صدق می کند، این مطلب را می توان به سادگی با گرفتن تاو از معادله (۱۱.۱۶) تحقیق کرد

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

با استفاده از معادله (۱۵.۱۶) برای حذف میدان مغناطیسی و با این فرض که g ، μ ، و ϵ ثابت اند، خواهیم داشت

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

با به کار بردن اتحاد برداری (۲۶.۱۶) و محدود کردن کار برد معادله به فضای تهی از بار آزاد،

به طوری که $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ باشد، نتیجه خواهد شد

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - g \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (29.16)$$

میدان الکترومغناطیسی در یک محیط خطی و همگن که چگالی بار در آن صفر است، خواه محیط رسانا باشد خواه نارسانا، از معادلات موجی که در بالا به دست آمد پیروی می کند. با وجود این، تنها کافی نیست که میدان در این معادلات صدق کند، بلکه باید در معادلات ماکسول نیز صادق باشد. واضح است که معادلات (28.16) و (29.16) الزاماً از معادلات ماکسول نتیجه می شوند، ولی عکس این مطلب صحیح نیست. در حل معادلات موج، باید مخصوصاً دقت کرد که جوابهایی برای معادلات ماکسول به دست آوریم. یک روش که می توان آن را به خوبی در مورد امواج تکفام به کار برد، این است که ابتدا جوابی برای $\mathbf{E}$ به دست آوریم. آنگاه تاو $\mathbf{E}$ ، مشتق زمانی $\mathbf{B}$ را به دست می دهد که برای امواج تکفام بایک رابطه ساده به $\mathbf{B}$ مربوط می شود و در نتیجه $\mathbf{B}$ به آسانی به دست می آید.

امواج تکفام را می توان به صورت امواجی توصیف کرد که با یک فرکانس منفرد مشخص می شوند. برای بحث درباره چنین امواجی، روشهای تحلیل متغیرهای مختلط بسیار مناسب اند. بستگی زمانی میدان (برای مشخص بودن، بردار $\mathbf{E}$ را در نظر می گیریم) به صورت $e^{-i\omega t}$ فرض می شود، لذا

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (30.16)$$

باید به خاطر داشت که میدان الکتریکی فیزیکی با گرفتن قسمت حقیقی^۱ معادله (30.16) به دست می آید؛ به علاوه $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ در حالت کلی مختلط است، به طوری که میدان الکتریکی واقعی با $\cos(\omega t + \phi)$ ، که در آن ϕ فاز $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ است، متناسب می شود. با استفاده از معادله (30.16) در معادله (29.16) خواهیم داشت

$$e^{-i\omega t} \{ \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{E} + i \omega g \mu \mathbf{E} \} = 0 \quad (31.16)$$

این معادله ای است که تغییرات فضایی میدان الکتریکی باید از آن پیروی کند (البته می توان

۱. همان طور که در فصل سیزدهم بحث شد، می توان از یک توصیف ریاضی که به طور مناسب بر حسب متغیرهای مختلط بیان می شود، با انتخاب قسمت حقیقی یا موهومی کمیت مختلط، به کمیت های فیزیکی رسید. انتخاب قسمت حقیقی یا موهومی، کاملاً دلخواه است. این دوا انتخاب فقط به اندازه $\pi/2$ با یکدیگر اختلاف فاز دارند، ولی در یک مسئله داده شده، همواره باید یکی از آنها را انتخاب کرد. در این فصل و در فصل بعدی، قسمت حقیقی کمیت های مختلط نماینده کمیت های فیزیکی است، مگر اینکه صریحاً به نحو دیگری تذکر داده شود.

ضریب مشترک $e^{-i\omega t}$ را حذف کرد). کار بعدی ما، حل معادله (۳۱.۱۶) است برای تعیین تغییرات فضایی میدان الکتریکی در حالات ویژه گوناگون مورد نظر. این کار در فصل بعد انجام خواهد شد؛ در اینجا تنها بعضی از ساده‌ترین موارد ممکن را بررسی می‌کنیم.

ابتدا فرض کنید که «محیط» فضای تهی است، به طوری که $\epsilon = \epsilon_0$ ، $g = 0$ ، و $\mu = \mu_0$. به علاوه، فرض کنید که $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ تنها در یک راستا، برای مثال در راستای z ، تغییر می‌کند، و به x و y بستگی ندارد. در این صورت معادله (۳۱.۱۶) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} + (\omega/c)^2 \mathbf{E} = 0 \quad (32.16)$$

که در آن ما رابطه

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$$

را که در فصل ۸ به دلایل بعدی مطرح شد، به کار برده‌ایم؛ c بعد سرعت دارد. این معادله (که به معادله هلمهولتز معروف است) از نظر ریاضی با معادله نوسانگر هماهنگ یکسان است. جوابهای این معادله عبارت‌اند از

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{\pm i \kappa z}$$

که در آن $\mathbf{E}_0$ بردار ثابتی است، مشروط بر آنکه

$$\kappa = \omega/c \quad (33.16)$$

با قرار دادن این جواب برای $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ در معادله (۳۰.۱۶)، جواب کامل را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t \mp \kappa z)} \quad (34.16)$$

که با گرفتن قسمت حقیقی آن داریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t \mp \kappa z) \quad (35.16 \text{ الف})$$

با استفاده از معادله (۳۳.۱۶)، صورت دیگری برای معادله بالا عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t \mp z/c) \quad (35.16 \text{ ب})$$

این معادله نمایانگر یک موج سینوسی است که در راستای z به سمت راست یا به سمت چپ (بسته به آنکه کدام یک از دو علامت مثبت یا منفی به کار گرفته شوند) حرکت می‌کند.

سرعت انتشار موج c است. اگر نور صورتی از تابش الکترومغناطیسی باشد، آنگاه معادلات ماکسول پیش بینی می کنند که سرعت نور در خلأ برابر است با

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 299792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

هر چند که ما انتظار چنین نتیجه ای را داشتیم، ولی هنگامی که ماکسول برای اولین بار این نتیجه را اعلان کرد پیروزی بزرگی برای نظریه اش به شمار می رفت، زیرا تا آن زمان ماهیت الکترومغناطیسی نور چیزی بیش از یک تصور ذهنی تلقی نمی شد. معادله (۳۵.۱۶) الف) نشان می دهد که فرکانس موج $\omega/2\pi = f$ و طول موج آن $\lambda = 2\pi/\kappa$ است. بدین ترتیب معادله (۳۳.۱۶) نتیجه آشنایی است در مورد موج، یعنی

$$\lambda f = c$$

در یک محیط دی الکتریک نارسانای غیرمغناطیسی، باز هم $g = 0$ و $\mu = \mu_0$ ، ولی $\epsilon = K\epsilon_0$ است. در این حالت معادلاتی را که در بالا به دست آوردیم دقیقاً به همان شکل فوق خواهند بود، بجز آنکه اکنون معادله (۳۳.۱۶) به صورت زیر درمی آید

$$\kappa = \sqrt{K}\omega/c \quad (\text{الف } 33.16)$$

اگر n را به صورت $n = \sqrt{K}$ تعریف کنیم، می بینیم که نتایج با حالت مربوط به خلأ یکسان اند، بجز آنکه اکنون سرعت انتشار موج به جای c برابر است با c/n . کمیت n ضریب شکست محیط دی الکتریک نامیده می شود؛ برای خلأ $n = 1$ است. همان طور که در زیر خواهیم دید، این مطلب اثرهای شکست در مواد شفاف را توجیه می کند.

اگر محیط رسانا باشد، $g > 0$ ، جمله سوم در معادله (۳۱.۱۶) را باید نگه داریم. هنگامی که g کوچک است، همان طور که در فصل بعد خواهیم دید، نتیجه صرفاً آن خواهد بود که موج میرا می شود. منظور از کوچک بودن g آن است که جمله سوم معادله (۳۱.۱۶) در مقایسه با جمله دوم آن، که به جواب موجی منجر شد، کوچک باشد. به عبارت دیگر

$$\omega g \mu \ll \omega^2 \epsilon \mu$$

$$g \ll \omega \epsilon$$

در حد نهایی دیگر هنگامی که $\omega \epsilon \gg g$ ، می توانیم از جمله دوم معادله (۳۱.۱۶) چشم پوشی کنیم. مجدداً چنانچه توجه خود را به مورد یک بعدی محدود کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} + i\omega g \mu \mathbf{E} = 0$$

چنانچه فرض کنیم $\alpha = i\omega$ حقیقی باشد یا، به بیان دیگر، اگر فرض کنیم فرکانس موهومی باشد، ضریب E در جمله دوم حقیقی خواهد بود. در آن صورت، اگر

$$\kappa = \sqrt{\alpha g \mu}$$

بستگی فضایی جواب، $E(\mathbf{r})$ ، درست به همان شکل قبل است. ولی اختلاف در آن است که بستگی زمانی (۳۰.۱۶) به صورت زیر درمی آید

$$E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r})e^{-\alpha t}$$

یعنی، میدان نسبت به زمان به جای آنکه به طریقی موج گونه نوسان کند، به طور نمایی کاهش می یابد. گذار بین رفتار موجی و رفتار کاهش یابنده هنگامی رخ می دهد که

$$|\omega| = |\alpha| \cong \left| \frac{g}{\varepsilon} \right| = 1/t_c$$

که در اینجا t_c همان زمان واهلش ماده است که در فصل ۷ بحث شد. (مجدداً یادآور می شویم که برای کار بست این شرط در مورد فلزات باید دقت شود، زیرا g/ε خود قویاً به ω بستگی دارد.)

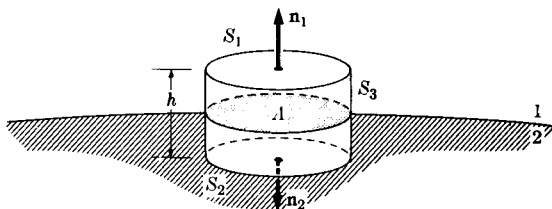
در پایان متذکر می شویم که اگر به عقب برگردیم و نحوه به دست آوردن معادله (۳۰.۱۶) را از معادلات ماکسول بررسی کنیم متوجه می شویم که جمله دوم، یعنی $\partial^2 E / \partial t^2$ در معادله (۲۹.۱۶)، از جریان جابجایی $\partial D / \partial t$ در معادله (۱۰.۱۶) ناشی می شود، در صورتی که جمله سوم، یعنی $\partial E / \partial t$ در معادله (۲۹.۱۶)، از جریان انتقالی $\mathbf{J}$ در معادله (۱۰.۱۶) ناشی می شود. بنابراین وجود انتشار موج الکترومغناطیسی به جریان جابجایی که توسط ماکسول وارد نظریه شده است، بستگی دارد. بدون آن، تنها کاهش نمایی میدانها می توانست به وقوع بپیوندد.

۵.۱۶ شرایط مرزی

شرایط مرزی که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در فصل مشترک دو محیط باید در آنها صدق کنند، درست مانند حالت ساکن، از معادلات ماکسول استنتاج می شوند. عموماً ترین و سراسر است ترین شرط مرزی در مورد میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ است که در معادله ماکسول زیر صدق می کند

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۳۶.۱۶)$$

در هر فصل مشترکی بین دو محیط می توان يك سطح بسته قرصی شکل مثل شکل ۲.۱۶



شکل ۲۰۱۶ برای به دست آوردن شرایط مرزی روی بردارهای میدان می توان از يك سطح قرصی شکل در فصل مشترك بین دو محیط استفاده کرد.

در نظر گرفت. می توان قضیه و اگرایی را برای واگرایی $\mathbf{B}$ در حجمی که این سطح در بر گرفته است به کار برد و معادله زیر را به دست آورد

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_1 da + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 da + \int_{S_3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_3 da = 0 \quad (۳۷.۱۶)$$

اگر $\mathbf{B}$ تابعی متناهی باشد، با به سمت صفر میل دادن h ، جمله آخر صفر می شود و S_1 از نظر هندسی به S_2 نزدیک می شود. بادر نظر گرفتن اینکه $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ دارای جهت های مخالف اند، مستقیماً به نتیجه زیر می رسمیم

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (۳۸.۱۶)$$

که دقیقاً مشابه حالت ساکن است.

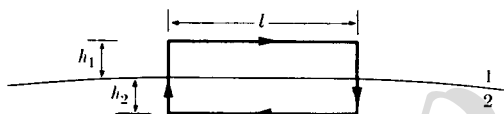
مؤلفه مماسی میدان الکتریکی را نیز می توان به طریق ساده ای بررسی کرد. باز هم معادله اصلی یکی از معادلات ماکسول است

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (۳۹.۱۶)$$

با انتگرال گیری از این معادله روی سطحی که مرز آن مانند شکل ۳۰۱۶ يك مسیر مستطیل شکل است، خواهیم داشت

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da \quad (۴۰.۱۶)$$

و با به کار بردن قضیه استوکس در طرف چپ معادله نتیجه خواهد شد



شکل ۳.۱۶ می توان از مسیر مستطیل شکلی که در فصل مشترك دو محیط نشان داده شده است، برای به دست آوردن شرایط مرزی روی بردارهای میدان استفاده کرد.

$$lE_{\lambda t} - lE_{\lambda t} + h_1 E_{\lambda n} + h_2 E_{\lambda n} - h_1 E'_{\lambda n} - h_2 E'_{\lambda n} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} da \quad (۴۱.۱۶)$$

اکنون اگر با به سمت صفر میل دادن h_1 و h_2 ، سطح را کوچک کنیم، چهار جمله آخر طرف چپ، و همچنین طرف راست تنها به شرط آنکه $\partial \mathbf{B} / \partial t$ متناسبی باشد، صفر می شوند، در معادله حاصل l يك ضریب مشترك است و با حذف آن نتیجه خواهد شد

$$E_{\lambda t} = E_{\lambda t} \quad (۴۲.۱۶)$$

بنابراین مؤلفه مماسی $\mathbf{E}$ باید در فصل مشترك دو محیط پیوسته باشد. شرط مرزی برای مؤلفه عمودی جا به جایی الکتریکی پیچیده تر است؛ با وجود این، این شرط نیز از یکی از معادلات ماکسول به دست می آید. در این مورد معادله مناسب به صورت زیر است

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (۴۳.۱۶)$$

اگر مطابق شکل ۲.۱۶ يك حجم قرصی شکل بنا کنیم و از (۴۳.۱۶) در این حجم انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_v \rho dv$$

با به کار بردن قضیه و اگرای و به سمت صفر میل دادن h ، خواهیم داشت

$$(D_{\lambda n} - D'_{\lambda n})A = \sigma A \quad (۴۴.۱۶)$$

که در آن σ چگالی بار سطحی در فصل مشترك است. این واقعیت که، در حالت کلی، σ صفر نیست، باعث ایجاد پیچیدگیهایی در این شرط مرزی می شود؛ با وجود این، با توجه به اینکه بار الکتریکی باید بقا داشته باشد، به عبارت دیگر

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (۲۵.۱۶)$$

ساده کردن این شرط امکان پذیر است. اگر مانند معادله (۴۳.۱۶) از معادله بالا نیز انتگرال بگیریم و حجم قرصی شکل را به همان طریق قبل کوچک کنیم، خواهیم داشت

$$J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (۴۶.۱۶)$$

اگر تنها تابش تکفام را در نظر بگیریم، چگالی بار سطحی باید به صورت $e^{-i\omega t}$ تغییر کند؛ بنابراین می توانیم طرف راست معادله (۴۶.۱۶) را به صورت $i\omega\sigma$ بنویسیم. با به کار بردن روابط ساختمندی $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ و $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ ، معادله های (۴۴.۱۶) و (۴۶.۱۶) به صورت زیر درمی آیند

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma \quad (۴۷.۱۶)$$

$$g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = i\omega\sigma \quad (۴۸.۱۶)$$

چند مورد جالب عملی را می توان مورد توجه قرار داد. اگر σ مساوی صفر باشد، آنگاه

$$\frac{\epsilon_1}{g_1} = \frac{\epsilon_2}{g_2}$$

که این رابطه می تواند یا برای موادی که به طور مناسب انتخاب شده اند، و یا چنانچه $g_1 = g_2 = \infty$ یا $g_1 = g_2 = 0$ ، صادق باشد. موردی که در آن رسانندگیها هر دو بینهایت هستند، زیاد جالب نیست؛ ولی موردی که در آن رسانندگیها هر دو صفر می شوند تقریباً در مرز بین دو دی الکتریک خوب به وجود می آید. اگر σ صفر نباشد، که شاید بیشتر هم اینطور باشد، در این صورت می توان آن را از معادلات (۴۷.۱۶) و (۴۸.۱۶) حذف کرد. نتیجه این عمل حذف به صورت زیر است

$$(\epsilon_1 + i\frac{g_1}{\omega})E_{1n} - (\epsilon_2 + i\frac{g_2}{\omega})E_{2n} = 0 \quad (۴۹.۱۶)$$

آخرین مورد جالبی که اتفاق می افتد، هنگامی است که یکی از رسانندگیها، مثلاً g_2 ، بینهایت است. در این مورد E_{2n} باید صفر و E_{1n} باید مساوی σ/ϵ_1 شود تا معادلات (۴۸.۱۶) و (۴۷.۱۶) صادق باشند. @Quark Book
آخرین شرط مرزی آن است که روی مؤلفه مماسی شدت مغناطیسی $\mathbf{H}$ اعمال می شود.

این شرط مرزی با انتگرال گیری از معادلهٔ ماکسول

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (50.16)$$

روی سطح محدود به مسیری مانند آنچه در شکل ۳.۱۶ نشان داده شده است، به دست می آید. اگر پس از انتگرال گیری، مثل مورد قبل سطح را کوچک کنیم، شرط مرزی حاصل به صورت زیر در خواهد آمد

$$H_{\perp} - H_{\perp} = j_{\perp} \quad (51.16)$$

که در آن $j_{\perp}$ آن مؤلفه از چگالی جریان سطحی است که بر امتداد آن مؤلفه از $\mathbf{H}$ که در معادله ظاهر می شود، عمود است. مفهوم چگالی جریان سطحی خیلی شبیه به مفهوم چگالی بار سطحی است - چگالی جریان سطحی نشان دهندهٔ یک جریان متناهی در یک لایهٔ سطحی بینهایت نازک است. بجز در موردی که رسانندگی بینهایت باشد، چگالی جریان سطحی صفر است؛ بنا بر این برای رسانندگی غیر بینهایت داریم

$$H_{\perp} = H_{\perp} \quad (52.16)$$

یعنی، مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{H}$ پیوسته است، مگر آنکه رسانندگی یکی از دو محیط بینهایت باشد. اگر رسانندگی محیط ۲ بینهایت باشد، در این صورت همان طور که قبلاً نشان دادیم، $E_{\perp} = 0$ می توان با در نظر گرفتن معادلهٔ ماکسول (۵۰.۱۶) در محیط ۲، نتیجهٔ کلیتری به دست آورد

$$\nabla \times \mathbf{H}_{\perp} - \frac{\partial \mathbf{D}_{\perp}}{\partial t} = \mathbf{J}_{\perp} \quad (53.16)$$

با به کار بردن روابط ساختمندی و با فرض اینکه $\mathbf{E}_{\perp}$ به صورت $e^{-i\omega t}$ نسبت به زمان تغییر می کند، نتیجه خواهد شد

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{1}{g_{\perp} - i\omega\epsilon_{\perp}} \nabla \times \mathbf{H}_{\perp} \quad (54.16)$$

اگر این فرض قابل قبول را بکنیم که $\mathbf{H}_{\perp}$ هم متناهی و هم مشتق پذیر است، در این صورت معادلهٔ (۵۴.۱۶) ایجاب می کند که $\mathbf{E}_{\perp}$ در محیطی با رسانندگی بینهایت، صفر باشد. با همان فرضهایی که قبلاً کردیم، خواهیم داشت

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{1}{i\omega\mu_{\perp}} \nabla \times \mathbf{E}_{\perp} \quad (55.16)$$

جدول ۱۰۱۶ شرایط مرزی

g	E_t	D_n	H_t	B_n
$g_1 = g_2 = 0$	$E_{1t} = E_{2t}$	$D_{1n} = D_{2n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
$g_2 = \infty$	$E_{2t} = 0$	$D_{2n} = 0$	$H_{2t} = 0$	$B_{2n} = 0$
	$E_{1t} = 0$	$D_{1n} = \sigma$	$H_{1t} = j_{\perp}$	$B_{1n} = 0$
g_1, g_2 (اختیاری و غیر بینهایت)	$E_{1t} = E_{2t}$	$(\epsilon_1 + i \frac{g_1}{\omega}) E_{1n}$	$H_{1t} = H_{2t}$	$B_{1n} = B_{2n}$
		$= (\epsilon_2 + i \frac{g_2}{\omega}) E_{2n}$		

و صفر شدن E_t ایجاب می کند که H_t نیز صفر شود. اگر H_t صفر شود، در این صورت شرط مرزی روی مؤلفه مماسی H در فصل مشترک دو محیط که رسانندگی یکی از آنها بینهایت است، عبارت خواهد بود از

$$H_{1t} = j_{\perp} \quad (۵۶.۱۶)$$

اکنون شرایط مرزی به دست آمده اند؛ برای سهولت، این شرایط مرزی در جدول ۱۰۱۶ به ازای $g = 0$ ، $g = \infty$ و g اختیاری آمده است.

۶.۱۶ معادله موج با چشمه ها

در بخشهای قبل نشان داده شد که معادلات ماکسول انتشار امواج الکترومغناطیسی را در يك محیط خطی پیش بینی می کنند و همچنین نشان دادیم که انطباق میدانها در فصل مشترک بین دو محیط متفاوت می بایست بر طبق شرایط مرزی مناسب انجام شود. فرض کردیم که چگالی بار ρ در محیط صفر است و تنها چگالی جریان موجود J حاصل از پاسخ غیر فعال محیط اهمی به میدان الکتریکی موج است. ما درباره آنکه این امواج چگونه تولید می شوند پرس وجو نکردیم، ولی مآلا در خواهیم یافت که این امواج میدانهای تولید شده توسط بارهای چشمه هایی در فواصل دورند که تحت حرکت شتابدار قرار دارند.

حال می خواهیم مسئله توزیع بار $\rho(\mathbf{r}, t)$ و توزیع جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ مشخص را بررسی کنیم و میدانهایی را که این توزیعها ایجاد می کنند، به دست آوریم. چندین روش

برای برخورد با این مسئله وجود دارد که بهترین آنها روش پتانسیل است که شبیه به روشهایی است که در الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک به کار بردیم. چون واگرایی میدان مغناطیسی صفر است، همواره آن را به صورت $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ پتانسیل برداری می‌توان نوشت، به عبارت دیگر

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (57.16)$$

اگر از این معادله برای $\mathbf{B}$ در معادله (۱۱.۱۶) استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (58.16)$$

چنانچه فرض کنیم بردارهای میدان به حد کافی پیوسته هستند، می‌توانیم ترتیب مشتقات زمانی و مکانی را عوض کنیم و بنویسیم

$$\nabla \times \left[\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0 \quad (59.16)$$

بنابراین تاو بردار $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ صفر است و می‌توان این بردار را به صورت شیب یک کمیت نرده‌ای نوشت

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (60.16)$$

معادلات (۵۷.۱۶) و (۶۰.۱۶) میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را برحسب یک پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ و یک پتانسیل نرده‌ای ϕ به دست می‌دهند. این پتانسیلها در معادلات موجی صلق می‌کنند که بسیار شبیه‌اند به معادلات موج بردارهای میدان. معادله موج برای $\mathbf{A}$ را با قرار دادن عبارات داده شده در معادله‌های (۵۷.۱۶) و (۶۰.۱۶) برای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در معادله (۱۰.۱۶) می‌توان به دست آورد، نتیجه این عمل به صورت زیر است

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \mathbf{J} \quad (61.16)$$

چنانچه در این معادله ∇^2 را به جای $\nabla \times \nabla \times$ قرار دهیم و آن را در μ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \mathbf{J} \quad (62.16)$$

تاکنون فقط تاو A را مشخص کرده ایم ولی هنوز انتخاب واگرایی A دلخواه است. از معادله (۶۲.۱۶) واضح است که چنانچه شرط زیر را که شرط لورنتس نامیده می شود

$$\nabla \cdot A + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (63.16)$$

به کار ببریم، نتیجه به طور قابل ملاحظه ای ساده خواهد شد. اگر شرط لورنتس صادق باشد، A در معادله موج زیر صدق خواهد کرد

$$\nabla^2 A - \epsilon \mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J \quad (64.16)$$

به علاوه با استفاده از معادله (۶۵.۱۶) در (۶۳.۱۶) خواهیم داشت

$$-\epsilon \left[\nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \right] = \rho \quad (65.16)$$

با عوض کردن ترتیب عمل واگرایی و مشتق گیری زمانی روی A و به کار بردن شرط لورنتس (معادله ۶۳.۱۶) خواهیم داشت

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (66.16)$$

بدین ترتیب با استفاده از شرط لورنتس، پتانسیل های برداری و نرده ای هر دو مجبورند در معادلات موج غیر همگن مشابهی صدق کنند.

مسئله پیدا کردن جواب عمومی معادله موج نرده ای غیر همگن شبیه به پیدا کردن جواب عمومی معادله پواسون است. در مورد معادله پواسون، باید خاطر نشان کنیم که جواب عمومی شامل يك جواب خصوصی معادله غیر همگن به اضافه يك جواب عمومی معادله همگن است. منظور کردن جواب عمومی معادله همگن بدان جهت است که شرایط مرزی مناسب دلخواه را بتوان برآورده کرد، در صورتی که جواب خصوصی ما را مطمئن می کند که تابع کل در معادله غیر همگن صدق می کند. در واقع ملاحظات کاملاً مشابه با ملاحظات بالا (یعنی، جواب عمومی شامل يك جواب خصوصی به اضافه يك جواب عمومی معادله همگن است) در مورد معادله غیر همگن موج نیز صادق است. در فصل ۱۷ روشهایی برای به دست آوردن جوابهای معادله همگن بررسی خواهد شد. می توان با توسعه و تکمیل این روشها تقریباً جوابهای کلیه مسائل قابل حل را به دست آورد. مسائلی را که بر حسب توابع معلوم حل نمی شوند، با روشهای تقریبی می توان حل کرد. در این صورت باقی می ماند که جواب خصوصی لازم را برای معادله غیر همگن پیدا کنیم. در حالت ساکن، یعنی $\partial \varphi / \partial t = 0$

معادله موج نرده‌ای غیرهمگن (۶۶.۱۶) به معادله پواسون تبدیل می‌شود. يك جواب خصوصی معادله پواسون را از معادله (۱۰.۳) (برای خلا^{*}) می‌دانیم

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۶۷.۱۶)$$

معادله موج برداری (۶۴.۱۶) نیز در حالت ساکن (در خلا^{*}) جواب مشابهی دارد که در معادله (۶۱.۸) داده شده است. متأسفانه، به دلایلی که خواهیم دید، تنها با گذاشتن $\rho(\mathbf{r}', t)$ و $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ در جوابهای حالت ساکن جوابهای وابسته به زمان را به دست نمی‌آوریم.

حال معادله (۶۶.۱۶) را برای خلا^{*}، با استفاده از $1/\sqrt{\epsilon\mu} = c/n$ و ضریب شکست $n=1$ به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (۶۸.۱۶)$$

این معادله را می‌توان به طریق بسیار ساده‌ای حل کرد، بدین ترتیب که ابتدا جوابی برای يك بار نقطه‌ای به دست می‌آوریم و سپس تمام اجزای بارهای ρdv را در توزیع بار مربوط بایکدیگر جمع می‌کنیم. مناسبترین محل برای قرار دادن بار نقطه‌ای مبدأ مختصات است. بنابراین معادله زیر

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (۶۹.۱۶)$$

باید در تمام نقاط بجز در مبدأ صادق باشد، در صورتی که در حجم كوچك Δv که مبدأ را احاطه می‌کند، معادله زیر باید صادق باشد

$$\int_{\Delta v} dv \left[\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] = -\frac{1}{\epsilon_0} q(t) \quad (۷۰.۱۶)$$

فرض می‌شود که تابع $q(t)$ ، تنها به صورت يك وسیله ریاضی برای حل معادله، نمایانگر يك بار نقطه‌ای به بزرگی q است که در زمان t در مبدأ مختصات قرار دارد، بدون هیچ فرضی در این باره که يك بار واقعی بقادر در زمان قبل از آن یا بعد از آن در کجا بوده یا خواهد بود. (این تابع نمایانگر يك بار نقطه‌ای متحرک فیزیکی نیست، و جواب حاصل برای φ پتانسیل صحیح برای بار نقطه‌ای متحرک نخواهد بود. پتانسیل بار نقطه‌ای متحرک پیچیده‌تر از این است و در فصل ۲۱ بررسی خواهد شد.) از روی تقارن توزیع بار واضح است که φ باید از لحاظ فضایی فقط به r بستگی داشته باشد. با استفاده از این مطلب می‌توانیم معادله

(۶۹.۱۶) را حل کنیم. چون φ به زاویه سمتی و زاویه قطبی بستگی ندارد، معادله (۶۹.۱۶) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (۷۱.۱۶)$$

حال با قراردادن

$$\varphi(r, t) = \frac{\chi(r, t)}{r} \quad (۷۲.۱۶)$$

معادله (۷۱.۱۶) به معادله زیر تبدیل می شود

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (۷۳.۱۶)$$

این معادله، معادله موج يك بعدی است که هر تابعی از $r - ct$ یا $r + ct$ در آن صدق می کند. برای تحقیق این مطلب می نویسیم

$$u = r - ct$$

و فرض می کنیم $f(u)$ تابعی از u است که بتوان دوبار از آن مشتق گرفت؛ آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{d^2 f}{du^2} \quad (۷۴.۱۶)$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{df}{du}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 f}{du^2} \quad (۷۵.۱۶)$$

با قراردادن نتایج معادلات (۷۴.۱۶) و (۷۵.۱۶) در معادله (۷۳.۱۶) نتیجه می شود که هر تابعی از $(r - ct)$ که دوبار مشتق پذیر باشد جواب معادله (۷۳.۱۶) است. با محاسباتی نظیر محاسبات بالا می توان نتیجه گرفت که تابعی از $(r + ct)$ نیز يك جواب است. بنابراین

$$\chi = f(r - ct) + g(r + ct) \quad (۷۶.۱۶)$$

@Quark_Book

يك جواب كاملاً دلخواه برای معادله (۷۳.۱۶) است. خواهیم دید که در کاربردهای مسا

برای معادله موج، $g(r+ct)$ ظاهر نمی‌شود. بدین علت این جواب را کنار می‌گذاریم، و فقط جمله اول معادله (۷۶.۱۶) را در نظر می‌گیریم، زیرا این کار معادلات بعدی را ساده می‌کند و سبب از دست دادن چیز خاصی نمی‌شود. توجه کنید که $f(r-ct)$ نمایشگر موجی است که از بار چشمه واقع در مبدأ به سمت خارج منتشر می‌شود، در حالی که $g(r+ct)$ نمایشگر موجی است که از بینهایت به طرف داخل به سمت بار چشمه منتشر می‌شود. ما تابع اولی را نگه می‌داریم و تابع دوم را رها می‌کنیم درست به همان دلیل که اگر در سمت راست چشمه می‌بودیم جواب موج تختی را که به سمت راست منتشر می‌شود نگه می‌داشتیم و جوابی را که به سمت چپ منتشر می‌شود رها می‌کردیم.

اکنون جوابی برای معادله (۶۹.۱۶) با تقارن کروی در دست است

$$\varphi = \frac{f(r-ct)}{r} \quad (77.16)$$

به علاوه، این جواب شامل يك تابع اختیاری است که می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که معادله (۷۰.۱۶) نیز صادق باشد. انتخاب مناسب را می‌توان بدین ترتیب به دست آورد که توجه کنیم پتانسیل يك بار در حال سکون که با معادلات (۶۹.۱۶) و (۷۰.۱۶) سازگار باشد، عبارت است از

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (78.16)$$

توابع (۷۷.۱۶) و (۷۸.۱۶) را می‌توان با انتخاب رابطه زیر، همساز کرد

$$f(r-ct) = \frac{q(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0} \quad (79.16)$$

بنابراین جواب معادلات (۶۹.۱۶) و (۷۰.۱۶) به صورت زیر خواهد بود

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (80.16)$$

با این نتیجه به سادگی می‌توان دید که جواب زیر

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad (81.16)$$

در معادله (۶۶.۱۶) صدق می‌کند، که در آن $t' = t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c$ زمان تأخیری نامیده

می‌شود و φ به پتانسیل نرده‌ای تأخیری معروف است.

معادله (۶۴.۱۶) را نیز می‌توان به طریق کاملاً مشابهی حل کرد. ابتدا بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{J}$ را برحسب مؤلفه‌هایشان در مختصات قائم می‌نویسیم. سه معادله حاصل خیلی شبیه به معادله (۶۶.۱۶) خواهند بود، مثلاً معادله مربوط به مؤلفه x ، به صورت زیر است

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x \quad (۸۲.۱۶)$$

هر يك از این معادلات را می‌توان درست مثل معادله (۶۶.۱۶) حل کرد، مثلاً جواب مؤلفه x به صورت زیر است

$$A_x(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J_x(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۸۳.۱۶)$$

باترکیب سه مؤلفه خواهیم داشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (۸۴.۱۶)$$

که به پتانسیل برداری تأخیری معروف است.

تعبیر فیزیکی پتانسیل‌های تأخیری جالب است. معادلات (۸۱.۱۶) و (۸۴.۱۶) نشان می‌دهند که در يك نقطه مشخص $\mathbf{r}$ در يك زمان معین t ، پتانسیل‌ها را بارها و جریانهایی که در زمان‌های پیشتر t' در سایر نقاط فضا $\mathbf{r}'$ وجود داشته‌اند، تعیین می‌کنند. زمان مناسب متناظر با هر يك از نقاط چشمه به اندازه مدت لازم برای رفتن از نقطه چشمه به نقطه میدان $\mathbf{r}$ با سرعت c ، از زمان t پیشتر است. مثلاً اگر يك جزء بار که در مبدأ مختصات قرار دارد ناگهان تغییر کند، تأثیر این تغییر در نقطه‌ای به فاصله r تا مدتی (به اندازه r/c) بعد از انجام تغییر، احساس نخواهد شد. تأثیر این تغییر تقریباً به صورت يك سطح موج کروی به طرف خارج منتشر می‌شود. (برای يك بار نقطه‌ای در واقع وضع پیچیده‌تر از این است، زیرا چگالی بار و چگالی جریان از طریق معادله $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$ به هم مربوط‌اند.) با پیدا کردن پتانسیل‌های نرده‌ای و برداری، میدان‌ها را با گرفتن شیب φ و مشتق زمانی و تاو $\mathbf{A}$ به دست می‌آوریم. انجام این اعمال در اصول راحت است؛ ولی خواهیم دید که در عمل نسبتاً پیچیده است.

در روش بالا اعمال شرط لورنتس (۶۳.۱۶) بر روی پتانسیل‌ها گامی اساسی بود؛ در غیر این صورت پتانسیل‌ها مجبور نبودند در معادلات موج ساده صدق کنند. برای آنکه ببینیم که ما همواره در اعمال این شرط آزادی داریم، فرض کنید که $\mathbf{A}$ و φ انتخاب خاصی برای توابع پتانسیل‌اند که میدان‌های صحیح $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را بر طبق معادلات (۵۷.۱۶) و

(۶۰.۱۶) به دست می‌دهند. در این صورت، چنانچه ما پتانسیلهای جدید زیر را انتخاب کنیم

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \xi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (۸۵.۱۶)$$

این پتانسیلها نیز هنگامی که در معادلات (۵۷.۱۶) و (۶۰.۱۶) قرار داده شوند، بدون توجه به آنکه تابع ξ چه نوع تابعی است (این تابع کاملاً اختیاری است)، دقیقاً همان میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را به دست خواهند داد. این تغییر به پتانسیلهای جدیدی که از نظریه فیزیکی معادل اند، تبدیل پیمانه‌ای نامیده می‌شود. حال با قرار دادن $\mathbf{A}'$ و φ' در معادله (۶۳.۱۶) برای آنکه $\mathbf{A}'$ و φ' در شرط لورنتس صدق کنند، پس از مرتب کردن جملات، معادله موج نرده‌ای زیر برای ξ به دست می‌آید

$$\nabla^2 \xi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

بنابراین، چنانچه پتانسیلهای اصلی در شرط لورنتس صدق کنند، پتانسیلهای جدید نیز صدق خواهند کرد مشروط بر آنکه ξ در معادله موج نرده‌ای همگن صدق کند. اگر $\mathbf{A}$ و φ اصلی در شرط لورنتس صدق نکنند، باز هم می‌توانیم پتانسیلهای جدیدی انتخاب کنیم که در این شرط صدق کنند که در آن صورت ξ باید به صورت جواب معادله موج نرده‌ای غیر همگن انتخاب شود و عبارت زیر

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

چشمه معادله غیر همگن است. در همین بخش دیده‌ایم که چگونه می‌توان جواب چنین معادله‌ای را پیدا کرد. انتخاب پتانسیلها به گونه‌ای که در شرط لورنتس صدق کنند، پیمانه لورنتس نامیده می‌شود. در وضعیتهای دیگر سایر انتخابها برای پیمانه (یعنی، سایر انتخابها برای $\nabla \cdot \mathbf{A}$) سودمندند.

بادر دست داشتن پتانسیلهای تأخیری کار اساسی درباره تابش کامل شده است. باقی می‌ماند که این مطالب را برای حل مسائل عملی به کار ببریم. این کار را در پنج فصل بعد خواهیم کرد.

۷.۱۶ خلاصه مطالب

این فصل حاوی مبانی تمامی نظریه الکترومغناطیس کلاسیک است. معادلات ما کسول معادلات

دیفرانسیلی هستند که (همراه با شرایط مرزی برای هر وضعیت خاص) میدانهای تولید شده به وسیله چشمه های بار و جریان را تعیین می کنند

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ از نظر عملیاتی با نیروی لورنتس

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

تعریف می شوند، و میدانهای $\mathbf{D}$ و $\mathbf{H}$ از طریق معادلات ساختمندی محیط، $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ و $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$ ، به آن میدانها مربوط می شوند.

معادلات ماکسول پیامدهای مهم زیر را در بر دارند :

۱. بار الکتریکی بقا دارد و بقای آن بر طبق معادله پیوستگی است

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

۲. انرژی بقا دارد، بر طبق

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

که در آن چگالی انرژی میدان، u ، عبارت است از (در محیط خطی)

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

و $\mathbf{S}$ شار انرژی در واحد سطح (بردار پوینتینگ) است

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

۳. موج الکترومغناطیسی با سرعت $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ (سرعت نور) در خلا منتشر می شود.

۴. در فصل مشترک بین دو محیط متفاوت شرایط مرزی روی میدانها اعمال می شود، مهمترین این شرایط عبارت اند از پیوستگی مؤلفه های مماسی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$.

۵. میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را می‌توان از توابع پتانسیل به‌دست آورد

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

۶. چنانچه شرط لورنتس

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

اعمال شود، پتانسیلها در معادلات موج غیرهمگن زیر صدق می‌کنند

$$\nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}$$

این پتانسیلها امواج الکترومغناطیسی ناشی از توزیع بار و توزیع جریان از پیش مشخص شده را تعیین می‌کنند. جوابهای خاص این معادلات (درخلا) عبارت‌اند از

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

که در آن

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

زمان تأخیری نامیده می‌شود. این پتانسیلها، پتانسیلهای تأخیری نامیده می‌شوند.

مسائل

۱۰۱۶ ناحیه بین صفحات دایروی متوازی یک خازن از دی‌الکتریک با گذردهی ϵ پر شده است. دی‌الکتریک ناکامل است و رسانندگی آن g است. ظرفیت این خازن C است.

این خازن را با اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ باردار و سپس آن را از این اختلاف پتانسیل قطع می‌کنیم. (الف) بارروی خازن را بر حسب تابعی از زمان به دست آورید. (ب) جریان جا به جایی در دی الکتریک را پیدا کنید. (ج) میدان مغناطیسی در دی الکتریک را به دست آورید.

۲.۱۶ برای یک محیط دی الکتریک، Q به صورت نسبت چگالی جریان جا به جایی به چگالی جریان رسانایی تعریف می‌شود. برای انتشار موج تکفام، این کمیت تبدیل می‌شود به $Q = \omega\epsilon/g$. برای کوارتز و گوگرد Q را در فرکانسهای 10^6 ، 10^9 ، 10^{10} Hz به دست آورید.

۳.۱۶ دو صفحه مسطح دایره‌ای به شعاع a که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند، یک خازن ایده آل تشکیل می‌دهند: فرض کنید که دی الکتریک خازن عایقی کامل و میدان D در آن یکنواخت است (یعنی از میدان حاشیه‌ای در لبه صفحات چشمپوشی کنید). خازن با جریان ثابت I در حال باردار شدن است. (الف) میدان H را در نقطه P روی سطح استوانه‌ای دی الکتریک پیدا کنید. (ب) اندازه و جهت بردار پوینتینگ S را در نقطه P پیدا کنید. (ج) از $S \cdot n$ روی سطح استوانه‌ای دی الکتریک انتگرال بگیرید، و نشان دهید که نتیجه برابر است با آهنگ زمانی تغییر انرژی الکتروستاتیکی ذخیره شده در خازن.

۴.۱۶ یک سیم مستقیم فلزی با رسانندگی g و سطح مقطع A حامل جریان پایای I است. اندازه و جهت بردار پوینتینگ را در روی سطح این سیم به دست آورید. از مؤلفه عمودی بردار پوینتینگ در روی قسمتی از سطح سیم به طول L انتگرال بگیرید و نتیجه را با گرمای ژولی که در این قسمت تولید می‌شود، مقایسه کنید.

۵.۱۶ فرض کنید که در ناحیه‌ای از فضا یک میدان الکتروستاتیکی و همچنین یک میدان مغناطوستاتیکی وجود دارد. نشان دهید که هر چند که ممکن است بردار پوینتینگ غیر صفر باشد، ولی انتگرال سطحی $S \cdot n$ بر روی هر سطح بسته‌ای واقع در این ناحیه صفر می‌شود.

۶.۱۶ معادله موج یک بعدی زیر داده شده است

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

که در آن E اندازه بردار میدان الکتریکی است. فرض کنید E در امتداد یک جهت ثابت، مثل جهت y ، باشد. با تغییر متغیرهای زیر

$$\xi = t + \sqrt{\epsilon\mu}z$$

$$\eta = t - \sqrt{\epsilon\mu}z$$

نشان دهید که معادله موج به صورت ساده‌ای درمی‌آید که می‌توان به سادگی از آن انتگرال گرفت. از معادله موج انتگرال بگیرید تا نتیجه زیر حاصل شود

$$E(z, t) = E_x(\xi) + E_y(\eta)$$

که در آن E_x و E_y توابع دلخواهی هستند.

۷.۱۶ موج الکترومغناطیسی زیر داده شده است

$$\mathbf{E} = iE_0 \cos \omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t) + jE_0 \sin \omega(\sqrt{\epsilon\mu}z - t)$$

که در آن E_0 مقدار ثابتی است. میدان مغناطیسی و بردار پوئینتینگ آن را پیدا کنید.

* ۸.۱۶ با شروع از عبارتی برای نیروی وارد بر واحد حجم در ناحیه‌ای از خلأ که حاوی بارها و جریانهایی است

$$\mathbf{F}_v = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

و با استفاده از معادلات ماکسول و اتحاد برداری معادله (۲۴.۱۴)، نشان دهید

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_v = & -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \epsilon_0 \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{4} \epsilon_0 \nabla (E^2) + \epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ & + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla (B^2) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned}$$

(کمیت $\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ گاهی چگالی اندازه حرکت میدان الکترومغناطیسی نامیده می‌شود.)

۹.۱۶ یک موج تخت با E_x و B_y مشخص شده است و در جهت مثبت z انتشار می‌یابد

$$\mathbf{E} = iE_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)$$

نشان دهید که می‌توان پتانسیل نرده‌ای φ را مساوی صفر گرفت، و یک پتانسیل برداری ممکن مثل $\mathbf{A}$ را پیدا کنید که برای آن شرط لورنتس صادق باشد.

۱۰.۱۶ نشان دهید در خلأ با $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ ، معادلات ماکسول به طور صحیحی تنها از یک تابع برداری $\mathbf{A}$ که در معادلات زیر صدق کند، به دست می‌آیند

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

پیمانه‌ای که در آن $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ باشد پیمانه کولن نامیده می‌شود.

۱۱.۱۶ نشان دهید که در یک محیط خطی رسانا می‌توان پیمانه مناسبی انتخاب کرد به طوری که $\mathbf{A}$ و φ هر یک در معادله موج میرا (۲۹.۱۶) صدق کنند. فرض کنید $\rho = 0$ است.

۱۲.۱۶ محیطی داریم که در آن $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ و $\mu = \mu_0$ است ولی بردار قطبش $\mathbf{P}$ به صورت تابعی از مکان و زمان، یعنی، $\mathbf{P} = \mathbf{P}(x, y, z, t)$ داده شده است. نشان دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری $\mathbf{Z}$ (بردار هرتز) به دست می‌آیند که $\mathbf{Z}$ در معادله زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

و

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Z} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$$

۱۳.۱۶ محیطی داریم که در آن $\rho = 0$ و $\mathbf{J} = 0$ و $\epsilon = \epsilon_0$ است ولی بردار مغناطش $\mathbf{M}(x, y, z, t)$ تابع داده شده‌ای است. نشان دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری $\mathbf{Y}$ که در معادله زیر صدق می‌کند، به دست می‌آیند

$$\nabla^2 \mathbf{Y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{M}$$

و

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Y}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}$$

۱۴.۱۶ نشان دهید که معادلات ماکسول را برای محیطی همسانگرد، همگن، نارسانا و بدون بار به وسیله یکی از دو دسته معادلات زیر می‌توان برقرار کرد

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{F}\mathbf{a}) \quad \text{قسمت حقیقی} \quad ۰.۱$$

$$\mathbf{B} = \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (\mathbf{F}\mathbf{a}) \quad \text{قسمت حقیقی}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (F\mathbf{a}) \quad \text{قسمت حقیقی}$$

۰۲

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (F\mathbf{a}) \quad \text{قسمت حقیقی}$$

که در آن $\mathbf{a}$ يك بردار يکۀ ثابت است و F در معادله نردهای موج صدق می کند.

انتشار امواج الکترومغناطیسی

همچنانکه هنگام به دست آوردن معادله موج از روی معادلات ماکسول دیدیم، بعضی از جوابهای خاص معادلات ماکسول امواج الکترومغناطیسی را توصیف می کنند. اکنون این جوابها را به تفصیل بررسی می کنیم. ابتدا انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیطی خطی را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که محیط تا بینهایت گسترش دارد. این سؤال را که امواج در وهله اول چگونه تولید می شوند و چگونه به محیط وارد می شوند در فصلهای بعد بررسی می کنیم. نتایج حاصل در مورد امواج رادیویی، میکروموجها، تابش گرمایی، نور، اشعه ایکس، و مانند آن کاربرد خواهند داشت (هرچند که در فرکانسهای بالا اثرات کوانتوم مکانیکی نیز ممکن است مهم باشند).

۱۰۱۷ امواج تخت تکفام در محیطهای نارسانا

بررسی آن دسته از جوابهای معادله (۳۱.۱۶) که به جوابهای موج تخت مشهورند از هر جواب دیگری آسانتر است. موج تخت به صورت موجی تعریف می شود که، در هر لحظه از زمان، فاز آن در تمام نقاط واقع بر هریک از صفحات عمود بر راستای مشخصی یکسان است. برای مثال چنانچه این راستا، راستای z باشد، آنگاه E باید در تمام نقاطی که مقدار z آنها یکسان است، یعنی در تمام نقاط واقع در صفحه ای موازی با صفحه xy ، فاز یکسانی داشته باشد. بنابراین، جواب (۳۴.۱۶) که قبلاً درباره آن بحث شد يك موج تخت است، زیرا $(\omega t - kz)$ برای z و t مقروض، بدون توجه به آنکه x و y چه مقادیری داشته باشند، ثابت است. امواج تختی که در راستای z در حرکت اند برای مسائلی که در

آن انتخاب راستای z اختیاری است، مناسب‌اند. اما، در بسیاری مسائل دستگاه محور مختصات به دلایل دیگری انتخاب می‌شود، برای مثال به دلیل شرایط مرزی؛ در چنین مواردی لازم است که امواج تختی با جهات انتشار اختیاری داشته باشیم. فرض کنید می‌خواهیم موج تختی را بررسی کنیم که جهت انتشار آن در جهت برداریکۀ $\mathbf{u}$ است. در این صورت به جای متغیر z باید $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ ، یعنی، تصویر $\mathbf{r}$ در جهت $\mathbf{u}$ را در نما بگذاریم، بنابراین موج تختی با جهت انتشار $\mathbf{u}$ توسط

$$e^{-i(\omega t - \kappa \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}$$

توصیف می‌شود. اکنون برداری را که بردار انتشار نامیده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{\kappa} = \kappa \mathbf{u}$$

و بستگی فضایی و زمانی نمایی موج تخت را به صورت زیر می‌نویسیم

$$e^{-i(\omega t - \kappa \mathbf{r} \cdot \vec{\kappa})}$$

اگر $\mathbf{u} = \vec{\kappa}$ باشد ($\vec{\kappa}$ بردار یک‌ه در امتداد z است)، آنگاه $\mathbf{r} \cdot \vec{\kappa} = z$ ، همانطور که در حالت خاص داشتیم؛ البته در تمام موارد طول موج $\lambda = 2\pi/\kappa$ است. سرعت انتشار یک موج تخت تکفام، دقیقاً همان سرعت حرکت صفحات با فاز ثابت است. البته، فاز ثابت بدان معناست که

$$\vec{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{const.} \quad (۱۰۱۷)$$

اگر $\vec{\kappa} \cdot \mathbf{r}$ را به صورت $\kappa \xi$ بنویسیم (κ اندازه $\vec{\kappa}$ و ξ تصویر $\mathbf{r}$ در جهت $\vec{\kappa}$ است)، آنگاه معادله (۱۰۱۷) به صورت زیر درمی‌آید

$$\kappa \xi - \omega t = \text{const.}$$

بامشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به زمان، به دست می‌آوریم

$$v_p = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{n} \quad (۲۰۱۷)$$

که در آن از نتیجه معادله (۳۳.۱۶ الف)، $\kappa = n\omega/c$ ، استفاده کرده‌ایم. در خلا داریم

$$v_p = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

حال برای به دست آوردن جوابهای تفصیلی موج تخت برای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ ، می‌توانیم به معادله (۳۱.۱۶) برگردیم، ولی در واقع بهتر است که از خود معادلات ماکسول شروع کنیم. در محیط ما، توزیعهای جریان و بار از پیش مشخص شده‌ای وجود ندارند و رسانندگی $g = 0$ است، پس معادلات عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (3.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6.17)$$

از بحثی که قبلاً درباره معادله موج داشتیم، بستگی فضایی و زمانی مورد انتظار در موج تخت را می‌دانیم، پس فرض می‌کنیم که میدان $\mathbf{E}$ به صورت زیر است

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \dots \quad (7.17)$$

که در آن $\hat{\mathbf{E}}$ بردار دامنه ثابت مختلط موج تخت است. برای میدان $\mathbf{B}$ نیز رابطه مشابهی فرض می‌گیریم. حال این جوابها را در معادلات ماکسول (۳.۱۷) تا (۶.۱۷) قرار می‌دهیم. با این کار معلوم می‌شود که ثابتهای مفروض $\hat{\mathbf{E}}$ ، $\mathbf{k}$ و مانند آن باید درجه شرایطی صدق کنند تا توابع موج تخت واقعاً جوابهای معادلات ماکسول باشند.

بامشتق‌گیری از تابعی به صورت $\hat{\mathbf{E}} e^{-i\omega t}$ نسبت به زمان می‌بینیم که برای تابعی به این صورت خاص، عملگر $\partial/\partial t$ عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$$

همین‌طور، می‌بینیم (مسئله ۱.۱۷) که برای تابعی به صورت $\hat{\mathbf{E}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ عملگر ∇ عبارت است از

$$\nabla = i\mathbf{k}$$

بدین ترتیب برای امواج تخت، معادلات ماکسول (پس از حذف i و تابع نمایی) به صورت زیر درمی‌آیند

$$\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{D}} = 0 \quad (۸.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (۹.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \quad (۱۰.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{H}} = -\omega \hat{\mathbf{D}} \quad (۱۱.۱۷)$$

اگر فرض کنیم که محیط خطی است، معادلات ساختمندی عبارت خواهند بود از

$$\hat{\mathbf{D}} = \epsilon \hat{\mathbf{E}} \quad (۱۲.۱۷)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{B}} \quad (۱۳.۱۷)$$

همچنین فرض می‌کنیم محیط همگن و همسانگرد است، بنا براین ϵ و μ کمیت‌های نرده‌ای ثابتی هستند. تمام این کاربردها در مورد محیطهای غیرمغناطیسی^۱ صادق هستند، بنا براین برای سادگی فرض می‌کنیم $\mu = \mu_0$. حال با استفاده از روابط $\epsilon = K\epsilon_0$ و $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ معادلات ما کسول را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$K\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (۱۴.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (۱۵.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} \quad (۱۶.۱۷)$$

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c^2} K \hat{\mathbf{E}} \quad (۱۷.۱۷)$$

اگر فرض کنیم ω فرکانسی مفروض و K يك ثابت مفروض است، آنگاه باید $\vec{\kappa}$ ، $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ را طوری انتخاب کنیم که این مجموعه معادلات برداری جبری برقرار باشند. ابتدا، اگر فرض کنیم $K \neq 0$ ، می‌بینیم که $\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ است؛ البته همواره $\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$. این بدان معناست که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ هر دو باید بر κ عمود باشند. چنین موجی را عرضی می‌نامند.

۱. تنها محیطهایی که برای آنها در فرکانسهای پایین μ به طور قابل ملاحظه‌ای با μ_0 متفاوت است، محیطهای فرومغناطیسی هستند، که به هر جهت محیطهایی خطی نیستند. برای فرکانسهای نوری، برای تمام مواد، $\mu \cong \mu_0$ است. ما در اینجا تشدید پارامغناطیسی را، که تحت شرایط خاصی در فرکانسهای رادیویی و میکروموجی قابل مشاهده است، در نظر نمی‌گیریم.

(حالت $K=0$ در واقع امکان پذیر و غیر بدیهی است، ولی ما بحث آن را فعلاً به تأخیر می‌اندازیم). به علاوه، چون $\hat{\mathbf{B}}$ متناسب با $\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}}$ است، $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بر یکدیگر نیز عمودند. بردارهای $\vec{\kappa}$ ، $\mathbf{E}$ ، $\mathbf{B}$ (باهمین ترتیب) یک مجموعه متعامد راستگرد تشکیل می‌دهند. اندازه نسبی $\mathbf{E}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ نیز با معادله (۱۶.۱۷) تعیین می‌شود $\hat{\mathbf{B}} = (\kappa/\omega)\hat{\mathbf{E}}$. سرانجام با محاسبه ضرب برداری $\vec{\kappa}$ با معادله (۱۶.۱۷) و استفاده از معادله (۱۷.۱۷) برای $\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{B}}$ ، اندازه $\vec{\kappa}$ را به دست می‌آوریم

$$\vec{\kappa} \times (\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}}) = \omega \vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{B}} = -K(\omega/c)^2 \hat{\mathbf{E}}$$

با استفاده از اتحاد برداری زیر

$$\vec{\kappa} \times (\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{E}}) = (\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}}) \vec{\kappa} - \kappa^2 \hat{\mathbf{E}}$$

و اینکه برای موج عرضی $\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ خواهیم داشت

$$-K(\omega/c)^2 \hat{\mathbf{E}} = -\kappa^2 \hat{\mathbf{E}}$$

یا

$$\kappa = \sqrt{K} \omega / c \quad (18.17)$$

این رابطه، که رابطه پاشندگی عرضی نامیده می‌شود، اندازه بردار موج $\vec{\kappa}$ را بر حسب ω و K مفروض تعیین می‌کند.

خلاصه: یک موج تخت عرضی تکفام که در جهت مثبت $\mathbf{u}$ انتشار می‌یابد با معادلات زیر توصیف می‌شود

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}} e^{-i(\omega t - \kappa \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}} e^{-i(\omega t - \kappa \cdot \mathbf{r})} \quad [7.17]$$

که در آن $\vec{\kappa} = \kappa \mathbf{u}$ جهت $\mathbf{u}$ و فرکانس ω کاملاً اختیاری‌اند. دامنه $\hat{\mathbf{E}}$ دلخواه است بجز آنکه باید بر $\mathbf{u}$ عمود باشد

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (19.17)$$

اندازه $\vec{\kappa}$ ، برای فرکانس ω مفروض، با ضریب شکست ماده تعیین می‌شود

$$\kappa = n\omega/c \quad (20.17)$$

که در آن n به صورت زیر تعریف شده است

$$n = \sqrt{K} \quad (21.17)$$

بدین ترتیب هم اندازه و هم جهت $\hat{\mathbf{B}}$ کاملاً تعیین می شود

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad (22.17)$$

توجه کنید که در خلا ($n=1$) برحسب یکاهای mks، داریم $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{E}}$ سرعت فاز موج c/n است. با داشتن این نتایج می توانیم بعضی از مسائل اپتیکی مهم و فوق العاده جالب را بررسی کنیم. با وجود این، این بررسیها را به فصل بعد موکول می کنیم. هر چند که جوابهای موج تخت تنها رده محدودی از جوابهای معادلات ماکسول اند، ولی این جوابها بسیار مهم اند زیرا مبنای رده به مراتب وسیعتری از جوابها را تشکیل می دهند. چون معادلات خطی اند، ترکیبی خطی از جوابها (برهم نهی امواج تخت) نیز یک جواب است. بنابراین از جمع امواج تخت می توانیم جوابهای دیگری به دست آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \hat{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{k}}_i, \omega_i) \exp[-i(\omega_i t - \vec{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r})] \quad (23.17)$$

که در آن هر یک از ضرایب $\hat{\mathbf{E}}$ به $\vec{\mathbf{k}}_i$ و ω_i بستگی خواهند داشت. این برهم نهی امواج تخت به صورت یک سری فوری (مختلط) است و، بنابراین، می تواند نمایشگر هر جوابی که تناوبی است (نه لزوماً سینوسی) باشد. هر یک از جملات این سری باید به طور جداگانه در شرایط معادلات (۱۴.۱۷) تا (۱۷.۱۷) صدق کنند. برای جوابی که حتی تناوبی هم نیست، علامت جمع در (۲۳.۱۷) را می توان به علامت انتگرال تبدیل کرد (انتگرال فوریه) که در آن $\hat{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ تابع پیوسته ای از κ و ω است. تابع $\hat{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{k}}, \omega)$ تبدیل فوریه $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ نامیده می شود. در این حالت باید این امکان را نیز در نظر بگیریم که n به κ و ω بستگی دارد

$$n = n(\kappa, \omega)$$

این اثر، که به پاشندگی مشهور است، در فصل ۱۹ بحث خواهد شد.

۱. برحسب یکاهای گاوسی، بنابر بحث فصل ۸، ما B را با B/c عوض می کنیم. لذا $B=E$. به عبارت دیگر اندازه میدانهای E و B برای یک موج تخت در خلا، یکسان است.

۲۰۱۷ قطبش

دامنه‌های برداری مختلط $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ را با تفصیل بیشتری می‌توان بررسی کرد. در واقع، تاکنون به‌طور صریح نگفته‌ایم که از نظر ما بردار مختلط به‌چه معناست. دو معنای کاملاً واضح می‌توان مطرح کرد: (الف) کمیتی مختلط که قسمت‌های حقیقی و موهومی آن بردارهای حقیقی هستند

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_r + i\mathbf{E}_i$$

(ب) برداری که مؤلفه‌های آن (نسبت به بردارهای پایه حقیقی) کمیت‌های نرده‌ای مختلطی هستند

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} + \hat{E}_u \mathbf{u}$$

در مواقعی که لازم است کمیت‌های مختلط را مشخص کنیم، ما از علامت مد در بالای آن کمیت‌ها استفاده خواهیم کرد. کمیت‌های $\mathbf{p}$ ، $\mathbf{s}$ و $\mathbf{u}$ در صورت دوم $\mathbf{E}$ مجموعه راستگردی از بردارهای یک‌ه متعامد حقیقی هستند. با نوشتن صورت اول بر حسب مؤلفه‌ها و صورت دوم بر حسب قسمت‌های حقیقی و موهومی، به آسانی دیده می‌شود که چنانچه تساویهای زیر برقرار باشند، این دو فرمول‌بندی، معادل خواهند بود

$$E_{pr} = E_{rp} \quad E_{pi} = E_{ip} \quad E_{sr} = E_{rs}, \dots$$

برای مقاصد فعلی ما صورت دوم مناسبتر است. فرض می‌کنیم جهت انتشار موج تخت در امتداد $\mathbf{u}$ است، پس بنا بر نتیجه $\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{u} = 0$ از معادله (۱۹.۱۷) داریم $\hat{E}_u = 0$ ، ولی $\hat{E}_p$ و $\hat{E}_s$ اختیاری هستند

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_p \mathbf{p} + \hat{E}_s \mathbf{s} \quad (24.17)$$

بردار یک‌ه $\mathbf{p}$ را می‌توان در هر جهتی که بر $\mathbf{u}$ عمود باشد انتخاب کرد، در فصل بعد انتخاب خاصی به‌عمل خواهیم آورد که نمادگذاری را که در اینجا معرفی می‌شود، توجیه خواهد کرد.

همچنین مناسبتر است که مؤلفه‌های مختلط را به‌جای آنکه بر حسب قسمت‌های حقیقی و موهومی بنویسیم به‌صورت قطبی بیان کنیم. فرض کنید

$$\hat{E}_p = E_p e^{i\phi_p} \quad \text{و} \quad \hat{E}_s = E_s e^{i\phi_s} \quad (25.17)$$

$$\hat{E}_s e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = E_s e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi_s)}$$

این بدان معناست که ϕ_s فاز مؤلفه میدان E در امتداد s است. با فرض روابط زیر

$$\phi_p - \phi_s = \phi \quad \text{و} \quad \phi_s = 0$$

هیچگونه محدودیتی وارد نمی‌شود، زیرا انتخاب $\phi_s = 0$ تنها بدان معناست که برای t مبدأً خاصی انتخاب کنیم. با این انتخاب، داریم

$$\hat{\mathbf{E}} = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \phi)} + E_s \mathbf{s} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

که قسمت حقیقی آن عبارت است از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}) \quad (۲۶.۱۷)$$

میدان E به دو مؤلفه در دو جهت، بصادامنه‌های E_p و E_s که می‌توانند هر مقداری داشته باشند، تجزیه می‌شود. به علاوه این دو مؤلفه ممکن است با اختلاف فاز ϕ نسبت به یکدیگر نوسان کنند؛ یعنی، در هر نقطه مفروض $\mathbf{r}$ ، ماکزیمم E در جهت $\mathbf{p}$ و ماکزیمم E در جهت $\mathbf{s}$ ممکن است در یک زمان نباشند.

با در نظر گرفتن بعضی حالات خاص، تصویر تفصیلی میدان نوسان کننده E را در نقطه‌ای مشخص، مثلاً در $\mathbf{r} = 0$ ، بهتر می‌توان دید. ابتدا، فرض کنید $\phi = 0$. آنگاه

$$\mathbf{E}(0, t) = (E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t$$

میدان E متناوباً از مقدار $\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$ به صفر و از صفر به $-\sqrt{E_p^2 + E_s^2}$ کاهش می‌یابد و مجدداً به مقدار اولیه‌اش می‌رسد، و همواره میدان E در امتداد جهت $E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$ قرار دارد. این حالت که قطبش خطی^۱ نامیده می‌شود در شکل ۱.۱۷ نشان داده شده است. اگر $E_p = 0$ یا $E_s = 0$ باشد، باز هم قطبش خطی داریم، ولی در آن صورت ϕ تعریف نشده است. برای $\phi = \pi$

$$\mathbf{E}(0, t) = (-E_p \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}) \cos \omega t$$

۱. استفاده از واژه «قطبش» در اینجا با کاربرد این واژه در فصل ۴ هیچ ربطی ندارد. باعث تأسف است که به طور سنتی از لغت یکسانی استفاده شده است، ولی ابهامی بروز نخواهد کرد زیرا یک کاربرد آن در مورد امواج است و کاربرد دیگری در مورد محیطها.

مجدداً قطبش خطی داریم، همان طور که در شکل ۱۰.۱۷ نشان داده شده است. برای $\phi = \pi/2$

$$\mathbf{E}(0, t) = E_p \mathbf{p} \sin \omega t + E_s \mathbf{s} \cos \omega t$$

انتهای بردار E یک مسیر بیضوی را در جهت ساعتگرد طی می کند، همانطور که در شکل نشان داده شده است. این حالت را قطبش بیضوی (استگرد) می نامند. برای $\phi = -\pi/2$ مسیر همان مسیر است ولی به طور عکس ساعتگرد طی می شود، و قطبش را قطبش بیضوی چپگرد می نامند. در حالت خاص $\phi = \pm \pi/2$ ، $E_p = E_s$ ، قطبش دایروی (راستگرد یا چپگرد) است. برای سایر مقادیر ϕ ، باز هم قطبش بیضوی (حتی اگر $E_p = E_s$ باشد) خواهیم داشت: مسیری شده باز هم یک بیضی است که در مستطیل شکل ۱۰.۱۷ محاط است، ولی محورهای اصلی و فرعی بیضی با محورهای p و s زاویه می سازند. برای قطبش بیضوی اندازه بردار E هرگز صفر نمی شود، هر چند که مؤلفه آن در هر یک از جهات مفروض صفر می شود.

دامنه مختلط بردار B از معادله (۲۲.۱۷) به دست می آید

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad [22.17]$$

با ضرب نرده ای این رابطه در $\hat{\mathbf{E}}$ ، و جابه جا کردن ضرب نرده ای و برداری، خواهیم داشت

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$$

در حالت کلی صفر شدن ضرب نرده ای دو بردار مختلط بدان معنا نیست که قسمتهای حقیقی آن دو بر هم عمودند، ولی در این حالت قسمتهای حقیقی بر یکدیگر عمودند. از معادله (۲۶.۱۷) با نوشتن $\mathbf{E}(0, t) = \mathbf{E}$ ، برای قسمت حقیقی آن داریم

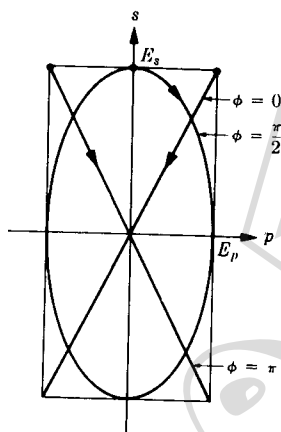
$$\mathbf{E} = E_p \mathbf{p} \cos(\omega t - \phi) + E_s \mathbf{s} \cos \omega t \quad (27.17)$$

برای قسمت حقیقی $\mathbf{B}(0, t) = \mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} e^{-i\omega t}$ ، با استفاده از معادله (۲۲.۱۷)، داریم

$$\mathbf{B} = (n/c) [E_p \mathbf{s} \cos(\omega t - \phi) - E_s \mathbf{p} \cos \omega t] \quad (28.17)$$

چون ضرب نرده ای معادله (۲۸.۱۷) با (۲۷.۱۷) صفر است، بردارهای حقیقی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در هر لحظه بر یکدیگر عمودند. همچنین $\text{Re } \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}(0, 0)$ و $\text{Re } \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(0, 0)$ بنا بر این قسمتهای حقیقی $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ بر هم عمودند. مسیری که انتهای بردار $\mathbf{B}$ طی می کند همان مسیر شکل ۱۰.۱۷ است که 90° عکس ساعتگرد چرخیده باشد.

۱. متأسفانه در اینجا قانون دست راست به کار نمی رود و فرار داد به همین صورت است.



شکل ۱۰۱۷ نمایش مسیری که انتهای بردار $\mathbf{E}$ در نقطه مفروضی در فضا به صورت تابعی از زمان طی می کند. بردار انتشار $\mathbf{u}$ به طرف خارج از صفحه کاغذ است. مسیرهای $\phi = 0$ و $\phi = \pi$ مربوط به قطبش خطی است. مسیر $\phi = \pi/2$ مربوط به قطبش بیضوی راستگرد است؛ برای $\phi = -\pi/2$ (چپگرد) مسیر در جهت معکوس طی می شود.

از آنجا که محورهای p و s در صفحه عمود بر $\mathbf{u}$ به طور دلخواه انتخاب شده بودند، هر انتخاب دیگری نیز مجاز است. هر انتخاب جدیدی محورهای مختصات شکل ۱۰۱۷ را می چرخاند و مقادیر جدیدی برای E_p ، E_s ، و ϕ به دست می دهد، ولی مسیری که بردار $\mathbf{E}$ در شکل ۱۰۱۷ طی می کند نمایشگر یک واقعیت فیزیکی است و در اثر تبدیل مختصات تغییر نخواهد کرد. ولی در اینجا، حتی حالت فیزیکی قطبش خود بخشی از آزادی در انتخاب جوابهای موج تختی است که برای محیطی نامتناهی فرض کردیم. در فصل بعد خواهیم دید که چگونه می توان قطبش خاصی را تولید و اندازه گیری کرد.

۳.۱۷ چگالی و شار انرژی

ما عبارات مختلط را برای میدانهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ آزادانه به کار برده ایم منتها با این توجه که کمیت های فیزیکی واقعی قسمتهای حقیقی کمیت های مختلط اند. توجه ریاضی این امر آن است که معادلات ماکسول معادلاتی خطی اند و قسمتهای حقیقی و موهومی يك جواب مختلط هر يك جدا گانه در این معادلات صدق می کنند. ولی عبارتهای زیر

$$u = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (29.17)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (30.17)$$

برای چگالی انرژی و شار انرژی در واحد سطح، بر حسب میدانها عباراتی غیر خطی اند. بنا براین، در این عبارات لازم است که قبل از آنکه میدانها را در یکدیگر ضرب کنیم قسمت حقیقی آنها را استخراج کنیم (مسئله ۶.۱۷). از آنجا که مبدأ مختصات اختیاری است، مجدداً می‌توانیم مقادیر نوعی را برای $\mathbf{r} = 0$ محاسبه کنیم. بسا مجذور کردن معادلات (۲۷.۱۷) و (۲۸.۱۷)، داریم

$$E^2 = E_p^2 \cos^2(\omega t - \phi) + E_s^2 \cos^2 \omega t \quad (31.17)$$

$$B^2 = (n/c)^2 E^2 = \epsilon \mu_0 E^2 \quad (32.17)$$

چون $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ و $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ، می‌بینیم که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در چگالی انرژی سهم یکسانی دارند

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$$

$$u = \epsilon E^2 = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{n}{c} \right)^2 E^2 \quad (33.17)$$

به علاوه، $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH \mathbf{u}$ ، بنا براین بردار پوینتینگ در راستای جهت انتشار است و اندازه آن برابر است با

$$S = \frac{1}{\mu_0} \frac{n}{c} E^2 \quad (34.17)$$

برای امواج تخت چگالی انرژی و شار انرژی در واحد سطح، به صورت بسیار ساده‌ای درآمده‌اند. به علاوه، این دو عبارت را می‌توان ترکیب کرد و نتیجه جالبی به دست آورد که مستقل از مقدار خاص میدان E است

$$S = \frac{c}{n} u \quad (35.17)$$

چنانچه سرعت فاز موج تخت را به صورت برداری در جهت انتشار با بزرگی v_p ،

$$v_p = \frac{c}{n}$$

بنویسیم، آنگاه

$$S = uv_p$$

این معادله مشابه رابطه

$$J = \rho v$$

است که چگالی جریان الکتریکی همرفتی را بر حسب چگالی بار الکتریکی و سرعت بار تعریف می‌کند. این تشابه تعبیر S به عنوان چگالی جریان انرژی، یعنی، به عنوان چگالی انرژی u که با سرعت فاز موج تخت v_p انتقال می‌یابد را قوت می‌بخشد.

بستگی u و S به زمان توسط E^2 از معادله (۳۱.۱۷) تعیین می‌شود که به قطبش موج بستگی دارد. برای قطبش دایروی ($\phi = \pm \pi/2$)

$$E^2 = E_p^2 \sin^2 \omega t + E_p^2 \cos^2 \omega t = E_p^2$$

که نسبت به زمان ثابت است؛ برای قطبش خطی ($\phi = 0, \pi$)

$$E^2 = (E_p^2 + E_s^2) \cos^2 \omega t$$

که با فرکانسی دو برابر فرکانس موج بین صفر و ماکزیمم مقدارش تغییر می‌کند. البته، در همه موارد E^2 همواره مثبت است. به هر جهت، در فرکانسهای بالا بستگی به زمان قابل اندازه گیری نیست و آنچه بیشتر مورد توجه است میانگین زمانی E^2 است. از آنجا که میانگین زمانی $\cos^2(\omega t - \phi)$ در یک دوره تناوب برابر $1/2$ است، برای هر قطبشی داریم

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} (E_p^2 + E_s^2) \quad (36.17)$$

این رابطه و نتایجی مشابه آن را با استفاده از قضیه‌ای که در فصل ۱۳ بدون اثبات ارائه شد، می‌توان به سرعت به دست آورد. اثبات آن قضیه را در اینجا می‌آوریم.

اگر $f = f_0 e^{i\omega t}$ و $g = g_0 e^{i\omega t}$ باشد، که در آن f_0 و g_0 به زمان بستگی ندارند هر چند ممکن است به متغیرهای دیگری بستگی داشته باشند، آنگاه

$$\overline{\text{Re } f \text{ Re } g} = \frac{1}{2} \text{Re } f^* g \quad (37.17)$$

خط بالای کمیت سمت چپ به معنای میانگین زمانی است. برای اثبات این رابطه فرض

کنید $f_0 = u + iv$ و $g_0 = \xi + i\eta$. آنگاه

$$\operatorname{Re} f \operatorname{Re} g = (u \cos \omega t - v \sin \omega t) (\xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t) \quad (38.17)$$

از طرفی

$$\operatorname{Re} f^* g = u\xi + v\eta \quad (39.17)$$

انتگرالهای زیر به آسانی قابل اثبات اند

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t \, dt = 0$$

به کمک این انتگرالها به آسانی می توان دید که میانگین زمانی معادله (38.17) عبارت است از

$$\overline{\operatorname{Re} f \operatorname{Re} g} = \frac{1}{2} (u\xi + v\eta) \quad (40.17)$$

از مقایسه (40.17) با (39.17) قضیه مذکور در معادله (37.17) اثبات می شود. این قضیه برای ضرب هر دو کمیت مختلطی که به صورت هماهنگ با فرکانس یکسان به زمان بستگی داشته باشند، ولی لزوماً فاز یکسانی نداشته باشند، صادق است. اگر این کمیتها برداری باشند، این ضرب می تواند یا ضرب نرده ای باشد یا ضرب برداری. می توان به آسانی بررسی کرد که با گذاشتن بردار مختلط $\mathbf{E}$ از معادله (26.17) در رابطه زیر

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E})$$

عبارت (36.17) مستقیماً به دست می آید.

۴.۱۷ امواج تخت تکفام در محیطهای رسانا

@Quark Book

در يك محیط رسانا می توانیم جوابهای موج تختی را به دست آوریم که به طور صوری

شبهات زیادی به جوابهای بخش ۱۰.۱۷ دارند، هر چند که رفتار فیزیکی آنها به مراتب پیچیده تر است. بسازیم فرض می کنیم که توزیعهای جریان و بار از پیش مشخص شده‌ای وجود ندارند، ولی اکنون يك چگالی جریان القا می تواند در پاسخ محیط به میدان E موج وجود داشته باشد، $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. ما از همان جایی شروع می کنیم که در مورد محیط نارسانا شروع کردیم بجز آنکه به جای معادله (۶.۱۷) معادله زیر را داریم

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + g\mathbf{E}$$

با همان فرضها و جانشانیهای قبل، به جای آنکه به معادله (۱۱.۱۷) برسیم، به معادله زیر می رسیم

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{H}} = -\omega \hat{\mathbf{D}} - ig\hat{\mathbf{E}}$$

باز هم مانند قبل، این معادله تبدیل می شود به

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \left(K + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega} \right) \hat{\mathbf{E}}$$

حال برای آنکه حالت مورد بحث را، تا حد امکان، به حالت قبل تبدیل کنیم، ثابت دی الکتریک مختلط را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\hat{K} = K + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega} \quad (۴۱.۱۷)$$

در این صورت معادله (۱۷.۱۷) تبدیل می شود به

$$\vec{\kappa} \times \hat{\mathbf{B}} = -\frac{\omega}{c^2} \hat{K} \hat{\mathbf{E}}$$

سپس اگر مجدداً فرض کنیم که $\hat{K} \neq 0$ و $\vec{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0$ ، رابطه باشندگی عرضی به دست می آید

$$\kappa = \sqrt{\hat{K}} \omega / c = \hat{n} \omega / c \quad (۴۲.۱۷)$$

که در اینجا ضریب شکست مختلط $\hat{n}$ به صورت زیر تعریف شده است

$$\hat{n}^2 = \hat{K} \quad (۴۳.۱۷)$$

برای آنکه معادله (۴۲.۱۷) صادق باشد، باید فرض کنیم که در محیطی رسانا یا $\vec{\kappa}$ کمیتی

مختلط است یا ω ، در فصل قبل دربارهٔ موردی که ω مختلط باشد به اجمال بحث کردیم. جوابهایی که برای مطالب فصلهای بعد جالبترند از این فرض نتیجه می‌شوند که ω را حقیقی و $\vec{k}$ را مختلط بگیریم. پس $\vec{k}$ را به صورت $\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$ می‌نویسیم. خواهیم دید که این جوابها بر حسب زمان نوسانی خواهند بود (نه میرا)، ولی در فضا تضعیف می‌شوند. اگر $\vec{k}, n, K, \vec{k}$ و $\mathbf{u}$ را در بخش ۱۰.۱۷ با $\vec{k}, \hat{n}, \vec{k}, \hat{n}$ و $\hat{\mathbf{u}}$ تعویض کنیم، تمام نتایج آن بخش به طور صوری معتبر خواهند بود. تنها سؤال این است که این کمیتها از نظر فیزیکی چه معنایی دارند. برای تعبیر جوابهایی که بردار انتشار آنها ($\hat{k}$) مختلط است، بهتر است که آن را به صورت زیر بیان کنیم

$$\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i \quad (۴۴.۱۷)$$

(برخلاف نحوهٔ نمایشی که برای بردار دامنهٔ مختلط $\hat{\mathbf{E}}$ برگزیدیم). با قرار دادن $\vec{k}$ مختلط در جواب (۷.۱۷) نتایج زیر را به دست می‌آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{E}} e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}}) e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{B}} e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}}) e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})}$$

این جواب نمایشگر موج تختی است که با طول موج $\lambda = 2\pi/\kappa_r$ در جهت $\vec{k}_r$ انتشار می‌یابد، ولی دامنهٔ آن به جای آنکه ثابت باشد، کاهش می‌یابد و بیشترین کاهش آن در جهت $\vec{k}_i$ است. سطوح فاز ثابت صفحاتی هستند عمود بر جهت انتشار $\vec{k}_r$. همچنین سطوح دامنهٔ ثابتی وجود دارند که صفحاتی عمود بر $\vec{k}_i$ اند. کمیت نرده‌ای $\hat{k}$ که باید در رابطهٔ باشندگی، $\hat{k} = \hat{n}\omega/c$ به کار برود عبارت است از

$$\hat{k} = \sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k}} = \sqrt{\kappa_r^2 - \kappa_i^2 + 2i\vec{k}_r \cdot \vec{k}_i}$$

اکنون به منظور بررسی سرعت فاز و طول تضعیف موج، $\hat{n}$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\hat{n} = n + ik \quad (۴۵.۱۷)$$

که در آن n و k ثابتهای اپتیکی نام دارند.

ابتدا فرض کنیم $\vec{k}_r$ و $\vec{k}_i$ جهت یکسانی دارند. (این فرضی است که تنها در موارد محدودی صحیح است و در بعضی موارد مهم که در فصل بعد دربارهٔ آنها بحث خواهد شد معتبر نیست؛ ولی به هر جهت می‌تواند صادق باشد، مثلاً در موردی که موج از خارج عمود بر یک مرز تخت وارد محیط رسانا می‌شود.) در آن صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\vec{k} = (\kappa_r + i\kappa_i)\mathbf{u} = \hat{k}\mathbf{u}$$

که در آن $\mathbf{u}$ بردار یکه حقیقی در جهت مشترك $\vec{\kappa}_r$ و $\vec{\kappa}_i$ است. چون $\mathbf{u}$ حقیقی است، معادلات زیر

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{B}}$$

بازهم بدان معناست که بردارهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بر جهت انتشار $\mathbf{u}$ عمودند. ولی، معادله (۲۲.۱۷) تبدیل می شود به

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\hat{n}}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad (۴۶.۱۷)$$

در اینجا $\hat{n}$ مختلط بدین معناست که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بایکدیگر هم فاز نیستند، و همچنین بدین معناست که بردارهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ حقیقی بر یکدیگر عمود نیستند مگر برای حالت قطبش خطی (مسئله ۹.۱۷). بر حسب ضریب شکست مختلط

$$\hat{n} = n + ik$$

روابط زیر را داریم

$$\kappa_r = n\omega/c \quad \text{و} \quad \kappa_i = k\omega/c \quad (۴۷.۱۷)$$

با نوشتن $\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} =$ در این حالت خاص عبارت زیر را برای میدان E به دست می آوریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{E}} e^{-k\omega \xi/c}) e^{-i\omega(t - n\xi/c)}$$

موج با سرعت فاز c/n و ثابت تضعیف $k\omega/c$ انتشار می یابد. کمیت اخیر تعیین می کند که دامنه نوسان کننده میدان با چه سرعتی نسبت به فاصله افت می کند. معکوس ثابت تضعیف

$$\delta = c/k\omega \quad (۴۸.۱۷)$$

که عمق پوسته نامیده می شود، اندازه فاصله ای را به دست می دهد که در آن دامنه میدان به $1/e$ مقدارش در هر نقطه مفروض (مثلاً در سطحی که موج وارد محیط می شود) افت می کند. برای محیطی نارسانا ($k=0$) این فاصله بینهایت بود. از آنجا که طول موج در محیط $\lambda = 2\pi c/n\omega$ است (برابر با $1/n$ طول موج درخلاء برای همان فرکانس)، عمق پوسته را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\delta = \frac{n}{k} \frac{\lambda}{2\pi} \quad (۴۹.۱۷)$$

درآمده ای که در آن اندازه k با اندازه n قابل قیاس است، «موج» در فاصله يك طول موج

تضعیف می‌شود؛ ولی اگر $k \ll n$ باشد، مثلاً در یک دی‌الکتریک ناساکنال که رسانندگی مختصری دارد، موج بدون تضعیف قابل ملاحظه‌ای چندین طول موج انتشار می‌یابد. در این حالت ماده را شفاف می‌نامند.

موقعی که $\vec{K}_r$ و $\vec{K}_i$ جهات متفاوتی داشته باشند، بردار یکۀ $\hat{u}$ را باید مختلط بگیریم. در آن صورت لازم نیست میدانهای حقیقی E و B بر $\vec{K}_r$ (یا بر $\vec{K}_i$) عمود باشند، هرچند که بازهم موج را «عرضی» می‌نامند چون اگر $\hat{K} \neq 0$ باشد $\hat{u} \cdot \hat{B} = 0 = \hat{u} \cdot \hat{E}$ است. بازهم طول موج و تضعیف به ثابتهای ماده، n و k ، بستگی خواهند داشت، ولی به نحوی بسیار پیچیده‌تر از معادله (۴۷.۱۷). چنانچه دقت لازم درباره کمیتهای مختلط به عمل آوریم، روابط قطبش و انرژی را نیز می‌توانیم تعمیم دهیم. ولی، نیازی به این نتایج عمومی نخواهیم داشت.

از آنجا که انتشار موج را ثابتهای اپتیکی n و k تعیین می‌کنند، مهم است که رابطه آنها را با کمیتهای K و g ، که خواص ماده در اصل برحسب آنها بیان شده بودند، به دست آوریم، تعاریف $\hat{n}$ و $\hat{K}$

$$\hat{n} = n + ik \quad [45.17]$$

$$\hat{K} = K + i \frac{g}{\epsilon_0 \omega} \quad [41.17]$$

از طریق معادله زیر

$$\hat{K} = \hat{n}^2 \quad [43.17]$$

به یکدیگر مربوط می‌شوند. این رابطه خیلی ساده به نظر می‌آید، ولی موقعی که آن را برحسب کمیتهای حقیقی n ، k و K ، g بیان کنیم، نسبتاً پیچیده می‌شود. $\hat{K}$ را به صورت زیر می‌نویسیم^۱

$$\hat{K} = K_r + iK_i$$

که در آن

$$K_r = K \quad \text{و} \quad K_i = g / \epsilon_0 \omega \quad (50.17)$$

بامجذور کردن $(n + ik)$ و مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی در معادله (۴۳.۱۷)، نتیجه می‌شود

۱. نمادگذاریهای متداولتر عبارت انداز $\hat{K} = K_r + iK_i$ یا $\hat{K} = K' + iK''$ ، ولی ما می‌خواهیم شاخصهای عددی و پیریم و دوپیریم را برای مقاصد دیگری در فصل بعد نگه داریم.

$$K_r = n^2 - k^2$$

$$K_i = 2nk \quad (51.17)$$

این معادلات را می‌توان برای n و k حل کرد

$$n = \sqrt{\frac{1}{\gamma} [K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]},$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{\gamma} [-K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]} \quad (52.17)$$

در اینجا ریشه‌های مثبت انتخاب شده‌اند تا آنکه n و k ، همان‌طور که معنای آنها ایجاب می‌کند، همواره حقیقی و مثبت باشند. باید متذکر شد که $K_i = g/\varepsilon_0 \omega$ ذاتاً مثبت است زیرا g مثبت است؛ اتلاف انرژی، $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = gE^2$ در یک محیط غیرفعال باید مثبت باشد؛ K_i همواره نماینده انرژی تلف شده است. از طرفی دیگر، $K_r = K$ می‌تواند هم مثبت باشد و هم منفی، و همین‌طور هم هست. برای محیطهای نارسا و میدانهای ساکن، K مثبت و بزرگتر از ۱ است، ولی برای میدانهای متناوب در فلزات، ممکن است کمتر از ۱، صفر، یا منفی باشد. مثالهای خاصی از این موارد را می‌توان در فصل ۱۹ یافت؛ فعلاً ما K و g را به عنوان کمیت‌هایی مفروض در نظر می‌گیریم با این شناخت که در هر ماده‌ای ممکن است این کمیتها به فرکانس بستگی داشته باشند.

معادلات بالا دقیق اما پیچیده‌اند؛ بنابراین بهتر است بعضی موارد تقریبی را بررسی کنیم. غالباً یکی از چند تقریب زیر معتبر است

$$K_i \ll |K_r|, K_r > 0 \left(\omega \gg \frac{g}{\varepsilon} \right): \quad 1.$$

$$n \cong \sqrt{K_r}, \quad k = K_i / 2n \ll n \quad (53.17)$$

$$K_i \ll |K_r|, K_r < 0 \left(\omega \gg \frac{g}{-\varepsilon} \right): \quad 2.$$

$$k \cong \sqrt{-K_r}, \quad n = K_i / 2k \ll k \quad (54.17)$$

$$K_i \gg |K_r|, \left(\omega \ll \frac{g}{|\varepsilon|} \right): \quad 3.$$

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i / 2} \quad (55.17)$$

برای مثال، تقریب (۱) برای يك عایق خوب، تا حد فرکانسهای خیلی پایین، اساساً تا حد dc (دقیقاً تا حد dc تنها برای عایق کامل با $g=0$)، معتبر است و نتیجه $n = \sqrt{K}$ را مشابه مورد نارسانا به دست می دهد. تقریب (۲) برای فلزات در قسمت بالای فرو سرخ طیف فرکانس معتبر است، در صورتی که تقریب (۳) برای فلزات در فرکانسهای میکروموج و پایینتر معتبر است. فرکانسی که حد فاصل بین تقریبهای (۲) و (۳) است عبارت است از $1/\tau \approx \omega$ که در آن τ زمان برخورد الکترونهاي آزاد است. برای فلزات خالص در دمای اتاق $1/\tau \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

در مسائل الکتریکی که در آنها عمق پوسته مهم است، معمولاً تقریب (۳) معتبر است. معادله (۴۹.۱۷) نشان می دهد که بر حسب طول موج، «موج» شدیداً تضعیف می شود. بر حسب فاصله مطلق، معادله (۴۸.۱۷) در مورد تقریب (۳) تبدیل می شود به

$$\delta \cong \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{2}{K_i}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega g}} \quad (56.17)$$

هنگامی که ω بدست صفر میل می کند δ بینهایت می شود، که این مطلب سازگار است با نتیجه قبلی ما مبنی بر آنکه میدان E و چگالی جریان در يك رسانا (ولی نه در يك ابر-رسانا^۱) برای جریانهای مستقیم و همچنین عملاً برای جریان متناوب ۵۰ هرتزی، یکنواخت هستند. ولی در فرکانسهای بالاتر، در گستره اعتبار معادله (۵۶.۱۷)، δ بسیار کوچک می شود.

برای مثال، رسانندگی نقره مرغوب در فرکانسهای میکروموج برابر است با

$$g = 3 \times 10^9 \text{ S}^*/\text{m}$$

در فرکانس 10^{10} سیکل بر ثانیه، که يك فرکانس معمولی میکروموج است، عمق پوسته برابر است با

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{(2\pi \times 10^{10})(3 \times 10^9)(4\pi \times 10^{-7})}} = 9.2 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

بنابراین در فرکانسهای میکروموج عمق پوسته در نقره خیلی کم است و نتیجتاً انتظار می رود که اختلاف بین عملکرد يك عنصر مدار که از نقره خالص ساخته شده است و عنصری که از برنج نقره اندود ساخته شده است، ناچیز باشد. در واقع همین طور هم هست و بدین جهت برای پایین آوردن هزینه ساخت قطعات موجبرهای خیلی خوب، از فن آوب فلزکاری استفاده

۱. عمق پوسته با عمق نفوذ که در فصل ۱۵ بحث شد هیچ ارتباطی ندارد.

* يك زیمنس (S) برابر با معکوس يك اهم است؛ زیمنس واحد رسانایی یا عکس مقاومت است (فصل ۷). زیمنس در گذشته mho نامیده می شد.

می‌شود.

اکنون به عنوان دومین مثال، فرکانسی را محاسبه می‌کنیم که برای آن عمق پوسته در آب دریا برابر یک متر باشد. برای آب دریا، $\mu = \mu_0$ و $g \approx ۴۳ \text{ S/m}$. فرکانس برای یک عمق پوسته مفروض δ عبارت است از

$$\omega = \frac{2}{g\mu_0 \delta^2} = \frac{2}{43 \times 4\pi \times 10^{-7} \delta^2} \text{ s}^{-1} = \frac{370 \times 10^5}{\delta^2} \text{ s}^{-1}$$

که نتیجه می‌شود

$$f = 5896 \times 10^3 \text{ Hz}$$

به عبارت دیگر، برای یک عمق پوسته یک متری فرکانس ۶۰ کیلو هرتز لازم است. اگر یک زیردریایی به یک گیرنده خیلی حساس مجهز باشد، و اگر از یک فرستنده خیلی قوی استفاده شود، می‌توان با این زیردریایی در زیر آب ارتباط برقرار کرد. ولی، باید از یک فرکانس رادیویی خیلی پایین استفاده شود زیرا حتی در این فرکانس نیز تضعیف موج فوق‌العاده شدید خواهد بود. در عمقی که پنج برابر عمق پوسته باشد (در مورد محاسبات فوق، در عمق پنج متری)، فقط یک درصد از میدان الکتریکی اولیه، و یک صدم درصد از توان موج فرودی، باقی خواهد ماند.

مورد ناهنجار $K = 0$ ، که تاکنون آن را در بحث منظور نکرده‌ایم، وجود موج طولی (در مقابل موج عرضی) را مجاز می‌سازد (مسئله ۱۴-۱۷). در چنین موجی $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ (هرچند که $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$)، به طوری که چگالی بار قطبشی برخلاف مورد موج عرضی صفر نمی‌شود؛ تنها یک چگالی بار می‌تواند میدانی طولی ایجاد کند. چنین امواجی در پلاسماها اهمیت دارند؛ نوسان الکتروستاتیکی که در بخش ۷-۱۴ بحث شد مثالی از امواج طولی است.

* ۵-۱۷ امواج کروی

به عنوان مثالی از یک مسئله موج مشکلتر، که در واقع حتی امواج ساده را در آن مسئله نمی‌توان به سادگی به دست آورد، معادله موج را در مختصات کروی بررسی می‌کنیم. معادله موج برای میدان الکتریکی در خلا به صورت زیر است

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (57.17)$$

برای امواج تکفام، قسمت مکانی معادله موج به صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (58.17)$$

اشکال استفاده از مختصات کروی در این است که ما می‌خواهیم بردار $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ را در این مختصات بر حسب مؤلفه‌های شعاعی، سمتی، و قطبی بنویسیم، و هر کدام از این مؤلفه‌ها را به صورت تابعی از شعاع، زاویه سمتی، و زاویه قطبی بیان کنیم. اگر این عمل را انجام دهیم، به کاربردن عبارت لاپلاسی در مختصات کروی در معادله (58.17) کافی نیست؛ بلکه به جای آن لازم است لاپلاسی یک بردار با معادله زیر تعریف شود

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (59.17)$$

و اگرایی بردار $\mathbf{E}$ باز هم صفر است؛ ولی، مؤلفه شعاعی، $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ نه تنها شامل مؤلفه شعاعی $\mathbf{E}$ است، بلکه مؤلفه‌های سمتی و قطبی آن را نیز شامل می‌شود. مؤلفه‌های θ و ϕ نیز به طور مشابه پیچیده‌اند، و نتیجه نهایی سه معادله با مشتقات جزئی است که هر یک هر سه مؤلفه $\mathbf{E}$ را شامل می‌شوند. جدا سازی که برای معادله برداری لاپلاس در مختصات قائم انجام پذیر است، در مختصات کروی انجام پذیر نیست؛ در واقع این کار مخصوص مختصات قائم است. ولی باید متذکر شویم که می‌توان مؤلفه‌های قائم $\mathbf{E}$ را به کار برد؛ در این مورد این مؤلفه‌ها باید به صورت زیر نوشته شوند

$$E_x(r, \theta, \phi), E_y(r, \theta, \phi), E_z(r, \theta, \phi)$$

با یک روش ساده می‌توان از برخورد با اشکال فوق‌الاحتراز کرد. معادله نرده‌ای هلمهولتز را در نظر بگیرید

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi = 0 \quad (60.17)$$

که همانطور که به زودی خواهیم دید جوابهای آن به سادگی به دست می‌آیند. فرض کنید ψ یکی از جوابهاست، آنگاه $\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi$ در معادله برداری هلمهولتز یعنی معادله (58.17) صدق می‌کند

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E} = 0 \quad (61.17)$$

برای تحقیق این مطلب، اتحاد زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi = -\nabla \times (\mathbf{r} \psi) \quad (62.17)$$

این اتحاد از اتحاد برداری زیر

$$\nabla \times (\mathbf{F}\varphi) = \varphi \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \varphi \quad (۶۳.۱۷)$$

و معادله

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad (۶۴.۱۷)$$

نتیجه می‌شود. چون واگرایی هر تاوی صفر است، فقط باید جمله تاو تاو را در معادله (۶۱.۱۷) در نظر بگیریم. تاو $\mathbf{E}$ را می‌توان با استفاده از اتحاد برداری زیر به دست آورد

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G} \nabla \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} \quad (۶۵.۱۷)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = \mathbf{r} \nabla^2 \psi - \nabla \psi \nabla \cdot \mathbf{r} + (\nabla \psi \cdot \nabla) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi \quad (۶۶.۱۷)$$

همان‌طور که در مسئله ۱۳.۱ نشان داده شد، برای هر برداری مثل $\mathbf{A}$ داریم $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{A}$ ؛ همچنین واگرایی بردار $\mathbf{r}$ مساوی سه (۳) است. اولین جمله معادله (۶۶.۱۷) را می‌توان با توجه به اینکه ψ در معادله نرده‌ای هلمهولتز صدق می‌کند، به صورت دیگری تبدیل کرد، بنابراین فقط جمله آخر باقی می‌ماند که ممکن است ایجاد اشکال کند. اتحاد برداری

$$\nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} + \mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \nabla \times \mathbf{F} \quad (۶۷.۱۷)$$

با $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ و $\mathbf{G} = \nabla \psi$ نتیجه زیر را به دست می‌دهد

$$\nabla (\mathbf{r} \cdot \nabla \psi) = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \psi + (\nabla \psi \cdot \nabla) \mathbf{r} \quad (۶۸.۱۷)$$

دوجمله آخر معادله (۶۷.۱۷) صفر می‌شوند زیرا تاو شیب و همچنین تاو $\mathbf{r}$ صفر است. با به کار بردن این روابط در معادله (۶۶.۱۷)، خواهیم داشت

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{r} \psi - 3 \nabla \psi + \nabla \psi - \nabla (\mathbf{r} \cdot \nabla \psi) + \nabla \psi \quad (۶۹.۱۷)$$

بالاخره با گرفتن تاو از معادله (۶۹.۱۷) نتیجه می‌گیریم

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \nabla \times \mathbf{r} \psi = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{r} \times \nabla \psi \quad (۷۰.۱۷)$$

که درست همان معادله برداری هلمهولتز است. در اینجا صریحاً هیچگونه استفاده‌ای از

مختصات کروی نشده است؛ ولی چون $\mathbf{r}$ بر سطحی به شعاع ثابت در مختصات کروی عمود است، انتظار می‌رود که جواب $\nabla\psi \times \mathbf{r}$ به‌طور خاص در این مختصات قابل استفاده باشد. در واقع این جواب در سایر دستگاه‌های مختصات چندان قابل استفاده نیست. حال که می‌دانیم $\nabla\psi \times \mathbf{r}$ یکی از جوابهای معادلهٔ برداری هلمهولتز است، که در آن ψ یکی از جوابهای معادلهٔ نرده‌ای هلمهولتز است، بهتر است بدانیم چگونه چنین جوابهایی را می‌توان برای ساختن امواج الکترومغناطیسی به‌کاربرد. روش آن خیلی ساده است. تغییرات مکانی میدان الکتریکی به‌صورت زیر انتخاب می‌شود

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla\psi \quad (۶۲.۱۷)$$

میدان مغناطیسی باید طوری انتخاب شود که همراه با $\mathbf{E}$ در معادلات ماکسول صدق کند. بدین منظور معادلهٔ (۵۰.۱۷) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \quad (۷۱.۱۷)$$

که در آن بستگی زمانی استاندارد $e^{-i\omega t}$ فرض شده است. معادلهٔ (۶۹.۱۷) تاو $\mathbf{E}$ را به‌طور صریح به‌دست می‌دهد، یا به‌شکل خلاصه‌تر

$$\mathbf{B} = -i \frac{1}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla\psi) \quad (۷۲.۱۷)$$

چون واگرایی هر تاوی صفر است، معادلهٔ (۴۰.۱۷) صادق است. از طرفی چون $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ هر دو جوابهای معادلهٔ موج‌اند، و این معادله به‌نوبه خود ترکیبی از معادلات (۵۰.۱۷) و (۶۰.۱۷) است، واضح است که معادلهٔ (۶۰.۱۷) نیز صادق است.

معادلات (۶۲.۱۷) و (۷۲.۱۷) نشان دهندهٔ عمومیت‌ترین جوابی نیستند که از یک ψ مفروض می‌توان به‌دست آورد. جواب دیگری را باقراردادن

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c} \mathbf{r} \times \nabla\psi \quad (۷۳.۱۷)$$

و به‌دست آوردن میدان الکتریکی از معادلهٔ (۶۰.۱۷)

$$\mathbf{E}' = \frac{ic}{\omega} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla\psi) \quad (۷۴.۱۷)$$

می‌توان به‌دست آورد. با توجه به ملاحظات که در بالا به تفصیل بررسی شد معلوم می‌شود که $\mathbf{E}'$ و $\mathbf{B}'$ مانند $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ جوابی برای معادلات ماکسول‌اند. این جوابها با یکدیگر این اختلاف را دارند که $\mathbf{E}$ در هر نقطه بر سطحی کروی که از آن نقطه می‌گذرد و مرکزش در

مبدأ مختصات است، مماس است؛ از طرف دیگر، $\mathbf{B}'$ نیز همین خاصیت را دارد. این واقعیت موجب شده است که گاهی جوابهای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را الکتریکی عرضی (TE) بنامند و $\mathbf{E}'$ و $\mathbf{B}'$ را مغناطیسی عرضی (TM)؛ منظور از عرضی این است که این میدانها بر امتداد شعاعی عمودند.

در صفحات قبل حل معادله برداری هلمهولتز تبدیل شد به حل معادله نردهای هلمهولتز در مختصات کروی این عمل باروش جداسازی متغیرها که از مسائل پتانسیل (فصل ۳) با آن آشنایی داریم، انجام پذیر است. در مختصات کروی، معادله نردهای هلمهولتز عبارت است از

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \kappa^2 \psi = 0 \quad (۷۵.۱۷)$$

که در آن $\kappa^2 = (\omega/c)^2$ و فرض می کنیم ψ به شکل زیر است

$$\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (۷۶.۱۷)$$

اگر ψ را با شکل فرض شده بالا در معادله (۷۵.۱۷) قرار دهیم و معادله را بر ψ تقسیم و در $r^2 \sin^2 \theta$ ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{R} \sin^2 \theta \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \kappa^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (۷۷.۱۷)$$

جمله سوم فقط به ϕ بستگی دارد و این تنها جمله ای است که به ϕ بستگی دارد. نتیجتاً این جمله باید یک عدد ثابت باشد که این عدد ثابت را به صورت $-m^2$ انتخاب می کنیم. به عبارت دیگر

$$\frac{d^2 \Phi_m}{d\phi^2} + m^2 \Phi_m = 0 \quad (۷۸.۱۷)$$

که در آن شاخص m نشان می دهد که Φ به m بستگی دارد. با استفاده از معادله (۷۸.۱۷) می توان معادله (۷۷.۱۷) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \kappa^2 r^2 + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (۷۹.۱۷)$$

دوجمله اول فقط به r و دوجمله آخر فقط به θ بستگی دارند. بنابراین مجموع دو جمله

آخر باید مساوی يك عدد ثابت باشد که آن را به صورت $l(l+1) -$ انتخاب می کنیم. البته مجموع دو جمله اول باید $l(l+1)$ باشد. بنابراین دو معادله زیر نتیجه می شوند

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta_{lm}}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta_{lm} = 0 \quad (۸۰.۱۷)$$

و

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR_l}{dr} - [l(l+1) - \kappa^2 r^2] R_l = 0 \quad (۸۱.۱۷)$$

جوابهای معادله (۷۸.۱۷) مشهورند

$$\Phi_m = e^{\mp im\phi} \quad (۸۲.۱۷)$$

جوابهای معادله (۸۰.۱۷) زیاد مشهور نیستند ولی تعدادی از آنها را در فصل ۳ دیدیم. در آنجا جوابهای مربوط به $m=0$ را بررسی کردیم. این جوابها، چند جمله ایهای لژاندر $P_l(\cos \theta)$ هستند. جوابهای (۸۰.۱۷) برای مقادیر دلخواه m که مساوی یا کوچکتر از l باشند، چند جمله ایهای وابسته لژاندر نامیده می شوند. این چند جمله ایها را می توان با معادله زیر تعریف کرد

$$P_l^m(u) = (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_l(u) \quad (۸۳.۱۷)$$

که در آن $u = \cos \theta$ است. واضح است که $P_l^0(u) = P_l(u)$ که همان چند جمله ایهای معمولی لژاندر است. به ازای $m \neq 0$ این توابع در جدول ۱۰.۱۷ داده شده اند. سرانجام معادله (۸۱.۱۷) را باید بررسی کرد. در این معادله می توانیم متغیر r را به $\xi = \kappa r$ تغییر دهیم و در نتیجه این معادله به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d}{d\xi} R_l - [l(l+1) - \xi^2] R_l = 0 \quad (۸۴.۱۷)$$

با قرار دادن $R_l = \xi^{-1/2} Z_l$ در معادله بالا، این معادله به صورت زیر درمی آید

$$\xi^2 \frac{d^2 Z_l}{d\xi^2} + \xi \frac{dZ_l}{d\xi} - \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \xi^2 \right] Z_l = 0 \quad (۸۵.۱۷)$$

۱. در فصل ۳ این توابع را به صورت $P_l(\theta)$ نوشتیم. ولی چون چند جمله ایهای لژاندر، چند جمله ایهایی از $\cos \theta$ هستند، معمولاً آنها را به صورت $P_l(\cos \theta)$ می نویسیم. در این فصل و فصلهای بعد این روش را دنبال خواهیم کرد.

جدول ۱۰۱۷ چند جمله‌ایهای وابسته لژاندر، $P_l^m(u)$ ، که در آن $u = \cos \theta$

علامت	تابع
$P_0(u)$	۱
$P_1(u)$	$u = \cos \theta$
$P_1^1(u)$	$(1-u^2)^{1/2} = \sin \theta$
$P_2(u)$	$\frac{1}{2}(3u^2-1) = \frac{1}{2}(3 \cos 2\theta + 1)$
$P_2^1(u)$	$3u(1-u^2)^{1/2} = \frac{3}{2} \sin 2\theta$
$P_2^2(u)$	$3(1-u^2) = \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta)$
$P_3(u)$	$\frac{1}{2}(\Delta u^3 - 3u)$
$P_3^1(u)$	$\frac{3}{2}(1-u^2)^{1/2}(\Delta u^2 - 1)$
$P_3^2(u)$	$3\Delta u(1-u^2)$
$P_3^3(u)$	$15(1-u^2)^{3/2}$

این معادله که برای ریاضی فیزیکدانها خیلی آشناست، به معادله بسل مشهور است. جوابهای این معادله نیز مشهورند و به طور وسیع مورد بررسی قرار گرفته و در واقع جدول بندی شده‌اند. جوابهای متداول این معادله با $J_{l+1/2}(kr)$ و $N_{l+1/2}(kr)$ نشان داده می‌شوند و به ترتیب تابع بسل و تابع نویمن از درجه $l+1/2$ نامیده می‌شوند. برای معادله موج بسیار مناسب است که توابع بسل کروی را با معادلات زیر تعریف کنیم

$$j_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} J_{l+1/2}(kr), \quad n_l(kr) = \sqrt{\pi/2kr} N_{l+1/2}(kr) \quad (۸۶.۱۷)$$

از این توابع به نوبه خود توابع زیر به دست می آیند

$$h_1^{(1)}(kr) = j_1(kr) + i n_1(kr), \quad h_1^{(2)}(kr) = j_1(kr) - i n_1(kr) \quad (۸۷.۱۷)$$

توابع $h_1^{(1)}(kr)$ ، $h_1^{(2)}(kr)$ ، $n_1(kr)$ ، $j_1(kr)$ همگی جوابهای معادله شعاعی، یعنی معادله (۸۱.۱۷) هستند. این توابع به ازای $l = 0, 1, 2$ در جدول ۲.۱۷ آمده اند. توابع h به طور اخص برای مسائل تابش مناسب اند زیرا رفتار آنها برای مقادیر بزرگ r به صورت زیر است

$$h_1^{(1)}(kr) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \frac{(-i)^{l+1} e^{i kr}}{kr}$$

$$h_1^{(2)}(kr) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \frac{(i)^{l+1} e^{-i kr}}{kr}$$

و بدین ترتیب به امواج کروی خروجی و ورودی منجر می شوند.
یک صورت کلی برای ψ می تواند به صورت زیر باشد

$$\psi_{lm} = \sqrt{\pi / 2kr} Z_l(kr) P_l^m(\cos \theta) e^{\pm i m \phi} \quad (۸۸.۱۷)$$

میدانهای برداری مربوط را می توان با استفاده از معادلات (۶۲.۱۷) و (۷۲.۱۷) برای امواج TE و از معادلات (۷۳.۱۷) و (۷۴.۱۷) برای امواج TM، به دست آورد. ψ_{10} ساده ترین انتخاب جالب برای ψ است، که عبارت است از

$$\psi_{10} = \frac{1}{kr} e^{i kr} \left[1 + \frac{i}{kr} \right] \cos \theta \quad (۸۹.۱۷)$$

شیب ψ_{10} برابر است با

$$\nabla \psi_{10} = a_r e^{i kr} \left[\frac{i}{r} - \frac{2}{kr^2} - \frac{2i}{k^2 r^3} \right] \cos \theta - a_\theta e^{i kr} \left[\frac{1}{kr^2} + \frac{i}{k^2 r^3} \right] \sin \theta \quad (۹۰.۱۷)$$

قسمت مکانی میدان الکتریکی عبارت است از

$$\mathbf{E} = \mathbf{r} \times \nabla \psi_{10} = -a_\phi E_0 e^{i kr} \left[\frac{1}{kr} + \frac{i}{k^2 r^2} \right] \sin \theta \quad (۹۱.۱۷)$$

جدول ۲۰۱۷ توابع بسل کروی و توابع نویمن

نوع	تابع
$j_0(\rho)$	$(1/\rho) \sin \rho$
$n_0(\rho)$	$-(1/\rho) \cos \rho$
$h_0^{(1)}(\rho)$	$-(i/\rho)e^{i\rho}$
$h_0^{(2)}(\rho)$	$(i/\rho)e^{-i\rho}$
$j_1(\rho)$	$(1/\rho^2) \sin \rho - (1/\rho) \cos \rho$
$n_1(\rho)$	$-(1/\rho) \sin \rho - (1/\rho^2) \cos \rho$
$h_1^{(1)}(\rho)$	$-(1/\rho)e^{i\rho}(1+i/\rho)$
$h_1^{(2)}(\rho)$	$-(1/\rho)e^{-i\rho}(1-i/\rho)$
$j_2(\rho)$	$\left[\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right] \sin \rho - \frac{3}{\rho^2} \cos \rho$
$n_2(\rho)$	$-\frac{3}{\rho^2} \sin \rho - \left[\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right] \cos \rho$
$h_2^{(1)}(\rho)$	$(i/\rho)e^{i\rho} \left(1 + \frac{3i}{\rho} - \frac{3}{\rho^2}\right)$
$h_2^{(2)}(\rho)$	$-(i/\rho)e^{-i\rho} \left(1 - \frac{3i}{\rho} - \frac{3}{\rho^2}\right)$

که در آن E_0 را بدین علت معرفی کرده ایم که معادله از لحاظ بعد صحیح باشد. سطوح فاز ثابت، $kr = \text{const}$ ، سطوحی کروی اند. (ولی سطوح دامنه ثابت کروی نیستند.) وابستگی فضایی میدان مغناطیسی با رابطه زیر داده می شود

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -i \frac{1}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= i \frac{1}{\omega} E_0 e^{i\kappa r} \left[\frac{1}{\kappa r^2} + \frac{i}{\kappa^2 r^3} \right] 2 \cos \theta \mathbf{a}_r \\ &\quad - i \frac{1}{\omega} E_0 e^{i\kappa r} \left[\frac{i}{r} - \frac{1}{\kappa r^2} - \frac{i}{\kappa^2 r^3} \right] \sin \theta \mathbf{a}_\theta \quad (92.17) \end{aligned}$$

همانطور که بعداً خواهیم دید، اینها درست میدانهای هستند که يك دوقطبی مغناطیسی تابش کننده ایجاد می کند. جالب توجه است که تنها آن قسمتهایی از $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ که با $1/r$ متناسب اند در تابش خالص دخالت می کنند. از بقیه جملات، جملاتی در بردار پوئینتینگ به دست می آید که سریعتر از $1/r^2$ کاهش می یابند و نتیجتاً انتگرال آنها روی سطوح کروی هنگامی که شعاع این سطوح به سمت بینهایت میل می کند، صفر می شود. جوابهای امواج کروی در مطالعه تابش از چشمه های کراندار، که در فصل ۲۰ آن را از دیدگاه دیگری بررسی خواهیم کرد، کاربرد دارند.

۶.۱۷ خلاصه مطالب

جوابهای موج عرضی معادلات ماکسول به ساده ترین نحو بر حسب امواج تخت بیان می شوند

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}} e^{-i(\omega t - \kappa \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}} e^{-i(\omega t - \kappa \cdot \mathbf{r})}$$

این جوابها، مادامی که $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$ باشد، برای هر فرکانس ω و هر دامنه $\hat{\mathbf{E}}$ وجود دارند. اندازه $\hat{\mathbf{B}}$ از رابطه پاشندگی عرضی تعیین می شود، هر چند که جهت آن دلخواه است. بردار $\hat{\mathbf{B}}$ (قسمت حقیقی) جهت انتشار و طول موج ($\lambda = 2\pi/\kappa$) را مشخص می کند. میدان مغناطیسی موج را سایر کمیتها تعیین می کنند.

۱. در خلا، رابطه پاشندگی عبارت است از

$$\kappa = \omega/c$$

که در آن $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ سرعت نور است. بردارهای $\hat{\mathbf{E}}$ ، $\hat{\mathbf{B}}$ ، $\mathbf{E}$ ، $\mathbf{B}$ يك مجموعه متعامد راستگرد را تشکیل می دهند. اندازه $\mathbf{B}$ در هر لحظه از زمان عبارت است از

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}/c$$

اگر دو مؤلفه $\mathbf{E}$ (در صفحه عمود بر $\vec{K}$) همفاز باشند، قطبش خطی است؛ اگر غیر همفاز باشند قطبش بیضوی است. رابطه بین اندازه بردار پوینتینگ و چگالی انرژی u عبارت است از

$$S = cu$$

و جهت S در امتداد $\vec{K}$ است.

۲. در یک محیط دی الکتریک خطی (نارسانا و غیر مغناطیسی)، تمام نتایج بالا معتبر است مشروط بر آنکه c/n را به جای c بگذاریم در چنین محیطی ضریب شکست n با ثابت دی الکتریک K به صورت زیر مربوط می شود

$$n = \sqrt{K}$$

(در یک محیط مغناطیسی خطی داریم، $n = \sqrt{KK_m}$ ، ولی این تعمیم کاربرد چندانی ندارد).

۳. در یک محیط رسانا تمام نتایج بالا به طور صوری معتبرند مشروط بر آنکه به جای K از ثابت دی الکتریک مختلط $\hat{K}$ استفاده شود که

$$\hat{K} = K + ig/\epsilon_0 \omega = K_r + iK_i$$

پیامد این امر آن است که ضریب شکست

$$\hat{n} = n + ik$$

و بردار انتشار

$$\vec{\hat{K}} = \vec{K}_r + i\vec{K}_i$$

نیز هردو مختلط اند. موج تضعیف می شود

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\mathbf{E}} e^{-\kappa_i \cdot \mathbf{r}}) e^{-i(\omega t - \kappa_r \cdot \mathbf{r})}$$

در ساده ترین حالت، $\kappa_r = n\omega/c$ ، $\kappa_i = k\omega/c$ ؛ ولی به طور کلی تمام روابط فیزیکی بند (۱) پیچیده تر می شوند.

۴. به طور کلی

$$\hat{K} = \hat{n}^2$$

رابطه بین ثابتهای اَبَتیکی و ثابتهای دی الکتریک حقیقی عبارت اند از

$$K_r = n^2 - k^2 \quad \text{و} \quad K_i = 2nk$$

و معکوس این روابط را نیز می‌توان به‌طور صریح نوشت. نتیجه پیچیده است، مگر آنکه موارد حدی خاصی کاربرد داشته باشند، که معمولاً دارند.

۵. برای رساناها طول تضعیف

$$\delta = c/\omega k = \frac{n}{k} \frac{\lambda}{2\pi}$$

که عمق پوسته نیز نامیده می‌شود، مهم است. می‌توان انتظار داشت که تقریب زیر

$$n \cong k \cong \sqrt{g/2\epsilon_0\omega}$$

لااقل برای رسانای نسبتاً خوب، در فرکانسهای پایینتر از گستره فرسرخ، معتبر باشد، به‌طوری‌که

$$\delta \cong \sqrt{2/\mu_0\omega g}$$

در اینجا برای g می‌توان رسانندگی dc را به‌کاربرد.

۶. غیر از امواج تخت، جالبترین مجموعه جوابهای موج برداری عرضی امواج کروی است. این امواج بسیار پیچیده‌ترند، ولی در مسائل تابش کاربرد دارند.

مسائل

۱۰.۱۷ اگر $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ باشد که در آن $\mathbf{A}$ ثابت است، نشان دهید

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = i\vec{k} \cdot \mathbf{F}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = i\vec{k} \times \mathbf{F}$$

۲۰.۱۷ نشان دهید برای موج تخت در خلأ داریم

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\Omega$$

@Quark_Book

H.M

این مقاومت را مقاومت ظاهری خلأ می‌نامند.

۳.۱۷ $\vec{k}, \omega$ و دامنه E ی دومی موج تخت مفروض یکسان اند، ولی قطبش دایره ای آنها عکس یکدیگر است (چپ و راست). نشان دهید که از برهمه‌نی این دو موج، موجی با قطبش خطی و دامنه $2E$ به دست می‌آید.

۴.۱۷ به ازای $E_s = 2E_p$ با $\phi = 30^\circ$ و با $\phi = 60^\circ$ شکلی مانند شکل ۱۰.۱۷ رسم کنید.

۵.۱۷ زمین تقریباً 1300 W/m^2 انرژی تابشی از خورشید دریافت می‌کند. با فرض آنکه این انرژی به صورت موج تک‌فامی با قطبش تخت است و با فرض فرود عمودی، اندازه بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی خورشید را محاسبه کنید.

۶.۱۷ فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردارهای مختلطی هستند. کمیت $\text{Re } \mathbf{A} \cdot \text{Re } \mathbf{B}$ را محاسبه و با $\text{Re}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ مقایسه کنید. نشان دهید که $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ ایجاب نمی‌کند که $\text{Re } \mathbf{A} \cdot \text{Re } \mathbf{B} = 0$ باشد.

۷.۱۷ دو موج تخت را در خلأ در نظر بگیرید که $\vec{k}, \omega$ و جهت قطبش $\mathbf{p}$ یکسانی دارند ولی دامنه‌ها و فازهای آنها متفاوت است: E_1, ϕ و E_2, ϕ . میانگین زمانی بردار پوینتینگ $\vec{S}$ مربوط به برهمه‌نی این دو موج را محاسبه کنید. به اثر تداخل ناشی از اختلاف فاز ϕ توجه کنید. چنانچه جهت‌های قطبش دو موج بر یکدیگر عمود بود، این اثر رخ نمی‌داد.

۸.۱۷ یک موج ایستا را در خلأ در نظر بگیرید که از برهمه‌نی دو موج با فرکانس، دامنه، و قطبش خطی یکسان، ولی با جهت انتشار $\vec{k}$ ی مخالف تشکیل شده است. بردار پوینتینگ $\vec{S}(\mathbf{r}, t)$ دو موج برهم نهاده را محاسبه کنید. (توجه کنید که مبدأ دلخواه است.) مقدار $\vec{S}$ چقدر است؟

۹.۱۷ برای موجی تخت در محیطی رسانا، داریم

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{n}}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{E}$$

فرض کنید $\mathbf{E}$ قطبش بیضوی دارد و $\hat{\mathbf{E}} = E_p e^{i\phi} \mathbf{p} + E_s \mathbf{s}$. ثابت کنید در هر لحظه از زمان

$$\text{Re } \mathbf{E} \cdot \text{Re } \mathbf{B} = -\frac{k}{c} E_p E_s \sin \phi$$

۱۰.۱۷ برای فلزات در ناحیه طیفی فروسرخ، در فرکانس $\omega \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ $\omega = g/(-\epsilon) \approx$ داریم $K_i = -K_r$. برای این حالت ثابت‌های اپتیکی n و k را بر حسب K_i محاسبه کنید.

۱۱.۱۷ برای دی‌الکتریکی که در فرکانسهای بالا جذب کننده می‌شود، یا برای یک نیم رسانا، داریم $K_i = K_r$. برای این مورد n و k را بر حسب K_r محاسبه کنید. نسبت طول تضعیف به طول موج، δ/λ را پیدا کنید.

۱۲.۱۷ نشان دهید که در محیطی تقریباً شفاف با ضریب شکست n ، طول تضعیف δ به صورت زیر به رسانندگی g مربوط است

$$\delta = \frac{2n}{g\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}$$

در اینجا $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377 \Omega$

۱۳.۱۷ بردار پوئین تینگ که متناسب E^2 است به صورت $e^{-\alpha z}$ افت می کند. در اینجا $\alpha = 2/\delta$ ضریب جذب نامیده می شود. افت توان را غالباً بر حسب دسی بل بر متر (dB/m) بیان می کنند و بنا بر تعریف یک دسی بل ده برابر لگاریتم معمولی نسبت شار انرژی اولیه به نهایی در واحد سطح است.
(الف) نشان دهید

$$\text{افت توان} = 434 \text{ dB/m}$$

(ب) از نتیجه مسئله ۱۲.۱۷، محاسبه کنید که رسانندگی (اپتیکی نه dc) یک محیط مخبرات امواج نوری چه مقدار باید باشد تا آنکه افت توانی کمتر از ۱ dB/km حاصل شود. فرض کنید ضریب شکست $n = 1.5$.

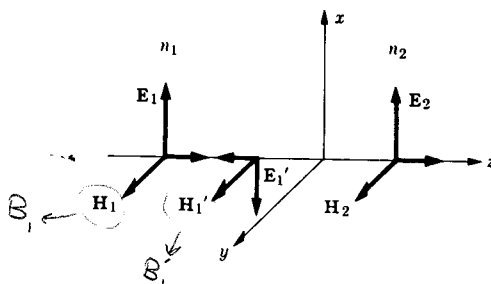
۱۴.۱۷ فرض کنید ثابت دی الکتریک $K = 0$ است. نشان دهید معادلات ماکسول بدون چگالیهای بار خارجی و جریانی، جوابی به صورت موج طولی دارند که در آن $\mathbf{H} = 0$ و $\mathbf{E} \neq 0$ ولی $\mathbf{E} \cdot \mathbf{K} = 0$. نشان دهید یک چگالی بار قطبشی به مقدار $\rho_p = i\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}$ وجود خواهد داشت. (معادله $K(\mathbf{k}, \omega) = 0$ را دایره پاشندگی طولی می نامند.)

امواج در ناحیه‌های مرزدار

اکنون می‌خواهیم از جوابهای معادلات ماکسول که در فصل قبل به دست آمد، برای حل مسائلی که از نظر عملی مورد توجه‌اند، استفاده کنیم. دو ردهٔ عمومی از مسائل را مطالعه خواهیم کرد: مسائل با مقادیر مرزی، و تابش از توزیعهای جریان و بار الکتریکی مشخص. در ردهٔ اول، جوابهای معادلهٔ موج همگن را طوری ترکیب می‌کنیم که در شرایط مرزی مناسب صدق کنند. در ردهٔ دوم، جوابهای معادلهٔ موج ناهمگن با چشمه‌های مشخص مورد لزوم است و شرایط مرزی تا حدود زیادی نادیده گرفته می‌شوند، به جای آن مطالبی از این قبیل مد نظر خواهند بود که امواج خروجی داریم و میدانها در فواصل زیاد به نسبت $1/2$ تضعیف می‌شوند. مسائل ردهٔ اول موضوع این فصل است.

۱۰.۱۸ انعکاس و شکست در مرز دو محیط نارسانا. فرود عمودی

امواج الکترومغناطیسی در حال انتشار در مواد معمولاً از مرز بین ماده و محیطی دیگر (مثلاً هوا یا خلأ) وارد ماده می‌شوند. بررسی این مسئله مستلزم کاربرد شرایط مرزی است که در فصل ۱۶ به دست آوریم. این بررسی را با ساده‌ترین مورد ممکن آغاز می‌کنیم: موج تختی که به طور عمود بر یک فصل مشترک دی الکتریک فرود می‌آید. تجربه به ما می‌گوید که موج فرویدی بایک موج منعکس شده و یک موج انتقال یافته همراه خواهد بود؛ خواهیم دید که تنها در صورت حضور این دو موج است که شرایط مرزی برآورده می‌شوند. هر سه موج مقیدند که در روابط بین E و B که در بخش ۱۰.۱۷ به دست آوردیم، صدق کنند. این وضع در شکل ۱۰.۱۸ توصیف شده است.



شکل ۱۰۱۸ انعکاس و انتقال در فرود عمودی.

در این شکل $\mathbf{E}_1$ ، $\mathbf{H}_1$ توصیف کننده موج فرودی است که در جهت مثبت z حرکت می کند، $\mathbf{E}'_1$ ، $\mathbf{H}'_1$ توصیف کننده موج منعکس شده‌ای است که در جهت منفی z حرکت می کند، و $\mathbf{E}_2$ ، $\mathbf{H}_2$ توصیف کننده موج منتقل شده است. فصل مشترك منطبق بر صفحه xy در $z=0$ در نظر گرفته می شود که محیط ۱ در طرف چپ آن و محیط ۲ در طرف راست آن است. میدانهای الکتریکی، که در ابتدا فرض می شود در جهت x به طور خطی قطبی شده اند با روابط زیر توصیف می شوند

$$\mathbf{E}_1 = iE_{1x}e^{i(\kappa_1 z - \omega t)}$$

$$\mathbf{E}'_1 = -iE'_{1x}e^{-i(\kappa_1 z + \omega t)} \quad (10.18)$$

$$\mathbf{E}_2 = iE_{2x}e^{i(\kappa_2 z - \omega t)}$$

که در آن

$$\kappa_1 = n_1 \frac{\omega}{c} \quad \text{و} \quad \kappa_2 = n_2 \frac{\omega}{c} \quad (20.18)$$

از معادله (۲۲.۱۷)، یعنی

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}}$$

که در آن برای این مورد برای امواج فرودی و انتقالی $\mathbf{u} = \mathbf{k}$ و برای موج انعکاسی $\mathbf{u} = -\mathbf{k}$ ، میدانهای مغناطیسی وابسته به میدانهای الکتریکی در معادله (۱۰.۱۸) به دست می آیند. نتیجه عبارت است از

$$c\mathbf{B}_1 = \mathbf{j}n_1 E_{1x} e^{i(\kappa_1 z - \omega t)}$$

$$c\mathbf{B}'_1 = -\mathbf{j}n_1 E'_{1x} e^{-i(\kappa_1 z + \omega t)} \quad (30.18)$$

$$c\mathbf{B}_2 = \mathbf{j}n_2 E_{2x} e^{i(\kappa_2 z - \omega t)}$$

واضح است که امواج انعکاسی و انتقالی چنانچه بخواهیم شرایط مرزی در $z=0$ برای تمام مقادیر z صادق باشند، باید با موج فرودی فرکانس یکسانی، ω ، داشته باشند. از آنجا که مؤلفه‌های عمودی میدانها صفرند، تنها لازم است که شرایط مرزی بر روی مؤلفه مماسی میدانها در نظر گرفته شوند. میدان E باید در مرز پیوسته باشد. بنابراین از معادله (۱۰۱۸) در $z=0$ داریم

$$E_{\backslash x} - E'_{\backslash x} = E_{\gamma x} \quad (۴۰۱۸)$$

میدان H نیز باید پیوسته باشد، و برای محیطهای غیر مغناطیسی ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) میدان B نیز باید پیوسته باشد

$$n_1(E_{\backslash x} + E'_{\backslash x}) = n_2 E_{\gamma x} \quad (۵۰۱۸)$$

معادلات (۴۰۱۸) و (۵۰۱۸) را می‌توان توأماً برای $E'_{\backslash x}$ و $E_{\gamma x}$ بر حسب دامنه داده شده موج فرودی $E_{\backslash x}$ ، حل کرد

$$E'_{\backslash x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{\backslash x} \quad \text{و} \quad E_{\gamma x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{\backslash x}$$

نسبتهای دامنه‌های امواج انعکاسی و انتقالی به دامنه فرودی کلاً توسط ضریبهای شکست دو محیط تعیین می‌شوند. این دامنه‌ها به نوبه خود از طریق معادله (۳۰۱۸) دامنه‌های میدانهای مغناطیسی را تعیین می‌کنند.

از آنجا که تنها نسبتهای تعیین می‌شوند، مناسب است که علامتهای خاصی برای آنها معرفی کنیم

$$\frac{E'_{\backslash x}}{E_{\backslash x}} = r_{12}, \quad \frac{E_{\gamma x}}{E_{\backslash x}} = t_{12} \quad (۶۰۱۸)$$

r_{12} و t_{12} به ترتیب، ضریب فرنیل انعکاس و ضریب فرنیل انتقال برای فرود عمودی نامیده می‌شوند. شاخصها نشان می‌دهند که موج از محیط ۱ به محیط ۲ فرود می‌آید. بدین ترتیب جواب را به صورت زیر می‌نویسیم

$$r_{12} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad \text{و} \quad t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (۷۰۱۸)$$

چیزی را که معمولاً می‌توان اندازه گیری کرد میدانهای الکتریکی انعکاسی و انتقالی نیست، بلکه میانگین شارهای انرژی انعکاسی و انتقالی در واحد سطح است. این کمیتها با بردار

پوئین تینگگ داده می‌شوند و به شدت موج معروف اند. بنا بر معادلات (۳۴.۱۷) و (۳۶.۱۷)، در هر يك از دو محیط داریم

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \frac{n}{\mu_0 c} (E_p^2 + E_s^2) \quad (۸.۱۸)$$

در اینجا بنا بر انتخاب ما، $E_p = E_x$ و $E_s = 0$. حال ضریب انعکاس، R_n ، و ضریب انتقال، T_n ، را برای فرود عمودی بر حسب نسبت شدت‌ها تعریف می‌کنیم

$$\frac{\bar{S}'_1}{\bar{S}_1} = R_n \quad \text{و} \quad \frac{\bar{S}_2}{\bar{S}_1} = T_n \quad (۹.۱۸)$$

پس، بنا بر معادلات (۷.۱۸) و (۶.۱۸) داریم

$$R_n = r_{12}^2 \quad \text{و} \quad T_n = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 \quad (۱۰.۱۸)$$

با توجه به آنکه ضرایب فرنل با معادله (۷.۱۸) داده می‌شوند، ضرایب انعکاس و انتقال در معادله (۱۰.۱۸)، برای هر دو محیطی از محیط‌های نارسانا، در رابطه زیر صدق می‌کنند

$$R_n + T_n = 1 \quad (۱۱.۱۸)$$

این رابطه بیان بقای انرژی در فصل مشترك است.

تا کنون فقط تابش قطبیده خطی را بررسی می‌کردیم. اگر موج فرودی به طور بیضوی قطبیده باشد، باید علاوه بر مؤلفه‌های x در هر يك از محیط‌ها مؤلفه‌های عمود $\hat{E}_y = \hat{E}_s$ را نیز در نظر بگیریم. این مؤلفه‌ها نیز در معادله‌هایی مانند (۶.۱۸)، با همان ضرایب فرنل، صدق می‌کنند. سه مؤلفه y همگی بایکدیگر همفازند، هر چند که با سه مؤلفه x اختلاف فاز دارند. از معادله (۸.۱۸) می‌بینیم که شدت‌های وابسته به مؤلفه‌های x (مؤلفه‌های p) و مؤلفه‌های y (بدون توجه به اختلاف فاز بین این مؤلفه‌ها، یعنی بدون توجه به درجه قطبش بیضوی، به طور ساده با هم جمع می‌شوند

$$\bar{S} = \bar{S}_p + \bar{S}_s \quad (۱۲.۱۸)$$

بنابراین، معادله‌های (۹.۱۸) تا (۱۱.۱۸) به طور جداگانه برای هر يك از مؤلفه‌های قطبش و همچنین برای شدت‌های کل معتبرند.

برای فصل مشترك هوا - شیشه که در آن $n_1 = 1$ و $n_2 = 1.5$ است، ضریب‌های انعکاس و انتقال عبارت‌اند از

$$R_n = 0.04 \quad \text{و} \quad T_n = 0.96$$

بنابراین، همان‌طور که از معادله (۱۰.۱۸) انتظار می‌رفت، تمام انرژی فرودی یا منعکس می‌شود یا انتقال می‌یابد - هیچ جایی برای ذخیره انرژی در فصل مشترک وجود ندارد. حقیقت جالب توجه دیگری از بررسی معادله (۶.۱۸) به دست می‌آید و آن این است که اگر n_2 بزرگتر از n_1 باشد، نسبت اول مثبت است. این مطلب دقیقاً آن بیان آشنایی از مبحث نور است که می‌گوید در انعکاس از یک محیط «غلیظ» تغییر فازی به اندازه π رادیان وجود دارد ولی در انعکاس از یک محیط «رقیق» هیچ تغییر فازی وجود ندارد.

به عنوان دومین مثال، در آب برای نور مرئی $n_2 = 1.33$ ، پس $R_n = 0.02$ است. ولی برای فرکانسهای کمتر از 10^{11} s^{-1} ، $\omega \approx 81$ ، $K_2 = 81$ است. برای فرکانسهای رادیویی، آب خالص تقریباً مانند یک نارسانا است (حالت ۱ در بخش ۴.۱۷) و لذا $n_2 = \sqrt{K_2} = 9$ ، پس

$$R_n = 0.964$$

همان‌طور که در بخش ۴.۱۸ خواهیم دید برای آب دریا که رسانای بهتری است، ضریب انعکاس از این هم بسیار بزرگتر است.

۲.۱۸ انعکاس و شکست در مرز دو محیط نارسانا. فرود مایل

یک حالت عمومی تر از حالتی که در بخش قبل بحث شد، عبارت است از انعکاس امواج تخت از فصل مشترک مسطح یک عایق در حالتی که این امواج به طور مایل فرود بیایند. با مطالعه این حالت به سه قانون مشهور نور می‌رسیم: قانون اسنل، قانون انعکاس، و قانون بروستر که حاکم بر قطبش ناشی از انعکاس است.

وضعیت مورد بحث، در شکل ۲.۱۸ توصیف شده است و مربوط به حالتی است که بردارهای انتشار $\vec{K}_1$ ، $\vec{K}_2$ و $\vec{K}_2'$ هم صفحه اند و همگی در صفحه xz قرار دارند و بردارهای میدان الکتریکی E_1 ، E_2 و E_2' نیز در این صفحه قرار گرفته اند. میدانهای الکتریکی امواج فرودی، انعکاسی و انتقالی با معادلات زیر داده می‌شوند

1. Brewster

۲. ثابت خواهیم کرد که بردارهای انتشار همواره هم صفحه اند. کمترین بردار میدان الکتریکی را می‌توان به یک مؤلفه در صفحه xz (صفحه فرود) و یک مؤلفه عمود بر این صفحه تجزیه کرد. انعکاس و انتقال این دو مؤلفه از قوانین متفاوتی تبعیت می‌کنند. انتخابی که در بالا شده است، برای به دست آوردن قانون بروستر است.

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{E}}_{1p} e^{i(\kappa_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{E}'_1 = \hat{\mathbf{E}}'_{1p} e^{i(\kappa'_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (۱۳.۱۸)$$

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{E}}_{2p} e^{i(\kappa_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

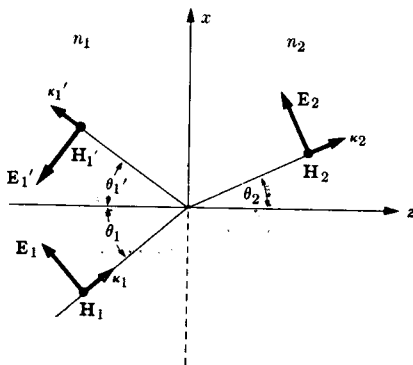
که در آن $\hat{\mathbf{E}}_{1p} = \hat{\mathbf{E}}_{1p} \mathbf{p}_1$, $\hat{\mathbf{E}}'_{1p} = \hat{\mathbf{E}}'_{1p} \mathbf{p}'_1$, $\hat{\mathbf{E}}_{2p} = \hat{\mathbf{E}}_{2p} \mathbf{p}_2$ بردارهای انتشار عبارت‌اند از $\hat{\mathbf{K}}_1 = \kappa_1 \mathbf{u}_1$ و مانند آن، و برداریکه عمود بر مرز $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ است. صفحه‌ای که با $\hat{\mathbf{K}}_1$ و $\mathbf{n}$ تعریف می‌شود صفحهٔ فرود نامیده می‌شود، و بردار عمود بر آن صفحه $\hat{\mathbf{K}}_1 \times \mathbf{n}$ است. مؤلفهٔ p قطبش چنان انتخاب شده است که به موازات صفحهٔ فرود قرار داشته باشد (نماد p برای «موازی»). در حالت کلی يك مؤلفهٔ s (که در شکل ۲.۱۸ نشان داده نشده است) نیز برای دامنهٔ هریک از امواج وجود دارد $\hat{\mathbf{E}}_{1s} = \hat{\mathbf{E}}_{1s} \mathbf{s}_1$, $\hat{\mathbf{E}}'_{1s} = \hat{\mathbf{E}}'_{1s} \mathbf{s}'_1$, $\hat{\mathbf{E}}_{2s} = \hat{\mathbf{E}}_{2s} \mathbf{s}_2$ برای هریک از سه موج داریم $\mathbf{s} = \mathbf{u} \times \mathbf{p}$ و $\mathbf{p} = \mathbf{s} \times \mathbf{u}$ ، بنا براین

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}'_1 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{j} \quad (۱۴.۱۸)$$

مؤلفه‌های s بر صفحهٔ فرود عمودند (نماد s برای لغت آلمانی «senkrecht» به معنای عمود است).

برای تابش مایل از معادلهٔ (۱۳.۱۸) روشن است که نه تنها امواج انعکاسی و انتقالی باید با موج فرودی فرکانس یکسانی داشته باشند، بلکه در تمام نقاط روی مرزها نیز باید بایکدیگر مطابقت داشته باشند، یعنی

$$\vec{\kappa}'_1 \cdot \mathbf{r} = \vec{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r} = \vec{\kappa}_2 \cdot \mathbf{r} \quad \text{روی مرز} \quad (۱۵.۱۸)$$



شکل ۲.۱۸ انعکاس و شکست - فرود مایل. صفحهٔ xz صفحهٔ فرود است. بردارهای $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}'_1$ و $\mathbf{H}_2$ به طرف خارج از صفحهٔ کتاب امتداد دارند.

این شرط سه پیامد جالب دارد که اکنون آنها را به صورت جبری به دست می آوریم. مانیاژ به يك عبارت جبری داریم که گویای این حقیقت باشد که معادله (۱۵.۱۸) تنها در روی مرز $z=0$ یا در $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}=0$ صادق است. اتحاد برداری زیر را در نظر بگیرید

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$$

در روی سطح، همه جا $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}=0$ و در نتیجه

$$\mathbf{r} = -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})$$

پس ما این عبارت را در معادله (۱۵.۱۸) می گذاریم

$$\vec{\kappa}_1 \cdot \mathbf{r} = -\vec{\kappa}_1 \cdot \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = -(\vec{\kappa}_1 \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{r})$$

و به طور مشابه برای سایر طرفهای معادله (۱۵.۱۸). چون $\mathbf{r}$ يك بردار اختیاری در روی مرز است، معادله (۱۵.۱۸) تنها در صورتی معتبر است که روابط زیر برقرار باشند

$$\vec{\kappa}_1' \times \mathbf{n} = \vec{\kappa}_1 \times \mathbf{n} = \vec{\kappa}_r \times \mathbf{n} \quad (۱۶.۱۸)$$

این رابطه ایجاب می کند که اولاً $\vec{\kappa}_1'$ در صفحه فرود واقع باشد، زیرا بردار عمود بر صفحه تعریف شده با $\vec{\kappa}_1'$ و $\mathbf{n}$ با بردار عمود بر صفحه فرود موازی است؛ و به طور مشابه κ_r در صفحه فرود واقع است. یعنی، $\mathbf{n}$ ، $\vec{\kappa}_1'$ ، $\vec{\kappa}_r$ و $\vec{\kappa}_1$ همگی هم صفحه اند. پس معادله (۱۴.۱۸) موجبه است، و $\mathbf{s} = \mathbf{j}$ بردار یکه عمود بر صفحه فرود است. حال زاویه فرود θ_1 با رابطه زیر داده می شود

$$\vec{\kappa}_1 \cdot \mathbf{n} = \kappa_1 \cos \theta_1$$

و همچنین

$$\vec{\kappa}_1' \cdot \mathbf{n} = -\kappa_1' \cos \theta_1'$$

$$\vec{\kappa}_r \cdot \mathbf{n} = \kappa_r \cos \theta_r \quad (۱۷.۱۸)$$

بنابراین

$$|\vec{\kappa}_1 \times \mathbf{n}| = \kappa_1 \sin \theta_1 \quad \text{و} \quad |\vec{\kappa}_1' \times \mathbf{n}| = \kappa_1' \sin \theta_1'$$

$$|\vec{\kappa}_r \times \mathbf{n}| = \kappa_r \sin \theta_r$$

و معادله (۱۶.۱۸) ایجاب می کند که

$$\kappa_1' \sin \theta_1' = \kappa_1 \sin \theta_1 = \kappa_r \sin \theta_r$$

بزرگی κ'_1 مربوط به موج انعکاسی برابر با بزرگی κ_1 مربوط به موج فرودی است، زیرا این دو موج با فرکانس یکسان در محیطی یکسان انتشار می‌یابند. بدین ترتیب

$$\theta'_1 = \theta_1 \quad (18.18)$$

یعنی، زاویه انعکاس برابر است با زاویه فرود. به کمک معادلات باشندگی (۲۰.۱۸)، از تساوی دوم در معادله قبل نتیجه می‌شود

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (19.18)$$

این رابطه به قانون اسنل معروف است. توجه کنید که هیچ يك از این سه نتیجه به شرایط مرزی برای میدانهای الکتریکی و مغناطیسی که از معادلات ماکسول به دست آمدند، بستگی ندارند. دو نتیجه اول برای هر نوع موجی صادق است؛ نتیجه سوم، قانون اسنل، به رابطه خاص باشندگی برای امواج بستگی دارد.

برای به دست آوردن ضرایب فرنل که نسبت دامنه‌های میدان را برای فرود مسایل می‌دهند، ما به شرایط مرزی روی مؤلفه‌های مماسی میدانها نیاز داریم. (شرایط روی مؤلفه‌های عمودی خود به خود بر آورده خواهند شد.) برای آنکه مؤلفه مماسی دامنه میدان E را به صورت برداری بیان کنیم، اتحاد برداری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}) = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}})\mathbf{n} - \hat{\mathbf{E}}$$

یا

$$\hat{\mathbf{E}} = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}})\mathbf{n} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}})$$

از آنجا که $(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}})\mathbf{n}$ همان مؤلفه عمودی $\hat{\mathbf{E}}$ است، جمله باقیمانده، $-\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}})$ ، باید مؤلفه مماسی $\hat{\mathbf{E}}$ باشد. پس شرط مرزی روی میدانهای E ، پس از حذف توابع نمایی [به دلیل معادله (۱۵.۱۸)] و حذف $\mathbf{n} \times$ ، تبدیل می‌شود به

$$\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}'_1) = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}}_2 \quad (20.18)$$

چون فرض می‌کنیم محیطها غیر مغناطیسی‌اند، لازم است مؤلفه مماسی میدان B نیز پیوسته باشد

$$\mathbf{n} \times (\hat{\mathbf{B}}_1 + \hat{\mathbf{B}}'_1) = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{B}}_2 \quad (21.18)$$

دو معادله ماکسول که شامل شوند در هر محیط $\hat{\mathbf{E}}$ و $\hat{\mathbf{B}}$ را به یکدیگر مربوط می‌کنند. با استفاده از روابط باشندگی، معادله (۲۰.۱۸)، این معادله‌ها به صورت معادله (۲۲.۱۷) درمی‌آیند

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{n}{c} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{E}} \quad (۲۲.۱۸)$$

یا به طور معادل به صورت زیر درمی آیند

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{c}{n} \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{B}} \quad (۲۳.۱۸)$$

اگر، برای مثال، معادله (۲۲.۱۸) را در معادله (۲۱.۱۸) بگذاریم، خواهیم داشت

$$n_1 n \times (\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{u}'_1 \times \hat{\mathbf{E}}'_1) = n_2 n \times (\mathbf{u}_2 \times \hat{\mathbf{E}}_2) \quad (۲۴.۱۸)$$

معادله های (۲۴.۱۸) و (۲۵.۱۸) يك جفت معادله برداری هستند که باید برای $\hat{\mathbf{E}}_2$ و $\hat{\mathbf{E}}'_2$ بر حسب $\hat{\mathbf{E}}_1$ حل شوند. ضربهای سه گانه برداری را می توانیم بسط بدهیم

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{E}}_1) = (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) \hat{\mathbf{E}}_1$$

و به طور مشابه برای سایر ضربهای سه گانه. برای مؤلفه y ، یعنی $\hat{\mathbf{E}}_{1y}$ ، داریم $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{1y} = 0$ و رابطه فوق بسیار ساده می شود

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \hat{\mathbf{E}}_{1y}) = -\cos \theta_1 \hat{\mathbf{E}}_{1y}$$

زیرا بنا بر معادله (۱۷.۱۸)، $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 = \cos \theta_1$ است. بنابراین مؤلفه y معادله (۲۴.۱۸) به صورت زیر درمی آید

$$n_1 (\cos \theta_1 \hat{\mathbf{E}}_{1y} - \cos \theta'_1 \hat{\mathbf{E}}'_{1y}) = n_2 \cos \theta_2 \hat{\mathbf{E}}_{2y}$$

و چون $\theta'_1 = \theta_1$ است، پس

$$n_1 \cos \theta_1 (\hat{\mathbf{E}}_{1y} - \hat{\mathbf{E}}'_{1y}) = n_2 \cos \theta_2 \hat{\mathbf{E}}_{2y} \quad (۲۵.۱۸)$$

از ضرب برداری $\mathbf{n}$ در معادله (۲۵.۱۸) برای مؤلفه y ، نتیجه می شود

$$\hat{\mathbf{E}}_{1y} + \hat{\mathbf{E}}'_{1y} = \hat{\mathbf{E}}_{2y} \quad (۲۶.۱۸)$$

برای مؤلفه p نمی توان معادلات را این چنین ساده کرد، و لذا این امر موجب می شود که دو مؤلفه قطبش را به طور جداگانه بررسی کنیم. از قرار دادن معادله (۲۳.۱۸) در معادله (۲۵.۱۸) ساده سازی متناظری برای قطبش p به دست خواهد آمد.

۱. **قطبش S.** دستگاه معادله‌های (۲۵.۱۸) و (۲۶.۱۸) را می‌توان به سادگی حل کرد. نتیجه عبارت است از

$$\hat{\mathbf{E}}'_{1s} = r_{12s} \hat{\mathbf{E}}_{1s}, \quad \hat{\mathbf{E}}_{2s} = t_{12s} \hat{\mathbf{E}}_{1s}, \quad (27.18)$$

که در آن

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (28.18)$$

$$t_{12s} = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (29.18)$$

۲. **قطبش p.** هنگامی که بردارهای E همگی در صفحهٔ فرود قرار داشته باشند، معادلهٔ (۲۲.۱۸) نشان می‌دهد که بردارهای B ی متناظر آنها همگی در امتداد جهت $\mathbf{j}$ قرار دارند. انتخاب بردارهای E در شکل ۲۰.۱۸ به گونه‌ای انجام شد که تمام بردارهای B ی متناظر رو به جهت $+\mathbf{j}$ باشند. این بار معادلهٔ (۲۳.۱۸) را در معادلهٔ (۲۵.۱۸) قرار می‌دهیم. چون $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{1s} = 0 = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}'_{1s} = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{2s}$ ، نتیجه به صورت زیر ساده می‌شود

$$\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 (\hat{\mathbf{B}}_{1s} - \hat{\mathbf{B}}'_{1s}) = \frac{1}{n_2} \cos \theta_2 \hat{\mathbf{B}}_{2s}, \quad (30.18)$$

همچنین، معادلهٔ (۲۱.۱۸) به صورت زیر ساده می‌شود

$$\hat{\mathbf{B}}_{1s} + \hat{\mathbf{B}}'_{1s} = \hat{\mathbf{B}}_{2s}, \quad (31.18)$$

جواب معادله‌های (۳۰.۱۸) و (۳۱.۱۸) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\hat{\mathbf{B}}'_{1s} = r_{12p} \hat{\mathbf{B}}_{1s}, \quad \hat{\mathbf{B}}_{2s} = \frac{n_2}{n_1} t_{12p} \hat{\mathbf{B}}_{1s}, \quad (32.18)$$

که در آن

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (33.18)$$

$$t_{12p} = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (34.18)$$

معادلهٔ (۳۲.۱۸) را بدان علت به طریق بالا نوشتیم تا هنگامی که اندازهٔ بردارهای E

از معادله (۲۳.۱۸) محاسبه می‌کنیم نتیجه زیر را به دست آوریم

$$\hat{E}'_{1p} = r_{12p} \hat{E}_{1p}, \quad \hat{E}_{2p} = t_{12p} \hat{E}_{1p} \quad (۳۵.۱۸)$$

حال با این ضرایب فرنل جواب کاملی برای مسئله مقدار مرزی داریم، زیرا هر موج فرودی با قطبشی دلخواه را می‌توان به مؤلفه‌های p و s تجزیه کرد. باید تأکید کنیم که واژه‌های قطبش p و s همیشه به جهت بردار E مربوط می‌شوند. برای فرود عمودی $\theta_1 = 0$ و همچنین، بنا بر قانون اسنل، $\theta_2 = 0$. بنابراین معادله‌های (۳۳.۱۸) تا (۳۵.۱۸) به معادله‌های (۶.۱۸) و (۷.۱۸) برای فرود عمودی تبدیل می‌شوند. معادله (۲۹.۱۸) با معادله (۳۴.۱۸) یکی می‌شود، ولی از معادله (۲۸.۱۸) می‌بینیم که برای فرود عمودی $r_{12s} = -r_{12p}$ است. برای فرود عمودی صفحه فرود تعریف نشده است، و بنابراین نتیجه فیزیکی باید مستقل از جهت قطبش باشد. اختلاف تنها بدین علت بروز می‌کند که در شکل ۲۰.۱۸ هنگامی که θ_1 صفر شود E_{1p} و E'_{1p} در جهات عکس یکدیگر خواهند بود، در صورتی که E_{1s} و E'_{1s} هم جهت خواهند بود. برای قطبش s ضرایب فرنل روابطی هستند بین بردارهای E معادله (۲۷.۱۸)؛ ولی برای قطبش p این ضرایب تنها روابطی هستند بین بزرگی آنها در معادله (۳۵.۱۸)، چون بردارهای E برای فرود مایل هر یک در جهت متفاوتی قرار دارند. با استفاده از قانون اسنل می‌توانیم بنویسیم

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_1}$$

و بدین وسیله ضرایب فرنل را کلاً بر حسب پارامترهای ماده، n_1 ، n_2 و زاویه فرود مفروض، θ_1 ، بیان کنیم.

از ضرایب فرنل روابط بین شدت‌ها را نیز می‌توان به دست آورد. البته هر یک از دو جهت قطبش باید جداگانه بررسی شود. ضریب انعکاس و ضریب انتقال را به صورت میانگین زمانی مؤلفه بردارهای پوئینتینگ مربوطه که عمود بر فصل مشترک است، نسبت به مؤلفه عمود بردار پوئینتینگ فرودی، تعریف می‌کنیم.^۲

۱. در کتابهای ایتیک قدیمی، با واژه «صفحه قطبش» نیز برخورد می‌کنیم، که طبق تعریف صفحه حاوی بردار B و بردار انتشار است، ما از به کار بردن این واژه کلاً احتراز خواهیم کرد.

۲. در محیط ۱ داریم $S = (E_1 + E'_1) \times (H_1 + H'_1)$. می‌توان نشان داد که در محیطی نارسا (تنها موردی که بررسی خواهیم کرد)

$$\mathbf{n} \cdot (\overline{E_1 \times H'_1} + \overline{E'_1 \times H_1}) = 0$$

به طوری که $\mathbf{n} \cdot \bar{S} = \mathbf{n} \cdot (\bar{S}_1 + \bar{S}'_1)$ و جدا ساختن بردارهای پوئینتینگ با معناست.

$$R_s = \frac{n \cdot \bar{S}'_{\lambda_s}}{n \cdot \bar{S}_{\lambda_s}}, \quad T_s = \frac{n \cdot \bar{S}_{\lambda_s}}{n \cdot \bar{S}_{\lambda_s}} \quad (36.18)$$

$$R_p = \frac{n \cdot \bar{S}'_{\lambda_p}}{n \cdot \bar{S}_{\lambda_p}}, \quad T_p = \frac{n \cdot \bar{S}_{\lambda_p}}{n \cdot \bar{S}_{\lambda_p}} \quad (37.18)$$

بر حسب ضرایب فرنل داریم

$$R_s = r'_{\lambda_s}, \quad T_s = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t'_{\lambda_s}, \quad (38.18)$$

$$R_p = r'_{\lambda_p}, \quad T_p = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t'_{\lambda_p} \quad (39.18)$$

بنابراین اتحادهای

$$R_s + T_s = 1, \quad R_p + T_p = 1 \quad (40.18)$$

برای مورد فرود مایل بر سطح يك جسم نارسانا نیز معتبرند.
در بعضی موارد بهتر است که ضرایب فرنل را به صورت زیر بنویسیم

$$r_{\lambda_s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (41.18)$$

$$t_{\lambda_s} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (42.18)$$

$$r_{\lambda_p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (43.18)$$

$$t_{\lambda_p} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (44.18)$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و قانون اسنل به آسانی می‌توان دید که صورت‌های بالا با صورت‌های قبلی آنها معادل است.

۱. گاهی ضرایب انعکاس و انتقال را به صورت دیگری تعریف می‌کنند که عبارت از نسبت بزرگیهای بردارهای پوئین تینک به جای مؤلفه‌های عمودی آنها. این نحوه تعریف در R تفاوتی ایجاد نمی‌کند، ولی در T ضریب $(\cos \theta_2 / \cos \theta_1)$ را حذف می‌کند.

۳.۱۸ زاویه بروستر. زاویه حد

اکنون با استفاده از ضرایب فرنل که در بخش قبل به دست آوردیم، بستگی R و T را به زاویه فرود برای مورد دوم محیط نارسا بررسی می‌کنیم. در هر حالت $T = 1 - R$ ، پس تنها درباره R بحث خواهیم کرد. قبلاً مورد فرود عمودی $\theta_i = 0$ را بررسی کرده‌ایم: قطبش اهمیتی ندارد و هر چه اختلاف نسبت n_2/n_1 بایک بیشتر باشد، R بزرگتر است. برای فرود خراشان، یعنی $\theta_i = \pi/2$ ، داریم $\cos \theta_i = 0$ و به آسانی از معادله‌های (۲۸.۱۸) و (۳۳.۱۸) می‌توان دید که $R_p = 1 = R_s$. برای فرود تقریباً خراشان ضریب انعکاس بزرگ است؛ دلیل آنکه دریاچه‌ای آرام همانند یک آینه است همین بزرگ بودن ضریب انعکاس است. در زوایای فرود بینابین دوزاویه فرود وجود دارد که به‌ویژه جالب هستند.

آیا موردی می‌تواند وجود داشته باشد که ضریب انعکاس آن صفر باشد؟ معادله‌های (۲۱.۱۸) و (۴۳.۱۸) نشان می‌دهند که چنین موردی می‌تواند وجود داشته باشد. اگر $\theta_i = \theta_r$ باشد، $\tan(\theta_i - \theta_r) = 0 = \sin(\theta_i - \theta_r)$ و موج انعکاسی وجود نخواهد داشت. متأسفانه، این وضعیت تنها در صورتی رخ می‌دهد که $n_1 = n_2$ ، یعنی تنها در صورتی که دو محیط از نظر اپتیکی تمیزناپذیر باشند. از طرف دیگر، اگر $\theta_i + \theta_r = \pi/2$ باشد $\tan(\theta_i + \theta_r)$ بینهایت خواهد بود و دامنه موج انعکاسی قطبش p مجدداً صفر می‌شود. در این حالت محیطها از نظر اپتیکی تمیزپذیرند. چون موج قطبش s ، که E ی آن عمود بر صفحه فرود است، به‌طور جزئی منعکس می‌شود، نور غیر قطبیده‌ای که زاویه فرود آن در شرط $\theta_i + \theta_r = \pi/2$ صدق کند در اثر انعکاس قطبیده خواهد شد. به کمک قانون اسنل، یعنی

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$$

می‌توانیم مقدار θ_i را تعیین کنیم. چنانچه $\theta_r = \pi/2 - \theta_i$ را در قانون اسنل به کار ببریم، داریم

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_B \right) = n_2 \cos \theta_B$$

یا

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (۴۵.۱۸)$$

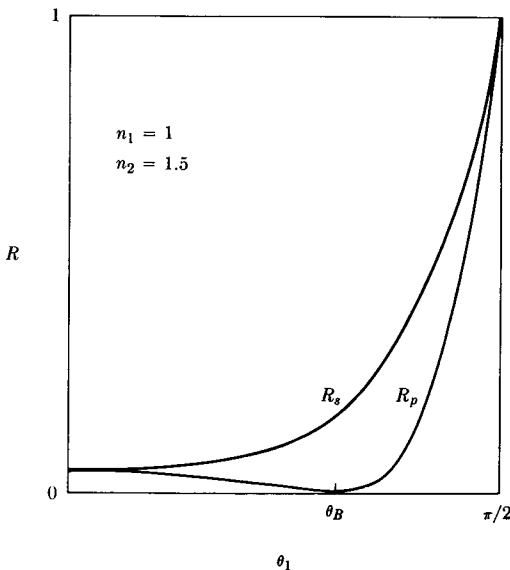
کمیت θ_B به‌زاویه بروستر مشهور است؛ رابطه بین این کمیت و ضرایب شکست که با معادله (۴۵.۱۸) داده می‌شود، به قانون بروستر مشهور است. قطبیده کردن نور در زاویه بروستر روشی عملی برای تولید تابش قطبیده است، هر چند که متداولترین روش نیست. در شکل ۳.۱۸ مقادیر R_p و R_s برای تمام مقادیر θ_i ، به‌ازای $n_1 = 1$ و $n_2 = 1.5$ ، مثلاً برای فصل مشترک هوا - شیشه، رسم شده است. زاویه بروستر برای این حالت 56° است. اینکه

ضریب انعکاس برای نور قطبیده p به‌طور کلی کوچکتر است سودمندی عینکهای آفتابی پولاروید را توجیه می‌کند. چون اکثر سطوح منعکس‌کننده در فضای باز افقی هستند، صفحه فرود بیشتر نورهای خیره‌کننده انعکاسی که به چشم ما می‌رسند عمودی است. چون فرض می‌شود که معمولاً در حال ایستاده هستیم (یا قدم راست است) شیشه‌های عینکهای قطبیده (پولاروید) را طوری قرار می‌دهند که نوری را که بردار E آن در صفحه عمودی است عبور دهد و مؤلفه s را که شدیدتر منعکس می‌شود حذف کند.

علاوه بر فرود خراشان حالت دیگری نیز وجود دارد که برای آن $R_s = R_p = 1$ است. از معادله‌های (۲۸.۱۸) و (۳۳.۱۸) دیده می‌شود که برای $\theta_p = \pi/2$ نیز همانند حالت $\theta_s = \pi/2$ انعکاس کامل رخ می‌دهد. زاویه فرویدی که برای آن $\theta_p = \pi/2$ است زاویه حد، $\theta_s = \theta_c$ ، نامیده می‌شود. از قانون اسنل

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (۴۶.۱۸)$$

چنانچه $n_2 < n_1$ باشد، زاویه حد يك زاویه حقیقی است، ولی به هر جهت برای هر زوجی از مواد شفاف این امر برای فرود بر یکی از دو سمت فصل مشترك معتبر خواهد بود. بنسابر



شکل ۳۰.۱۸ ضریب انعکاس برای قطبشهای s و p در فصل مشترك هوا-شیشه. زاویه بروستر $\theta_B = 56^\circ$ است.

معادله‌های (۴۵.۱۸) و (۴۶.۱۸)

$$\tan \theta_B = \sin \theta_c$$

چون مقدار $\tan \theta$ حدی ندارد، همواره یک زاویه بزرگتر حقیقی وجود دارد؛ به علاوه چون $\tan \theta > \sin \theta$ است نتیجه می‌شود که $\theta_B < \theta_c$. حالت فصل مشترک شیشه - هوا که برای آن $n_1 = ۱$ و $n_2 = ۱.۵$ است در شکل ۴.۱۸ رسم شده است. برای حالت فرود از سمت شیشه، $\theta_c = ۴۲^\circ$ و $\theta_B = ۳۴^\circ$. برای زوایای فرودی بزرگتر از زاویه حد، $\theta_1 > \theta_c$ ، از قانون اسنل نتیجه می‌شود

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_c$$

و چون $\sin \theta_c = n_2/n_1$ است، لازم است که

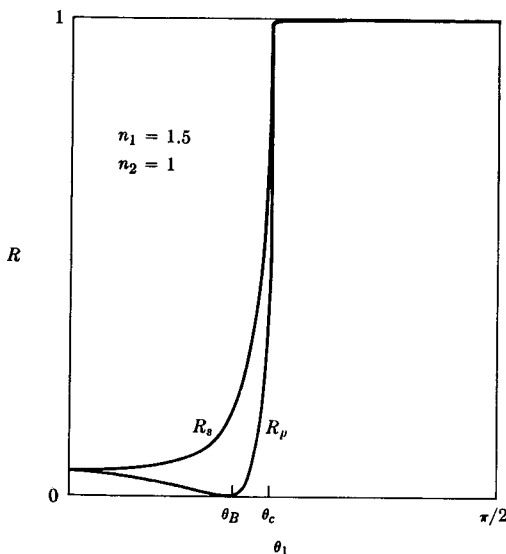
$$\sin \theta_2 > ۱ \quad (۴۷.۱۸)$$

یک چنین زاویه واقعی وجود ندارد، ولی این پیچیدگی جدی نیست و این مشکل در بخش بعد رفع خواهد شد، در نتیجه برای تمام مقادیر $\theta_1 \geq \theta_c$ داریم $R_s = R_p = ۱$. این انعکاس کامل را انعکاس داخلی کلی می‌نامند. اگر به داخل یک منشور یا آکوارיום نگاه کنیم یا هنگامی که در زیر آب شنا می‌کنیم به بالا نگاه کنیم، انعکاس داخلی کلی به آسانی مشاهده می‌شود. این پدیده کاربرد بسیار مهمی در لوله‌های نوری دارد. لوله نوری الیاف شیشه‌ای ظرفیتی است که با آن باریکه‌ای از نور انتقال می‌یابد، مانند موجبر برای میکروموجها. (مسئله ۴.۱۸).

مثالهای ما در این بخش شامل فرکانسهای درگستره نور مرئی، و مواد شفاف بوده است که برای آنها $n = \sqrt{K}$. برای مواد غیرقطبی همین روابط در تمام فرکانسهای پایمتر (ولی نه در فرابنفش و گستره‌های فرکانسهای بالاتر) معتبرند. این روابط برای مواد قطبی که اتمولکولهای قطبی (مثلاً آب) یا ازیونها (مثلاً سنگ نمک) ساخته شده‌اند و از نظر اپتیکی شفاف‌اند در تمام فرکانسهای پایمتر معتبر نخواهند بود، زیرا K به فرکانس بستگی دارد.

۴.۱۸ ضرایب فرنل مختلط. انعکاس از یک سطح رسانا

پیچیدگی که در بخش قبل برای زوایای بزرگتر از زاویه حد به وجود آمد، یعنی $\sin \theta_2 > ۱$ موجب می‌شود که ضرایب فرنل مختلط را بررسی کنیم. چون $\cos \theta = \sqrt{۱ - \sin^2 \theta}$ است، هنگامی که $\sin \theta$ مقداری حقیقی و بیش از ۱ داشته باشد مقدار $\cos \theta$ موهومی



شکل ۴.۱۸ ضریب انعکاس برای قطبشهای s و p در فصل مشترک شیشه - هوا. زاویهٔ بروستر $\theta_B = 34^\circ$ و زاویهٔ حد $\theta_c = 42^\circ$ است.

محض است، بنابراین، $\cos \hat{\theta}_p$ در ضرایب فرنل موهومی و این ضرایب مختلط خواهند بود. اگر محیط ۲ رسانا باشد نیز این ضرایب مختلط خواهند بود، زیرا در آن صورت $\hat{n}_p$ مختلط است. قانون اسنل

$$n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_p \sin \hat{\theta}_p$$

نشان می‌دهد که در آن صورت $\sin \hat{\theta}_p$ نیز باید مختلط باشد. بنابراین، باید بررسی کنیم که آیا روابطی را که در بخش ۲.۱۸ به دست آوردیم برای زوایا و ضرایب فرنل مختلط نیز معتبرند یا خیر. اگر زاویهٔ $\hat{\theta}_p$ مختلط باشد، به هیچ طریقی نمی‌توانیم شکل ۲.۱۸ را رسم کنیم، و بنابراین باید در مورد معنای هندسی نتایج دقت کنیم. با وجود این، در به دست آوردن نتایج در بخش قبل ما به وضعیت هندسی شکل ۲.۱۸ متوسل نشدیم. روش ما کاملاً جبری بود، و چون تمام روابط برداری جبری برای کمیت‌های مختلط نیز مانند کمیت‌های حقیقی معتبرند پس نتایج به طور صوری صحیح‌اند. ما تنها با مواردی سروکار خواهیم داشت که یکی از دو محیط شفاف است. حال فرض می‌کنیم محیط ۱ شفاف است. بدین ترتیب معادلهٔ (۱۶.۱۸) تبدیل می‌شود به

$$\vec{k}_1 \times \vec{n} = \vec{k}_p \times \vec{n}$$

(۴۸.۱۸)

پس صفحهٔ فرود يك بردار يکۀ عمودی دارد ($\mathbf{j}$) که حقیقی است و بردار انتشار مختلط $\vec{\mathbf{k}}_r$ در جهت $\mathbf{j}$ مؤلفه ندارد

$$\vec{\mathbf{k}}_r \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (۴۹.۱۸)$$

هرچند که فرض بالا محدود کننده است، ولی فرضی است که در موارد عملی معتبر است. زاویهٔ مختلط $\hat{\theta}_r$ به طور جبری با معادلهٔ زیر تعریف می شود

$$\vec{\mathbf{k}}_r \cdot \mathbf{n} = \hat{k}_r \cos \hat{\theta}_r \quad (۵۰.۱۸)$$

آنگاه قانون اسنل به صورت زیر درمی آید

$$n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_r \sin \hat{\theta}_r \quad (۵۱.۱۸)$$

که در آن

$$\sin \hat{\theta}_r = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{\theta}_r} \quad (۵۲.۱۸)$$

تمام عملیات جبری با شرایط مرزی روی میدانهای E و B معتبرند، بنابراین ضرایب فرنل مختلط با زهم با معادلات (۲۸.۱۸)، (۲۹.۱۸)، (۳۳.۱۸)، و (۳۴.۱۸) داده می شوند، با این تفاوت که در این معادلات $\hat{n}_r$ و $\cos \hat{\theta}_r$ مختلط اند. اگر این ضرایب مختلط را به صورت قطبی بنویسیم

$$\hat{r}_{1r_s} = |\hat{r}_{1r_s}| e^{i\alpha_s}, \quad \hat{r}_{1r_p} = |\hat{r}_{1r_p}| e^{i\alpha_p}, \dots$$

و نتیجه را در معادلات (۲۷.۱۸) و (۳۵.۱۸) به کار ببریم

$$\hat{\mathbf{E}}'_{1s} = |\hat{r}_{1r_s}| e^{i\alpha_s} \hat{\mathbf{E}}_{1s}, \quad \hat{\mathbf{E}}'_{1p} = |\hat{r}_{1r_p}| e^{i\alpha_p} \hat{\mathbf{E}}_{1p}, \dots \quad (۵۳.۱۸)$$

روشن خواهد بود که میدانهای E ی انعکاسی و انتقالی نسبت به میدان E ی فرودی انتقال فاز خواهند داشت. ضرایب انعکاس حقیقی که برای شدتها با معادله های (۳۶.۱۸) و (۳۷.۱۸) تعریف شدند، به صورت زیر درمی آیند

$$R_s = |\hat{r}_{1r_s}|^2, \quad R_p = |\hat{r}_{1r_p}|^2 \quad (۵۴.۱۸)$$

زیرا فازها بر روی متوسط زمانی بردارهای پوئین تینگ که با معادله (۸.۱۸) داده می شوند، تأثیری ندارند. برای به دست آوردن ضرایب انتقال صحیح از کمیت های مختلط خیلی باید دقت کرد، ولی ما با این ضرایب کاری نداریم چون در اکثر موارد نمی توان آنها را در محیط رسانا اندازه گیری کرد. هنگامی که یکی از محیطها رساناست، به جای $R+T=1$

اتحادهای زیر مفیدند

$$\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21} \quad (55.18)$$

$$\hat{r}_{12}^2 + \hat{r}_{12}\hat{r}_{21} = 1 \quad (56.18)$$

این اتحادها هم برای قطبش s و هم برای قطبش p معتبرند.

برای فرود عمود از هوا بر روی محیطی رسانا، با $n_1 = 1$ ، $n_2 = n + ik$ ، ضریب انعکاس عبارت است از

$$R_n = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2} \quad (57.18)$$

از آنجا که تمامی انرژی انتقالی در محیط رسانای نیمه نامتناهی مآلاً جذب خواهد شد، ما ضریب جذب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A = 1 - R \quad (58.18)$$

برای فرود عمود

$$A_n = \frac{4n}{(n+1)^2 + k^2} \quad (59.18)$$

اگر $n \ll 1$ ، یا $n \gg 1$ ، یا $k \gg 1$ باشد، ضریب جذب کوچک است (ضریب انعکاس بزرگ است). هنگامی که $n \cong k \gg 1$ (حالت ۳ در بخش ۴۰.۱۷ با $K_i = g/\epsilon_0 \omega \gg 1$)، داریم

$$A_n \cong \frac{4}{k} \ll 1 \quad (60.18)$$

در این حالت $k \cong \sqrt{K_i/2} = \sqrt{g/2\epsilon_0 \omega}$ ، بنا بر این

$$A_n \cong 2\sqrt{2\epsilon_0 \omega/g} \quad (61.18)$$

رابطه بالا را رابطه هاگن - دویژن می‌نامند. این رابطه باید برای رساناهای نسبتاً خوب

در ناحیه میکرو موج وزیر آن، و برای فلزات تا ناحیه فرو سرخ، معتبر باشد. در اینجا g را می توان رسانندگی d_c گرفت. با همان مقادیری که در محاسبه عمق پوسته از معادله (۵۶.۱۷) استفاده شد، برای نقره در $10^9 \text{ s}^{-1} = f$ (طول موج ۳ سانتیمتری) خواهیم یافت

$$A_n = 2\sqrt{2(8.854 \times 10^{-12})(2\pi \times 10^9)/3 \times 10^7} = 3.9 \times 10^{-4}$$

$$R_n = 0.9996$$

برای آب، در $10^8 \text{ s}^{-1} = f$

$$A_n = 2.5 \times 10^{-4}$$

$$R_n = 0.9975$$

بزرگ بودن ضریب انعکاس مسئله اضافی دیگری را در امر ارتباط گیری با زیر دریاییها به وجود می آورد. در این موارد ضریب جذب بدان علت کوچک است که عمق پوسته نسبتاً کوچک است: از معادله (۴۸.۱۷) و (۶۰.۱۸) داریم

$$A_n = 4\pi \frac{\delta}{\lambda_1}$$

که در آن λ_1 طول موج در هواست. برای نقره، در گستره فرکانس نور مرئی، داریم $n \approx 0.55$, $k \approx 3$. به ازای این مقادیر معادله (۶۰.۱۸) معتبر نیست، ولی از معادله (۵۹.۱۸) نتیجه می شود که $R_n \approx 0.98$. مقادیر مربوط به نیکل، $n \approx 2$ و $k \approx 3$ ، مقادیر معمولتری برای فلزات است؛ با این مقادیر نتیجه می شود $R_n \approx 0.56$. این فلزات نیز کاملاً براق به نظر می آیند، چون چشم تقریباً مشابه يك آشکار ساز لگاریتمی است. در شکل ۵.۱۸ مقادیر مربوط برای نقره و نیکل بر حسب تابعی از زاویه فرود رسم شده اند. زاویه بروستری که در آن R_p صفر شود وجود ندارد، ولی باز هم R_p حداقلی دارد و همواره از R_s کمتر است. باز هم قطبش در اثر انعکاس تا اندازه ای رخ می دهد. معادلات (۵۳.۱۸) نشان می دهند که $\hat{E}'_p$ و $\hat{E}'_s$ يك اختلاف فاز نسبی $\alpha_p - \alpha_s$ دارند. بنابراین حتی اگر موج فرودی به طور خطی قطبیده باشد، موج انعکاسی می تواند در فرود مایل به طور بیضوی قطبیده شود. موج انتقالی، هر چند که نمی توان آن را مستقیماً مشاهده کرد، در مسائلی نظیر آنچه در بخش بعد بررسی شده اند مهم است. دامنه و فاز آن با $\hat{E}'_p$ و $\hat{E}'_s$ و بردار انتشار آن با $\hat{k}_p$ داده می شود که در معادله های (۴۸.۱۸) تا (۵۲.۱۸) صدق می کند. کمیت اخیر صفحات فاز ثابت و سرعت فاز، و همچنین صفحات دامنه ثابت و ثابت تضعیف را تعریف می کند. این نتایج را می توان با مقایسه دو عبارت معادل زیر برای $\hat{k}_p$ به دست آورد

$$\vec{\kappa} = \vec{\kappa}_r + i\vec{\kappa}_i \quad (۶۲.۱۸)$$

$$\vec{\kappa} = \kappa \sin \theta \hat{i} + \kappa \cos \theta \hat{k} \quad (۶۳.۱۸)$$

(در این بحث ما شاخص پایین ۲ را حذف می‌کنیم.) صورت دوم برای $\hat{\kappa}$ با توجه به محدودیت موجود در معادله (۶۹.۱۸) توجیه می‌شود. این محدودیت همچنین بدین معناست که $\vec{\kappa} \times \mathbf{n}$ حقیقی است، و از معادله (۶۲.۱۸) داریم

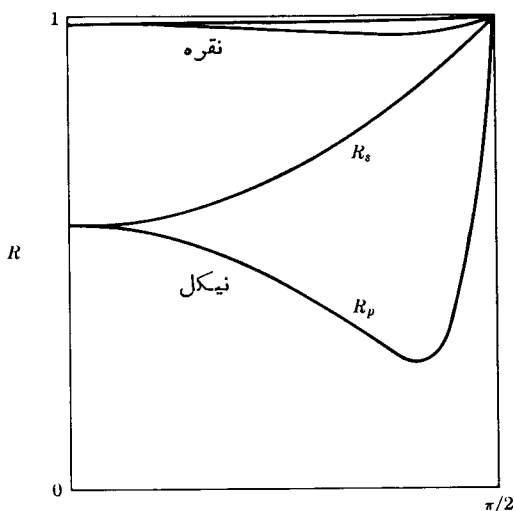
$$\vec{\kappa}_r \times \mathbf{n} = \vec{\kappa}_i \times \mathbf{n} \quad (۶۴.۱۸)$$

$$\vec{\kappa}_i \times \mathbf{n} = 0 \quad (۶۵.۱۸)$$

معادله (۶۵.۱۸) نشان می‌دهد که $\vec{\kappa}_i$ با $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ موازی است، و معادله (۶۴.۱۸) عبارت است از

$$\kappa_r \sin \Theta = \kappa_i \sin \theta, \quad (۶۶.۱۸)$$

که در آن Θ زاویه حقیقی بین $\vec{\kappa}_r$ و $\mathbf{n}$ است. (شکل ۶۰.۱۸). این زاویه را می‌توانیم زاویه



شکل ۵۰.۱۸ ضریب انعکاس برای قطبشهای s و p در فصل مشترک هوا - فلز. مقادیر نوعی برای نور مرئی عبارتند از $n \cong ۵.۰$ و $k \cong ۳$ (برای نیکل).
(برای نقره)؛ و $n \cong ۲$ و $k \cong ۳$ (برای نیکل).

شکست حقیقی بنامیم، زیرا زاویه بین صفحات فاز ثابت و صفحه مرزی است. از طرف دیگر، صفحات دامنه ثابت با صفحه مرزی موازی اند، لذا آهنگ تضعیف موج در امتداد مستقیماً عمود در درون رسانا از هراستداد دیگری تندتر است. معادله (۶۲.۱۸) را می توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم

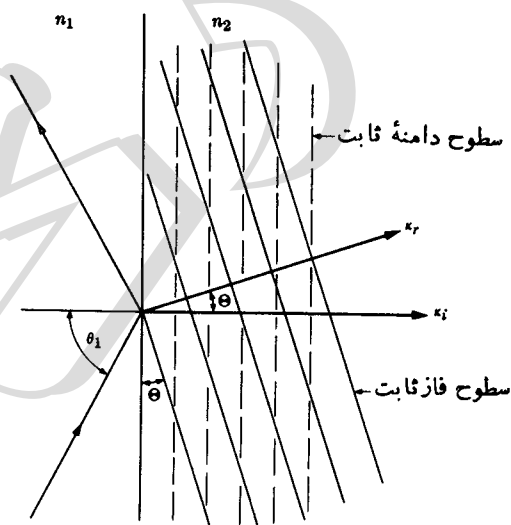
$$\begin{aligned}\vec{k} &= \kappa_r \sin \Theta \mathbf{i} + \kappa_r \cos \Theta \mathbf{k} + i\kappa_i \mathbf{k} \\ &= \kappa_r \sin \theta_r \mathbf{i} + (\kappa_r \cos \Theta + i\kappa_i) \mathbf{k}\end{aligned}$$

از مقایسه مؤلفه های معادله بالا با مؤلفه های معادله (۶۳.۱۸)، خواهیم دید که

$$\kappa_r \sin \theta_r = \hat{k} \sin \hat{\theta} \quad (۶۷.۱۸)$$

$$\kappa_r \cos \Theta + i\kappa_i = \hat{k} \cos \hat{\theta} \quad (۶۸.۱۸)$$

معادله اول در بالا همان قانون اسنل است، ولی معادله دوم، همراه با معادله (۶۶.۱۸)، رابطه κ_r ، κ_i و Θ را با n ، k ، و θ_r به دست می دهد، یعنی همان رابطه ای که در جستجوی



شکل ۶۰.۱۸ شکست به درون يك رسانا. سطوح فاز ثابت بر جهت انتشار عمودند و با مرز زاویه Θ می سازند، ولی سطوح دامنه ثابت با مرز موازی اند.

آن بودیم. حال نمادهای p و q را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\hat{\kappa} \cos \hat{\theta} = \frac{\omega}{c}(p+iq)$$

به‌طوری‌که

$$\hat{n} \cos \hat{\theta} = p+iq \quad (۶۹.۱۸)$$

آنگاه از معادله (۶۸.۱۸)، $\kappa_r \cos \Theta = (\omega/c)p$ ، با استفاده از معادله (۶۶.۱۸) به‌دست می‌آوریم

$$\kappa_r = \frac{\omega}{c} \sqrt{p^2 + n_\parallel^2 \sin^2 \theta_\parallel} \quad (۷۰.۱۸)$$

$$\kappa_i = \frac{\omega}{c} q \quad (۷۱.۱۸)$$

تنها باقی می‌ماند که مقادیر p و q را بیابیم، که آنها هم از مربع کردن معادله (۶۹.۱۸) نتیجه می‌شوند

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 + 2ipq &= \hat{n}^2(1 - \sin^2 \hat{\theta}) = (n + ik)^2 - n_\parallel^2 \sin^2 \theta_\parallel \\ &= n^2 - k^2 - n_\parallel^2 \sin^2 \theta_\parallel + 2ink \end{aligned}$$

که در اینجا مجدداً از قانون اسنل، $\hat{n} \sin \hat{\theta} = n_\parallel \sin \theta_\parallel$ ، استفاده کرده‌ایم. برحسب ثابت دی‌الکتریک $\hat{K} = \hat{n}^2$ داریم

$$p^2 - q^2 + 2ipq = K_r - K_\parallel \sin^2 \theta_\parallel + iK_i$$

از مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی، خواهیم داشت

$$K_r - K_\parallel \sin^2 \theta_\parallel = p^2 - q^2$$

$$K_i = 2pq$$

این معادلات تقریباً با معادلات (۵۱.۱۷) برای n و k یکسان‌اند و جوابهای آنها، که با معادلات (۵۲.۱۷) برای n و k یکسان‌اند، جز آنکه به جای K_r داریم $(K_r - K_\parallel \sin^2 \theta_\parallel)$ ، عبارت‌اند از

$$p = \sqrt{\frac{1}{4}[(K_r - K_n \sin^2 \theta_n) + \sqrt{(K_r - K_n \sin^2 \theta_n)^2 + K_i^2}]}$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{4}[-(K_r - K_n \sin^2 \theta_n) + \sqrt{(K_r - K_n \sin^2 \theta_n)^2 + K_i^2}]} \quad (۷۲.۱۸)$$

بامعادلات (۵۲.۱۷) برای n و k یکسان اند بجز آنکه به جای K_r داریم $(K_r - K_n \sin^2 \theta_n)$. بنابراین p و q تعمیمی از n و k هستند که به زاویه تابش θ_n بستگی دارند. هنگامی که $\theta_n = 0$ باشد، $p = n$ و $q = k$. طول تضعیف مستقیماً توسط q بر طبق معادله (۷۱.۱۸) داده می شود. معادله (۷۰.۱۸) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\kappa_r = N \frac{\omega}{c} \quad (۷۳.۱۸)$$

که معادله ای است برای تعریف ضریب شکست حقیقی $N(\theta_n)$

$$N = \sqrt{p^2 + n^2 \sin^2 \theta_n} \quad (۷۴.۱۸)$$

و این تعریف سرعت فاز را به صورت c/N به دست می دهد. بنا بر معادله (۶۶.۱۸)، N در صورت حقیقی قانون اسنل صدق می کند

$$N \sin \Theta = n_n \sin \theta_n \quad (۷۵.۱۸)$$

$$N \cos \Theta = p \quad (۷۶.۱۸)$$

هریک از این دو معادله را می توان برای یافتن زاویه حقیقی Θ به کار برد. هر چند که نه N قسمت حقیقی $\hat{n}$ است و نه Θ قسمت حقیقی $\hat{\theta}$ ، ولی $N \cos \Theta$ قسمت حقیقی $\hat{n} \cos \hat{\theta}$ است. بدین ترتیب ما جواب کلی را برای حالت مختلط در دست داریم. این نتایج تعمیمهای نسبتاً ساده ای از حالت حقیقی است، و کاربرد آن برای هر مسئله خاصی سراسر است. با وجود این، معادله های (۷۲.۱۸) به قدری پیچیده اند که درباره انتشار به درون محیطی رسانا در فرود مایل به طور کلی مطلب چندان بیشتری نمی توان گفت، مگر برای حالات بسیار حدی. برای مثال، هنگامی که K_i خیلی بزرگ است، حالتی که به فرمول هاگن - روبنز منجر می شود، داریم

$$p \cong n \cong q \cong k \gg 1$$

از معادله (۷۴.۱۸)

$$N \gg 1$$

و از معادله (۷۵.۱۸)

$$\Theta \cong 0$$

بنابراین زاویهٔ فرود هر چه باشد جهت انتشار تقریباً مستقیماً به‌درون محیط است، هر چند که تضعیف بسیار شدید است؛ سرعت و طول موج بسیار کاهش می‌یابند. عمق پوسته‌ای که برای فرود عمودی تعریف شد تقریباً برای هر زاویهٔ فرودی معتبر خواهد بود.

بازگشت به حالت انعکاس کلی داخلی، می‌توانیم با کاربرد این نتایج جواب آن مسئله‌ها نیز کامل کنیم. در اینجا، $n_2 = \sqrt{K_2}$ ؛ $K_2 = 0$ ؛ ولی هنگامی که $\theta_1 > \theta_c$ باشد $\cos \hat{\theta}_2$ موهومی است. (در اینجا ما شاخص ۲ را مجدداً حفظ می‌کنیم).

$$\cos \hat{\theta}_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{\theta}_2} = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_1}$$

از آنجا که $\sin \theta_c = n_2/n_1$ داریم

$$\cos \hat{\theta}_2 = i\sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1} \quad (77.18)$$

از ترکیب معادله‌های (77.18) و (69.18)

$$n_2 \cos \hat{\theta}_2 = i n_2 \sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1} = p + iq$$

بنابراین

$$p = 0, \quad q = n_2 \sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1} \quad (78.18)$$

[معادله (77.18) نیز همین نتیجه را می‌دهد.] با داشتن معادله (78.18)، ضریب فرنیل برای انعکاس قطبش S، معادله (28.18)، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\hat{r}_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - iq}{n_1 \cos \theta_1 + iq}$$

برای هر مقدار $\theta_1 > \theta_c$ ، صورت این کسر مزدوج مختلط مخرج آن است، بنابراین $\hat{r}_{12s}$ به شکل زیر است

$$\hat{r}_{12s} = \frac{z^*}{z}, \quad \hat{r}_{12s}^* = \frac{z}{z^*}$$

در نتیجه

$$R_s = |\hat{r}_{12s}|^2 = \hat{r}_{12s} \hat{r}_{12s}^* = 1$$

به‌طور مشابه از معادله (33.18) روشن است که برای تمام زوایای $\theta_1 > \theta_c$ داریم $R_p = 1$. ما در حالت مختلط T را محاسبه نکردیم، ولی بقای انرژی ایجاب می‌کند که

هنگامی که $R=1$ است $T=0$ باشد. از طرفی دیگر، ضرایب انتقال فرنل (Γ_{12}) صفر نیستند؛ در محیط ۲ میدانهای E و B ی غیر صفر وجود دارند. این تناقض ظاهری را بایافتن K_2 به آسانی می توان رفع کرد. با $p=0$ در معادله (۷۴.۱۸) داریم

$$N = n_1 \sin \theta_1 = n_2 (\sin \theta_1 / \sin \theta_c) \quad (۷۹.۱۸)$$

ضریب شکست حقیقی محیط ۲، یعنی N ، هنگامی که θ_1 از θ_c تا $\pi/2$ افزایش می یابد از n_2 تا n_1 تغییر می کند

$$n_2 \leq N \leq n_1 \quad (۸۰.۱۸)$$

از معادله (۷۶.۱۸) به ازای $p=0$ و $N \neq 0$ ، برای هر زاویه فرود $\theta_1 \geq \theta_c$ ، داریم

$$\cos \Theta = 0 \quad (۸۱.۱۸)$$

یعنی $\vec{K}_{2r}$ همواره بامرزموازی است، و در نتیجه انرژی در محیط ۲ عمود بر مرز جریسان ندارد. از قبل می دانیم که $\vec{K}_{2i}$ بر مرز عمود است. از آنجا که $q \neq 0$ ، در این راستا بنا بر معادله (۷۱.۱۸) دامنه موج تضعیف می شود. طول تضعیف $\delta = 1/\kappa_{2i}$ است، از معادله های (۷۱.۱۸) و (۷۸.۱۸) داریم

$$\delta = \frac{c}{\omega q} = \frac{c}{n_2 \omega} \frac{1}{\sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1}} \quad (۸۲.۱۸)$$

با قراردادن n_2 به جای N از معادله (۷۹.۱۸) و وارد کردن طول موج، $\lambda_2/2\pi = c/N\omega$ ، به دست می آوریم

$$\delta = \frac{\lambda_2}{2\pi \sqrt{1 - (\sin \theta_c / \sin \theta_1)^2}}$$

هنگامی که θ_1 به θ_c میل کند، طول تضعیف به بینهایت میل می کند (ولی البته در آن صورت فرض ما در مورد وضعیت هندسی نیمه بینهایت ایده آل غیر واقعی می شود). هنگامی که θ_1 به $\pi/2$ میل کند، δ به $\lambda_2/2\pi \cos \theta_c$ میل می کند که برای شیشه به هوا مقدار آن $\lambda_2/4.468$ است. بنابراین رفتار به ازای $\theta_1 > \theta_c$ ادامه معقول رفتار به ازای $\theta_1 \leq \theta_c$ است. هنگامی که θ_1 تا θ_c افزایش می یابد، R و θ_2 افزایش می یابند، در θ_c داریم، $R=1$ و $\theta_2 = \pi/2$. هنگامی که θ_1 به مقادیر بیش از θ_c افزایش می یابد، R برابر ۱ باقی می ماند و زاویه حقیقی شکست Θ برابر با $\pi/2$ باقی می ماند، ولی نفوذ بینهایت در محیط ۲ به تدریج کاهش می یابد و به کسری از طول می رسد. در عین حال سرعت فاز و طول

موج در محیط ۲ از مقادیر مشخصه مربوط به محیط ۲ به مقادیر مربوط به محیط ۱ کاهش می‌یابد. دو ویژگی جالب دیگر عبارت‌اند از آنکه يك موج فرودی با قاطبش خطی در اثر انعکاس به‌طور بیضوی قطبیده می‌شود، که این به دلیل $\hat{r}_{\perp s}$ و $\hat{r}_{\perp p}$ مختلط (ولی متفاوت) است؛ و دیگر آنکه موج در محیط ۲ عرضی نیست — $\hat{E}_{\perp p}$ يك مؤلفه طولی دارد.

۵.۱۸ انعکاس و انتقال توسط يك لایه نازک . تداخل

اکنون مسئله دوسطح تخت نامتناهی موازی مربوط به يك ناپیوستگی را، به‌عنوان يك مسئله مقادیر مرزی واقعیتر و پیچیده‌تر، بررسی خواهیم کرد. این وضعیت مربوط به بره‌ای از يك ماده می‌شود که در دو طرف آن دو محیط نیمه نامتناهی قرار دارد و خواص دو محیط نیمه نامتناهی ممکن است بایکدیگر متفاوت باشد. فرض می‌کنیم در سمت چپ صفحه $z=0$ ، محیط ۱؛ در سمت راست صفحه $z=d$ ، محیط ۳، و در بین آن دو، محیط ۲ قرار داشته باشد. کاربرد مستقیم شرایط مرزی در هر يك از دوسطح ناپیوستگی، از طریق محاسبات بخش ۲۰.۱۸، به نتایجی درباره میدانهای E و B در هر يك از سه ناحیه منجر خواهد شد (مسئله ۱۱.۱۸). روشی دیگر، که به همان جواب منجر می‌شود، بر پایه نتایجی که قبلاً در بخش ۲۰.۱۸ به دست آمد مبتنی است، و این روش از بعضی جهات اطلاعات بیشتری به ما خواهد داد. اساس این روش عبارت از آن است که يك موج فرودی را در محیط ۱ در نظر بگیریم که در اولین فصل مشترك بخشی از آن منعکس و بخشی از آن منتقل می‌شود؛ موج منتقل شده در دومین فصل مشترك بخشی از آن منعکس و بخشی از آن منتقل می‌شود؛ این موج منعکس شده مجدداً به فصل مشترك اول می‌رسد که در آنجا بخشی از آن منعکس و بخشی از آن منتقل می‌شود؛ و به همین ترتیب. چون ضرایب فرنی را که قبلاً به دست آوردیم در هر فصل مشترك کسری را که منعکس می‌شود و کسری را که انتقال می‌یابد به ما می‌دهند، تنها باید تمام سهمهای مختلف را جمع کنیم تا موج منعکس شده به محیط ۱ و موج انتقال یافته به محیط ۳ را به دست آوریم. هر چند که این روند به نظر بی‌انتهای می‌آید، ولی در واقع نسبتاً ساده است.

تنها مسئله جدیدی که در جمع کردن امواج به آن بر می‌خوریم آن است که دامنه‌های مختلف باید با اختلاف فازهای مناسبان بایکدیگر جمع شوند.^۱ هر بار که موج مجدداً از لایه عبور می‌کند، فاز آن به علت تغییر در $\mathbf{k}$ در $\mathbf{r}$ در نما تغییر خواهد کرد. وضعیت در شکل ۷.۱۸ نشان داده شده است. دو موج فرودی که بر سطح موج تخت در محیط ۱ عمودند

۱. فرض می‌کنیم لایه به حد کافی نازک و به حد کافی هموار است به‌طوری که اختلاف فازهای همدوس بین تمام امواج چند گانه با معناست. یکی از مزایای این روش آن است که اگر این فرض درست نباشد و اختلاف فازها کم و بیش کتره‌ای باشند، باز هم روش جمع مطرح شده در اینجا کاربرد خواهد داشت، البته به شرط آنکه این روش به جای دامنه‌ها در مورد شدتها به کار گرفته شود.

به سطح جلویی محیط ۲ برخورد می کنند. یکی از آنها بخشی از آن در X منعکس می شود؛ دیگری بخشی از آن در O می شکند، بخشی از آن از سطح عقبی در Z منعکس می شود و بخشی از آن در X می شکند تا در محیط ۱ مجدداً بیرون بیاید و با پرتو اول ترکیب شود. چون فاز در دو نقطه O و O' در روی سطح موج یکسان است، باید اختلاف فاز بین دو مسیر $O'X$ و OZX را محاسبه کنیم. چنانچه محیط ۲ رسانا باشد این محاسبات مشکل تر نخواهد بود و لذا ما فرض می کنیم که زاویه شکست Θ است، یعنی زاویه حقیقی که در بخش قبل یافتیم؛ برای محیط نارسانا $\Theta = \theta_p$. اختلاف فاز عبارت است از

$$\hat{\beta} = \vec{r}_p \cdot \vec{k}_p - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1$$

اکنون بردار $\vec{r}_p$ را بر حسب مؤلفه هایش تجزیه می کنیم

$$\vec{r}_p = x\vec{i} + d\vec{k}$$

و بردار $\vec{r}_1$ را به صورت زیر تجزیه می کنیم

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_x \vec{i} - w\vec{p}_1$$

که در آن

$$\vec{p}_1 = \vec{s} \times \vec{u}_1 = \vec{j} \times \vec{u}_1$$

بردار $\vec{p}_1$ بر بردار انتشار $\vec{k}_1 = \kappa_1 \vec{u}_1$ عمود است. بنابراین

$$\hat{\beta} = \vec{r}_x (\vec{k}_p \cdot \vec{i} - \vec{k}_1 \cdot \vec{i}) + d \vec{k}_p \cdot \vec{k}$$

حال، بنا بر قانون اسنل

$$\vec{k}_p \cdot \vec{i} - \vec{k}_1 \cdot \vec{i} = \hat{\kappa}_p \sin \hat{\theta}_p - \kappa_1 \sin \theta_1 = 0$$

$$\text{و } \vec{k}_p \cdot \vec{k} = \hat{\kappa}_p \cos \hat{\theta}_p \text{ پس داریم}$$

$$\hat{\beta} = d \hat{\kappa}_p \cos \theta_p = d \frac{\omega}{c} n_p \cos \theta_p \quad (۸۳.۱۸)$$

از معادله (۶۹.۱۸)، داریم

$$\hat{\beta} = d \frac{\omega}{c} (p + iq) \quad (۸۴.۱۸)$$

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{r}_{12} + \frac{\hat{t}_{12}\hat{t}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\beta}}{1 - \hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\beta}} \\ &= \frac{\hat{r}_{12} + \hat{r}_{23}(\hat{t}_{12}\hat{t}_{21} - \hat{r}_{12}\hat{r}_{21})e^{i\beta}}{1 - \hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\beta}}\end{aligned}$$

با استفاده از اتحادهای (۵۵.۱۸) و (۵۶.۱۸)، داریم

$$\hat{r} = \frac{\hat{r}_{12} + \hat{r}_{23}e^{i\beta}}{1 + \hat{r}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\beta}} \quad (۸۵.۱۸)$$

بامحاسباتی مشابه محاسبات بالا دامنه کل انتقال یافته به محیط ۳ به دست می آید

$$\hat{t} = \frac{\hat{t}_{12}\hat{t}_{23}e^{(1/2)i\beta}}{1 + \hat{r}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\beta}} \quad (۸۶.۱۸)$$

توجه کنید که صورتهای کسرها در دو معادله بالا فقط اثر سطوح جلویی و عقبی را می دهند، و مخرجها تأثیر انعکاسهای چندگانه واقعی را به حساب می آورند. از آنجا که فرض کردیم محیطهای ۱ و ۳ نارسانا هستند، می توانیم ضریب انعکاس و ضریب انتقال شدت کل را محاسبه کنیم

$$R = \hat{r}\hat{r}^*, \quad T = \frac{n_3 \cos \theta_3}{n_1 \cos \theta_1} \hat{t}\hat{t}^* \quad (۸۷.۱۸)$$

این ضرایب برای قطبشهای p و s متفاوت اند. برای یک بره نارسانا داریم

$$R + T = 1$$

ولی برای یک بره رسانا

$$R + T + A = 1 \quad (۸۸.۱۸)$$

زیرا در رسانا انرژی می تواند به وسیله گرمایش ژولی جذب شود. برای بره رسانا، معادلههای (۸۷.۱۸) هنگامی که بر حسب n و k بیان می شوند، حتی برای تابش عمودی، فوق العاده پیچیده می شوند. ولی به هر جهت این روابط مهم اند، زیرا اندازه گیری R و T برای پوسه های نازک فلز یکی از روشهای تعیین تجربی ثابتهای اپتیکی است. به منظور حل معادلات برای n و k بر حسب مقادیر تجربی R و T به محاسبات کامپیوتری نیاز است. ضریب انتقال T متناسب است با $\hat{t}\hat{t}^*$ ، و $\hat{r}\hat{r}^*$ متناسب است با

$$e^{(\frac{1}{2})i\beta} e^{-(\frac{1}{2})i\beta^*} = e^{(\frac{1}{2})i(\beta - \beta^*)}$$

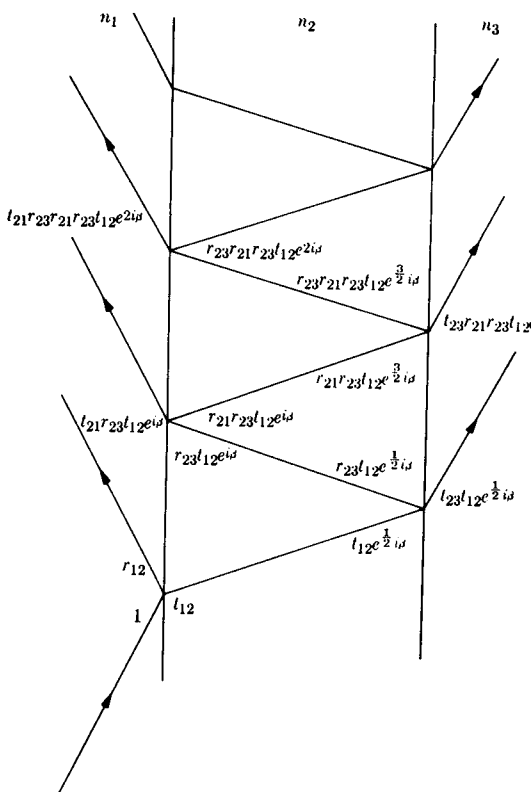
$$= e^{-2d(\omega/c)q}$$

درفرود عمودی، $q = k$ ، بنابراین T حاوی ضریب زیر است

$$e^{-2d/\delta}$$

که در آن $\delta = c/k\omega$ عمق پوسته است. اگر محیط ۱ هوا باشد، $\omega/c = 2\pi/\lambda_1$ ، بنابراین

$$e^{-2d/\delta} = e^{-4\pi kd/\lambda_1}$$



شکل ۸.۱۸ انعکاس و انتقال چندگانه یک پرتو فرودی، بادامنه واحد. هر یک از دامن‌ها با ضرایب فرنی و تأخیر فاز β مشخص شده است.

برای فلزات ($k \approx 2$) در نور مرئی ($\lambda_1 \approx 5000 \text{ \AA}$)، d باید کمتر از حدود $1000 \text{ \AA}$ باشد تا نور قابل توجهی عبور کند. هنگامی که این عامل نمایی کوچک است، مخرج در معادله‌های (۸۵.۱۸) و (۸۶.۱۸) تقریباً ۱ است.

برای اجسام نارسا $q = 0$ (بجز در مورد انعکاس کلی داخلی)، بنا بر این تضعیفی در اثر این عامل وجود ندارد، ولی باز هم معادلات، بعضی اثرهای جالب را پیش‌گویی می‌کنند. برای حالتی که β و تمام ضرایب فرنل حقیقی باشند، داریم

$$R = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta}{1 + r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta} \quad (۸۹.۱۸)$$

در تابش عمودی، داریم

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}, \quad \beta = 2d \frac{\omega}{c} n_2$$

فرض کنید محیط ۱ هواست با $n_1 = 1$ ، محیط ۳ شیشه است با $n_3 = 1.5$ ، و محیط ۲ لایه نازکی از ماده‌ای است با $n_2 = 1.3$. آنگاه

$$R = \frac{0.0221 + 0.0186 \cos \beta}{1.0001 + 0.0186 \cos \beta},$$

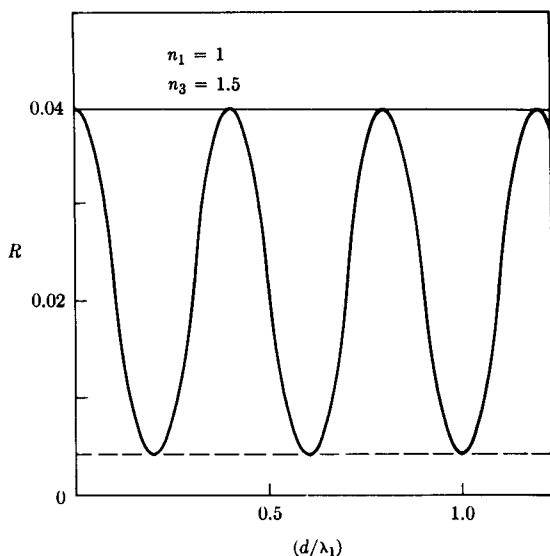
$$\beta = 4\pi n_2 (d/\lambda_1) = 16.3 (d/\lambda_1)$$

بنا بر این R بین 0.040 تا 0.054 تغییر می‌کند و به‌ازای β برابر با مضربهای صحیحی از 2π (یا d/λ_1 برابر با مضربهای صحیحی از 0.39) ماکزیممهایی^۱ دارد، همانطور که در شکل ۹.۱۸ دیده می‌شود. جالبترین ویژگی این نتیجه آن است که R می‌تواند از ضریب انعکاس سطح جلویی به‌تنهایی، $r_{12}^2 = 0.017$ ، کوچکتر باشد؛ این اثر تنها به‌دلیل تداخل مخرب می‌تواند رخ بدهد. R بین مقدار مربوط به نبود لایه روپوش یعنی $r_{23}^2 = 0.040$ ، و چیزی کمتر از مقدار مربوط به سطح عقبی به‌تنهایی، یعنی $r_{12}^2 = 0.005$ تغییر می‌کند. در واقع چنانچه ماده‌ای بیابیم که برای آن $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ باشد، مینیمم مقدار R را می‌توانیم به‌صفر برسانیم (مسئله ۱۰.۱۸). برای تولید عدسیهای بدون انعکاس از همین اثر استفاده می‌شود. عدسیهای دوربینهای عکاسی را غالباً با اندودی می‌پوشانند تا ضریب انعکاس آن در ناحیه وسط طیف مرئی صفر شود؛ ولی شرط مینیمم شدن در دو انتهای

۱. توجه کنید که مکان ماکزیممها و مینیممهای معادله (۸۹.۱۸) درست در همانجایی است که در یک محاسبه مقدماتی که در آن تنها دو انعکاس به‌حساب آمده باشد، به‌دست می‌آید.

سرخ و آبی طیف برقرار نیست، و بنابراین هنگامی که این عدسیها را با نور منعکس شده از آنها ببینیم تا اندازه‌ای بتفش رنگ دیده می‌شوند. رنگ این عدسیها به زاویه نگاه کردن نیز بستگی دارد، زیرا برای فرود مایل (d/λ_1) $\beta = \pi n_2 \cos \theta_2$ است. اگر n_2 بزرگتر از n_1 باشد، R بین مینیمی که برابر با r_{12} است و ماکزیمی که از r_{23} و r_{32} بزرگتر است تغییر می‌کند. طول موجی که به ازای آن مینیم یا ماکزیم رخ می‌دهد به ضخامت لایه (d) بستگی دارد. اگر ضخامت از یک نقطه به نقطه دیگر پوسه تغییر کند، طول موجی که به ازای آن ضریب انعکاس ماکزیم است نیز تغییر خواهد کرد. رنگهای گونا گونی که در حبابهای صابون و در لایه‌های روغن شناور روی آب دیده می‌شوند به علت همین تغییرات است.

در لایه‌های نارسا نا چنانچه n_2 کوچکتر از n_1 باشد، اثر جالب دیگری رخ می‌دهد. این همان موردی است که چنانچه تنها یک مرز وجود داشته باشد، به انعکاس کلی داخلی منجر می‌شود. در ابتدا ممکن است حدس بزنیم که تمام انرژی منعکس می‌شود و وجود مرز دوم نباید تفاوتی ایجاد کند. ولی، این حدس غلط است؛ میدان همواره در محیط ۲ به عمق متوسط δ نفوذ می‌کند. مرز دوم انعکاس کامل را از بین می‌برد و یک موج انتقالی وجود خواهد داشت با $T = 1 - R$. این اثر را انعکاس کلی تضعیف شده می‌نامند. هر چند که n_1 ، n_2 و n_3 حقیقی هستند، ولی هنگامی که $\theta_1 > \theta_c$ باشد $\hat{\theta}_2$ مختلط است و نتیجتاً ضرایب فریل مختلط خواهند بود. برای قطبش s داریم



شکل ۹.۱۸ اثر تداخل در انعکاس از یک فصل مشترک هوا - شیشه که بالایه‌ای به ضخامت d از ماده‌ای با $n_2 = 1.3$ اندود شده است.

$$\hat{r}_{12} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - iq}{n_1 \cos \theta_1 + iq} \quad (90.18)$$

که در آن، بنا بر معادله (۷۸.۱۸) (برای هر یک از دو قطبش)، و با استفاده از $\sin \theta_c = n_2/n_1$ داریم

$$q = n_1 \sqrt{(\sin \theta_1 / \sin \theta_c)^2 - 1} \\ = \sqrt{(n_1 \sin \theta_1)^2 - n_2^2} \quad (91.18)$$

با نوشتن $\hat{r}_{12}$ به صورت قطبی $\hat{r}_{12} = |\hat{r}_{12}| e^{i\alpha}$ دیدیم که $|\hat{r}_{12}| = 1$ بنا بر این

$$r_{12} = e^{i\alpha}$$

که در آن

$$\tan \alpha = \frac{\text{Im}(\hat{r}_{12})}{\text{Re}(\hat{r}_{12})} \\ = \frac{-2n_1 \cos \theta_1 q}{(n_1 \cos \theta_1)^2 - q^2} \quad (92.18)$$

با همین استدلال، نتیجه می گیریم که $|\hat{r}_{23}| = 1$ برای سادگی فرض کنیم که محیط ۳ با محیط ۱ یکسان است (برای مثال، دوشور شیشه ای بالای ای از هوا در بین آنها). آنگاه

$$\hat{r}_{23} = \hat{r}_{21} \text{ و چون } \hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$$

$$\hat{r}_{23} = -\hat{r}_{12} = -e^{i\alpha} \quad (93.18)$$

از معادله (۸۴.۱۸)

$$\hat{\beta} = 2d \frac{\omega}{c} (p + iq)$$

و در معادله (۷۸.۱۸) یافتیم که $p = 0$ ، لذا $\beta = i2dq(\omega/c)$ که موهومی محض است. بنا بر این می نویسیم

$$e^{i\hat{\beta}} = e^{-\gamma},$$

$$\gamma = 2dq(\omega/c) = 2 \frac{d}{\delta} \quad (94.18)$$

زیرا از معادله (۸۲.۱۸) داریم $q(\omega/c) = 1/\delta$. اکنون با قراردادن این مقادیر در معادله (۸۵.۱۸) به دست می‌آوریم

$$\hat{r} = \frac{e^{i\alpha}(1 - e^{-\gamma})}{1 - e^{2i\alpha}e^{-\gamma}}$$

و بالاخره

$$R = \hat{r}\hat{r}^* = \frac{(1 - e^{-\gamma})^2}{1 + e^{-2\gamma} - 2e^{-\gamma} \cos 2\alpha},$$

$$T = 1 - R = \frac{2(1 - \cos 2\alpha)e^{-\gamma}}{1 + e^{-2\gamma} - 2e^{-\gamma} \cos 2\alpha} \quad (۹۵.۱۸)$$

توجه کنید که برای n_1 و n_2 مفروض، α تنها به زاویهٔ فرود θ_1 بستگی دارد؛ وقتی θ_1 از θ_c تا $\pi/2$ افزایش می‌یابد، α از ۰ تا π تغییر می‌کند. نمای γ به ضخامت d (و همچنین از طریق δ به θ_1) بستگی دارد. اگر γ زیاد از حد کوچک نباشد، داریم

$$T \cong 2(1 - \cos 2\alpha)e^{-2d/\delta} \quad (۹۶.۱۸)$$

همچنین توجه کنید که δ با λ متناسب است، بنا بر این انعکاس کلی تضعیف شده را با میکروموجها در مقیاس بزرگتری می‌توان مشاهده کرد.

۶.۱۸ انتشار بین دو صفحهٔ رسانای موازی

هدایت امواج در موجبرها مسئلهٔ دیگری است که می‌توانیم آن را با بررسی تداخل میان موج فرودی و موج انعکاسی، یا به طریق دیگر با شروع از مسئلهٔ مقادیر مرزی جدیدی که در آن شرایط در مرزهای چندگانه به طور همزمان برآورده می‌شوند، بررسی کنیم. مجدداً بررسی را به روش اول آغاز می‌کنیم. در اینجا ما با انتشار موج در محیطی دی الکتریک (مثلاً هوا) سروکار داریم که با سطوحی رسانا محصور شده است. موجبرهای میکروموجی کاربردی از این مسئله‌اند. برای ساده شدن مطلب فرض می‌کنیم که رسانندگی فلز به طور ایده‌آل بینهایت است. بینهایت بودن σ بدان معناست که K_i برای فلز بینهایت است که این خود بدان معناست که $\hat{n}_2$ در معادله‌های (۲۸.۱۸) و (۳۳.۱۸) بینهایت است. بنابراین برای انعکاس از یک سطح رسانای کامل در هر زاویهٔ فرودی $\hat{r}_{12} = -1$ و $\hat{r}_{12} = +1$ دیدیم که برای نقره در طول موج ۳ سانتیمتر $R_{\text{Ag}} = 0.9996$ ، پس می‌توان انتظار داشت که این تقریب خوبی باشد. به علاوه فرض می‌شود که محیط دی الکتریک خلا

است.

اکنون می‌خواهیم به عنوان مقدمه‌ای بر مطالعه موجرها، انتشار امواج الکترومغناطیسی را در ناحیه بین دو صفحه موازی کاملاً رسانا، بررسی کنیم. ناحیه‌ای که در آن انتشار موج بررسی می‌شود در شکل ۱۰.۱۸ نشان داده شده است. چون جهت‌های x و z از نظر فیزیکی تمیز ناپذیرند، کلیت مطلب با در نظر گرفتن تنها امواجی که بردارهای موج آنها در صفحه yz است نقض نمی‌شود، به ویژه، امواجی را در نظر می‌گیریم که بسمت محور y زاویه θ می‌سازند. چنین امواجی در $y = a$ به سطح کاملاً رسانا برخورد می‌کنند و سپس به صورت امواجی که بردارهای انتشار آنها بسمت محور منفی y زاویه θ می‌سازند، منعکس می‌شوند. هنگامی که این امواج را سطح رسانا در $y = 0$ برای بار دوم منعکس می‌کند، دوباره به صورت امواج نوع اول درمی‌آیند. بنا بر این ملاحظه می‌شود که می‌توان انتشار بین دو صفحه موازی رسانا را بر حسب عاملهای نمایی زیر توصیف کرد

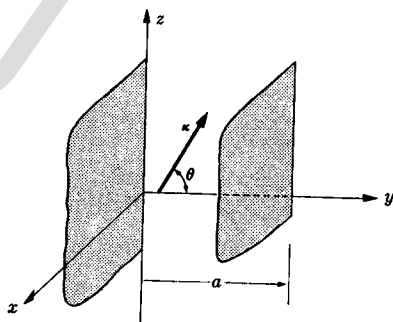
$$e^{i[\kappa(y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]}$$

و

(۹۷.۱۸)

$$e^{i[\kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]}$$

برای چنین امواجی دو قطبش ممکن وجود دارد، که می‌توانیم این دو را بدین صورت توصیف کنیم که بگوییم برای قطبش E میدان موازی محور x است، و برای قطبش p میدان H موازی محور x است. این دو قطبش را اصطلاحاً در موجرها به ترتیب امواج الکتریکی عرضی (TE) و مغناطیسی عرضی (TM) می‌نامند. در اینجا فقط امواج TE مطالعه می‌شود. بررسی امواج TM را به عنوان یک تمرین به عهده دانشجو می‌گذاریم. میدان الکتریکی در ناحیه بین دو صفحه رسانا در حالت TE با معادله زیر داده می‌شود



شکل ۱۰.۱۸ انتشار موج بین دو صفحه موازی کاملاً رسانا.

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}\{E_{\perp} e^{i[\kappa(y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} + E'_{\perp} e^{i[\kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]}\} \quad (98.18)$$

این میدان الکتریکی باید در $y=0$ صفر شود، زیرا $E_{\parallel}$ در مرکز يك رسانای کامل صفر می‌شود. واضح است که این شرط در صورتی به‌ازای تمام مقادیر z و t صادق است که $E_{\perp} = -E'_{\perp} = E$ ، این نتیجه از $r_{\parallel} = -1$ نیز به‌دست می‌آید. در این صورت با $\mathbf{E}$ معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E(e^{i\kappa y \cos \theta} - e^{-i\kappa y \cos \theta})e^{i(\kappa z \sin \theta - \omega t)} \quad (99.18)$$

علاوه بر این $\mathbf{E}$ باید در $y=a$ به‌ازای تمام مقادیر z و t صفر شود. این الزام، شرط زیر را تحمیل می‌کند

$$\kappa a \cos \theta = n\pi \quad (100.18)$$

بنا بر این برای فرکانس ω مفروض، $\kappa = \omega/c$ و زاویه‌ای که امواج با محور y می‌سازند با معادله (100.18) مشخص می‌شود. چنانچه این زاویه مشخص باشد، سرعت ظاهری در امتداد z برابر با $v_p = c/\sin \theta$ است، که همواره بزرگتر از سرعت نور در خلأ است. درباره این تناقض ظاهری نظریه خاص نسبیت بعداً به تفصیل بحث خواهد شد. مناسب است تغییرات میدان الکتریکی را در جهت‌های y و z بر حسب طول موجهایی بیان کنیم. این طول موجها عبارت‌اند از

$$\lambda_s = \frac{2\pi}{\kappa \sin \theta} = \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \quad \left(\lambda_0 = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi c}{\omega} \right) \quad (101.18)$$

برای جهت z و

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\kappa \cos \theta} = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} \quad (102.18)$$

برای جهت y . میدان الکتریکی، معادله (98.18)، بر حسب این طول موجها به صورت زیر است^۱

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_0 \sin \frac{2\pi y}{\lambda_c} e^{i[(2\pi z/\lambda_s) - \omega t]} \quad (103.18)$$

و معادله (100.18) به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{a}{\lambda_c} = \frac{n}{2} \quad (104.18)$$

از معادلات (۱۰۱.۱۸) و (۱۰۲.۱۸) مستقیماً نتیجهٔ زیر به دست می آید

$$\frac{1}{\lambda_g} + \frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_0} \quad (105.18)$$

اگر مقدار $\lambda_0 = 2a$ ، مربوط به $n = 1$ در معادله (۱۰۴.۱۸)، را در نظر بگیریم، در آن صورت هنگامی که λ_0 افزایش می یابد، به عبارت دیگر، هنگامی که ω کاهش می یابد به نقطه ای می رسیم که در آن $1/\lambda_g$ باید منفی باشد تا در معادله (۱۰۵.۱۸) صدق کند. در این حالت ضریب z در معادله (۱۰۳.۱۸) موهومی است، و تابع نمایی به جای آنکه بر حسب z نوسان کند به صورت یک تابع نمایی کاهش یابنده درمی آید. به بیان دیگر اگر $\lambda_0 > 2a$ باشد، موج الکترومغناطیسی در جهت z به جای منتشر شدن میرا می شود. اگر n مساوی ۲ گرفته شود، در این صورت $\lambda_c = 2a/2 = a$ است و بزرگترین طول موجی که منتشر می شود مساوی a است. اکنون دلیل استفاده از شاخص c که به معنای «قطع» است، روشن می شود. طول موج قطع بزرگترین طول موجی است که می تواند برای یک مد مفروض (مقدار n مفروض) انتشار یابد.

سرعت v_p که قبلاً به دست آوردیم، همواره از سرعت نور بیشتر است و، در واقع، هنگامی که طول موج در خلا مساوی λ_c است، به عبارت دیگر، هنگامی که $\theta = 0$ است، بینهایت است. این سرعت، که سرعت فاز نامیده می شود، عبارت است از سرعت نقطه ای با فاز ثابت روی موج. بدون بحث روی جنبه های نسبیتی موضوع، این مطلب نشان دهنده نقض ظاهری این اصل مسلم است که هیچ علامتی نمی تواند با سرعتی بیشتر از سرعت انتشار یابد. رفع این اشکال ظاهری بدین ترتیب است که انرژی با سرعتی کمتر از سرعت نور در طول موجبر انتشار می یابد، یعنی، با سرعتی که به سرعت گروه مشهور است. علامتها با سرعت گروه انتقال می یابند، نه با سرعت فاز.

برای تعیین سرعت انتشار انرژی، چگالی انرژی را محاسبه خواهیم کرد. حاصل ضرب این چگالی انرژی در سرعت گروه، شار انرژی یا بردار پوینتینگ را به دست می دهد. بنابراین از تقسیم بردار پوینتینگ به چگالی انرژی، می توان سرعت انتشار انرژی را به دست آورد. این نتیجه تعمیمی است از معادله (۳۵.۱۷).

میدان مغناطیسی در موجبر از معادله زیر به دست می آید

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (106.18)$$

زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}E_0 \frac{\gamma\pi}{\omega\lambda_g} \sin \frac{\gamma\pi y}{\lambda_c} e^{i[(\gamma\pi z/\lambda_g) - \omega t]} + i\mathbf{k}E_0 \frac{\gamma\pi}{\omega\lambda_g} \cos \frac{\gamma\pi y}{\lambda_c} e^{i[(\gamma\pi z/\lambda_g) - \omega t]} \quad (107.18)$$

چگالی انرژی عبارت است از

$$u = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad (108.18)$$

و بردار پوئینگ عبارت است از

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (109.18)$$

برای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ از نمادگذاری مختلط استفاده شده است، با این فرض ضمنی که برای هر عبارتی باید قسمت حقیقی آن در نظر گرفته شود. بنا بر این برای محاسبه u و $\mathbf{S}$ باید قسمت‌های حقیقی را انتخاب و درهم ضرب کنیم. ولی چون کمیت‌هایی که برای محاسبه سرعت گروه به کار می‌روند، میانگین‌های زمانی معادلات (108.18) و (109.18) هستند، می‌توانیم با استفاده از معادله (37.17)، گرفتن قسمت‌های حقیقی را آسان کنیم. میانگین زمانی چگالی انرژی عبارت است از

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{4} \text{Re}[\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{H}] \\ &= \frac{1}{4} \text{Re} \left[\epsilon_0 E_0^* E_0 \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi y}{\lambda_c} \right) + \frac{1}{\mu_0} E_0^* E_0 \left(\frac{\gamma\pi}{\omega\lambda_g} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi y}{\lambda_c} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} E_0^* E_0 \left(\frac{\gamma\pi}{\omega\lambda_g} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\gamma\pi y}{\lambda_c} \right) \right] \quad (110.18) \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری در جهت y ، یعنی در عرض موجبر، جمله‌های $\sin^2(\gamma\pi y/\lambda_c)$ و $\cos^2(\gamma\pi y/\lambda_c)$ به $a/2$ تبدیل می‌شوند. بنا بر این

$$\begin{aligned} \int_0^a \bar{u} dy &= \frac{1}{4} E_0^* E_0 \frac{a}{4} \left[\epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0} \frac{\gamma^2 \pi^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} E_0^* E_0 \epsilon_0 a \quad (111.18) \end{aligned}$$

میانگین زمانی مؤلفه z بردار پوئینتینگ به صورت زیر است

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} E_x^* H_y \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{Re} \left[E_0^* \sin\left(\frac{y\pi}{\lambda_c}\right) \frac{1}{\mu_0} E_0 \frac{2\pi}{\omega \lambda_g} \sin\left(\frac{y\pi}{\lambda_c}\right) \right] \quad (112.18) \\ &= \frac{1}{4} E_0^* E_0 \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} \sin^2\left(\frac{y\pi}{\lambda_c}\right)\end{aligned}$$

با انتگرال گیری از این عبارت از $y=0$ تا $y=a$ میانگین توان کل (در واحد طول در جهت x) که در امتداد موجبر انتقال می یابد، به دست می آید

$$\int_0^a \bar{S}_x dy = \frac{1}{4} E_0^* E_0 \frac{2\pi}{\mu_0 \omega \lambda_g} a \quad (113.18)$$

سرعت انتشار انرژی عبارت است از خارج قسمت تقسیم معادله (113.18) بر معادله (111.18). از این رو

$$v_g = \frac{2\pi}{\epsilon_0 \mu_0 \omega \lambda_g} = \frac{2\pi c^2}{\omega \lambda_g} = c \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad (114.18)$$

با توجه به معادله (101.18) معلوم است که λ_g از λ_0 بزرگتر است، و بنابراین $\omega \lambda_g / 2\pi$ از c بزرگتر است، بدین ترتیب روشن است که v_g از c کوچکتر است.

اکنون با توجه به اینکه از معادله (101.18) داریم $\lambda_g = \lambda_0 / \sin \theta$ ، می توانیم درک بیشتری دربارهٔ اختلاف بین سرعت گروه، v_g ، و سرعت فاز، v_p ، به دست آوریم. با به کار بردن این نتیجه در معادله (114.18) خواهیم داشت

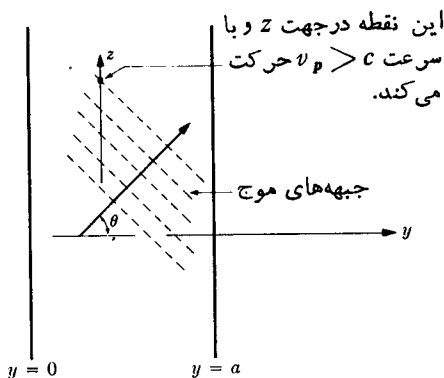
$$v_g = c \sin \theta \quad (115.18)$$

وقلا مشاهده کردیم که

$$v_p = \frac{c}{\sin \theta} \quad (116.18)$$

بنابراین

$$v_g v_p = c^2 \quad (117.18)$$



شکل ۱۱.۱۸ جزئیات حرکت جبهه‌های موج در افتخار انتشار موج بین صفحات رسانا.

این نتیجه‌ای است که عموماً برای انتشار در موجبرها صادق است. (توجه کنید که معادله (۱۱۷.۱۸) الزاماً برای انواع دیگری از انتشار موج صادق نیست، به‌ویژه معادله مذکور برای امواج تخت در محیط‌های غیر پاشنده بدون مرز صادق نیست، در این محیط‌ها سرعت‌های گروه و فاز یکی هستند.) با به یاد آوردن این مطلب که θ عبارت است از زاویه بین امتداد انتشار یکی از امواج مؤلفه و محور y ، به سادگی می‌توان شکل ۱۱.۱۸ را رسم کرد. این شکل مقطعی از ناحیه بین صفحات رسانا را در صفحه yz نشان می‌دهد. محل تلاقی سطح موج با محور z با سرعت $v_p = c / \sin \theta$ حرکت می‌کند؛ در حالی که مؤلفه c در امتداد محور z ، یعنی v_g ، عبارت است از $v_g = c \sin \theta$.

بسیاری از نتایجی که برای موجبر ساده با صفحات موازی به دست آمد، برای حالات پیچیده‌تر نیز صادق است. به‌ویژه، موجبرهای متداول مستطیلی شکل خصوصیات کاملاً مشابهی دارند. در بخش بعد به بررسی جنبه‌های کلی دیگر موجبرها، با تأکید بر موجبرهای مستطیلی، خواهیم پرداخت.

۷.۱۸ موجبرها

در بخش ۴.۱۶ نشان دادیم که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ هر دو در معادله موج در خلا صدق می‌کنند، یعنی

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۱۸.۱۸)$$

برای امواج تکفام، به عبارت دیگر، برای امواجی به شکل $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ ، این معادلات به صورت زیر درمی آیند

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} = 0 \quad (۱۱۹.۱۸)$$

علاوه بر این معادلات، معادلات ماکسول هم باید صادق باشند. برای انتشار امواج الکتریکی عرضی (TE) در جهت z ، $E_z = 0$ است؛ به علاوه، برای امواجی که در جهت z انتشار می یابند، پنج مؤلفه باقی مانده میدانها متناسب با $e^{i2\pi z/\lambda_g}$ هستند. معادلات تاو ماکسول در این حالت به صورت زیرند

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\mu_0 \omega \mathbf{H} = 0 :$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - i\mu_0 \omega H_z &= 0 & (\text{الف}) \\ E_x &= + \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} H_y & (\text{ب}) \\ E_y &= - \frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} H_x & (\text{ج}) \end{aligned} \right\} \quad (۱۲۰.۱۸)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + i\varepsilon_0 \omega \mathbf{E} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{2\pi i}{\lambda_g} H_y + i\varepsilon_0 \omega E_x &= 0 & (\text{الف}) \\ \frac{2\pi i}{\lambda_g} H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} + i\varepsilon_0 \omega E_y &= 0 & (\text{ب}) \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0 & (\text{ج}) \end{aligned} \right\} \quad (۱۲۱.۱۸)$$

واضح است که (الف) از معادله (۱۲۱.۱۸) و (ب) از معادله (۱۲۰.۱۸) نتیجه زیر را به دست می دهند

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \left(\frac{2\pi i}{\lambda_g} - i \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \lambda_g}{2\pi} \right) H_y \quad (۱۲۲.۱۸)$$

و بنابراین واضح است که اگر H_z معلوم باشد، H_y به دست می‌آید. به طریق مشابه، به کمک (ج) از معادله (۱۲۰.۱۸) و (ب) از معادله (۱۲۱.۱۸)، H_x را می‌توان از H_z به دست آورد. بالاخره، E_x و E_y با (ب) و (ج) از معادله (۱۲۰.۱۸) به H_x و H_y مربوط می‌شوند. بنابراین اگر H_z را پیدا کنیم، تمام کمیت‌های دیگر میدان را می‌توانیم بامشتق - گیری به دست آوریم. خود H_z باید در معادله (۱۱۹.۱۸) صدق کند؛ بنابراین، با توجه به اینکه بستگی آن به z به شکل $e^{i2\pi z/\lambda_g}$ است، می‌نویسیم

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} \right) H_z = 0 \quad (123.18)$$

آنچه باقی می‌ماند، تنها تعیین شرایط مرزی است که جوابهای معادله (۱۲۳.۱۸) باید در آنها صدق کنند.

اگر يك موجبر استوانه‌ای را در نظر بگیریم که دیواره‌اش کاملاً رساناست، مانند آنچه در شکل ۱۲.۱۸ نشان داده شده است، آنگاه شرایط مرزی مناسب عبارت‌اند از آنکه مؤلفه مماسی E و مؤلفه عمودی B روی S صفر شوند. مؤلفه مماسی H و مؤلفه عمودی D اختیاری‌اند. با اعمال این شرایط، رابطه‌ای به دست می‌آید که λ_g و ابعاد موجبر را به یکدیگر مربوط می‌کند، درست مانند رابطه‌ای که در معادله (۱۰۵.۱۸) درباره موجبر با صفحات موازی به دست آمد.

برای درك بهتر این روش، موجبر مکعب مستطیلی را که در شکل ۱۳.۱۸ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. می‌توان معادله (۱۲۳.۱۸) را با استفاده از روش معمول جداسازی متغیرها، تجزیه کرد. جواب کلی شامل مجموعه‌ای از جملات به شکل زیر است

$$H_z(x, y, z) = (A \cos \kappa_x x \cos \kappa_y y + B \cos \kappa_x x \sin \kappa_y y + C \sin \kappa_x x \cos \kappa_y y + D \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y) e^{i2\pi z/\lambda_g} \quad (124.18)$$

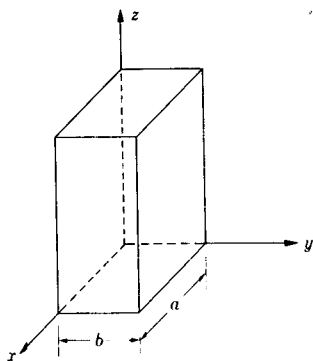
با

$$-(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) + [\omega^2/c^2 - (4\pi^2/\lambda_g^2)] = 0 \quad (125.18)$$

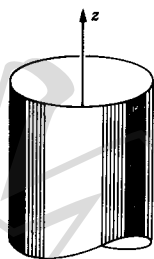
E_x را از H_z به دست می‌آوریم

$$E_x = -\frac{\mu_0 \omega \lambda_g}{2\pi} \left(\frac{2\pi i}{\lambda_g} - i \frac{\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \lambda_g}{2\pi} \right)^{-1} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (126.18)$$

بامشتق گیری جزئی، هر $\cos \kappa_y y$ به يك $\sin \kappa_y y$ تبدیل می‌شود و برعکس. با وجود این، چون E_x باید در $y=0$ و در $y=b$ صفر شود، تنها جملاتی که شامل $\sin \kappa_y y$ هستند، در E_x باقی می‌مانند و ضمناً در این جملات باید $\kappa_y = n\pi/b$ باشد. بنابراین، فقط جملات $\cos \kappa_y y$ در معادله (۱۲۴.۱۸) باقی می‌مانند. با بحث مشابهی می‌توان نشان داد



شکل ۱۳.۱۸ يك موجبر مكعب مستطیلی.



شکل ۱۲.۱۸ انتشار موج در داخل يك استوانهٔ رسانا.

که فقط جملات $\cos \kappa_x x$ باقی می‌مانند، و ضمناً در این جملات باید $\kappa_x = m\pi/a$ باشد. جوابهای مجاز برای H_z ، یعنی آنهایی که باعث می‌شوند مؤلفه‌های مماسی $\mathbf{E}$ در مرز صفر شوند، به‌صورت زیرند

$$H_z = A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\gamma \pi iz / \lambda_g} \quad (۱۲۷.۱۸)$$

هرزوج ممکن از مقادیر m و n را يك مد می‌نامند. نماد گذاری TE_{mn} برای مدهایی به‌کار می‌رود که از نوع (۱۲۷.۱۸) باشند؛ TE به‌معنی میدان الکتریکی عرضی است و m و n تعداد نیم موجها در ابعاد باریکتر (n) و به‌تر (m) را نشان می‌دهند. اکنون برمی‌گردیم به معادله (۱۲۵.۱۸). با استفاده از $\kappa_x = m\pi/a$ و $\kappa_y = n\pi/b$ خواهیم داشت

$$\left(\frac{\gamma\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{\gamma\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \quad (۱۲۸.۱۸)$$

که به‌وضوح نشان می‌دهد که برای λ_0 ثابت، طول موج موجبر، و در نتیجه سرعت موج آن $v_g = c\lambda_0/\lambda_g$ ، به‌مد انتشار بستگی دارد. همچنین می‌بینیم که طول موجهای ماکزیممی برای انتشار در مدهای مختلف وجود دارد. واضح است که اگر λ_0 به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، کمیت $(\gamma\pi/\lambda_0)^2$ از $(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ کوچکتر خواهد بود. در این مورد، طرف راست معادله (۱۲۸.۱۸) منفی می‌شود و در نتیجه مقدار λ_g موهومی است. این امر باعث تضعیف موج می‌شود و در نتیجه انتشار موج نخواهیم داشت. از موجبرهای مکعب مستطیلی شکل برای انتقال توان میکروموج به‌طور گسترده‌ای

استفاده می‌شود. معمولاً اندازه موجبر را طوری انتخاب می‌کنند که فقط مد TE_{10} در فرکانس مورد نظر در موجبر منتشر شود. یکی از اندازه‌های متداول برای ابعاد داخلی موجبر عبارت است از $2.28 \text{ cm} \times 1.01 \text{ cm}$. طول موج حداکثری که در مد TE_{10} در چنین موجبری منتشر می‌شود، با قرارداد $n=0$, $m=1$ ، با قراردادن $a=2.28 \text{ cm}$ و $b=1.01 \text{ cm}$ در معادله (۱۲۸.۱۸) به دست می‌آید. نتیجه آنکه: $\lambda_{0, \max} = 4.57 \text{ cm}$ که با قراردادن $\lambda_g = \infty$ به دست می‌آید؛ طول موجهای بزرگتر از این مقدار منتشر نمی‌شوند ولی آنهایی که کوچکترند انتشار می‌یابند. مد با طول موج کوچکتر بعدی، بسته به ابعاد موجبر TE_{11} یا TE_{20} است. اگر $b < a/\sqrt{3}$ باشد، طول موج قطع TE_{20} بزرگتر از طول موج قطع TE_{11} خواهد بود. محاسبه طول موج قطع TE_{20} خیلی ساده است؛ طول موج مذکور درست نصف طول موج قطع TE_{10} ، یا 2.28 cm است. با توجه به نقایصی که در ساخت موجبرها به وجود می‌آید و اتلافهای زیاد در نزدیکی طول موج قطع TE_{10} ، لازم است که باند TE_{10} موجبرهای تجاری عملاً به 2.42 تا 4.35 سانتیمتر محدود شود.

۸.۱۸ مشددهای حفره‌ای

وسیله دیگری که ارتباط نزدیکی با موجبرها دارد و از لحاظ عملی بسیار مهم است، مشدد حفره‌ای است. مشددهای حفره‌ای از این لحاظ که می‌توانند در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نوسان کننده انرژی ذخیره کنند، خواص مدارهای تشدید را از خود نشان می‌دهند؛ به علاوه، در مشددهای حفره‌ای عملی، مقداری از انرژی ذخیره شده در هر سیکل از نوسان تلف می‌شود. ولی از این لحاظ، مشددهای حفره‌ای اغلب از مدارهای LC متعارف حدود بیست برابر بهترند، به عبارت دیگر، کسری از انرژی ذخیره شده در مشدد حفره‌ای که در هر سیکل تلف می‌شود، حدود $1/20$ کسر تلف شده در مدار LC است. مزیت دیگر این است که مشددهای حفره‌ای (با اندازه‌های عملی) فرکانسهای تشدید دارند که گستره آن از چند صد مگاهرتز به بالا است، درست ناحیه‌ای که تقریباً ساختن مدارهای LC متعارف غیر ممکن است.

ساده‌ترین مشدد حفره‌ای يك مكعب مستطیل قائم با دیوارهای کاملاً رساناست. برای چنین حفره‌ای، شرایط مرزی مناسب عبارت‌اند از صفر شدن مؤلفه مماسی E و مؤلفه عمودی B روی مرز. مؤلفه مماسی H و مؤلفه عمودی D اختیاری‌اند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی باید در معادلات موج (۱۱۹.۱۸) صدق کنند؛ بنابراین، E_x باید در معادله زیر صدق کند

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0 \quad (129.18)$$

اگر حفره ناحیه‌ای را در بر بگیرد که سطوح مرزی آن شش صفحه $x=a$, $x=0$,

که در آن $\kappa_y = m\pi/b$ و $\kappa_x = n\pi/d$. به علاوه، E_z به تنهایی نمی تواند جواب باشد مگر اینکه $f_1(x)$ يك عدد ثابت باشد، زیرا برای صادق بودن یکی از معادلات ما کسول $\nabla \cdot \mathbf{E}$ باید صفر باشد. برای E_y و E_z وضعیت مشابه است، و جوابها به شکل زیر درمی آیند

که در آن κ_y و κ_x همانهایی است که در معادله (۱۳۰.۱۸) آمده‌اند و $\kappa_x = l\pi/a$ است. برای آنکه واگرایی $\mathbf{E}$ صفر شود، معادله زیر باید برقرار باشد

این معادله در صورتی برقرار است که $f_z = \cos \kappa_z z$, $f_y = \cos \kappa_y y$, $f_x = \cos \kappa_x x$

که درست شرط عمود بودن K بر E است. بازمی‌گردیم به معادله موج، واضح است که فرکانسهای تشدید حفره توسط معادله زیر داده می‌شوند

٤

$$\frac{l^{\gamma}}{a^{\gamma}} + \frac{m^{\gamma}}{b^{\gamma}} + \frac{n^{\gamma}}{d^{\gamma}} - \frac{\gamma f^{\gamma}}{c^{\gamma}} = 0. \quad (135.18)$$

يك حفرة معمولی كه از موجیری با اندازه $29 \times 22 \times 101$ cm ساخته شده باشد، با

$l=1$ ، $m=0$ ، $n=2$ ، مشخص می‌شود (حفره مشهور به TE_{102}). واضح است که فرکانس تشدید چنین حفره‌ای توسط بعد z آن، یعنی d ، تعیین می‌شود. بسیاری از جنبه‌های دیگر مسئلهٔ مشدد حفره‌ای مکعب مستطیلی را نیز می‌توان به تفصیل بررسی کرد؛ بعضی از این جنبه‌ها در مسائل پایان فصل آمده‌اند.

شکلهای دیگری از مشددهای حفره‌ای را نیز می‌سازند؛ ولی تنها حفره‌های استوانه‌ای و مکعب مستطیلی قائم را می‌توان به آسانی ساخت و از نظر ریاضی دقیقاً بررسی کرد. در بررسی استوانهٔ قائم توابعی وارد می‌شوند که از سینوس و کسینوس بسیار پیچیده‌ترند، یعنی، به‌طور اخص توابع بسل. برای برقراری شرایط مرزی باید صفرهای این توابع را، به‌همان طریق که صفرهای سینوسها در مسئلهٔ مکعب مستطیل را پیدا کردیم، پیدا کنیم. اما در اینجا داخل در این بحث مفصل نمی‌شویم و خوانندهٔ علاقمند را به مطالعهٔ کتاب مونته‌گومری^۱ ارجاع می‌دهیم؛ در صفحهٔ ۲۹۷ آن کتاب يك تحلیل اجمالی ولی بسیار مفید از مشدد حفره‌ای استوانه‌ای آمده است.

۹.۱۸ خلاصهٔ مطالب

مسائل عملی انتشار موج غالباً شامل مرز بین محیطهای مختلف است که در آن ثابت دی الکتریک مختلط $\hat{K}$ به‌طور ناپیوسته تغییر می‌کند. وضعیت مربوط به يك مرز تخت، با قانون اسنل و ضرایب فرنل، که به $\hat{n} = \sqrt{\hat{K}}$ و زاویهٔ فرود بستگی دارند، بیان می‌شود. مسائل شامل مرزهای تخت چند گانه را با برهم‌نesh جوابهای مربوط به مرزهای منفرد می‌توان حل و ایجاد اثرات تداخلی را مشاهده کرد. محیطهای نارسانا حالت خاصی از محیطهای رسانا هستند که برای آنها قسمتهای موهومی $\hat{K}$ و $\hat{n}$ صفر می‌شود.

۱. دامنه‌ها نمی‌توانند در شرایط مرزی صدق کنند مگر آنکه فرکانس موج در دو طرف مرز یکسان باشد و فاز آن در تمام نقاط روی مرز از دو طرف مطابقت داشته باشد. در آن صورت، بردارهای انتشار امواج فرودی، انعکاسی، و انتقالی همگی با بردار عمود بر مرز هم‌صفحه‌اند، و زاویهٔ انعکاس با زاویهٔ فرود برابر است، $\theta_r = \theta_i$. از رابطهٔ پاشندگی قانون اسنل نتیجه می‌شود

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

۲. پیوستگی مؤلفه‌های مماسی میدانهای E و H با ضرایب فرنل بیان می‌شوند. این ضرایب عبارت‌اند از نسبتهای دامنه‌های میدان E ی امواج انعکاسی و انتقالی بدامنهٔ موج

فرودی. این ضرایب برای قطبشهای s و p (به ترتیب، مربوط به بردار E عمود بر و موازی با صفحه فرود) متفاوت است. برای انعکاس

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}$$

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}$$

۳. شدتهای انعکاسی و انتقالی از مؤلفه عمودی بردارهای پوئینتینگ بر حسب ضرایب فرنل محاسبه می شوند. ضریب انعکاس عبارت است از

$$R = r_{12s}^2 r_{12p}^2$$

برای محیطهای نارسانا ضریب انتقال عبارت است از

$$T = 1 - R$$

و برای موردی که محیط ۲ رسانا باشد، ضریب جذب عبارت است از

$$A = 1 - R$$

که این هردو از بقای انرژی نتیجه می شوند. این معادله ها برای نارساناها یا برای فرود عمودی قابل حل اند. قطبش در اثر انعکاس در زاویه بروستر، انعکاس کلی داخلی در زاویه حد، و فرمول هاگن - روبنز برای ضریب انعکاس رساناها در فرکانس رادیویی همگی از این معادله ها نتیجه می شوند.

۴. برای فرود مایل بر محیط رسانا، انتشار و تضعیف با $\kappa_i = q\omega/c$ و $\kappa_r = N\omega/c$ توصیف می شوند، سطوح فاز ثابت با مرز زاویه Θ می سازند و سطوح دامنه ثابت با مرز موازی اند.

$$N = \sqrt{p^2 + n^2 \sin^2 \theta_1}$$

$$\sin \Theta = n_1 \sin \theta_1 / N$$

کمیت های p و q تعمیم کمیت های n و k هستند و ارتباط آنها به $(K_r - K_1 \sin^2 \theta_1)$ و K_i مانند ارتباط n و k است به آنها به ازای $\theta_1 = 0$. انعکاس کلی در زوایای بزرگتر از زاویه حد نیز با این کمیتها توجیه می شود.

۵. برای دومرزخت موازی، دامنهٔ نسبی موج انعکاسی باروش برهمنهی به صورت زیر به دست می آید

$$r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{i\hat{\beta}}}{1 + r_{12}r_{23}e^{i\hat{\beta}}}$$

که در آن

$$\hat{\beta} = 2d \frac{\omega}{c} n_r \cos \theta_r = 2d \frac{\omega}{c} (p + iq)$$

که $\hat{\beta}$ انتقال فاز (و تضعیف) برای دوبار پیمودن لایه است. ضریب انعکاس کل عبارت است از

$$R = rr^*$$

$$1 - R = T + A$$

که در آن اگر لایه نارسانا باشد $A = 0$ است. از طریق R, β اثرات تداخلی از خود نشان می دهد که این اثرات به (d/λ_1) بستگی دارند. برای مورد لایهٔ رسانا یا انعکاس کلی تضعیف شده، اگر $d \gg \delta$ باشد

$$T \sim e^{-2d/\delta}$$

که در آن δ طول تضعیف است.

۶. اگر طول موج در خلا $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ از طول موج قطع λ_c که به ابعاد موجبر بستگی دارد، کوتاهتر باشد امواج در موجبر بدون تضعیف انتشار می یابند (با این فرض که مرزها منعکس کننده های کاملی هستند).

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$$

که در آن λ_g طول موج هدایت شده در موجبر است. سرعت گروه (سرعت انتشار انرژی) v_g است و

$$v_g v_p = c^2$$

برای يك موجبر مکعب مستطیل شکل که در آن $a > b$ است، درمد TE_{mn} داریم

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2$$

معمولاً λ_0 را به مقادیری محدود می کنند که تنها مد TE_{10} بتواند انتشار یابد.

۷. برای امواج تختی که تضعیف می شوند یا در موجبری هدایت می شوند (و همچنین برای امواج کروی) در روی سطح فاز ثابت، دامنه ثابت نیست. چنین امواجی ناهمگن نامیده می شوند. برای این امواج بردار پوئین تینگ پیچیده تر از امواج تخت همگنی است که در محیطی دی الکتریک انتشار می یابند.

مسائل

۱.۱۸ برای موجی با قطبش y که از هوا تحت زاویه بروستر، $\theta_1 = \theta_B$ ، بر روی یک دی الکتریک فرود می آید، ضریب انعکاس فرنل را محاسبه کنید. اگر $n = ۱.۵$ باشد، ضریب انعکاس چه مقدار خواهد بود؟

۲.۱۸ موجی با قطبش p از هوا بر روی سطح یک دی الکتریک تقریباً به طور خراشان، $\theta_1 = \pi/2 - \delta$ ، فرود می آید. شیب منحنی $R_p(\theta_1)$ را هنگامی که δ به صفر میل می کند، بر حسب ثابت دی الکتریک K پیدا کنید.

۳.۱۸ موجی با قطبش p از محیط شفاف با ثابت دی الکتریک K بر روی مرز هوا با زاویه ای اندکی کمتر از زاویه حد، $\theta_1 = \theta_c - \delta$ ، فرود می آید. به طور تقریبی R_p را به صورت تابعی از δ هنگامی که δ به صفر میل می کند به دست آورید، و نشان دهید که شیب منحنی $R_p(\theta_1)$ در θ_c بینهایت است.

۴.۱۸ فرض کنید ضریب شکست یک الیاف نوری $n = ۱.۵۵$ است. اگر الیاف با هوا احاطه شده باشد، بزرگترین زاویه بین محور الیاف و پرتو نوری که بتواند در امتداد الیاف انتشار بیابد چقدر است؟ اگر الیاف را رو کشی با ضریب شکست ۱.۵۳ احاطه کرده باشد، این زاویه چقدر است؟

۵.۱۸ یک موج نوری با قطبش p در هوا از یک سطح فلزی منعکس می شود. با فرض آنکه $\cos \theta_1 \cong ۱$ (فرضی که غالباً صحیح است) R_p را محاسبه کنید. مقدار θ_1 را که در آن R_p مینیمم می شود پیدا کنید. این مقدار θ_1 و R_p مربوط را به ازای $n = ۱$ ، $k = ۶$ (مقادیر مناسب برای آلومینیم) محاسبه کنید.

۶.۱۸ موج تختی از هوا به طور عمود بر روی مرز تخت فلزی فرود می آید. فرض کنید فرکانس موج در گستره ای است که $n \cong k \gg ۱$. از ضریب انتقال فرنل، $|E_t|^2$ را درست در داخل سطح فلز محاسبه کنید. اتلاف انرژی در واحد حجم را در نزدیکی سطح

محاسبه کنید، و مقدار آن را برای حالتی که دامنه فرودی $E_1 = 10 \text{ V/cm}$ و فرکانس $f = 10^9 \text{ Hz}$ است، به دست آورید.

۷.۱۸ موجی با فرکانسی در گستره اعتبار رابطه هاگن - روبنز در هوا به طور مایل با زاویه θ_1 بر روی سطح رسانایی فرود می آید. نشان دهید به جای معادله (۶۰.۱۸) روابط زیر را خواهیم داشت

$$A_s = \frac{2 \cos \theta_1}{k}, \quad A_p = \frac{2}{k \cos \theta_1}$$

۸.۱۸ موجی در هوا به طور عمود بر سطح رسانایی فرود می آید و از آن منعکس می شود. از r_{12} نشان دهید که انتقال فابردار E برابر است با

$$\alpha_s = \tan^{-1} \frac{2k}{n^2 + k^2 - 1}$$

نشان دهید این نتیجه برای حالت رسانندگی بینهایت به $\alpha_s = \pi$ تبدیل می شود.

۹.۱۸ فرض کنید یک موج رادیویی با $\omega = 10^7 \text{ s}^{-1}$ به طور عمود بر سطح زمین فرود می آید و از آن منعکس می شود. از نتیجه مسئله ۸.۱۸ انتقال فاز ناشی از انعکاس را محاسبه کنید. فرض کنید برای این ناحیه از زمین $K = 9$ و $g = 10^{-4} (\Omega \text{ m})^{-1}$ است.

۱۰.۱۸ محیط دی الکتریکی با ضریب شکست n_p بالایه ای به ضریب شکست n_f اندود شده است، و موجی از محیط دی الکتریک n_1 بر روی آن فرود می آید. نشان دهید که به ازای $n_f = \sqrt{n_1 n_p}$ داریم $r_{12} = r_{23}$ و بنابراین به ازای $\cos \beta = -1$ در فرود عمود، $R = 0$ است.

۱۱.۱۸ باریکه ای از نور تکفام (بافرکانس ω) در هوا بر روی پوسه دی الکتریکی به ضریب شکست n به طور عمود فرود می آید. ضخامت پوسه d است. با برآوردن شرایط مرزی در دو وجه پوسه، ضرایب شکست و انتقال را بر حسب تابعی از d و n به دست آورید. علاوه بر امواج فرودی E_1 ، انعکاسی E'_1 ، و انتقالی E_3 ، فرض کنید در داخل پوسه امواجی وجود دارند که به سمت راست E_4 ، و به سمت چپ E'_4 ، در حرکت اند.

۱۲.۱۸ معادله ماتریسی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} E_m \\ E'_m \end{pmatrix} = (C_m) \begin{pmatrix} E_{m+1} \\ E'_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$(C_m) = \frac{1}{t_{m, m+1}} \begin{pmatrix} e^{i(\gamma/2)\beta_m} & r_{m, m+1} e^{i(\gamma/2)\beta_m} \\ r_{m, m+1} e^{-i(\gamma/2)\beta_m} & e^{-i(\gamma/2)\beta_m} \end{pmatrix}$$

(الف) تحقیق کنید که نتایج مربوط به فصل مشترك بين دو دى الكترك از رابطه زیر، با $\beta_1 = 0$ ، به دست می آید

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = (C_1) \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ب) به ازای $\beta_r = \gamma d_r (\omega/c) n_r \cos \theta_r$ تحقیق کنید که نتایج مربوط به دو فصل مشترك از رابطه زیر به دست می آید

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E'_1 \end{pmatrix} = (C_1) (C_r) \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

این روش برای تعمیم به دستگاهی شامل لایه های چندگانه ای که با مرزهای تخت از هم جدا شده باشند، مناسب است.

۱۳.۱۸ يك سطح فلزی بالای ای از دى الكترك اندود شده است. با فرض آنکه فلز يك رسانای کامل است ($g = \infty$)، ضریب انعکاس حاصل را محاسبه کنید.

۱۴.۱۸ بروی سطح يك پوسه فلزی که بدون حائل در هوا واقع است، تابشی به طور عمودی فرود می آید. فرض کنید پوسه به حد کافی ضخیم است به طوری که می توان از انعکاسهای مکرر چشمپوشی کرد. ضریب انتقال T را بر حسب n و k ی فلز محاسبه کنید.

۱۵.۱۸ بره دى الكتریکى را در نظر بگیرید که به قدری ضخیم است که باریکه های انعکاسی چندگانه نمی توانند با هم به طور همدوس تداخل کنند. با جمع کردن تمام شدتها ضریب انعکاس کل را بر حسب ضرایب انعکاس R_{12} و R_{23} مربوط به هر يك از مرزها به دست آورید. نتیجه را در حالت خاص برای موردی که در آن محیطهای دو طرف بره یکسان اند، به دست آورید.

۱۶.۱۸ چگالی بار سطحی و جریان در واحد پهنا بروی سطح يك رسانای کامل را که امواج تخت الكتر و مغناطیسی بر آن فرود می آیند، برای دو مورد زیر به دست آورید: (۱) بردار الكتریکى عمود بر صفحه فرود، (۲) بردار الكتریکى به موازات صفحه فرود.

۱۷.۱۸ برای امواج TM که در صفحه yz بین دو صفحه رسانای کامل، واقع در $y=0$

و $y = a$ ، انتشارمی یابند **E** و **B** را تعیین کنید.

۱۸.۱۸ موج TMی را در نظر بگیرید که در یک موجبر مستطیلی ($H_z = 0$) در جهت z با طول موج λ_g انتشارمی یابد. نشان دهید که معادله زیر

$$E_z = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\pm \pi iz / \lambda_g}$$

در معادله (۱۲۳.۱۸) و در شرایط مرزی صدق می‌کند. فرکانس قطع برای مد TM_{11} چیست؟ چرا مد TM_{10} وجود ندارد؟

۱۹.۱۸ برای موجبری با مقطعی مربع شکل به ضلع a ، مقادیر حدی a را برای آنکه بتواند موجی با طول موج λ را در مد TE_{10} انتقال دهد ولی در مدهای TE_{11} یا TM_{11} انتقال ندهد، تعیین کنید.

۲۰.۱۸ میدانهای **E** و **H** را برای حفره مکعب شکلی به ضلع a برای مد TE_{101} بنویسید. توزیعهای میدان را در سرتاسر مکعب به طور تقریبی رسم کنید.

پاشندگی نوری در مواد

چگونگی انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیطهای مادی خطی، به طور کامل با ثابتهای اپتیکی n و k تعیین می شود. این ثابتها تنها به ثابت دی الکتریک K و رسانندگی g ماده بستگی دارند. تاکنون این پارامترها را مقادیری مفروض در نظر می گرفتیم، البته متذکر شدیم که ممکن است این مقادیر به فرکانس موج بستگی داشته باشند (و در واقع همواره بستگی دارند)، و در گستره از dc تا پرتوهای x تغییرات آنها بسیار زیاد باشد. برای آنکه به هنگام کاربرد نتایج نظریه تابش الکترومغناطیسی بتوانیم به درستی قضاوت کنیم باید تا حدودی بدانیم که این تغییرات، که به پاشندگی معروف است، بر چه اصولی مبتنی هستند. اکنون یک مدل میکروسکوپی از مواد را ارائه می دهیم که رفتار مواد را پیشگویی می کند. این مدل تعمیم ac مدلهایی است که به اجمال در فصلهای ۵ و ۷ برای dc بررسی شدند. این مدل، که به نظریه درود-لورنتس^۱ معروف است، بر این پایه مبتنی است که ذرات باردار تشکیل دهنده ماده به صورت نوسانگرهای هماهنگ کلاسیک یا به صورت ذرات آزاد در نظر گرفته شوند.

۱.۱۹ مدل نوسانگر هماهنگ درود - لورنتس

کلیه مواد عادی از الکترونهاي منفی و هسته های مثبت تشکیل شده اند. در اینجا، فرض می کنیم

که تعدادی از الکترونها (کمتر یا بیشتر از بار هسته ای، Z) محکم به هسته مقیدند و با آن حرکت می کنند؛ این شیء مرکب یون باردار است. الکترونها و یونها را به صورت نوسانگرهای هماهنگ، یعنی ذراتی که بایک نیروی بازگرداننده به یک موضع تعادل مقید می شوند در نظر خواهیم گرفت. برای حفظ کلیت فرض می کنیم نوسانگرهای هماهنگ میرا هستند و برای هریک نیروی میراننده ای متناسب با سرعت منظور می کنیم. هنگامی که موج الکترومغناطیسی وجود داشته باشد، هر نوسانگر با میدان الکتریکی موج رانده می شود. ^۱ پاسخ محیط را با جمع زدن حرکت های ذرات آن به دست می آوریم؛ البته چون فرض کردیم که نیروها خطی اند، K و g که از این مدل نتیجه می شوند ثابت خواهند بود (یعنی، مستقل از E ، هر چند که به فرکانس بستگی خواهند داشت). چنانچه این مدل را برای الکترونها به کار ببریم، الکترونها مقید در اتمها را توصیف خواهد کرد، ولی چنانچه فقط ثابت نیروی بازگرداننده را مساوی صفر قرار دهیم، الکترونها آزاد را نیز می توانیم به صورت حالت خاص منظور کنیم.

معادله حرکت کلاسیک^۲ برای نوسانگر یک بعدی میرای واداشته عبارت است از

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + G \frac{dx}{dt} + Cx = eE_m \quad (1.19)$$

یا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{eE_m}{m} \quad (2.19)$$

که در آن e و m بار و جرم ذره، و E_m «میدان مولکولی» است که در فصل ۵ بحث شد. ابعاد ثابت میرایی، $\gamma = G/m$ ، با ابعاد فرکانس یکی است. فرکانس طبیعی مربوط به نوسانگر نامیرا، ω_0 ، از طریق رابطه $m\omega_0^2 = C$ به ثابت نیرو، C ، مربوط می شود. در فصل ۵ ثابت نیرو برای الکترونها مقید پوسته های خارجی بر حسب «شعاع» اتم، R_0 ، بیان شد. در حالت ایستا x به t بستگی ندارد، پس معادله (۲.۱۹) با معادله (۱۲.۵) یکی می شود که در آن

$$\omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R_0^3} \quad (3.19)$$

۱. نیروی لورنتس عبارت است از $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ، ولی برای امواج $B = (n/c)E$. نیروی مغناطیسی به مقدار $n(v/c)$ از نیروی الکتریکی کوچکتر است و ما از آن چشمپوشی می کنیم. به هر جهت نیروی مغناطیسی بر روی ذره کار انجام نمی دهد چون بر $\mathbf{v}$ عمود است.
۲. البته برای الکترونها باید مکانیک کوانتومی به کار برده شود. ولی حل کلاسیک سودمند است زیرا تصادفاً با جواب حل کوانتومی، چنانچه فرکانس طبیعی ω_0 به نحو مناسب تفسیر شود، یکی است.

برای الکترونهاى آزاد، در معادله (۲۰۱۹)، ω_0 را برابر صفر قرار مى دهیم که در آن صورت با معادله (۳۱۰۷) یکی مى شود که در آن

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \quad (۲۰۱۹)$$

که در آن τ زمان متوسط بین برخورد هاست. درباره مقادیر مناسب ω_0 و γ برای حالتهاى دیگر بعداً بحث خواهد شد. برای آنکه برهم کنش متقابل بین ذرات را به حساب آورده باشیم، فرض مى کنیم میدان E_m بر طبق رابطه زیر به میدان الکتريکى موج، E ، مربوط مى شود

$$E_m = E + \frac{\nu}{\epsilon_0} P \quad (۵۰۱۹)$$

که در اینجا P قطبش محیط است. در معادله (۷۰۵) نشان دادیم که برای دى الکتريکى همسانگرد و غیر قطبى، $\nu = 1/3$ ، برای فلزات، $\nu = 0$. در اینجا قصد اصلی ما این نیست که مسئله دشوار تصحيح مناسب میدان موضعى را بررسی کنیم. بنابراین ما تنها آن را به صورت ν باقى مى گذاریم و کوشش خواهیم کرد در بررسی زیر آن را از ملاحظات خود حذف کنیم. فرض مى کنیم که E_m و P نیز به مانند E به طور سینوسی به زمان و موضع بستگى داشته باشند، یا به صورت مختلط، به شکل زیر

$$E_m = \hat{E}_m e^{-i(\omega t - \kappa \cdot r)}$$

در کاربردهاى ما طول موج $\lambda = 2\pi/\kappa$ بسیار بزرگتر از اندازه ناحیه اى است که در آن ذره حرکت مى کند. برای مثال، در معادله (۳۰۱۹)، R_0 برابر با ۱ یا ۲ آنگستروم است و برای نور مرئى $\lambda \cong 5000 \text{ \AA}$ است. بنابراین تغییرات مکانى E_m در ناحیه مکانهاى ذره قابل چشمپوشى است؛ به بیان دیگر، مى توانیم فرض کنیم که

$$\kappa = 0 \quad (۶۰۱۹)$$

یعنى فرض مى کنیم میدان یکنواخت است

$$E_m = \hat{E}_m e^{-i\omega t} \quad (۷۰۱۹)$$

با فرض معادله (۷۰۱۹)، جوابهاى حالت پایای معادله (۲۰۱۹) باروش مشهور جایگزینى زیر

$$x(t) = x \hat{e}^{-i\omega t} \quad (۸۰۱۹)$$

و تعیین دامنه مجهول $\hat{x}$ به نحوى که برای فرکانس مقروض ω در (۲۰۱۹) صدق کند، به دست

می آید. نتیجه عبارت است از

$$\hat{x} = \frac{eE_m/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (9.19)$$

دامنه حرکت ذره بامیدان وادارنده E_m متناسب است و، تابعی است از فرکانس وادارنده که به ازای $\omega = \omega_0$ خیلی بزرگ است (تشدید). در غیاب میرایی، دامنه تشدید بینهایت خواهد بود، بنا بر این یک مدل واقعی به نوعی میرایی نیاز دارد.^۱ در مسئله نوسانگر مکانیکی (و همچنین در مسئله مدار LRC، که از نظر ریاضی با آن یکسان است)، عموماً نتیجه مختلط را به صورت قطبی بیان می کنند تا دامنه حقیقی و فاز را نشان دهند، ولی در اینجا ما این نتیجه را فعلاً به همین صورت رها می کنیم.

رابطه بین جابجایی مکانیکی ذرات باردار میکروسکوپی تشکیل دهنده ماده (x) و پاسخ الکتریکی ماکروسکوپی محیط، با محاسبه چگالی قطبش (P) به دست می آید. گشتاور دوقطبی ناشی از جابجایی بار e ، برابر است با ex (با فرض آنکه بار $e -$ که بار e را خنثی می کند، در سکون باقی بماند). بنابراین

$$P = Nex \quad (10.19)$$

که در آن N تعداد بارها در واحد حجم است. اکنون فرض می شود که پاسخ P متناسب است بامیدان اعمال شده E (مربوط به موج)

$$P = \chi E \quad (11.19)$$

که در آن

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi$$

$$K = 1 + \chi/\varepsilon_0 \quad (12.19)$$

از معادلات (۹.۱۹) تا (۱۱.۱۹) داریم

$$\chi E = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_m$$

و از معادلات (۵.۱۹) و (۱۱.۱۹)، داریم

۱. همچنین، بدون میرایی هرگز به جواب حالت پایا نخواهیم رسید، زیرا جواب گذرا هرگز از بین نخواهد رفت.

$$E_m = (1 + \nu\chi/\epsilon_0)E$$

بنا بر این

$$\frac{\chi}{1 + \nu\chi/\epsilon_0} = \frac{Ne^{\gamma}/m}{\omega_0^{\gamma} - \omega^{\gamma} - i\gamma\omega}$$

از معادله (۱۲.۱۹) داریم

$$\chi = \epsilon_0(K - 1)$$

بنابراین ثابت دی الکتریک بدون بعد با رابطه زیر داده می شود

$$\frac{K - 1}{1 + \nu(K - 1)} = \frac{Ne^{\gamma}/\epsilon_0 m}{\omega_0^{\gamma} - \omega^{\gamma} - i\gamma\omega}$$

استفاده از کوتاه نویسی زیر مناسب است

$$\omega_p^{\gamma} = \frac{Ne^{\gamma}}{\epsilon_0 m} \quad (13.19)$$

بر حسب ω_p ، داریم

$$\frac{K - 1}{1 + \nu(K - 1)} = \frac{\omega_p^{\gamma}}{\omega_0^{\gamma} - \omega^{\gamma} - i\gamma\omega} \quad (14.19)$$

این معادله همان رابطه ای است که به دنبال آن بودیم : رابطه بین ثابت دی الکتریک ماکروسکوپی K و خواص میکروسکوپی ذرات باردار تشکیل دهنده محیط. دو ویژگی مهم این نتیجه را باید متذکر شویم: اولاً K مختلط است و ثانیاً به فرکانس بستگی دارد. بنابراین ساده ترین مدلی را که به طور خودکار می توانیم بسازیم ایجاب می کند که محیط رسانا و باشنده باشد.

قبل از آنکه درباره پیامدهای این مدل بحث کنیم می بایست تعمیم ساده ای از آن را مطرح کنیم. این تعمیم موارد کاربرد مدل را به اکثر مواد واقعی گسترش می دهد. مواردی که در آن تمامی ذرات باردار ماده خواص یکسانی داشته باشند، نادر است. برای مثال، ذرات باردار را می توان به الکترون ها و یونها، یا به الکترون های متعلق به مدارهای مختلف داخلی و خارجی یک اتم تقسیم کرد. اگر تعداد N_i ذره به بار e_i ، جرم m_i ، فرکانس تشدید طبیعی ω_{0i} ، و فرکانس میرایی γ_i وجود داشته باشد، آنگاه با دنبال کردن همان اثباتی که در فوق آمد به نتیجه زیر می رسیم

$$\frac{K - 1}{1 + \nu(K - 1)} = \sum_i \frac{\omega_{pi}^{\gamma}}{\omega_{0i}^{\gamma} - \omega^{\gamma} - i\gamma_i\omega} \quad (15.19)$$

اگر تمام ذرات، بار و جرم یکسانی داشته باشند (برای مثال، اگر همه الکترون باشند ولی در مدارهای مختلف)، این معادله را به صورت زیر می توان نوشت

$$\frac{K-1}{1+\nu(K-1)} = \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\gamma_i \omega} \quad (16.19)$$

که در اینجا $f_i = N_i/N$ کسری از نوسانگرهاست که از نوع i هستند. چون $\sum N_i = N$ بنا بر این

$$\sum f_i = 1 \quad (17.19)$$

(در تعبیر کوانتوم مکانیکی این نتیجه، f_i به قدرت نوسانگر موسوم است و معادله (17.19) قاعده جمع f نامیده می شود.) ما در اینجا بحث خود را به حالت هایی محدود می کنیم که به ریزه کاری های تصحیح میدان موضعی، ν ، بستگی ندارند. اگر میدان موضعی لورنتس ($\nu = 1/3$) صادق باشد، معادله (16.19) تبدیل می شود به

$$\frac{K-1}{K+2} = \frac{1}{3} \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\gamma_i \omega} \quad (18.19)$$

از آنجا که ω_p^2 با N متناسب است، این معادله تعمیمی است از معادله کلاؤسیوس-موساتی. به دست آوردن K از معادلات (15.19) یا (18.19) آسان، و در بعضی موارد نتیجه مفید است، ولی این کار نحوه بستگی K به فرکانس را، که موضوع اصلی این فصل است به روشنی آشکار نخواهد کرد. ولی اگر $\nu = 0$ باشد، معادله (15.19) به صورت زیر ساده می شود

$$K-1 = \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\gamma_i \omega} \quad (19.19)$$

همچنین در فرکانس هایی که برای آن مقدار K خیلی با ۱ تفاوت نداشته باشد، این معادله به ازای هر مقداری برای ν معتبر است. به علاوه، در فرکانس هایی که به ازای آنها یکی از قله های تشدید معادله (15.19) بر تمامی قله های دیگر غالب می شود، می توانیم ν را از ملاحظات خود حذف کنیم:

$$(K-1)(\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) = [1+\nu(K-1)]\omega_p^2$$

در نتیجه

$$K-1 = \frac{\omega_p^2}{(\omega_{0i}^2 - \nu\omega_p^2) - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (20.19)$$

این نتیجه با نتیجه مربوط به يك قله تشدید منفرد با تصحیح میدان موضعی صفر و فرکانس تشدید مؤثری برابر با $\sqrt{\omega_0^2 - \nu\omega_p^2}$ ، یکسان است. بنابراین، می‌توانیم بحث تفصیلی خود دربارهٔ بستگی $\hat{K}$ به فرکانس را تنها به قله تشدید محدود کنیم

$$\hat{K} - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (21.19)$$

و در عین حال می‌توانیم این نتایج را در مورد مسائل عملی بسیاری به کار ببریم. با نوشتن معادله (21.19) بر حسب قسمت‌های حقیقی و موهومی داریم

$$K_r = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (22.19)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (23.19)$$

حال این مقادیر را می‌توانیم به منظور به دست آوردن عبارات صریحی برای پاشندگی n و k بر حسب فرکانس، در معادله‌های (22.19) قرار دهیم

$$n = \sqrt{\frac{1}{\gamma} [K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{\gamma} [-K_r + \sqrt{K_r^2 + K_i^2}]} \quad (24.19)$$

ولی، این نتایج به قدری پیچیده‌اند که هیچ‌یک از ویژگی‌های کلی پاشندگی آشکار نخواهد شد. در بخش‌های ذیل ما موارد گوناگونی را بررسی خواهیم کرد که از نظر عملی مورد توجه‌اند و در آنها با در نظر گرفتن فرضیهایی می‌توانیم روابط را ساده کنیم.

قبل از آنکه به این مثال‌ها بپردازیم، دربارهٔ ویژگی مهم دیگر نتیجه معادله (21.19) نیز باید تذکری بدهیم، یعنی دربارهٔ این ویژگی که $\hat{K}$ مختلط است. هر چند که مدل فوق را برای بارهای عقید ساختیم، ولی $\hat{K}$ مختلطی که به دست آمد مشخصهٔ محیط‌های رساناست. بدون آنکه تعمداً چگالی جریان رسانش J را وارد کرده باشیم رسانندگی غیر صفری، $g = K_i \varepsilon \omega$ ، وجود دارد. به علاوه، در حالت بارهای آزاد که $\omega = 0$ است، باز هم ثابت دی الکتریکی، $K_r = K$ ، وجود دارد که مشخصهٔ محیط‌های دی الکتریک است. در این مدل به طور خودکار هم قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی $\hat{K}$ ، که به جریان جا به جایی $\partial D / \partial t$ و جریان رسانش J در معادلهٔ ماکسول برای H و $\partial H / \partial t$ مربوط می‌شوند، به طور مشابه وارد می‌شوند. در مدل خود می‌توانستیم به جای محاسبهٔ $P = Nex$ ، چگالی جریان را محاسبه کنیم

$$J = Ne \frac{dx}{dt} = -i\omega Ne x$$

و از آن عبارتی برای رسانندگی g به دست آوریم. واضح است که در آن صورت نتایج زیر به دست می‌آیند

$$J = \frac{dP}{dt} = -i\omega P$$

و

$$\hat{g} = -i\omega \hat{\chi} \quad (25.19)$$

ما باید یا P را محاسبه کنیم یا J را ولی نه هر دوی آنها را زیرا این دو عبارات معادلی برای این واقعیت اند که یا جابه‌جایی ذره يك مؤلفه همفاز با میدان E و همچنین يك مؤلفه با اختلاف فاز 90° دارد، یا آنکه سرعت ذره يك مؤلفه غیرهمفاز و يك مؤلفه همفاز دارد. برای میدانهای ساکن، جابه‌جایی بارهای مقید با میدان متناسب (همفاز) و سرعت بارهای آزاد با میدان متناسب (همفاز) است؛ ولی در فرکانسهای بالا جابه‌جایی و سرعت بارهای مقید و آزاد هر دومی توانند مؤلفه‌های همفاز و ناهمفاز با میدان داشته باشند. بحث زیر را می‌توان تماماً بر حسب رسانندگی مختلط مطابق معادله (25.19)، به جای $\hat{K}$ ، فرمولبندی کرد؛ در بعضی موارد چنین فرمولبندی متداولتر است. روابط میان رسانندگی مختلط و ثابت دی الکتریک مختلط عبارت‌اند از

$$\hat{g} = -i\varepsilon_0\omega(\hat{K} - 1) \quad (26.19)$$

$$g_r = \varepsilon_0\omega K_i, \quad g_i = -\varepsilon_0\omega(K_r - 1)$$

همانطور که انتظار می‌رفت، $g_r = g$ رسانندگی واقعی است، و g_i به ثابت دی الکتریک حقیقی مربوط است.

۲۰.۱۹ جذب تشدیدي توسط بارهای مقید

به عنوان اولین مثال، کاربرد معادلات (22.19) تا (24.19) را در مورد بارهای مقید، یعنی، کاربرد آنها در مورد موادی که برای dc نارسا هستند را، بررسی می‌کنیم. برای برآورد کردن اندازه پارامترها در معادلات (22.19) و (23.19) برای الکترونهاي ظرفیت، فرض کنید در معادله (3.19) داریم $R_0 = 2 \text{ Å}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{4\pi(8.854 \times 10^{-12})(0.91 \times 10^{-30})(2 \times 10^{-10})^2}}$$

$$= 5.6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

این فرکانس تشدید الکترون متناظر است با طول موج $3350 \text{ \AA}$ (335 nm) در هوا، که در ناحیهٔ فرابنفش درست بعد از طیف مرئی واقع است. اگر R_0 بزرگتر یا کوچکتر باشد، طول موج تشدید بلندتر یا کوتاهتر خواهد شد. از ترکیب معادلهٔ (۳.۱۹) با معادلهٔ (۱۳.۱۹) که ω_p توسط آن تعریف می‌شود، داریم

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = 4\pi R_0^2 N = 3NV_a \quad (27.19)$$

که در آن V_a حجم «اتم» است. بنابراین، اگر اتمها تنگاتنگ هم چیده شده باشند، مانند هنگامی که در مایعات یا جامدات چگالیده می‌شوند، داریم

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \approx 1 \quad (28.19)$$

هنگامی که اتمها با چگالی کمتری انبوهیده شوند، مثلاً در گازها (یا در محلولها)، این نسبت به تناسب کوچکتر است زیرا N کوچکتر است ولی معمولاً حالت انبوهش روی ω تأثیر زیادی نمی‌گذارد. همچنین این نسبت برای الکترونهای پوسته‌های داخلی که محکمتر مقیدند و مدارهای کوچکتری دارند، خیلی از ۱ کوچکتر است. برآورد مقادیر معقول برای فرکانس میرایی γ مشکلتراست. برای به دست آوردن بینش بیشتری دربارهٔ معنای γ ، به معادلهٔ (۲.۱۹) برمی‌گردیم و حالت نوسانگر آزاد با $E_m = 0$ را بررسی می‌کنیم. حل این معادله نیز مشهور است

$$x = x_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega'_0 t} \quad (29.19)$$

که در آن

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}$$

اگر γ کوچک باشد، ω'_0 با ω_0 تقریباً یکی است. دامنهٔ نوسان به صورت $e^{-\gamma t/2}$ افت می‌کند، و انرژی نوسان که با مجذور دامنه متناسب است، به صورت $e^{-\gamma t}$ افت می‌کند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \quad (30.19)$$

که در آن τ زمان متوسط فروافت انرژی نوسانگر است. معنای τ در این معادله با معنای آن در معادلهٔ (۴.۱۹) برای الکترونهای آزاد، یکی نیست ولی با هم مشابه‌اند: در هر دو مورد τ زمان متوسط اتلاف انرژی است (انرژی نوسانگر هماهنگ آزاد در یک مورد و انرژی

پرواز آزاد در مسورد دیگر) . ذره نوسان کننده با از دست دادن انرژی نوسان خود الزاماً انرژی الکترومغناطیسی تابش می کند. در فصل بعد نشان خواهیم داد که آهنگ تابش به صورت زیر به آهنگ فروافت مربوط می شود

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{4\pi}{3} \frac{R_e}{\lambda_0} \quad (31.19)$$

که در آن

$$R_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2.81 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (32.19)$$

$\omega_0 = 2\pi c / \lambda_0$ طول موج متناظر با ω_0 در خلا^۱ است. R_e مشهور به شعاع کلاسیک الکترون است. (به مسئله ۴۰۶ رجوع کنید.) حتی برای پرتوهای x ($\lambda_0 \approx 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) میرایی ناشی از این سازوکار نسبت به فرکانس تشدید فوق العاده کوچک است. معمولاً مدهای فروافت دیگری، ناشی از برهم کنش با سایر ذرات (برخوردها)، وجود دارد که باعث می شوند فرکانس میرایی از آهنگ فروافت تک ذره ای ناشی از تابش به مراتب بزرگتر باشد. با وجود این، برای کاربردهای این بخش، فرض می کنیم که

$$\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1$$

چون فرض شد γ کوچک است، به عنوان اولین تقریب از قرار دادن $\gamma = 0$ ، هر چند که غیر فیزیکی است، اطلاعاتی به دست خواهد آمد. معادله (۲۲.۱۹) به ازای $\gamma = 0$ عبارت است از

$$K_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (33.19)$$

که در شکل ۱۰.۱۹ نشان داده شده است. معادله (۲۳.۱۹) به ازای $\gamma = 0$ نتیجه می دهد که در تمام فرکانسها $K_i = 0$ است به جز در فرکانس $\omega = \omega_0$ ، که در آنجا نامعین است. ولی معادله (۲۳.۱۹) در حالت کلی در فرکانس $\omega = \omega_0$ نتیجه می دهد

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{1}{\gamma} \quad (34.19)$$

۱. توزیع بار در الکترون از نظر فیزیکی مشاهده پذیر نیست، بنابراین معادله (۳۲.۱۹) تعریف مناسبتری است از تعریف توزیع بار یکمواخت.

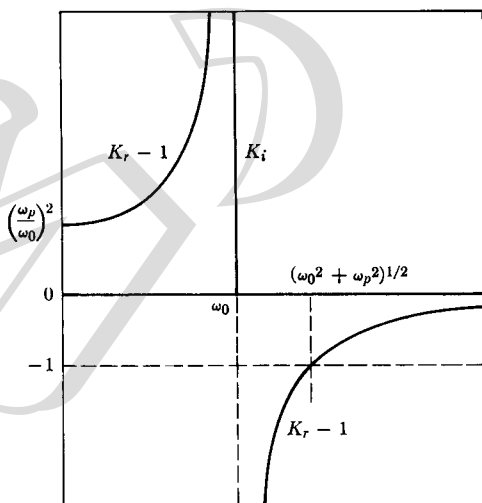
بنا بر این، K_i در قله تشدید متناسب است با $1/\gamma$ و در حد هنگامی که γ به صفر میل می کند بینهایت می شود. این حد را می توان با تابع دلتای دیراک، که قبلاً برای نمایش يك توزیع بار نقطه ای به صورت تابعی از مکان به کار بردیم، به صورت تابعی از فرکانس بیان کرد

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) \quad (35.19)$$

ضریب $\pi/2$ طوری انتخاب شده است که انتگرال روی ω

$$\int_0^\infty K_i d\omega = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\pi}{2}$$

آنطور که بعداً نشان خواهیم داد، حد صحیح برای $\gamma \rightarrow 0$ باشد. چون K_i متناسب است با g ، که اتلاف انرژی در واحد حجم در ماده را مشخص می کند، این تقریب برای $K_i(\omega)$ ، همانطور که در شکل ۱۰۱۹ نشان داده شده است، نمایشگر يك خط جذب بی نهایت باریك در $\omega = \omega_0$ است. جالبترین ویژگی این شکل آن است که در فرکانسهایی بسیار دور



شکل ۱۰۱۹ ثابتهای دی الکتریک بر حسب تابعی از فرکانس برای يك خط جذب بسیار قوی و بسیار باریك

در ω_0 .

از ω که تنها فرکانسی است که در آن K_i غیر صفر است (برای خلا)، K_r مقداری دارد که با ۱ (برای خلا) بسیار متفاوت است. تأثیر جذب انرژی در ناحیه اپتیکی در تمام فرکانسها، حتی در dc، در ثابت دی الکتریک K (ولی نه در رسانندگی g) تجلی پیدا می کند. برای $\omega = 0$

$$K_r(0) = K_0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \quad (36.19)$$

که بنا بر معادله (۲۸.۱۹) می تواند با ۱ به طور فاحشی متفاوت باشد. به عنوان مثال، مقدار $K_0 = 5.5$ برای الماس قابل درک است، هر چند که الماس در فرکانسهای کمتر از فرابنفش نارسا است. برعکس، برای يك ماده نارسا K تنها در صورتی می تواند با ۱ متفاوت باشد که این ماده در ناحیه دیگری از فرکانس رسانا (جذب کننده) باشد. برای محیطی که در تمام فرکانسها $g(\omega) = 0$ است الزاماً $K(\omega)$ نیز برابر ۱ است؛ یعنی، همانطور که در زیر خواهیم دید، چنین محیطی با خلا یکسان است. از طرفی دیگر، در فرکانسهای بسیار بالاتر از فرکانس جذب، در تمام موارد K به سمت ۱ میل می کند.

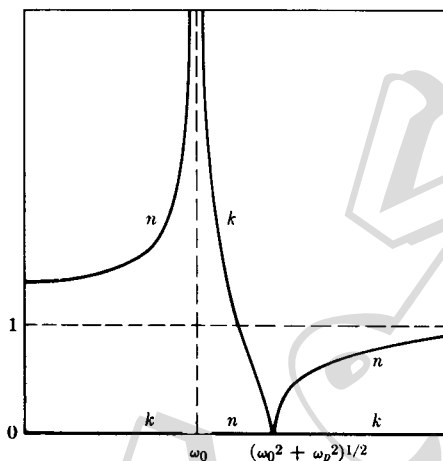
نابتهای اپتیکی n و k برای این حالت با استفاده از تقریبهای (۳۳.۱۹) و (۳۵.۱۹) در (۲۴.۱۹) به دست می آیند. بجز در $\omega = \omega_0$ داریم $K_i = 0$ ، پس تقریبهای (۵۳.۱۷) و (۵۴.۱۷) را می توان به کار برد. از معادله (۳۳.۱۹) در $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ داریم $K_r = 0$ در فرکانسهای بالاتر از این فرکانس و در فرکانسهای پایینتر از ω_0 ، K_r مثبت است. این نواحی

$$n = \sqrt{K_r}, \quad k = 0 \quad (37.19)$$

در ناحیه میان این دو ناحیه K_r منفی است، بنابراین

$$n = 0, \quad k = \sqrt{-K_r} \quad (38.19)$$

این توابع در شکل ۲.۱۹ نشان داده شده اند. در فرکانسهای پایینتر از ω_0 و بالاتر از $\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ ، ماده شفاف است ($k = 0$). پایینتر از فرکانس تشدید، n بزرگتر از ۱ است و با افزایش فرکانس (برای طول موجهای کوتاهتر) افزایش می یابد. این رفتار همان «پاشندگی بهنجار» منشور شیشه ای در ناحیه نور مرئی است (یعنی شکست نور آبی بیش از نور قرمز است)، و این رفتار معمول کلیه مواد شفاف است. در بالاتر از فرکانس جذب تشدید، n با فرکانس افزایش می یابد ولی کمتر از يك است. این رفتار نیز مشخصه کلیه مواد در ناحیه پرتو x است. در بالاتر از تشدید، موج تضعیف می شود ($k > 0$) ولی این امر به دلیل تشدید نیست (بجز در دقیقاً ω_0 که در آنجا $K_i \neq 0$ است). تضعیف موج به علت انعکاس کامل در سطحی است که از آن وارد محیط می شود،



شکل ۲۰۱۹ ثابتهای اپتیکی برحسب تابعی از فرکانس که از ثابتهای دی الکتریک شکل ۱۰۱۹ به دست آمده‌اند.

$$R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}$$

که به ازای $n=0$ نتیجه $R=1$ را می‌دهد. هرچند که ضریب انعکاس شیشه در نور مرئی تنها $R=0.04$ است، ولی در فرابنفش شیشه می‌بایست منعکس کننده بسیار خوبی باشد. برای بررسی تفصیلی تغییرات در نزدیکی ω_0 ، فرض کنید $\gamma > 0$ ولی هنوز $\gamma \ll \omega_0$. نزدیک به ω_0 (یعنی، در گستره‌ای چند برابر γ پایینتر یا بالاتر از ω_0)، تقریب زیر معتبر است

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \cong 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

و بنابراین ثابتهای دی الکتریک، معادلات (۲۲۰۱۹) و (۲۳۰۱۹)، به صورت زیر ساده می‌شوند

$$K_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (39.19)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\gamma/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (40.19)$$

تابع K_i به اصطلاح به شکل خط لوردنسی است، این تابع و همچنین $K_r - 1$ در شکل ۳۰۱۹ نشان داده شده‌اند. این توابع خواص بسیار ساده‌ای دارند: نسبت به $(\omega_0 - \omega)$ ، تابع K_i زوج و $K_r - 1$ فرد است. به سادگی می‌توان نشان داد که پهنای K_i در محل نصف ماکزیمم γ است و ماکزیمم و مینیمم $K_r - 1$ در همین نقاط واقع‌اند. انتگرال روی تمام فرکانسها را می‌توان محاسبه کرد و نتیجه آن به صورت $(\omega_p^2/\omega_0)(\pi/2)$ است که ضریب $\pi/2$ در معادله (۳۵.۱۹) را توجیه می‌کند، چون پهنای قله γ است و ارتفاع آن با $1/\gamma$ متناسب است، مساحت زیر منحنی مستقل از γ است. مقدار ماکزیمم K_i در تشدید می‌تواند کاملاً بزرگ باشد

$$M = \frac{\omega_p^2}{\omega_0 \gamma} = \frac{\omega_p^2 \omega_0}{\omega_0^2 \gamma}$$

برای گازها در فشار جو، $(\omega_p/\omega_0)^2 \approx 10^{-3}$ ، ولی $(\omega_0/\gamma) \approx 10^5$ ، بنابراین M ممکن است بزرگتر از ۱۰۰ باشد. این مقدار برای رسانندگی $g = \epsilon_0 \omega K_i$ در تشدید مقداری را به دست می‌دهد که با رسانندگی dc فلزات قابل قیاس است.

شکل منحنیهای n و k مربوط به ثابتهای دی‌الکتریک لورنتسی بستگی بسیار زیادی به اندازه M دارد. اگر M بزرگ باشد، در ω_0 داریم $K_i \gg 1$ و از آنجا که در ω_0 داریم $K_r = 1$ ، بنابراین در ω_0 تقریب زیر معتبر است

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i/2}$$

شکل منحنیهایی که در شکل ۴۰۱۹ نشان داده شده‌اند، با شکل لورنتسی متفاوت است. این شکل از شکل ۲۰۱۹ تصویر واقعیت‌تری از تغییرات در نزدیکی ω_0 به ما می‌دهد. در حد دیگر، چنانچه $M \ll 1$ باشد، همه جا $K_i \ll 1$ است. چون در نزدیکی ماکزیمم $|K_r - 1| < K_i$ است، پس $|K_r - 1| \ll 1$ ، یا $K_r \cong 1$. در این حالت

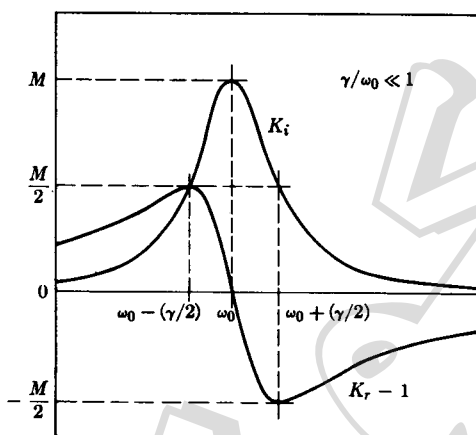
$$n \cong \sqrt{K_r}, \quad k = K_i/2n$$

چون اختلاف K_r با ۱ ناچیز است، رادیکال را می‌توان بسط داد

$$n - 1 \cong \frac{1}{2}(K_r - 1), \quad k \cong \frac{1}{2}K_i \quad (41.19)$$

@Quark_Book

پس برای این حالت شکل منحنیهای $n - 1$ و k به ترتیب درست به همان شکل لورنتسی



شکل ۳.۱۹ ثابتهای دیالکتریک برای خط باریکی در ω_0 . (میدافرکانس در فاصله دور در سمت چپ واقع است). برای خط ضعیفی با $M \ll 1$ ، مقدار $n-1$ و k به ترتیب درست برابر با نصف K_i و $K_r - 1$ هستند.

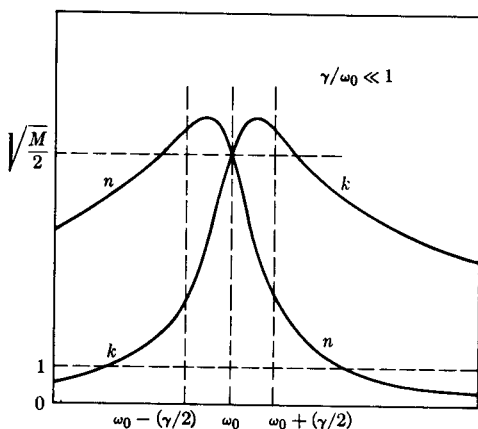
منحنیهای K_i و $K_r - 1$ است. این تقریب می‌تواند، برای مثال، در مورد محلولهای رقیق یا در مورد گازها در فشار نسبتاً پایین معتبر باشد. خیلی دور از خط تشدید، هنگامی که $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$ است، می‌توان از γ در مخرج معادلات (۲۲.۱۹) و (۲۳.۱۹) چشمپوشی کرد، که در آن صورت معادلات فوق به صورت زیر ساده می‌شوند

$$K_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (۲۲.۱۹)$$

در این تقریب $|K_r| \ll K_i$ ، و در فاصله دور در سمت فرکانسهای پایین $K_r > 0$. در این حالت معادلات (۴۱.۱۹) معتبرند، پس

$$\begin{aligned} n - 1 &\cong \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{-1} \\ &\cong \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \end{aligned}$$



شکل ۴.۱۹ ثابتهای ایتیکی برای يك خط بساریك
قوی که از ثابتهای دی الکتريک شکل ۳.۱۹ با $M=100$
به دست آمده اند. (مبدأ فرکانس در فاصله دور در سمت
چپ واقع است.)

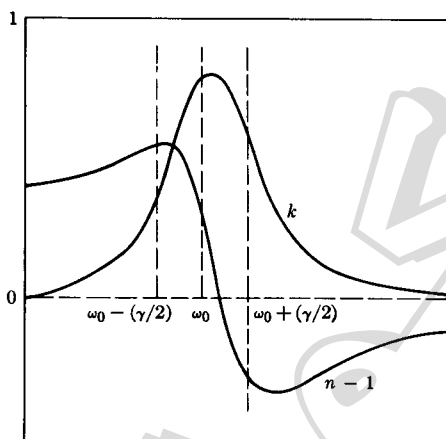
بر حسب طول موج، داریم

$$n-1 \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_p} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (۴۳.۱۹)$$

این معادله به رابطه کوشی معروف است و برای ضریب شکست مواد شفاف فرمول سودمندی است.

اگر γ کوچک نباشد، هیچ يك از روابط ساده فوق از نظر کمی معتبر نخواهند بود، ولی رفتار کیفی $\hat{n}$ و $\hat{k}$ باز هم همین خواهد بود. حالت $\omega_p/\omega_0 = 1$ ، $\gamma/\omega_0 = 1/2$ در شکل ۵.۱۹ رسم شده است. قسمت موهومی همواره قله ای دارد که ماکزیمم آن در نزدیکی ω_0 است. در ناحیه این قله، قسمت حقیقی همواره ناحیه ای باشیب منفی دارد که به ناحیه پاشندگی پی هنجار معروف است. با افزایش فرکانس از صفر، به ترتیب نواحی شفافیت، جذب، انعکاس زیاد، و شفافیت وجود دارند، درست به مانند ساده ترین حالت تقریب تابع دلتا. در مواد واقعی همواره قله های جذب الکترونی متعددی در فرابنفش، و شاید تا ناحیه مرئی، وجود دارند. در جامدات این قله ها ممکن است پهن باشند و به مقدار زیادی رویهم یفتند.

اگر ذرات باردار مرتعش به جای الکترون یونهای سنگین باشند، فرکانس تشدید



شکل ۵.۱۹. ثابتهای اپتیکی برای یک نوار جذب پهن نسبتاً قوی در ω_0 .

ω_0 چند صد برابر کوچکتر خواهد بود: ثابت نیروی بازگرداننده خطی برای هر دو تقریباً یکی است، زیرا در مسود یونها نیز این ثابت مربوط به نیروی کولنی است، ولی جرم یون ۴ یا ۵ مرتبه بزرگی از جرم الکترون بزرگتر است. فرکانس ω_p نیز به تناسب کوچکتر است، زیرا آن نیز با معکوس جذر جرم متناسب است. برای مثال، در یک بلور یونی

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} \cong 1, \quad \frac{\gamma}{\omega_0} \cong 0.1$$

قله جذب مشابه قله الکترونی است، ولی این قله به جای فرابنفش یا مرئی در فروسرخ واقع است. K_r یا n مربوط به این قله در فرکانسهای بالاتر مشارکتی ندارند، ولی در فرکانسهای پایینتر مشارکت دارند. از اینرو ثابت دی الکتریک ساکن برای نمک بلور در حدود ۶ است، در مقایسه با تقریباً ۲ (۲ تا ۱۵) در نور مرئی. عدد ۲ ناشی از جذب الکترونی در فرابنفش است؛ عدد ۶ اثر جذب یونی در فروسرخ را نیز شامل می شود.

۳.۱۹. نظریه الکترون آزاد درود

در بعضی از حالات مهم ماده، خصوصاً در فلزات و در پلاسماها، الکترونهای متعلق به مدارهای خارجی آنها جایگزیده (مقیمد) نیستند، بلکه آزادند که در رسانش dc شرکت کنند. در

جدول ۱۰۱۹ بعضی مقادیر نوعی برای چگالی ذرات، N ، و فرکانس پلاسما، ω_p ، برای پلاسماهای الکترونی.

چگالی (m^{-3})	فرکانس پلاسما (s^{-1})
۱۰ ^{۲۸}	۱۰ ^{۱۶}
۱۰ ^{۲۴}	۱۰ ^{۱۴}
۱۰ ^{۲۰}	۱۰ ^{۱۲}
۱۰ ^{۲۰}	۱۰ ^{۱۲}
۱۰ ^{۱۱}	۱۰ ^۷
۱۰ ^۷	۱۰ ^۵
فلز	
نیمرسانا (آلاییده)	
نیمرسانا (خالص)	
آزمایش گذاخت	
یونسفر	
فضای بین سیاره‌ها	

فرکانسهای بالا رفتار آنها به علت اثرات اینرسی تغییر می‌کند؛ ولی به هر جهت با همان مدل میکروسکوپی توصیف می‌شوند، مشروط به آنکه نیروی بازگرداننده مفروض را برای این الکترون‌ها برابر با صفر قرار دهیم. در آن صورت، با $\omega_0 = 0$ ، معادله (۲۱.۱۹) به صورت زیر ساده می‌شود

$$\hat{K} - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \quad (۴۴.۱۹)$$

که قسمتهای حقیقی و موهومی آن عبارت‌اند از

$$K_r - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (۴۵.۱۹)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} \quad (۴۶.۱۹)$$

در موضوع الکترون آزاد، کمیت زیر

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}} \quad [۱۳.۱۹]$$

فرکانس پلاسما نامیده می‌شود^۱، و با آنچه در فصل ۱۴ تعریف شد یکی است.

@Quark Book

۱. فرکانس پلاسما را معمولاً بر حسب یکاهای گاوسی بیان می‌کنند، در یکاهای گاوسی $\omega_p = \sqrt{4\pi Ne^2/m}$

گستره‌های مختلف فرکانس که در آنها ویژگیهای جالب توجه باشندگی رخ می‌دهند با ω_p مشخص می‌شوند. بعضی مقادیر نوعی آن در جدول ۱۰.۱۹ آمده است. این فرکانسها از فرکانس رادیویی تا نواحی فرابنفش را در برمی گیرند. همانطور که قبلاً متذکر شدیم ثابت میرایی γ معکوس زمان برخورد است

$$\gamma = \frac{1}{\tau} \quad [۴۰.۱۹]$$

زمان τ همچنین برابر است با ثابت زمانی فرو افت جریانی که میدان وادارنده نداشته باشد. این مطلب را با قراردادن $\omega_0 = 0$ ، و $E_m = 0$ در معادله (۲۰.۱۹)، می‌توان دید:

$$dx/dt = v$$

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = 0$$

$$v = v_0 e^{-\gamma t} = v_0 e^{-t/\tau} \quad (۴۷.۱۹)$$

برای فلزات در دمای اتاق داریم $\gamma \approx 10^{14} \text{ s}^{-1}$ ، بنابراین

$$\frac{\gamma}{\omega_p} \ll 1$$

این رابطه غالباً برای مواد الکترونیکی نیم‌رسانا و همچنین برای پلاسماهای گازی معتبر است. چنانچه معادله (۴۴.۱۹) را با استفاده از معادله (۲۶.۱۹) و $\gamma = 1/\tau$ برای رسانندگی مختلط $\hat{g}$ بنویسیم، نتیجه به صورت ساده‌تری در می‌آید

$$\hat{g} = \frac{g_0}{1 - i\omega\tau} \quad (۴۸.۱۹)$$

که در آن

$$g_0 = \epsilon_0 \omega_p^2 \tau = \frac{Ne^2 \tau}{m}$$

رسانندگی dc است. با وجود این ما $\hat{K}$ را بررسی خواهیم کرد، زیرا هدف ما پیدا کردن n و k به کمک $\hat{K}$ است. هنگامی که γ کوچک است، مجدداً ابتدا می‌توانیم مورد $\gamma = 0$ را بررسی کنیم:

$$K_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\pi}{\gamma} \delta(\omega) \quad (49.19)$$

باز هم شکل‌های ۱۰۱۹ و ۲۰۱۹ نشان‌دهنده رفتار در این حالت هستند، مشروط بر آنکه مبدأ ω در $\omega = 0$ انتخاب شود. ناحیه شفاف در پایینتر از ω حذف می‌شود، و ω_p فرکانسی است که در آن $K_r = 0$ است. بین $\omega = 0$ و $\omega = \omega_p$ ماده کاملاً منعکس کننده است ($n = 0$)، و در بالاتر از ω_p ماده شفاف است ($k = 0$). گذار بین انعکاس شدید و شفافیت دلیل این واقعیت مشهود است که یونسفر امواج رادیویی را در باند پخش AM ($10^6 \times 10^5 \times 1 \text{ s}^{-1} \approx \omega/2\pi$) منعکس می‌کند ولی برای امواج رادیویی FM ($10^8 \text{ s}^{-1} \approx f$) شفاف است. در گستره دیگری از فرکانس، فلز سدیم برای نور مرئی منعکس کننده خوبی است، ولی برای طول موجهای فرابنفش کوتاهتر از $\lambda_p = 2100 \text{ \AA}$ (210 nm)، متناظر با فرکانس پلاسماي آن، شفاف است. درست در فرکانس پلاسما، $n = 0$ و $k = 0$ است؛ در این فرکانس بارها همگی به‌طور همفاز (با طول موج بینهایت) بدون تضعیف به عقب و جلو حرکت می‌کنند. این حرکت همان نوسان آزاد پلاسماست که در فصل ۱۴ درباره آن بحث شد. این نوع حرکت مثالی است از موج طولی^۱ که در $\hat{K} = 0$ می‌تواند رخ بدهد. هرچند که تقریب بدون میرایی اثرات جالبی را در نزدیکی فرکانس پلاسما توجیه می‌کند، ولی در فرکانسهای پایینتر ساده‌سازی بیش از حدی است که پیشگویی می‌کند رسانندگی و ثابت دی‌الکتریک برای dc بینهایت است. به علاوه، این تقریب نه فرمول‌ها گن - روبرز را به دست می‌دهد و نه عمق پوسته مربوط به آن را.

برای اصلاح تقریب تابع دلتا، لازم است که به معادلات (۴۵.۱۹) و (۴۶.۱۹) برگردیم. فرض می‌کنیم که میرایی کوچک است، $\gamma \ll \omega_p$ ، بنابراین سه گستره فرکانس وجود دارد که باید بررسی کنیم

$$\omega \ll \gamma \quad (\text{الف})$$

$$K_r \approx \frac{-\omega_p^2}{\gamma^2} \quad (50.19)$$

۱. از آنجا که طول موج بینهایت است و سرعت انتشار صفر، اینکه بگوییم طولی است یا عرضی بی‌معناست. ولی ما $\hat{K}(\kappa, \omega)$ را تنها برای $\kappa = 0$ محاسبه کرده‌ایم، معادله (۴۰.۱۹) را ببینید. محاسبات پیچیده‌تری که در آن اثرات فشار منظور می‌شود وجود امواج طولی در پلاسما با طول موج متناهی، $\kappa \neq 0$ ، را نشان می‌دهند.

$$K_i \cong \frac{\omega_p^2}{\omega \gamma} \quad (۵۱.۱۹)$$

ثابت دی الکتریک حقیقی K_r ، یک مقدار منفی (بزرگ) است؛ K_i با صفر شدن ω بینهایت می شود، ولی رسانندگی

$$g = \varepsilon_0 \omega K_i = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\gamma} = \frac{Ne^2 \tau}{m} = g_0$$

در این گستره ثابت است و برابر است با g_0 (رسانندگی dc). چون $1 \ll \gamma/\omega = K_i/|K_r|$ ، از معادله (۵۵.۱۷) نتیجه می شود

$$n \cong k \cong \sqrt{K_i/2} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega\gamma}} \gg 1 \quad (۵۲.۱۹)$$

این حالتی است که به فرمول هاگن - روبنز برای ضریب جذب در فرکانسهای پایین

$$A \cong \frac{2}{k} = 2 \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \omega}{g_0}}$$

و به عمق پوسته

$$\delta = \frac{c}{k\omega} \cong \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega g_0}}$$

منجر می شود.

(ب) $\gamma \ll \omega \ll \omega_p$

$$K_r \cong -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (۵۳.۱۹)$$

$$K_i \cong \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega^3} \quad (۵۴.۱۹)$$

چون $1 \ll \gamma/\omega = K_i/|K_r|$

$$k \cong \sqrt{-K_r} = \frac{\omega_p}{\omega}$$

$$n = \frac{K_i}{2k} \cong \frac{\gamma \omega_p}{2\omega^2} \quad (55.19)$$

در این ناحیه $1 \ll \gamma \omega_p / \omega = k/n$ ، بنابراین برای ضریب جذب از معادله (59.18) داریم

$$A \cong \frac{2n}{k^2} \cong \frac{2\gamma}{\omega_p} = \frac{2}{\omega_p \tau}$$

(این فرمول را گاهی فرمول مات - زینر^۱ می نامند)، و برای عمق پوسته داریم

$$\delta = \frac{c}{k\omega} = \frac{c}{\omega_p} = \lambda_p / 2\pi$$

که در آن λ_p طول موج متناظر با فرکانس پلاسما در خلا^۲ است. برای فلزات این نتایج تا ناحیه فرو سرخ معتبرند. چون $\omega_p \tau$ بزرگ است، $A = 1 - R$ تنها چند درصد است؛ عمق پوسته خیلی کوچک و مستقل از فرکانس است.

$$\omega_p \ll \omega \quad (\text{ج})$$

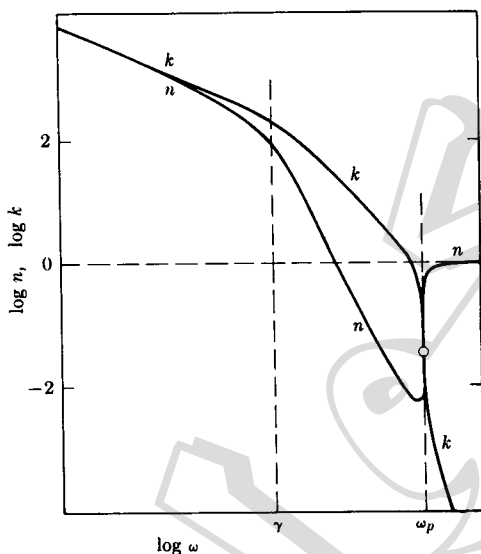
$$K_r \cong 1 \quad (56.19)$$

$$K_i \cong \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega^3} \quad (57.19)$$

$$n \cong \sqrt{K_r} \cong 1$$

$$k = \frac{K_i}{2n} \cong \frac{\omega_p^2 \gamma}{2\omega^3} \quad (58.19)$$

در این گستره ماده تقریباً شفاف است. ولی در فلزات، بجز برای فلزات قلیایی، شروع این شفافیت بر اثر جذب تشدید الکترونیهای مقید متعلق به مدارهای داخلی، تار است. این جذب اضافی، که در بخش قبل بحث شد، مقادیر K_i و n را نیز برای اکثر فلزات در ناحیه مرئی افزایش می دهد که نتیجتاً ضریب انعکاس آنها را کاهش می دهد و موجب رنگهای مشخصه مس و طلا می شود. نتایج مربوط به الکترون آزاد برای n و k در مقیاس $\log\text{--}\log$ در شکل ۶۰۱۹ رسم شده است. مقادیر انتخاب شده برای پسا رامترها عبارت اند از $\omega_p = 9 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ و $\gamma = 36 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}$ ؛ این مقادیر برای فلز سدیم در دمای اتاق



شکل ۶.۱۹ نمودار ثابتهای اپتیکی بارهای آزاد بر حسب فرکانس در مقیاس $\log - \log$ ، با $\log \gamma / \omega_p = ۰.۰۰۴$ در قسمت اعظم گستره فرکانس تقریبهای قانون توان معتبر است.

مناسب است که برای آن نظریه الکترون آزاد با آزمایش سازگار است. در این شکل سه ناحیه‌ای که در آنها منحنیها به صورت خطوط مستقیم اند مربوط اند به معادلات (۵۲.۱۹)، (۵۵.۱۹)، و (۵۸.۱۹). نقاط بینابین در $\omega = \gamma$ و $\omega = \omega_p$ را به آسانی می‌توان از معادلات (۴۵.۱۹) و (۴۶.۱۹) محاسبه کرد، زیرا در این نقاط به ترتیب $K_i = -K_r$ و $K_i \gg K_r$ است. ناحیه خیلی بالاتر از γ با تقریب تابع دلتا ($\gamma = 0$) در توافق است، البته با گرد کردن شکنها در ω_p . مثالهای با $\omega_p \gg \gamma$ کمتر متداول اند و ما نیز بررسی آنها را به عنوان تمرین به عهده دانشجو واگذار می‌کنیم.

تمام نتایج این بخش هنگامی که ذرات باردار به جای الکترون، یونهای سنگین باشند نیز معتبر است. چون فرض کردیم که محیط از نظر الکتریکی خنثی است، یونهای مثبت باید همواره با چگالی تعداد متوسطی، برابر با چگالی تعداد الکترونها، موجود باشند. البته در فلزات یونهای مثبت آزادانه در حرکت نیستند، ولی در پلاسماهای گازی متحرک اند و حرکت آنها غالباً مهم است. فرکانس پلاسما، ω_p به طور معکوس متناسب است با جذرم ذره m ، و بنابراین فرکانس پلاسمای یون تقریباً دومرتبه بزرگی از فرکانس پلاسمای الکترون، که در جدول ۱.۱۹ آمده است، کوچکتر است.

۴.۱۹* واهلش دی الکتریکی. رسانش الکترولیتی

در فلزات در فرکانسهای پایینتر از قله‌های مربوط به یون سنگین در ناحیهٔ فرو سرخ، معمولاً جذب تشدید دی الکتریکی رخ نمی‌دهد (هرچند که در ساختارهای مصنوعی رخ می‌دهد). ولی، سازوکار جذب از نوع دیگری به نام، اختلاف دی الکتریک وجود دارد که می‌تواند در فرکانسهای پایینتر (ولی نه در فرکانسهای بالاتر) رخ بدهد. این سازوکار غالباً در فرکانسهای میکرو موج و پایینتر، به عنوان یک سازوکار اتلاف مهم است و پاشندگی ملازم با ثابت دی الکتریک حقیقی آن برای مثال، اختلاف بین ثابت دی الکتریک ساکن آب، ۸۱، و مقدار اپتیکی این ثابت، حدود $(= ۱۸۳۳۲)$ را توجیه می‌کند. اگر قطبش ساکن نوع دومی که در فصل ۵ بحث شد (یعنی، قطبش در اثر سمته‌گیری دو قطبیهای دائمی) به حالت ac بسط داده شود، این اثر نتیجه خواهد شد. این مورد را بر پایهٔ مدلی که با معادلهٔ (۱۰۱۹) توصیف می‌شود نیز می‌توان بنا نهاد، هرچند که تعبیر فیزیکی کمیتهای دخیل را باید تا حدودی تعمیم داد. این حالت هنگامی ظاهر می‌شود که نیروهای بازگرداننده و میراننده مهم‌اند، ولی از اثرات اینرسی (شتاب) می‌توان چشمپوشی کرد. در این حالت معادلهٔ حرکت به صورت زیر درمی‌آید

$$G \frac{dx}{dt} + Cx = eE_m \quad (۵۹.۱۹)$$

یا آنکه

$$\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = eE_m / m$$

جواب مناسب معادلهٔ بالا، از معادلهٔ (۲۱.۱۹) با چشمپوشی از ω^2 به دست می‌آید.

$$\hat{K} - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega}$$

در این جواب تمام پارامترها حاوی m هستند؛ با وجود این، m واقعاً در جواب وارد نمی‌شود زیرا در به دست آوردن جواب از جملهٔ اینرسی چشمپوشی شده است. بهتر است جواب به صورت زیر بازنویسی شود

$$\hat{K} - 1 = \frac{Ne^2 / \epsilon_0}{C - iG\omega}$$

که در اینجا m کلاً حذف شده است. با استفاده از معادلهٔ (۵۹.۱۹) با $E_m = 0$ ، برگشت به تعادل با معادلهٔ زیر توصیف می‌شود

$$x = x_0 e^{-Ct/G}$$

بنابر این می نویسیم

$$\frac{C}{G} = \frac{1}{\tau} \quad (۶۰.۱۹)$$

که τ در این مفهوم زمان داهلش^۱ نامیده می شود. بر حسب τ داریم

$$\hat{K} - 1 = \frac{K_0 - 1}{1 - i\omega\tau} \quad (۶۱.۱۹)$$

که در آن

$$K_0 - 1 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 C} \quad (۶۲.۱۹)$$

واضح است که K_0 مقدار حالت ساکن K (به ازای $\omega = 0$) است. مقدار آن با مقدار ساکن حالت جذب تشدید یکی است، بجز آنکه در اینجا C معنای دیگری دارد. این مقدار را می توان از محاسبات فصل ۵ به دست آورد

$$K_0 - 1 = \frac{\chi}{\epsilon_0} = \frac{N}{\epsilon_0} \frac{p_0^2}{3k_B T}$$

که در آن k_B ثابت بولتزمن است. اگر فرض کنیم گشتاور دو قطبی دائمی به صورت زیر است

$$p_0 = ea$$

که در آن a فاصله مؤثر بارهای $\pm e$ است، آنگاه

$$K_0 - 1 = \frac{Ne^2 a^2}{3\epsilon_0 k_B T} \quad (۶۳.۱۹)$$

مقدار عددی $K_0 - 1$ در دمای اتاق، حداکثر، می تواند از مرتبه $۱۰^۲$ باشد. مقایسه معادله

۱. توجه کنید که در این فرایند $\gamma \neq 1/\tau$. ما به نحوی سازگار همواره τ را به معنای ثابت زمانی برای برگشت به تعادل به کار می بریم، بدون توجه به رابطه آن با γ یا با کمیت های فیزیکی تعیین کننده.

(۶۳.۱۹) با معادله (۶۲.۱۹) نشان می‌دهد که

$$C = \frac{3k_B T}{a^3} \quad (۶۴.۱۹)$$

بنا بر این نیروی بازگرداننده، ناشی از انرژی گرمایی $k_B T$ است و نه ناشی از انرژی پتانسیل کشسان مکانیکی^۱.

آنچه در این بحث جدید است زمان و اهلهش τ است که رفتار ac را تعیین می‌کند. مقدار آن را به آسانی می‌توان برای بعضی مواد قطبی جامد برآورد کرد. در این مواد دوقطبیها تشکیل شده‌اند از زوجهای متحرکی از یونهای مثبت و منفی به باره و با فاصله جدایی a . یونها موضع تعادل ثابت مشخصی در جامد دارند، ولی می‌توانند به سایر مواضع مجاز مجاور جهش کنند. با چنین جهشهایی دوقطبی می‌تواند بچرخد و با میدان اعمالی همسو شود، یا به هنگام برداشته شدن میدان به یک سمتگیری کتره‌ای برگردد. بنا بر این زمان τ عبارت است از زمان متوسط مربوط به جهش که برای جامدات با معادله زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} e^{-\Delta U / k_B T} \quad (\text{جامدات}) \quad (۶۵.۱۹)$$

ضریب $1/\tau_0$ تقریباً برابر است با فرکانس ارتعاش یون حول موضع تعادلش، و عبارت $\exp(-\Delta U / k_B T)$ ضریب آماری بولتزمن است. با هر ارتعاش کوششی برای جهش به عمل می‌آید، ولی تنها کسری از یونها موفق می‌شوند و این کسر بستگی دارد به انرژی ΔU که برای عبور از سد و رفتن به موضع تعادل مجاور لازم است. فرکانس $1/\tau_0 = \omega_0$ همان فرکانس ارتعاش یونی است که قبلاً بررسی شد، $\omega_0 \approx 10^{13} \text{ s}^{-1}$. برای آنکه این مدل معتبر باشد می‌بایست انرژی سد ΔU قابل ملاحظه باشد، زیرا فرض وجود موضعهای تعادلی که بین آنها جهشها رخ می‌دهند خود به سدها بستگی دارد. بدین ترتیب

$$\frac{1}{\tau} \lesssim 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

و $1/\tau$ دردهاهایی خیلی پایینتر از دمای ذوب بسیار کوچکتر از این مقدار خواهد بود. برای مایعات محاسبه τ مشکلتر است. ذهان و اهلهش دبی با معادله زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{\tau} = \frac{k_B T}{4\pi\eta R^3} \quad (\text{مایعات}) \quad (۶۶.۱۹)$$

۱. نیروی بازگرداننده يك «نیروی ترمودینامیکی» تعمیم یافته است، نه يك نیروی مکانیکی. آنچه پس از برداشتن نیرو (بازمان و اهلهش τ) و اهلیده می‌شود (به وضع اول باز می‌گردد)، انرژی نیست بلکه آنتروپی است.

که در آن η چسبندگی است (نهمقاومت و یژه الکتریکی) و R_o شعاع مولکول است. این فرمول با مقادیر تجربی η توافقی معقولی دارد و برای اکثر مایعات قطبی درمای اتاق فرکانسی در ناحیه میکروموج پیشگویی می کند، چون دوقطیها درمایعات با آزادی بیشتری می چرخند تا در جامدات. چسبندگی به دما بستگی دارد، ولی باز هم بستگی معادله (۶۶.۱۹) به دما ضعیفتر از بستگی معادله (۶۵.۱۹) است.

با جدا کردن معادله (۶۱.۱۹) به قسمتهای حقیقی و موهومی، بستگی آن را به فرکانس می توان دید. نتیجه معادلات زیر است که به معادلات دبی مشهورند

$$K_r - 1 = \frac{K_o - 1}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (۶۷.۱۹)$$

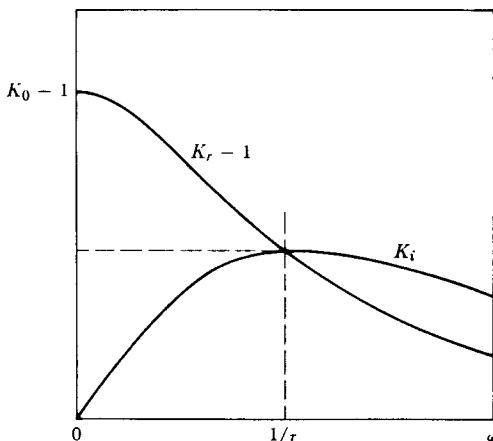
$$K_i = \frac{(K_o - 1) \omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (۶۸.۱۹)$$

اینها در شکل ۷.۱۹ رسم شده اند. این شکل قله جذبی در K_i نشان می دهد که ما کمزیم آن در $\omega = 1/\tau$ و ارتفاع آن $(K_o - 1)/2$ است، و همچنین نشان می دهد که K_r از مقدار K_o به ۱ کاهش می یابد و نقطه نصف ارتفاع آن در $\omega = 1/\tau$ است. باشندگی K_r شکلی دارد که به طور مشخص با شکل مربوط به جذب تشدید متفاوت است. شکل این منحنیها کاملاً شبیه است به شکلهای مربوط به نوسانی که به شدت تند میرا باشد. برای فرکانسهای خیلی پایینتر یا خیلی بالاتر از $1/\tau$ داریم $K_i \ll K_r$ ($K_r > 0$)، بنابراین $n = \sqrt{K_r}$ و $k = K_i/2n$. به عنوان مثال، این نتایج را می توان برای آب شیرین که برای آن رسانندگی dc قابل چشمپوشی است، به کار برد. ضریب انعکاس با معادله (۵۷.۱۸) داده می شود. برای اندازه گیرهای الکتریکی روی نمونه هایی با اندازه های آزمایشگاهی، معمولاً نتایج را بر حسب زاویه اتلاف θ بیان می کنند

$$\tan \theta = \frac{K_i}{K_r} = \frac{(K_o - 1) \omega\tau}{K_o + (\omega\tau)^2} \quad (۶۹.۱۹)$$

دلیل فیزیکی این نوع بستگی به فرکانس آن است که در بالاتر از $1/\tau$ واهلش نمی تواند تغییرات میدان اعمالی را دنبال کند.

رسانش الکترولیتی پدیده ای است که از طریق سازوکاری انجام می شود که با واهلش دی الکتریکی رابطه نزدیکی دارد، هر چند که در آن در حالت dc رسانش توسط بارهای «آزاد» صورت می گیرد. حاملهای بار یونهای متحرکی هستند که (در جامدات) با جهش یا (در مایعات) با سازوکاری که به چسبندگی مربوط است حرکت می کنند. در اینجا نیز اثرات اینرسی قابل چشمپوشی اند و جرم یون مستقیماً وارد نمی شود. اختلاف آن با واهلش



شکل ۷.۱۹ ثابتهای دی الکتریک به صورت تابعی از فرکانس برای واهلش دبی.

دی الکتریکی آن است که زوج یونهای مثبت و منفی جدایی ناپذیر نیستند، بلکه یونهای مثبت یا منفی آزادند که به طور انفرادی مهاجرت کنند و در ایجاد جریان انتقالی شرکت کنند. مجدداً محاسبه رسانندگی dc برای الکترولیت جامد آسانتر است؛ نتیجه عبارت است از

$$g_o = \frac{Ne^2 a^2}{k_B T \tau} \quad (\text{جامدات}) \quad (۷۰.۱۹)$$

که در آن τ زمان متوسط جهش است که شاید با کمیت مربوط به سمتهگیری مجدد دوقطبیها متفاوت باشد ولی باز هم با معادله ای شبیه به معادله (۶۵.۱۹) داده می شود، و a فاصله جهش است. برای الکترولیت مایع نتیجه چسبندگی، η ، را در بردارد. فرمول اینشتین - استوکس

$$g_o = \frac{Ne^2}{6\pi\eta R_o} \quad (\text{مایعات}) \quad (۷۱.۱۹)$$

را برای محلولهای رقیق می توان به کاربرد. برای الکترولیتهای مایع، و همچنین برای رده خاصی از مواد جامد مشهور به دسانهای ابریونی، g_o می تواند از مرتبه $10^2 (\Omega m)^{-1}$ باشد. برای اکثر مواد جامد یونی g_o کمتر از $1 (\Omega m)^{-1}$ است، معمولاً در دمای اتاق خیلی کمتر از این.

رسانندگی ac را به مستقیمترین وجه می توان از معادله (۴۸.۱۹) به دست آورد

$$\hat{g} = \frac{g_0}{1 - i\omega\tau} \quad (۴۸.۱۹)$$

در آنجا همانطور که در معادله (۴۷.۱۹) نشان داده شد، τ زمان واهلش برای رسانی (یا زمان شروع شدن برای رسانی حالت پایا) بود، ولی در اینجا τ زمان لازم برای جهش در الکترولیت جامد است. تعبیر میکروسکوپی پارامترهای معادله (۴۸.۱۹) هرچه باشد، این معادله الزاماً می بایست از یک نظریه خطی نتیجه شده باشد. چون معادله (۴۸.۱۹) با معادله (۶۱.۱۹) صورت تابعی یکسانی دارد، قسمت‌های حقیقی و موهومی رسانندگی با منحنیهای نشان داده شده در شکل ۷.۱۹ شکل یکسانی دارند. برای به دست آوردن ثابتهای ایتیکی، معادله (۴۸.۱۹) را به کمک معادله (۲۶.۱۹) می توان به صورت زیر تبدیل کرد

$$\hat{K} - 1 = i \frac{\hat{g}}{\epsilon_0 \omega} = \frac{-g_0/\epsilon_0}{\omega(\omega\tau + i)} \quad (۷۲.۱۹)$$

که قسمت‌های حقیقی و موهومی آن عبارت اند از

$$K_r - 1 = \frac{-\tau g_0/\epsilon_0}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (۷۳.۱۹)$$

$$K_i = \frac{g_0/\epsilon_0}{\omega[1 + (\omega\tau)^2]} \quad (۷۴.۱۹)$$

از معادله (۷۳.۱۹) رابطه زیر برای ثابت دی الکتریک ساکن به دست می آید

$$K_0 - 1 = -\frac{\tau g_0}{\epsilon_0}$$

که برای جامدات این رابطه عبارت است از

$$K_0 - 1 = -\frac{Ne^2 a^2}{\epsilon_0 k_B T}$$

هر چند که این رابطه با معادله (۶۳.۱۹) برای واهلش دی الکتریکی صورت یکسانی دارد (با علامت مخالف)، ولی مقادیر N برای این دو مورد می توانند اختلاف زیادی داشته باشند. در آب خالص کلیه مولکولها در واهلش دی الکتریکی دخیل اند، ولی از هر یک میلیون مولکول تنها چند تایی در رسانی مشارکت دارند. غالباً رسانی الکترولیعی و واهلش دی الکتریکی همراه با هم در یک ماده رخ می دهند. سهم مربوط به هر یک از آن دو در زاویه اتلاف را

می‌توان درموارد ساده از روی بستگیهای متفاوت K_i به فرکانس جدا کرد. ولی درمحلولهای آبی، در اثر تصحیح میدان موضعی (منظور تصحیح لورنتس نیست) و در اثر برهم کنشهای میکروسکوپی بین یونها و دو قطبیهها، وضعیت پیچیده است.

۵.۱۹ روابط کرامرز - کرونیگ^۱

در تمام مثالهایی که تاکنون بررسی کردیم، با هر قله جذبی در K_i باشندگی در K_r همراه بود که کم و بیش شکل مشخصی داشت. جمع چند قله يك منحنی باشندگی مرکب مربوط به خود خواهد داشت. اکنون نشان خواهیم داد که يك رابطه کلی بین K_r و K_i وجود دارد به طوری که، ساز و کار جذب هر چه باشد، اگر $K_i(\omega)$ در تمام فرکانسها معلوم باشد آنگاه در هر فرکانسی $K_r(\omega)$ به کمک انتگرال معینی روی K_i به طور یکتا تعیین می‌شود. به ویژه، اگر $K_i(\omega) = 0$ باشد در تمام فرکانسها $K_r(\omega) = 1$ است. چنین رابطه‌ای از نظر عملی و نظری بسیار سودمند است، زیرا اگر به طریقی بتوانیم $K_i(\omega)$ را محاسبه یا اندازه گیری کنیم دیگر محاسبه یا اندازه گیری جداگانه K_r غیر ضروری است چون می‌توان آن را از این رابطه (که به رابطه کرامرز - کرونیگ معروف است) تعیین کرد. رابطه کلی را می‌توانیم از این فرض به دست آوریم که هر جذب دلخواهی را که تابعی از ω است می‌توانیم به صورت مجموع يك توزیع پیوسته از خطوط جذبی بسیار باریک نوسانگرهای هماهنگ نمایش دهیم. انتگرال معادله (۳۵.۱۹) یا (۴۰.۱۹) روی فرکانس عبارت است از

$$\int_0^\infty K_i d\omega = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\pi}{2} \quad (۷۵.۱۹)$$

که آن را $\Delta\omega_i(\omega_0)$ می‌نامیم، و این سهم تمام نوسانگرهایی است با فرکانس طبیعی ω_0 در گستره کوچک $\Delta\omega$ در تشکیل K_i کلی. حال می‌توانیم ω_p^2 را بر حسب $K_i(\omega_0)\Delta\omega$ بیان کنیم

$$\omega_p^2 = \frac{2}{\pi} \omega_0 K_i(\omega_0) \Delta\omega.$$

چنانچه این نتیجه را در معادله (۳۳.۱۹) برای K_r قرار دهیم، معادله حاصل نمایشگر آن بخش از K_r در فرکانس مفروض ω خواهد بود که ناشی از نوسانگرهایی در گستره $\Delta\omega$ حول ω_0 است

$$\Delta(K_r - 1) = \frac{2}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} K_i(\omega_0) \Delta\omega.$$

@Quark_Book

H--M

برای به دست آوردن حاصل جمع سهم ω های مختلف در K_r در فرکانس ω می بایست $\Delta\omega$ را به يك ديفرانسیل، $d\omega$ ، تغییر دهیم (ودر ضمن متغیر انتگرال گیری را به جای ω با ω' نشان دهیم)

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' K_i(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (۷۶.۱۹)$$

این رابطه کرامرز - کرونیگ است که اولین بار در سال ۱۹۲۶ برای پیدا کردن ضریب شکست پرتوهای x از مقدار جذب اندازه گیری شده، به کار گرفته شد. در دهه های اخیر این رابطه به طور وسیعی در سایر نواحی طیفی نیز به کار رفته است.

به عنوان ساده ترین نشانه از قدرت این رابطه می بینیم که با قرارداد تابع دلنا برای K_i از معادله (۳۵.۱۹) در معادله (۷۶.۱۹) فوراً معادله (۳۳.۱۹) برای K_r وابسته به آن نتیجه می شود. ولی، بجز در مورد مثالهای دیگری که نسبتاً تصنعی هستند، عمل انتگرال گیری را نمی توان به طور تحلیلی انجام داد، بلکه باید به طور عددی انجام شود. يك مشکل در این انتگرال گیری وجود تکیه در $\omega' = \omega$ است. این مشکل جدی نیست، زیرا سهم مربوط به $\omega' < \omega$ در انتگرال منفی است و سهم مثبت مربوط به $\omega' > \omega$ را حذف می کند، ولی باید آن را تشخیص داد. به عنوان دومین مثال، که در آن با این مشکل و سایر مشکلات مربوط به کاربرد انتگرال کرامرز - کرونیگ برخورد خواهیم کرد، تقریب فرکانس پایین برای ذرات آزاد را بررسی می کنیم. این تقریب با معادله (۵۱.۱۹) داده شده است

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega}$$

این رابطه به انتگرال آسانی در معادله (۷۶.۱۹) منجر می شود

$$K_r - 1 = \frac{2}{\pi} \frac{\omega_p^2}{\gamma} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (۷۷.۱۹)$$

و همچنین نتیجه مورد انتظار را، از معادله (۵۰.۱۹) می دانیم. برای آنکه در محاسبه انتگرال تکیه را در نظر بگیریم، می نویسیم^۲

۱. به بیان دقیق، این نظریه را نمی توان در مورد $\hat{K}$ برای رسانای الکترون آزاد به کار برد، چون $K_i(\omega)$ در $\omega = 0$ تکیه دارد. ولی معادله (۷۶.۱۹) هنوز هم معتبر است؛ به مسئله ۱۶.۱۹ رجوع کنید.

۲. این را قسمت اصلی کوشی (Cauchy) انتگرال می نامند.

$$\int_0^\infty = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^{\omega-\delta} + \int_{\omega+\delta}^\infty \right]$$

آنگاه

$$\int_0^{\omega-\delta} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} = -\frac{1}{2\omega} \ln \left| \frac{\omega + \omega'}{\omega - \omega'} \right| \Big|_0^{\omega-\delta} = -\frac{1}{2\omega} \ln \frac{2\omega - \delta}{\delta} \quad (۷۸.۱۹)$$

$$\int_{\omega+\delta}^\infty \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} = -\frac{1}{2\omega} \ln \left| \frac{\omega + \omega'}{\omega - \omega'} \right| \Big|_{\omega+\delta}^\infty = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{2\omega + \delta}{\delta} \quad (۷۹.۱۹)$$

از جمع کردن این انتگرالها خواهیم داشت

$$\int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega} \ln \frac{2\omega + \delta}{2\omega - \delta} = 0 \quad (۸۰.۱۹)$$

پس نتیجه معادله (۷۷.۱۹) عبارت است از

$$K_r = 1 \quad (۸۱.۱۹)$$

این نتیجه چند نکته آموزنده دارد. اولاً، تکینگی در انتگرال ده موجب بینهایت شدن انتگرال نمی‌شود. (در واقع انتگرال صفر است، ولی این نتیجه مخصوص این مورد خاص است.) واضح است که مادامی که K_i در ω پیوسته باشد، تکینگی اشکالی به وجود نخواهد آورد. ثانیاً نتیجه حاصل، معادله (۸۱.۱۹)، برای K_r مقدار ثابتی است. ولی مقدار ثابت آن با مقدار ثابت $(\omega_p/\gamma)^2 -$ که معادله (۵۰.۱۹) ایجاب می‌کند در توافق نیست. این اختلاف مؤید این مطلب است که برای آنکه نتیجه صحیح از معادله (۷۶.۱۹) به دست بیاید، $K_i(\omega)$ می‌بایست در تمامی گستره فرکانس از ۰ تا ∞ معلوم باشد. در این مثال، معادله (۵۱.۱۹) برای فرکانسهای بسیار کمتر از γ صحیح است، ولی در فرکانسهای بالاتر غلط است. مقدار واقعی K_r در فرکانسهای پایین مربوط می‌شود به این رفتار K_i در فرکانسهای بالاتر. هنگامی که ω به سمت بینهایت می‌رود، انتگرال همواره مقدار صحیح K_r ، یعنی $K_r = 1$ ، را به دست می‌دهد. این مطلب مستقیماً در معادله (۷۶.۱۹) دیده می‌شود. پس اگر K_r ثابت است، مقدار ثابتش می‌بایست ۱ باشد. هنگامی که انتگرال را با داده‌های تجربی به کار می‌بریم، لازم است که در بالاتر و پایینتر از گستره‌ای که اندازه گیرها به عمل آمده است برونیابی معقولی بکنیم، حتی اگر بخواهیم K_r را تنها در محدوده این گستره پیدا کنیم. دلیل واضحتری برای خطا آن خواهد بود که قله جذب مجهولی را در بالاتر از گستره اندازه گیرها منظور نکرده باشیم.

انتگرال موجود در معادله (۸۰.۱۹) صفر است، هر مضرب ثابتی از آن را می‌توانیم از معادله (۷۶.۱۹) کم کنیم بدون آنکه در نتیجه حاصل تأثیری داشته باشد. با کم کردن حاصل ضرب $(2/\pi)\omega K_i(\omega)$ در آن انتگرال از معادله (۷۶.۱۹)، خواهیم داشت

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[\omega' K_i(\omega') - \omega K_i(\omega)] d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}$$

این صورت برای انتگرال‌گیری عددی سودمند است چون انتگرال ده آن تکیه ندارد، مخرج انتگرال ده در همان نقطه‌ای صفر می‌شود که صورت آن صفر می‌شود. از انتگرال‌گیری جزء به جزء معادله (۷۶.۱۹) نتیجه می‌شود

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dK_i(\omega')}{d\omega'} \ln \frac{1}{|\omega'^2 - \omega^2|} d\omega'$$

از این رابطه می‌توانیم به‌طور کیفی ایده‌ای از رفتار مورد انتظار K_r را به دست آوریم. عامل دوم در انتگرال ده ضریب وزنه است و این ضریب وزنه برای فرکانسهای نزدیک به ۰، بسیار سنگین است، بنابراین شیب K_i در فرکانسهای نزدیک به ω روی اندازه K_r قویاً تأثیر می‌گذارد. این نوع رابطه را در تمامی مثالهای خاصی که در بخشهای پیش بررسی شد، می‌توان دید.

هر چند که رابطه کرامرز - کرونیک را از مدل نوسانگر هماهنگ برای محیط به دست آوردیم، ولی این رابطه واقعاً تنها به جنبه خطی بودن مدل بستگی دارد. از آنجا که نوسانگر هماهنگ پیش‌نمونه‌ای از دستگاههای خطی است، تعجبی ندارد که نتیجه کلی از این مدل به دست می‌آید، ولی اگر نتیجه را به روشی مستقل از مدل به دست آوریم بعضی ویژگیهای جالب پدیدار خواهند شد. روش دقیق به دست آوردن نتیجه با استفاده از این رویکرد، مبتنی بر نظریه انتگرال‌گیری مختلط^۱ است، که در اینجا به کار نخواهیم برد، هر چند که ایده‌های اساسی آن نسبتاً ساده هستند. به علت عمومیت این نتایج، برای سایر توابع پاسخ مختلط نیز می‌توان نتایج مشابهی به دست آورد، مثلاً برای ضریب انعکاس فرل، مقاومت ظاهری ac مختلط (که این نظریه اولین بار برای آن به‌طور کامل تکوین یافت)^۲، و حتی برای دستگاههایی در فیزیک هسته‌ای و فیزیک ذرات بنیادی. چنین روابطی نیز روابط پاشندگی نامیده می‌شوند. علاوه بر خطی بودن، فرض بنیادی دیگر آن است که پاسخ دستگاه علی است. یعنی، پاسخ جلوتر از نیروی اعمالی نخواهد بود بلکه تنها پس از آنکه نیرو اعمال

۱. برای مثال، به بخشهای ۵۸ تا ۶۲ از کتاب زیر رجوع کنید

L. Landau and E. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Reading, Mass.: Addison - Wesley, 1960).

۲. به کتاب بود (Bode) که در فصل ۱۳ به آن اشاره شده، رجوع کنید.

شد رخ خواهد داد.

برای آنکه فرض خطی بودن و علیت را به طور ریاضی بیان کنیم، قطبش P را بر حسب میدان اعمالی E به صورت زیر می نویسیم

$$P(t) = \int_0^{\infty} dt' f(t') E(t-t') \quad (۸۲.۱۹)$$

که در آن $f(t')$ حقیقی است. یعنی، P در زمان حال (t) متناسب با اثرات E در زمان حال و در گذشته است ($t-t'$ با $t' \geq 0$) و نه در آینده ($t' < 0$). اکنون بگذارید P و E را به صورت برهم نهش امواج تخت بیان کنیم (یعنی، تبدیل فوری آنها را بگیریم) تا بتوانیم پذیرفتاری را وارد کنیم

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{E}(\omega) \exp(-i\omega t)$$

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\chi}(\omega) \hat{E}(\omega) \exp(-i\omega t)$$

با قرار دادن اولین معادله از دو معادله بالا در معادله (۸۲.۱۹) و مقایسه نتیجه با معادله دوم، دیده می شود که

$$\hat{\chi}(\omega) = \int_0^{\infty} dt' f(t') \exp(i\omega t')$$

یا

$$\chi_r(\omega) = \int_0^{\infty} dt' f(t') \cos \omega t'$$

$$\chi_i(\omega) = \int_0^{\infty} dt' f(t') \sin \omega t'$$

بنابراین χ_r و χ_i مستقل از یکدیگر نیستند زیرا هر کدام از آنها به نحو یکتایی به $f(t')$ مربوط می شوند. برای به دست آوردن رابطه میان آن دو، می بایست یکی از این دو معادله را برای $f(t')$ حل کنیم که این کار را می توانیم با استفاده از قضیه فوری انجام دهیم، مثلاً

$$f(t') = (\pi/2) \int_0^{\infty} d\omega' \chi_i(\omega') \sin \omega' t' \quad (۸۳.۱۹)$$

با قرار دادن این نتیجه در انتگرالی که برای χ_r داریم، می توانیم انتگرال گیری روی t' را انجام دهیم

$$\chi_r(\omega) = (\gamma/\pi) \int_0^\infty d\omega' \omega' \chi_i(\omega') / (\omega'^2 - \omega^2) \quad (۸۴.۱۹)$$

به طور مشابه

$$\chi_i(\omega) = -(\gamma\omega/\pi) \int_0^\infty d\omega' \chi_r(\omega') / (\omega'^2 - \omega^2) \quad (۸۵.۱۹)$$

معادله اول ازدومعادله بالا بامعادله (۷۶.۱۹) دقیقاً یکسان است ومعادله دوم معادله مکمل آن است.

برای محاسبه مثال ساده‌ای از پاسخ یک محیط پاشنده به یک میدان اعمالی غیر سینوسی می‌توانیم از معادلات (۸۲.۱۹) و (۸۳.۱۹) استفاده کنیم. مجدداً موردی را بررسی می‌کنیم که محیط تنها یک قله جذب بسیار باریک دارد، فرض می‌کنیم

$$\chi_i(\omega') = (\pi\omega_0 \chi_0 / \gamma) \delta(\omega' - \omega_0)$$

به طوری که $\chi_r(0) = \chi_0$ است. آنگاه از معادله (۸۳.۱۹) تابع پاسخ این محیط عبارت است از $\chi(t) = \chi_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$. حال فرض کنید که یک میدان الکتریکی به صورت یک تابع پله‌ای اعمال می‌شود (به طور موضعی)

$$E(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ = E_0 & t > 0 \end{cases}$$

با این E ، معادله (۸۲.۱۹) تبدیل می‌شود به

$$P(t) = E_0 \int_0^t dt' f(t')$$

و با $f(t')$ بر اساس محاسبه، داریم

$$P(t) = \chi_0 E_0 (1 - \cos \omega_0 t)$$

پس از اعمال ناگهانی میدان الکتریکی E_0 ، محیط با فرکانس جذب (تشدید) ω_0 شروع به «زنگ زدن» (نوسان) می‌کند. اگر میرایی غیر صفر باشد، نوسانهای P مثلاً میرانده خواهند شد و P به مقدار $\chi_0 E_0$ ، مانند حالت میدان dc، خواهد رسید. می‌بینیم که هیچ تناسب ساده‌ای بین $P(t)$ و $E(t)$ وجود ندارد، و نسبت آنها (که به زمان بستگی دارد) یکی از خواص ماده نیست. این مطلب مجدداً مؤید آن است که ثابتهای ماده نسبتهای بین

تبدیل‌های فوریه هستند.

۶.۱۹ خلاصه مطلب

بادر نظر گرفتن الکترونها و یونها به صورت نوسانگرهای هماهنگ میرای کلاسیک یا به صورت ذرات آزاد، ثابت دی‌الکتریک مختلط ماده به عنوان تابعی از فرکانس میدان الکتریکی محاسبه می‌شود. نتیجه عبارت است از

$$\hat{K} - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

که در آن ω_0 فرکانس طبیعی و γ فرکانس میرایی است، و ω_p (فرکانس پلاسما برای ذرات آزاد) برابر است با

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}$$

بر مبنای این نتیجه انواع بستگی‌های ثابت دی‌الکتریک حقیقی و رسانندگی را به فرکانس، بسته به آنکه نیروی اینرسی، یا نیروی میرایی، و یا نیروی بازگرداننده قابل چشمپوشی باشد، می‌توان فهرست‌بندی کرد. اگر اثرات میدان موضعی را بتوانیم نادیده بگیریم، پاسخهای دی‌الکتریک گروههای مختلف ذرات جمع‌پذیرند. بستگی ثابتهای دی‌الکتریک به فرکانس و همچنین اندازه‌های نسبی قسمتهای حقیقی و موهومی آن تعیین‌کننده بستگی ثابتهای اپتیکی n و k به فرکانس است. قسمتهای حقیقی و موهومی از یکدیگر مستقل نیستند، بلکه از طریق روابط کرامرز - کرونیگ به یکدیگر مربوط می‌شوند.

۱. هنگامی که نیروهای اینرسی و بازگرداننده غالب‌اند، جذب تشدید رخ می‌دهد. برای میرایی کم ثابت دی‌الکتریک شکل لورنتسی ساده‌ای دارد. اگر K_1 کوچک باشد، ثابتهای اپتیکی نیز به همان شکل خواهند بود. در هر صورت، در ناحیه قله جذب «پاشندگی بی‌هنجار» رخ می‌دهد. قله‌ها برای الکترونها در مرئی یا فرا بنفش واقع‌اند و برای یونها در فروسرخ.

۲. چنانچه نیروی بازگرداننده (ω_0) را برابر با صفر قرار دهیم نظریه الکترون آزاد درود نتیجه خواهد شد. هنگامی که $\gamma \ll \omega$ باشد، عمق پوسته و ضریب جذب در فرکانسهای پایین (فرمول‌ها گن - روبنز) با رسانندگی dc نتیجه می‌شود. برای $\gamma \gg \omega$ و $\omega_p \gg \omega$ ، ذرات آزاد سهم کوچکی در رسانش با جذب دارند. اگر $\omega_p \gg \gamma$ باشد، ناحیه فرکانس بینایی وجود دارد (برای فلزات در فروسرخ) که در آن ضریب جذب پایین است (ضریب انعکاس بالاست)

$$A = \tau / \omega_p \tau$$

در اینجا τ فرکانس برخورد است، و عمق پوسته در آن ناحیه کوچک است

$$\delta = \lambda_p / 2\pi$$

که در آن λ_p طول موج پلاسماست. فرکانس پلاسما برای فلزات در فرابنفش و برای سایر پلاسماهای الکترونی متداول در فرکانسهای بسیار پایینتر، قرار دارد.

۳. در رسانش الکترونی و در واهلش دی الکتریکی اثرات اینرسی قابل چشمپوشی اند. بستگی رسانش الکترونی به فرکانس با بستگی رسانش ذره آزاد یکسان است، هرچند که سازوکارهای تحریک و زمان فروافت این دو متفاوت اند. بستگی واهلش دی الکتریکی به فرکانس «تندمیرا»ست، و ناحیه «باشندگی بهنجار» برای آن وجود ندارد. سازوکار آن همان سازوکار قطبش پذیری سمگبری دوقطبیهای دائمی است.

۴. رابطه کرامرز-کرونیگ

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' K_i(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}$$

بین قسمتهای حقیقی و موهومی تابع پاسخ دی الکتریک تنها به خطی بودن محیط (و به علیت) بستگی دارد. این رابطه یا صورتهای دیگر آن در تمام دستگاههای خطی کاربردهای مفیدی دارد.

مسائل

۱.۱۹ چگالی و ضریب شکست بنزن مایع در 20°C به ترتیب 0.879 g/cm^3 و 1.50 (برای $\lambda = 589\text{ nm}$) است. از معادله کلاؤسیوس-موساتی، ضریب شکست بخار بنزن را در 20°C ، که در آن فشار بخار برابر با 10.7 mmHg است، و همچنین در نقطه جوش آن (80°C) محاسبه کنید.

۲.۱۹ نشان دهید که پهنای منحنی لورنتسی، معادله (۴۰.۱۹)، در ارتفاع نصف ماکزیمم، γ است. همچنین نشان دهید که مساحت زیر منحنی برابر است با

$$\frac{\pi \omega_p^2}{2 \omega_0}$$

۳.۱۹ ضریب شکست الماس در $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ برابر است با 2.417 ؛ فرض کنید ثابت

دی الکتریک ساکن آن ۵۵۰ است. این داده‌ها را در مورد مدل ساده‌ای باتنها يك جذب به صورت تابع δ در λ_0 به کار ببرید و λ_0 را تعیین کنید.

۴.۱۹ فرمول کوشی را برای برآورد ضریب شکست گاز هیدروژن در شرایط متعارف برای طول موجهای ۴۰۰۰ و ۷۰۰۰ آنگستروم، به کار ببرید. فرض کنید که $\lambda_0 = 1216 \text{ \AA}$ (خط α لیمان).

۵.۱۹ گاهی شکل قله‌های جذب تجربی به منحنی گاوسی نزدیکتر است تا به منحنی لورنتسی. برای نشان دادن اختلاف بین منحنیهای گاوسی و لورنتسی، يك منحنی گاوسی و يك منحنی لورنتسی با ارتفاع قله یکسان و پهنای یکسان در نصف ارتفاع ماکزیمم را باهم در يك نمودار رسم کنید.

۶.۱۹ تابع دی الکتریک را برای یونهای مقیدی که با میرایی قابل چشمپوشی در نوسان‌اند، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$K(\omega) = K_{\infty} + \frac{\omega_p^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

که در آن ω_T فرکانس تشدید برای ارتعاشات عرضی یونها با طول موج بلند است، و K_{∞} به طور تقریبی سهم آن دسته از حرکتهای الکترونی است که در فرکانسهایی بسیار بالاتر از ω_T به تشدید درمی آیند. توجه کنید که برای $\omega = \omega_T$ ، $K(\omega) \rightarrow \infty$. اگر برای $\omega = \omega_L$ داشته باشیم $K(\omega) = 0$ ، به طوری که نوسانهای طولی با طول موج بلند با فرکانس ω_L بتوانند رخ بدهند، نشان دهید که

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} = \frac{K_0}{K_{\infty}}$$

که در آن $K_0 = K(0)$ ثابت دی الکتریک dc است. این رابطه به رابطه لیدن - ساکس - تلر معروف است.

۷.۱۹ فرض کنید يك محلول رقیق شامل تعداد N نوسانگر اتمی در واحد حجم است که در محیطی شفاف با ضریب شکست n_{∞} حل شده‌اند. با فرض آنکه در فرکانس تشدید $K_i \ll 1$ و $n = n_{\infty}$ است، k و ضریب جذب (α) را پیدا کنید. از اثرات میدان موضعی چشمپوشی کنید. نشان دهید که

$$N = \frac{\epsilon_0 mc}{e^2} n_{\infty} \gamma \alpha$$

از چنین رابطه‌ای (که به معادله‌ی اسماکولا^۱ یا معادله‌ی چاکو^۲ معروف است) غالباً برای پیدا کردن N از اندازه‌گیری‌های اپتیکی ارتفاع α و پهنای جذب γ استفاده می‌شود.

۸.۱۹ محیطی را در نظر بگیرید که حاوی ذرات آزادی با زمان برخورد τ است و رسانندگی dc آن برابر g_0 است. برای فرکانس $\omega = 1/\tau$ ، قسمت‌های حقیقی و موهومی رسانندگی را محاسبه کنید. ثابت دی‌الکتریک حقیقی K چیست؟

۹.۱۹ برای یک پلاسمای الکترون آزاد با $\gamma/\omega_p = 10^{-2}$ ، مقادیر تقریبی n و k را در $\omega = \omega_p$ محاسبه کنید.

۱۰.۱۹ فرض کنید در تابع دی‌الکتریک یک پلاسمای الکترون آزاد با میرایی قابل چشم‌پوشی، سهم الکترونهاى مقید مدارهای داخلی را که در فرکانسهای بالاتر به تشدید درمی‌آیند بتوان به‌طور تقریبی با K_∞ برابر گرفت:

$$K(\omega) = K_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

فرکانس نوسانهای طولی را پیدا کنید. در نقره مقدار محاسبه شده برای ω_p از چگالی الکترون آزاد (ظرفیت) برابر است با $\omega_p = 1.378 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ ، و نوسانهای طولی پلازما در فرکانس $\omega = 5.8 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ مشاهده می‌شوند. K_∞ چقدر است؟

۱۱.۱۹ در یک پلاسمای الکترون آزاد، امواج طولی پلازما در فرکانس $\omega = Ne^2/\epsilon_0 m$ تولید می‌شوند در اینجا m جرم الکترون است. اگر یونهای مثبتی با جرم M نیز آزادانه در حرکت باشند، با فرض آنکه سهم الکترونها و یونها در K جمع پذیرند، نشان دهید که امواج طولی پلازما در فرکانس $\omega = Ne^2/\epsilon_0 \mu$ تولید می‌شوند. در اینجا $\mu = mM/(M+m)$ جرم کاهش یافته است.

۱۲.۱۹ درباره‌ی رفتار دی‌الکتریک ذرات آزاد برای مورد $\omega \gg \gamma$ بحث کنید. به عبارت دیگر عباراتی تقریبی برای K و n در نواحی مختلف فرکانس پیدا کنید. آیا رابطه‌ها گن-روبنز معتبر است، و اگر معتبر است در چه گستره‌ای از فرکانس؟

۱۳.۱۹ زاویه‌ی اتلاف دی‌الکتریک یک دی‌الکتریک قطبی بر حسب تابعی از فرکانس ماکزیمی دارد. فرکانسی را که در آن ماکزیمم رخ می‌دهد محاسبه کنید و، اگر $K_0 \gg 1$ باشد، K_r و K_i را در این فرکانس پیدا کنید.

۱۴.۱۹ فرمولهای زیر را (که به قواعد جمع مشهورند) برای رسانندگی حقیقی g و پذیرفتاری χ با استفاده از روابط کرامرز-کرونیگک ثابت کنید

$$\int_0^{\infty} \chi(\omega') d\omega' = \frac{\pi}{2} \lim_{\omega \rightarrow \infty} g(\omega) = 0$$

$$\int_0^{\infty} g(\omega') d\omega' = -\frac{\pi}{2} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \chi(\omega) = \frac{\pi N e^2}{2m}$$

۱۵.۱۹ فرض کنید محیطی تنها بایک قله جذب به صورت $\chi_i(\omega') = 1/2\pi\omega_0\chi_0\delta(\omega' - \omega_0)$ مشخص می شود. پاسخ $P(t)$ محیط را به میدان الکتریکی تپی زیر پیدا کنید

$$E(t) = \frac{E_0}{\omega_0} \delta(t)$$

۱۶.۱۹ بادر نظر گرفتن $J(t)$ به جای $P(t)$ ، نشان دهید که رسانندگی مختلط از روابط باشندگی زیر تبعیت می کند

$$g_r(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' g_i(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad g_i(\omega) = -\frac{2}{\pi} \omega \int_0^{\infty} \frac{g_r(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}$$

این روابط نه تنها برای عایقها بلکه برای رساناها نیز معتبرند، زیرا $\hat{g}(\omega)$ در $\omega = 0$ تکینگی ندارد. (الف) با استفاده از رابطه $g = -i\omega\chi$ این روابط باشندگی را با معادله های (۸۴.۱۹) و (۸۵.۱۹) مقایسه کنید. (ب) «قواعد جمع» زیر را به دست آورید

$$\int_0^{\infty} \chi(\omega') d\omega' = -\frac{\pi}{2} g(0), \quad \int_0^{\infty} g(\omega') d\omega' = \frac{\pi}{2} \frac{Ne^2}{m}$$

توجه کنید که این روابط باروابطی که در مسئله ۱۴.۱۹ برای عایقها ($g(0) = 0$) به دست آمد، سازگارند.

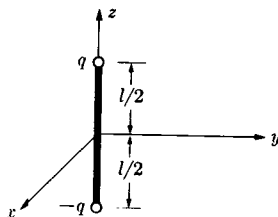
کسیل تابش

برای مطالعه تولید امواج الکترومغناطیسی ابتدا بهتر است پتانسیل‌های برداری را بررسی کنیم که در معادله موج غیرهمگن با چشمه‌ها صدق می‌کنند. در این فصل چند چشمه تابش ایده‌آل و همچنین دستگاه‌های پیچیده‌تری را بررسی خواهیم کرد. به علت تقریب‌هایی که در این فصل به کار می‌بریم، اعتبار جواب‌ها محدود می‌شود به میدان‌هایی که بارهای متحرک کند (غیر نسبیتی) تولید می‌کنند، یعنی بارهایی که سرعتشان، v ، در مقایسه با سرعت نور، c ، کوچک است، $v \ll c$. ولی به هر جهت نتایج هم برای تابش امواج رادیویی از آنتن‌ها کاربرد دارد و هم برای تابش از اتم‌ها. بررسی خود را با ساده‌ترین مثال آنتن آغاز می‌کنیم، و سپس روش کلی‌تری را بررسی خواهیم کرد.

۱.۲۰ تابش از یک دوقطبی نوسان‌کننده

مثال ساده‌ای برای تابش از یک توزیع بار - جریان وابسته به زمان مشخص، محاسبه تابش از یک دوقطبی الکتریکی نوسان‌کننده است. فرض می‌کنیم که دوقطبی، همانطور که در شکل ۱.۲۰ نشان داده‌ایم، شامل کره‌هایی است که در $z = \pm l/2$ قرار گرفته‌اند و توسط یک سیم با ظرفیت قابل چشم‌پوشی به یکدیگر متصل شده‌اند. بار موجود بر روی کره بالایی $+q$ و روی کره پایینی $-q$ است. اصل بقای بار ایجاب می‌کند که جریان موجود در سیم رابط با معادله زیر داده شود

$$I = +\dot{q} \quad (۱.۲۰)$$



شکل ۱۰۲۰ دوقطبی الکتریکی نوسان کننده.

که در آن I در جهت مثبت z ، مثبت است. باید توجه داشت که شرط قابل چشمپوشی بودن ظرفیت سیم و نتیجتاً یکنواخت بودن جریان، تنها در صورتی صادق است که طول l دوقطبی در مقایسه با طول تابش کوچک باشد (به بحث ابتدای فصل ۱۳ مراجعه کنید). از معادله (۸۴.۱۶)، پتانسیل برداری مربوط به توزیع جریانی که با معادله (۱۰.۲۰) مشخص شده باشد، عبارت است از

$$A_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{I(z', t - |\mathbf{r} - \mathbf{z}'\mathbf{k}|/c) dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{z}'\mathbf{k}|} \quad (2.20)$$

این عبارت نسبتاً مشکل را می‌توان فوراً با بررسی کمیت $|\mathbf{r} - \mathbf{z}'\mathbf{k}|$ ساده کرد. واضح است که

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}'\mathbf{k}| = (r^2 - 2z'\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + z'^2)^{1/2} \quad (3.20)$$

اگر l در مقایسه با r کوچک باشد، به عبارت دیگر، اگر ما میدان را تنها در فواصل دور از دوقطبی مطالعه کنیم، طرف راست معادله (۳.۲۰) را می‌توانیم به شکل زیر بسط دهیم

$$|\mathbf{r} - \mathbf{z}'\mathbf{k}| = r - z' \cos \theta \quad (4.20)$$

که در آن θ زاویه بین $\mathbf{r}$ و محور z است. کمیت $|\mathbf{r} - \mathbf{z}'\mathbf{k}|$ در معادله (۴.۲۰) دوبار در عبارت A آمده است. اگر r به اندازه کافی بزرگ باشد، می‌توانیم برای معخرج از $z' \cos \theta$ صرف نظر کنیم. ولی در جمله زمان تأخیری در صورتی می‌توان از $z' \cos \theta$ صرف نظر کرد که $z' \cos \theta / c$ در مقایسه با زمانی که در اثبات آن جریان به طور قابل توجهی تغییر می‌کند، برای مثال، در مقایسه با دوره تناوب برای جریانهایی که تغییرات هماهنگ دارند، قابل چشمپوشی باشد. چون $z' \cos \theta \ll l/2$ است، این بدان معنی است که در جمله زمان تأخیری تنها در صورتی می‌توان از $z' \cos \theta / c$ صرف نظر کرد که

$$\frac{l}{2} \ll cT = \lambda$$

بنابراین، اگر دو قطبی در مقایسه با طول موج کوچک و نقطه مشاهده، در مقایسه با l ، از دو قطبی خیلی دور باشد آنگاه A با معادله زیر داده می شود

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} l I \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (۶.۲۰)$$

پتانسیل نرده ای φ را می توان یا با استفاده از شرط لورنتس یا با به کار بردن عبارت مناسب برای پتانسیل تأخیری، به دست آورد. هر دو روش نتیجه نهایی یکسانی می دهند؛ با وجود این، چون پتانسیل الکتریکی مربوط به يك دو قطبی عبارت است از اختلاف بین دو جمله بزرگ، باید در به کار بردن تقریب در مورد پتانسیل تأخیری فوق العاده دقت کرد. چون در محاسبه شرط لورنتس با این اشکال مواجه نمی شویم، پتانسیل نرده ای را از حل معادله زیر به دست می آوریم

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (۷.۲۰)$$

که در آن A با معادله (۶.۲۰) داده می شود. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{l}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} I \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ &= \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{r^3} I \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{z}{r^2 c} I' \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \end{aligned} \quad (۸.۲۰)$$

که در آن I' نشان دهنده مشتق I نسبت به شناسه خودش است. با توجه به اینکه $I = +\dot{q}$ ، معادله بالا قابل انتگرال گیری است و در نتیجه خواهیم داشت

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^2} \left[\frac{q(t-r/c)}{r} + \frac{I(t-r/c)}{c} \right] \quad (۹.۲۰)$$

اکنون که پتانسیلهای نرده ای و برداری به دست آمدند، برای به دست آوردن میدان الکترومغناطیسی تنها باید از آنها مشتق بگیریم. قبل از انجام این کار، راحت تر است که تحلیل خود را به موردی اختصاص دهیم که توزیع بار - جریان نسبت به زمان به صورت هماهنگ تغییر می کند. به ویژه تغییرات را به صورت تابع زیر انتخاب می کنیم

$$q \left(t - \frac{r}{c} \right) = q_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$I = I_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\omega q_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (10.20)$$

باتجزیه A به مؤلفه‌های کروی آن، خواهیم داشت

$$A_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 l}{r} \cos \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$A_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 l}{r} \sin \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (11.20)$$

$$A_\phi = 0$$

و از اینجا روشن می‌شود که تنها مؤلفه ϕ از میدان $\mathbf{B}$ صفر نیست. این مؤلفه عبارت است از

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 l}{r} \sin \theta \left[\frac{\omega}{c} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \quad (12.20) \end{aligned}$$

محاسبه میدان الکتریکی تا اندازه‌ای پیچیده‌تر است، زیرا نه تنها A ، بلکه φ نیز در آن دخیل است. نتیجه مشتق گیرها عبارت است از

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} = \frac{2I_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{\sin \omega(t-r/c)}{r^2 c} - \frac{\cos \omega(t-r/c)}{\omega r^3} \right]$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \\ &= -\frac{I_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\omega r^3} - \frac{\omega}{rc^2} \right) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{r^2 c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \end{aligned}$$

$$E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial t} = 0 \quad (13.20)$$

محاسبه آهنک تابش انرژی از دو قطبی جالب است. این محاسبه را با انتگرال گیری از مؤلفه عمود بردار پوئینتینگ روی سطح کره‌ای به شعاع R انجام می‌دهیم

$$\oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\mu_0} R^2 \int_0^\pi E_\theta B_\phi 2\pi \sin \theta d\theta \quad (۱۴.۲۰)$$

با استفاده از معادلات (۱۴.۲۰) و (۱۳.۲۰) می‌توانیم انتگرالی را که در معادله (۱۴.۲۰) دیده می‌شود به طور کامل محاسبه کنیم؛ با وجود این، شاید آموزنده‌تر باشد که تنها آن قسمت از آن را محاسبه کنیم که در $R \rightarrow \infty$ صفر نمی‌شود. این کار را با انتخاب جمله‌ای که در E_θ و B_ϕ با $1/r$ متناسب است، انجام می‌دهیم. نتیجه به صورت زیر خواهد بود

$$\oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = \frac{(I_0 l)^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (۱۵.۲۰)$$

این توان تابش شده لحظه‌ای است؛ میانگین توان تابش شده (از آنجا که میانگین $\cos^2$ برابر یک دوم است) عبارت است از

$$\bar{P} = \frac{I_0^2 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I_0^2}{2} \quad (۱۶.۲۰)$$

شکل متداولتری برای معادله (۱۶.۲۰) به کمک معرفی $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ و $\lambda = 2\pi c/\omega$ به دست می‌آید. نتیجه عبارت است از

$$\bar{P} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{I_0^2}{2} \quad (۱۷.۲۰)$$

یک مقاومت R که حامل جریان $I_0 \cos \omega t$ باشد، انرژی را با آهنگ میانگین $\bar{P} = RI_0^2/2$ تلف می‌کند. از مقایسه این رابطه با معادله (۱۷.۲۰)، ملاحظه می‌شود که عاقلانه است مقاومت تابشی یک دو قطبی را با معادله زیر تعریف کنیم

$$R_r = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (۱۸.۲۰)$$

یا

$$R_r = 789 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (\text{در خلا})$$

برای محیط مادی μ_0 و ϵ_0 را باید با μ و ϵ جایگزین کنیم و $\lambda = 2\pi/\omega \sqrt{\epsilon\mu}$. ممکن است به این فکر بیافتیم که از معادله (۱۸.۲۰) برای توصیف تابش از یک آنتن رادیو استفاده کنیم. متأسفانه نقایصی وجود دارد که باعث می‌شود نتوانیم نتایج خوبی از این

طریق به دست آوریم. نقایص اصلی عبارت اند از (۱) از اثر نزدیکی زمین چشمپوشی شده است، (۲) معمولاً آنها را به طریق خازنی در قسمتهای انتهایی باردار نمی کنند، و (۳) عموماً آنها در مقایسه با طول موجی که تابش می کنند، کوتاه نیستند. در بخش بعد، رفع دو نقص آخر را بررسی خواهیم کرد؛ ولی بررسی اثر اختلافی که زمین به وجود می آورد از حوزه بحث این کتاب خارج است.

۲.۲۰ تابش از يك آنتن نیم موج

محدودیت كوچك بودن طولها در مقایسه با طول موج را می توان در بعضی موارد باروشهای نسبتاً ساده حذف كرد. به ویژه، يك سیم را كه طولش درست نصف طول موج است، می توان به اجزای بی نهایت كوچك تقسیم كرد و روش بخش قبل را در مورد هر جزء به كاربرد. فرض كنید سیم در امتداد محور z از $-\lambda/4$ تا $+\lambda/4$ قرار دارد و حامل جریان زیر است

$$I(z', t) = I_0 \sin \omega t \cos \left(\frac{\gamma \pi z'}{\lambda} \right) \quad (19.20)$$

مقدار جریان در دو انتهای سیم برابر صفر است. نایکخواختی جریان ایجاب می کند كه چگالی بار متغیر باشد. چگالی بار در دو انتهای سیم بیشترین مقدار است. يك جزء dz' در z' در ایجاد E_θ در خلا به مقدار زیر سهیم است

$$dE_\theta = I_0 \frac{\sin \theta}{\gamma \pi \epsilon_0 R c^2} \omega \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \cos \left(\frac{\gamma \pi z'}{\lambda} \right) dz' \quad (20.20)$$

در اینجا R عبارت است از فاصله dz' از نقطه مشاهده، و از جملات از مرتبه $1/R^2$ چشمپوشی شده است. به طریق مشابه داریم

$$dB_\phi = \frac{\mu_0}{\gamma \pi} \frac{I_0 \omega}{R c} \sin \theta \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \cos \left(\frac{\gamma \pi z'}{\lambda} \right) dz' \quad (21.20)$$

مسئله محاسبه E_θ و B_ϕ تبدیل می شود به مسئله محاسبه انتگرال زیر

$$K = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{R} \cos \omega \left(t - \frac{R}{c} \right) \cos u \, du \quad (22.20)$$

كه در آن $u = \gamma \pi z' / \lambda$. مثل قبل، $R = r - z' \cos \theta$ ، و بنابراین با انتخاب r به اندازه كافی بزرگ، $z' \cos \theta$ قابل چشمپوشی می شود. ولی در شناسه كسینوس، دقت بیشتری

لازم است و K به صورت زیر نوشته می شود

$$K = \frac{1}{r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + u \cos \theta \right] \cos u \, du$$

می توان کسینوس را بسط داد تا نتیجه زیر به دست آید

$$K = \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos (u \cos \theta) \cos u \, du \\ - \frac{1}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin (u \cos \theta) \cos u \, du$$

انتگرال دوم صفر می شود، و انتگرال اول را می توان با نوشتن کسینوس به شکل نمایی یا با به کار بردن جدولهای استاندارد محاسبه کرد. نتیجه عبارت است از

$$K = \frac{r}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos [(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \quad (23.20)$$

با به دست آوردن K ، خواهیم داشت

$$E_{\theta} = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 rc} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos [(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta}$$

$$B_{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \frac{\cos [(\pi/2) \cos \theta]}{\sin \theta} \quad (24.20)$$

میانگین بردار پوئین تینگ انتگرال گیری شده عبارت است از

$$\bar{P} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 [(\pi/2) \cos \theta]}{\sin^2 \theta} \sin \theta \, d\theta \quad (25.20)$$

انتگرال باقی مانده را می توان تنها به صورت يك سری نامتناهی محاسبه کرد، در اینجا تنها متذکر می شویم که برای يك آنتن نیم موج نتیجه عبارت است از

$$\bar{P} = 73.1 \, \Omega \frac{I_0^2}{r} \quad (\text{در خلا}) \quad (26.20)$$

این روش را می توان در مورد مسائل پیچیده تر به کار برد؛ اما، جزئیات فنی آن نسبتاً دشوار می شود.

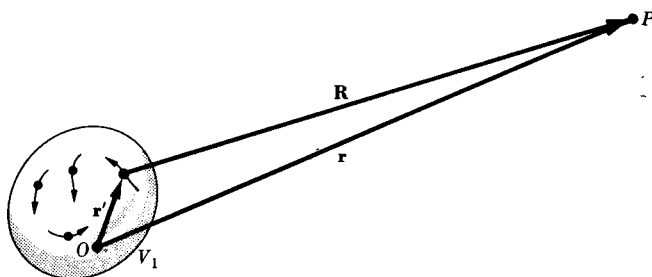
۳.۲۰ تابش از يك گروه بار متحرك

در این بخش عبارتی را برای توان تابش شده توسط يك گروه بار متحرك، یا به طور معادل، توسط يك توزیع بار - جریسان، به دست خواهیم آورد. حرکت بارها اختیاری است، مگر در محدودیتهای زیر: در اثنای زمانی که طول می کشد تا تابش از نزدیکی بارها تا نقطه مشاهده منتشر شود، می توان تصور کرد که تمام بارها و جریانههای توزیع در حجم V_1 جای دارند و ابعاد این حجم در مقایسه با فاصله چشمه تا نقطه مشاهده، کوچک است (شکل ۲.۲۰). به علاوه، ابعاد V_1 در مقایسه با طول موجهای عمده تابش گسیل شده، کوچک اند. محدودیتهای فوق همچنین ایجاب می کند که بارها در مقایسه با سرعت نور به کندی حرکت کنند. فرض می شود که بارها در خلأ حرکت می کنند.

به عنوان اولین قدم برای حل مسئله، باید پتانسیلهای الکترومغناطیسی را محاسبه کنیم. اینها همان پتانسیلهای تأخیری هستند که در بخش ۶.۱۶ درباره آنها بحث شد. مبدأ مختصات O را در داخل حجم V_1 می گیریم و محل يك جزء بار را با $\mathbf{r}'$ نشان می دهیم (شکل ۲.۲۰). نقطه P به فاصله $\mathbf{r}$ از مبدأ قرار گرفته است. برای راحتی، فاصله کمکی $\mathbf{R}$ را معرفی می کنیم که نشان دهنده محل نقطه میدان نسبت به يك جزء بار است. واضح است که

$$\mathbf{r}' + \mathbf{R} = \mathbf{r} \quad (27.20)$$

چون $r' \gg r$ است، می توان نوشت



شکل ۲.۲۰ بارهایی که به طور دلخواه در حرکت اند و در حجم V_1 احاطه شده اند. میدانها باید در نقطه P محاسبه شوند.

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r} \quad (۲۸.۲۰)$$

حال پتانسیل نرده‌ای تأخیری φ در نقطه P به شکل زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c) dv'}{R} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_1} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/cr) dv'}{r - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})/r} \end{aligned} \quad (۲۹.۲۰)$$

با استفاده از قضیه دو جمله‌ای

$$\left(r - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r}\right)^{-1} = r^{-1} + r^{-2} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{r} + \dots \quad (۳۰.۲۰)$$

و از بسط سری تیلور

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr}\right) = \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{cr} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{r', t-r/c} + \dots \quad (۳۱.۲۰)$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{V_1} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \cdot \int_{V_1} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3 c} \mathbf{r} \cdot \frac{d}{dt} \int_{V_1} \mathbf{r}' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv' + \dots \end{aligned} \quad (۳۲.۲۰)$$

انتگرال اول در معادله (۳۲.۲۰) عبارت است از بار کل توزیع (Q). این بار کل مقداری ثابت و مستقل از زمان است. انتگرال دوم (و نیز انتگرال سوم) عبارت است از گشتاور دو قطبی الکتریکی توزیع بار ($\mathbf{p}$)، که در زمان $t - r/c$ محاسبه شده است. جملات درجه بالاتر بتواند بیشتر r'/r افت می‌کنند و به گشتاورهای چند قطبی بالاتر توزیع بار بستگی دارند. به علت محدودیتهایی که در ابتدای این بخش اعمال شد، سهم این جملات در میدان الکترومغناطیسی در فاصله زیاد از توزیع بار قابل توجه نیست (به مطلب زیر توجه شود).
بنابر این،

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t-r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t-r/c)}{cr^2} \right] \quad (33.20)$$

که در آن $\dot{\mathbf{p}} \equiv d\mathbf{p}/dt$ در نتیجه استفاده از بسط سری تیلور، تنها یک زمان تأخیری در جملاتی که به طور صریح نگاه داشته شده اند، به چشم می خورد. پتانسیل برداری تأخیری $\mathbf{A}$ در نقطه میدان با معادله زیر داده می شود

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t-r/c + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}/cr) dv'}{r - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r})/r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{V_1} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) dv' + \text{جملات درجه بالاتر} \end{aligned} \quad (34.20)$$

جملات درجه بالاتر را لازم نیست به صراحت نوشت، زیرا با هم این جملات به گشتاورهای چند قطبی بالاتر توزیع بارستگی دارند. به بیان دیگر، اکنون معادله (34.20) با معادله (34.20) سازگار است. با استفاده از نتیجه مسئله 4.7 می توان معادله قبل را به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (35.20)$$

پتانسیل نرده ای (33.20) را نیز می توانستیم از (35.20) و شرط لورنتس به دست آوریم. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را می توان از روابط معمول زیر به دست آورد

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

ما توجه مان را به میدانهای منطقه تابش محدود می کنیم؛ به عبارت دیگر، به آن قسمت از $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ که به صورت r^{-1} افت می کنند، چون تنها این قسمتها برای تعیین توان تابش شده توسط توزیع بار کفایت می کنند. محاسبه $\partial \mathbf{A}/\partial t$ سراسر است؛ برای به دست آوردن $\nabla \varphi$ توجه می کنیم که چون $\dot{\mathbf{p}}$ تابعی از $t - r/c$ است

$$\frac{\partial}{\partial r} \dot{\mathbf{p}} \equiv -\frac{1}{c} \ddot{\mathbf{p}} \quad (36.20)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{-\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}} (t - r/c)}{c^2 r^3} \mathbf{r} \quad (37.20)$$

(جملاتی که سریعتر از $1/r$ افت می کنند)

برای محاسبه $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ باید از معادله (35.20) تاو بگیریم

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] &= \nabla \frac{1}{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{r} \nabla \times \dot{\mathbf{p}} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{r} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \dot{\mathbf{p}} - \frac{1}{cr} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

رابطه آخر با استفاده از معادله (36.20) به دست می آید. اولین جمله در تاو $\mathbf{A}$ را می توانیم نادیده بگیریم زیرا این جمله سریعتر از r^{-1} افت می کند؛ پس

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{-\mu_0}{4\pi cr^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (38.20)$$

بنابراین، میدانهای منطقه تابش با معادلات زیر داده می شوند

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi cr^2} \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \quad (39.20)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{(\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}})\mathbf{r} - r^2 \ddot{\mathbf{p}}}{r^3} \right] \quad (40.20)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}})$$

$$= -\frac{c}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

که در آنها مقدار $\ddot{\mathbf{p}}$ در زمان تأخیری محاسبه می شود.

واضح است که $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ بر یکدیگر، و هر دو بر $\mathbf{r}$ نیز عمودند. از معادله (۲۲.۱۷) نیز می‌توانستیم انتظار چنین نتیجه‌ای را داشته باشیم، زیرا $\mathbf{r}/r = \mathbf{\hat{k}}/\kappa = \mathbf{u}$. بنابر این هنگامی که تنها میدان تابش مورد نظر است ($r \gg \lambda$) تنها کافی است که $\mathbf{A}$ را محاسبه کنیم. بردار پوئین تینگ $\mathbf{S} = (1/\mu_0)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ در جهت $\mathbf{r}$ است و با معادله زیر داده می‌شود

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\mu_0 r} \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{c}{\mu_0 r} r B^2 \quad (۲۱.۲۰)$$

یا

$$\mathbf{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^5} \mathbf{r} (\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}})^2$$

اگر محور z را در جهت $\ddot{\mathbf{p}}$ انتخاب کنیم، داریم

$$\mathbf{S} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (۲۲.۲۰)$$

می‌بینیم که حداکثر توان در جهت 90° نسبت به $\ddot{\mathbf{p}}$ تابش می‌شود. توان تابش شده کل را می‌توان با انتگرال گیری از بردار پوئین تینگ روی یک سطح بسته که توزیع بار را احاطه کرده است، به دست آورد. یک انتخاب مناسب برای چنین سطحی، کره‌ای است که مرکزش در توزیع بار قرار گرفته و شعاعش آنقدر بزرگ باشد که تمام قسمتهای سطح آن در منطقه تابش قرار بگیرد. بنابراین

$$\begin{aligned} P_R &= -\frac{dW}{dt} = \oint_s \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da \\ &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

که از آن به سادگی می‌توان نتیجه مهم زیر را برای توان تابش شده توسط یک گروه بار متحرک که در مقایسه با سرعت نور به کندی حرکت می‌کنند، به دست آورد

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{c^3} \quad (۲۳.۲۰)$$

معادله (۲۳.۱۰) عبارتی است برای توان تابش شده توسط بارهایی که به دلخواه حرکت می‌کنند بر حسب گشتاور دوقطبی الکتریکی $\mathbf{p}$ بارهای مذکور. عبارتی که قبلاً

برای تابش از یک دو قطبی نوسان کننده به دست آمد، معادله (۱۶.۲۵)، مثال خاصی از (۴۳.۲۵) است؛ در آن حالت $p = (II_0/\omega) \cos \omega(t - r/c)$. حال ممکن است به علت تقارن خاص دستگاه، گشتاور دوقطبی صفر شود یا مستقل از زمان باشد. در این مورد توان تابش شده الزاماً صفر نیست، بلکه باید جملات بیشتری برای محاسبه در بسطهای A و φ [معادلات (۳۲.۲۵) و (۳۴.۲۵)] نگه داشته شوند. در واقع، درمی یابیم که در این حالت توان تابش شده به یکی از گشتاور چند قطبیهای درجه بالاتر دستگاه بستگی دارد. شدت تابش چند - قطبیهای مختلف، با افزایش درجه چند قطبی به ترتیب کمتر می شوند؛ مثلاً، تابش چهار قطبی تقریباً با مضرب $(a/\lambda)^2$ از تابش دوقطبی کوچکتر است، در اینجا a بعد دستگاه و λ طول موج تابش گسیل شده است. بنابراین اگر $\vec{p}$ برای دستگاه مورد مطالعه صفر نشود، معادله (۴۳.۲۵)، قسمت عمده توان تابش شده را به دست می دهد.

می توان معادلات (۳۹.۲۵)، (۴۰.۲۵)، و (۴۳.۲۵) را در مورد تابش از یک بار منفرد شتابدار q نیز به کار برد. گشتاور دوقطبی این بار $q\vec{r}'$ است، که در آن $\vec{r}'$ از یک مبدأ دلخواه اندازه گیری می شود. بنابراین

$$\dot{\vec{p}} = q\dot{\vec{r}}' = q\vec{v}$$

که در آن $\vec{v}$ سرعت بار است که به انتخاب مبدأ بستگی ندارد. سرانجام

$$\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{v}}$$

که در آن $\ddot{\vec{v}}$ شتاب بار است. با قراردادن نتیجه اخیر در معادله (۴۳.۲۵) خواهیم داشت

$$P_R = -\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\dot{\vec{v}}^2}{c^3} \quad (44.25)$$

که معادله ای است برای توان تابش شده توسط بار شتابدار که به کندی حرکت می کند.

۴.۲۵* میدانهای منطقه‌های نزدیک و بینابین

تنها جمله‌هایی در میدان که با $1/r$ متناسب اند در انرژی تابشی سهمیند، ولی در ناحیه نزدیک به بارهای تابنده توانهای بالاتر $1/r^3$ غالب اند. این میدانها از نظر مقایسه با میدانهای ساکن، و همچنین در مسائل عملی در ناحیه بسیار نزدیک به آنتنها، مورد توجه اند. در این بخش ما میدانهای E و B یک دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای را به طور کامل محاسبه خواهیم کرد. برای انجام دادن این کار، با پتانسیل‌های دوقطبی، معادله‌های (۳۳.۲۵) و (۳۵.۲۵)، شروع می کنیم و در مشتق گیریه‌ها جملاتی را که در بخش قبل کنار گذاشتیم حفظ می کنیم. سهم $\partial A / \partial t -$ در E قسمتی از میدان تابش است که قبلاً محاسبه کرده ایم. با اعمال اتحاد

بردارى (۶.۱.۱) در معادله (۳۳.۲۰) با $Q = 0$ ، خواهیم داشت

$$-\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \nabla \dot{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{p}}) + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla \mathbf{p} \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{cr^2} + \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right]$$

که در اینجا جملات به ترتیب توانهای فزاینده $1/r$ مرتب شده‌اند. اولین دو جمله، هنگامی که با $\partial A / \partial t$ جمع شوند، میدان تابش معادله (۴۰.۲۰) را می‌دهند

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{r}}{r} - \ddot{\mathbf{p}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \right) \quad [40.20]$$

که به صورت $1/r$ تغییر می‌کند و به $\ddot{\mathbf{p}}$ بستگی دارد. جمله آخر، هنگامی که بسط داده شود، درست همان میدان دوقطبی ساکن معادله (۳۶.۲) است

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[3 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p} \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p} \right) + 2 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \quad [36.2]$$

که به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند و به $\mathbf{p}$ بستگی دارد. البته در این مورد دوقطبی $\mathbf{p}$ با زمان تغییر می‌کند، ولی بستگی مکانی $\mathbf{E}_2$ به طور لحظه‌ای همان بستگی میدان دوقطبی ساکن است. جملات سوم، چهارم، و پنجم (که به صورت مشابه با جملات اول، دوم، و آخر هستند) منجر به میدان گذار یا میدان القای می‌شوند

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{cr^2} \left[3 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{r}}{r} - \dot{\mathbf{p}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{cr^2} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \dot{\mathbf{p}} \right) + 2 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \quad (45.20)$$

که به صورت $1/r^2$ تغییر می‌کند و به $\dot{\mathbf{p}}$ بستگی دارد. پس میدان کل $\mathbf{E}$ عبارت است از

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$

که در آن $\mathbf{p}$ و مشتقاتش باید در زمان تأخیری $t' = t - r/c$ محاسبه شوند. میدان $\mathbf{B}$ با محاسبه ناو معادله (۳۵.۲۰) به دست می‌آید. اگر جمله‌ای را که هنگام به دست آوردن معادله (۳۹.۲۰) کنار گذاشتیم حفظ کنیم، از معادلات (۴۰.۲۰) و (۴۵.۲۰) می‌بینیم که

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{cr} \times (\mathbf{E}_\lambda + \mathbf{E}_\gamma)$$

بنابراین $\mathbf{B}$ حاوی یک میدان تابش و یک میدان القاست، ولی میدان B «ساکن» وجود ندارد.

از دومین عباراتی که در بالا برای $\mathbf{E}_\lambda, \mathbf{E}_\gamma, \mathbf{E}_\theta$ داده شد، روشن است که هر سه این میدانها مؤلفه عرضی دارند که بر $\mathbf{r}$ عمود است و در صفحه تعریف شده با $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ واقع است. میدان تابش عرضی خالص است، ولی $\mathbf{E}_\gamma$ و $\mathbf{E}_\theta$ علاوه بر مؤلفه عرضی یک مؤلفه طولی در امتداد $\mathbf{r}$ نیز دارند. اگر مختصات کروی را انتخاب کنیم، بامحور قطبی در امتداد $\mathbf{p}$ ، آنگاه مؤلفه‌های عرضی، E_θ هستند و با $\sin \theta$ متناسب اند؛ مؤلفه‌های طولی، E_r هستند و با $\cos \theta$ متناسب اند. میدان B فقط مؤلفه ϕ دارد (TM).

اکنون مورد خاصی را بررسی می‌کنیم که در آن دوقطبی در جهت $\mathbf{k}$ واقع است و اندازه آن به طور سینوسی نوسان می‌کند: $\mathbf{p}(t) = p\mathbf{k}e^{-i\omega t}$. آنگاه

$$\mathbf{p}(t') = p\mathbf{k}e^{-i(\omega t - \kappa r)}$$

که در آن κ ثابت انتشار موج در منطقه تابش است

$$\kappa = \omega/c$$

با قرار دادن $\mathbf{p}(t')$ در معادله‌های (۴۰.۲۰)، (۳۶.۲۰)، و (۴۵.۲۰)، برای مؤلفه‌های $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\lambda + \mathbf{E}_\gamma + \mathbf{E}_\theta$ عبارتهای زیر را به دست می‌آوریم

$$E_\theta = \frac{p\kappa^2}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[-\frac{1}{\kappa r} - i \frac{1}{(\kappa r)^2} + \frac{1}{(\kappa r)^3} \right] e^{-i(\omega t - \kappa r)}$$

$$E_r = \frac{p\kappa^2}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \left[-i \frac{1}{(\kappa r)^2} + \frac{1}{(\kappa r)^3} \right] e^{-i(\omega t - \kappa r)}$$

هنگامی که $\kappa r \gg 1$ یا $\kappa r \ll 1$ باشد، یعنی هنگامی که r در مقایسه با طول موج تابش گسیل شده بزرگ یا کوچک است، به ترتیب میدان تابش یا میدان ساکن غالب خواهند شد. گذار بین میدان دوقطبی «ساکن» و میدان تابش عرضی به طور حواله در شکل ۳.۲۰ با خطوط میدان نشان داده شده است. در منطقه تابش، میدان یک موج کروی است که به طرف خارج منتشر می‌شود.

۵.۲۰ میرایی تابشی . سطح مقطع تامسون

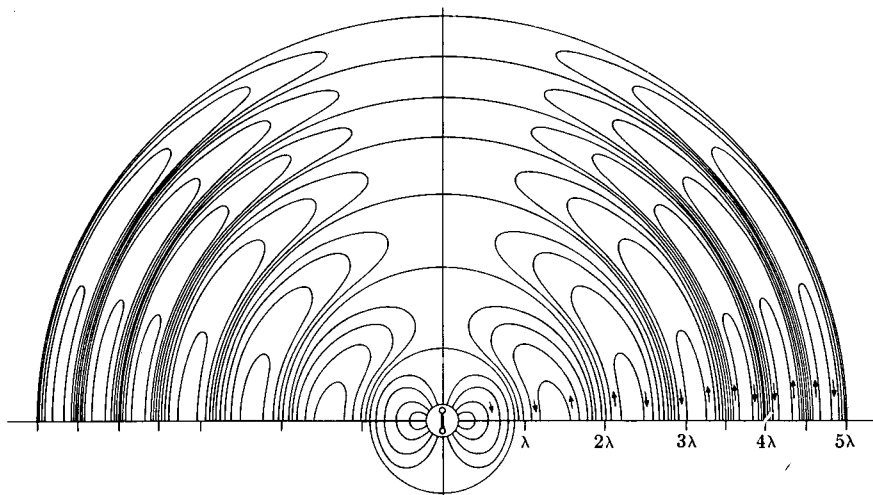
توان تابش شده که در بخش ۳.۲۰ محاسبه کردیم توسط دستگاه بارها تلف می‌شود. در حالت پایا این توان تلف شده باید توسط منبع دیگری جبران شود. برای آنتن، این منبع فرستنده است، و اتلاف با مقاومت تابشی بیان می‌شود. برای الکترونی در محیطی مادی که موج در آن منتشر می‌شود، منبع توان میدان E ی موج است و اتلاف با فرکانس میرایی بیان می‌شود. اکنون می‌خواهیم فرکانس میرایی را که در فصل قبل به کار بردیم به آهنگ اتلاف انرژی ناشی از تابش توسط یک ذره باردار، که با معادله (۴۴.۲۰)

$$P = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\dot{v}^2}{c^3} \quad [44.20]$$

داده شد، مربوط کنیم. توانی که نیروی F تلف می‌کند برابر است با $P = -Fv$. از مساوی قرار دادن این توان با معادله (۴۴.۲۰)، برای نیروی میرایی داریم

$$F = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\dot{v}^2}{v} \quad (46.20)$$

نیروی میرایی خطی در معادله (۱۰.۱۹) به صورت $F = -Gv$ بود، لذا فرکانس میرایی $\gamma = G/m$ عبارت است از



شکل ۳.۲۰ خطوط میدان الکتریکی ایجاد شده توسط یک دو قطبی الکتریکی نوسان کننده.

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3} \frac{\dot{v}^2}{v^2}$$

برای یک بارنوسان کننده $v = v_0 \sin \omega t$ ،

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3} \frac{\cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t}$$

اشکال این نتیجه آن است که γ ثابت نیست، بلکه در یک دوره تناوب حرکت هماهنگ از صفر تا بینهایت تغییر می کند. به هر جهت تأثیر میانگین میرایی در یک دوره تناوب بسیار کوچک است، و چون $\bar{P} = \overline{m\gamma v^2} \propto \overline{\dot{v}^2}$ و

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t}$$

لذا فرض می کنیم که فرکانس میرایی مؤثر به صورت زیر است^۱

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3} \quad (۴۷.۲۰)$$

بر حسب «شعاع کلاسیک الکترون»، $R_e = e^2 / 4\pi\epsilon_0 mc^2 = 2.81 \times 10^{-15} \text{ m}$ ، داریم

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{4\pi}{3} \frac{R_e}{\lambda} \quad (۴۸.۲۰)$$

چون $\gamma = \Delta\omega$ پهنای یک قله جذب باریک است، و چون $\Delta\omega/\omega = \Delta\lambda/\lambda$ ، بنابراین

$$\Delta\lambda = \frac{4\pi}{3} R_e = 1.16 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

این پهنای خط طبیعی باریکتر از پهنایی است که به طور عادی در طیفهای جذبی دیده می شود (حتی در گازها در فشارهای پایین)، زیرا سازوکارهای میرایی دیگری وجود دارد که معمولاً

۱. باید اعتراف کرد که این مرحله آخر استدلال تاحدودی نادقیق است. مسئله ناشی از شکست مکانیک کلاسیک نیست، زیرا از محاسبات مکانیک کوانتومی نیز همین نتیجه به دست می آید. از زمانی که لورنتس در سال ۱۹۰۹ معادله (۴۷.۲۰) را ارائه داد تاکنون مسئله وارد کردن صحیح نیروی واکنش تابش، معادله (۴۶.۲۰)، در نظریه دینامیکی بارها مورد بحث قرار گرفته است. این یک مسئله بنیادی است، ولی ما نمی توانیم در اینجا در این مسئله وارد شویم.

از میرایی تابشی بزرگترند. با وجود این، مقدار فوق حد پایینی برای میرایی است. یکی از پیامدهای مستقیم معادله (۴۴.۲۰) که مشاهده آن متداولتر است عبارت است از سطح مقطع تامسون برای پراکندگی پرتوهای ایکس. فرکانسهای پرتوهای ایکس (انرژیهای فوتونها) در مقایسه با فرکانسهای تشدید بسیاری از الکترونها در ماده (یعنی در مقایسه با انرژیهای پیوند) بزرگ اند. بنابراین این الکترونها را می توان به صورت الکترونها ی آزادی بررسی کرد که میدانهای پرتوهای ایکس آنها را شتاب می دهند

$$m\dot{v} = eE \quad (44.20)$$

لذا توان کل تابش شده توسط يك الکترون عبارت است از

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^2} E^2$$

طبق تعریف سطح مقطع پراکندگی تامسون σ_T عبارت است از P تقسیم بر بردار پوئین-تینگک فرودی (توان در واحد سطح)،

$$S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \quad (50.20)$$

بنا بر این

$$\sigma_T = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{e^4}{m^2 c^4} = \frac{8\pi}{3} R_e^2 \quad (51.20)$$

که در آن R_e شعاع کلاسیک الکترون است. کوچک بودن این سطح مقطع در مقایسه با اندازه اتم دلیل نافذ بودن پرتوهای ایکس است. بستگی زاویه ای تابش پراکنده با سطح مقطع مؤثر دیفرانسیلی داده می شود. سطح مقطع مؤثر دیفرانسیلی به صورت زیر تعریف می شود

$$d\sigma_T = \frac{dP}{S_0}$$

که در آن

$$dP = \dot{S} da = S r^2 d\Omega$$

توان پراکنده شده (یعنی، بازتابیده شده) به درون عنصر زاویه فضایی $d\Omega$ است، و

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

باقرار دادن مقدار S از معادله (۴۲.۲۰)، برای سطح مقطع مؤثر دیفرانسیلی خواهیم داشت

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = R_e^2 \sin^2 \theta \quad (۵۲.۲۰)$$

در اینجا θ زاویه بین جهت مشاهده است با بردار E موج فرودی (که بر جهت انتشارش عمود است). اگر پرتوهای ایکس فرودی ناقطبیده باشند (که معمولاً اینطور است)، میانگین معادله بالا روی تمام جهات قطبش عبارت سودمندتری به دست می‌دهد. نتیجه عبارت است از (مسئله ۱۰.۲۰)

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = R_e^2 \frac{1 + \cos^2 \beta}{2} \quad (۵۳.۲۰)$$

که در اینجا β زاویه بین جهت مشاهده و جهت انتشار فرودی است. این سطح مقطع مؤثر در اثر کامپتون قابل اندازه‌گیری است. این اثر پراکندگی ناهمدوس^۱ پرتوهای ایکس است در فرکانسهای بسیار بالاتر از فرکانس لازم برای جذب تشدید. در فرکانسهای بسیار بالا این فرمول کلاسیک دیگر معتبر نیست؛ انرژی فوتون ($\hbar\omega$) باید از انرژی سکون الکترون mc^2 بسیار کمتر باشد، یا به عبارت دیگر باید داشته باشیم $\lambda \gg 0.02 \text{ \AA}$.

سطح مقطع مؤثر تامسون، معادله (۵۱.۲۰)، را همچنین می‌توان از نظریه فصل ۱۹ به دست آورد، مشروط بر آنکه به جای اندازه بردار پوئین تینگ پراکنده شده، تضعیف بردار پوئین تینگ فرودی را بررسی کنیم. از معادله (۵۰.۲۰) داریم

$$S_0 = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 e^{-\gamma z / \delta}$$

که در آن

$$\delta = \frac{c}{k\omega}$$

«عمق پوسته» است. در اینجا $\delta/2$ نقش مسیر میانگین آزاد را برای فوتونهای فرودی ایفا می‌کند. چون مسیر میانگین آزاد برابر است با $1/N\sigma$ ، که در آن N تعداد الکترونها در

۱. پراکندگی ناهمدوس در مقابل واژه پراکندگی همدوس به کار می‌رود (هر دو سطح مقطع مؤثر منفرد یکسانی دارند). پراکندگی همدوس در بلورها، تحت شرایط خاصی از نظر طول موج و زاویه فرود، موجب پراش پرتو ایکس می‌شود (قانون براگ).

واحد حجم است، نتیجه می شود

$$\sigma_T = \frac{\gamma}{N\delta} = \frac{\gamma k\omega}{Nc} \quad (54.20)$$

حال هنگامی که $n \approx 1$ ، $k \ll 1$ ، همانطور که برای پرتوهای ایکس چنین است، داریم

$$k = \frac{1}{\gamma} K_i = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\gamma \omega^3}$$

این نتیجه مربوط است به فرکانسهای بالا برای الکترونهای آزاد، و هنگامی که $\omega \gg \omega_0$ باشد برای الکترونهای مقید نیز معتبر است. با استفاده از $\omega_p^2 = Ne^2/\epsilon_0 m$ ، $\omega = (4\pi/3) (R_e/\lambda) \omega$ از معادله (48.20)، و $\lambda = 2\pi c/\omega$ داریم

$$k = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{4\pi}{3} \frac{R_e \omega^2}{2\pi c \omega^3} = \frac{4\pi}{3} \frac{Ne^2}{4\pi \epsilon_0 mc \omega} R_e$$

از معادله (54.20) نتیجه می شود

$$\sigma_T = \frac{4\pi}{3} R_e^2 \quad [51.20]$$

فرکانس میرایی γ که سطح مقطع مؤثر تامسون را می دهد فرکانس میرایی تابشی است. در چنین فرکانسهای بالایی ($\omega \gg 10^{19} \text{ s}^{-1}$) فرکانس میرایی تابشی بر فرکانس برخورد $1/\tau$ غالب می شود. البته هنگامی که انتشار تابش فرودی را با این روش در نظر می گیریم، بستگی زاویه ای تابش پراکنده شده را، معادله (52.20)، به دست نمی آوریم.

۶.۲۰ خلاصه مطالب

با استفاده از جوابهای انتگرالی A و میدانهای ایجاد شده توسط توزیعهای بار و جریان وابسته به زمان محاسبه می شوند. (تنها کافی است که A بررسی شود، زیرا φ را شرط لورنتس به A مربوط می کند.) برای پیدا کردن جوابهایی که در فواصل دور معتبرند، یعنی برای $r \gg a$ که در آن a اندازه ناحیه ای است که جریانهای چشمه در آن واقع اند، انتگرالده با بسط چند قطبی بسط داده می شود. جمله دوقطبی الکتریکی که در اینجا بررسی شده است مهمترین جمله است مگر در حالتی که اتفاقاً این جمله صفر باشد که در آن صورت جملات مرتبه بالاتر می بایست در نظر گرفته شوند. برای دوقطبی نقطه ای، $a \ll \lambda$ ، انتگرال باز هم ساده می شود، زیرا تمام عناصر جریان چشمه تقریباً هم فازند. (این شرط بدان معناست

که $c \gg v$) نتیجه عبارت است از

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)$$

که در آن

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{v}'$$

از این روابط، با $\mathbf{J}$ ی از پیش مشخص، می‌توانیم $\mathbf{E}$ ، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{S}$ را پیدا کنیم. پیدا کردن آنها در میدان تابش واقع در $r \gg \lambda$ به‌ویژه آسان است. آنگاه، درست مانند موج تخت داریم

$$\mathbf{E} = -c \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{B}$$

و

$$\mathbf{S} = \frac{c}{\mu_0} \mathbf{B} \times \frac{\mathbf{r}}{r}$$

(پیدا کردن φ ضروری نیست).

۱. بردار پوینتینگ یک دوقطبی نقطه‌ای در میدان تابش عبارت است از

$$\mathbf{S} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

با انتگرال گیری از این عبارت بر روی تمامی یک کره، توان کل تابشی به صورت زیر به دست می‌آید

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{c^3}$$

۲. تابش از یک آنتن خطی کوتاه (دوقطبی الکتریکی) با (۱) داده می‌شود که در آن $p(t) = (I_0/\omega) \cos \omega t$ بر حسب مقاومت تابشی R_r ، در خلا، داریم

$$\bar{P} = \frac{1}{2} R_r I_0^2$$

$$R_r = 789 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (l \ll \lambda)$$

۳. با فرض آنکه $v \ll c$ ، که همواره برای آنتنهای رادیویی صادق است، تابش از يك آنتن بزرگتر را با آنتن گراي گيري نتايج مربوط به آنتن كوچك مي توان به دست آورد. براي يك آنتن نيم موج، داريم

$$R_r = 73.1 \Omega$$

۴. براي يك بار نقطه اي كه به كندى حركت مي كند ($\ddot{p} = q\dot{v}$)

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 \dot{v}^2}{c^3}$$

۵. براي يك الكترون نوسان كننده، نتيجه بالا به فرکانس ميرايي تابشي

$$\gamma = \frac{4\pi}{3} \frac{R_e}{\lambda} \omega$$

و به سطح مقطع مؤثر تامسون براي الكترون آزاد

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} R_e^2$$

منجر مي شود، كه در اين روابط R_e «شعاع كلاسيك الكترون» است

$$R_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} = 2.81 \times 10^{-15} \text{ m}$$

مسائل

۱.۲۰ فرض كنيد يك توزيع بار با تقارن كروي تنها در جهت شعاعي نوسان مي كند، به طوري كه در هر لحظه از زمان تقارن كروي خود را حفظ مي كند. ثابت كنيد كه تابشي گسيل نمي شود.

۲.۲۰ (الف) چگالي توان تابش شده ميانه گين توسط يك دوقطبي نوسان كننده در خلا را به صورت تابعي از زواياي θ و ϕ تعيين كنيد. (ب) توان كل تابش شده توسط يك دوقطبي به طول ۳ متر را در فرکانس ۵۰۰ kHz، اگر جريان در دوقطبي ۲ آمپر (مقدار مؤثر جريان) باشد، محاسبه كنيد. (ج) مقاومت تابشي نوسانگر دوقطبي قسمت ب چقدر است؟

۳.۲۰ يك حلقه سیم دایره ای حامل جریان $I = I_0 \cos \omega t$ يك دو قطبی مغناطیسی نوسان کننده را تشکیل می دهد. میدانهای تابش $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را برای این نوسانگر تعیین کنید و توان کل تابشی آن را محاسبه کنید.

۴.۲۰ کارایی نسبی يك دو قطبی الکتریکی به طول ۲ متر را در مقایسه با يك دو قطبی مغناطیسی به همان قطر، به عنوان منابع تابش الکترومغناطیسی، در فرکانس ۱ MHz تعیین کنید.

۵.۲۰ (الف) ما کزیمم جریان ورودی آنتن نیم موجی را که ۱ kW تابش می کند، محاسبه کنید. (ب) میدان E ی مربوط به چگالی توان میانگین در فاصله ۱۰ km از این آنتن چقدر است؟ اثرات زمین را نادیده بگیرید.

۶.۲۰ تحقیق کنید که A و φ در معادلات (۳۵.۲۰) و (۳۳.۲۰) در شرط لورنتس صدق می کنند.

۷.۲۰ توان تابشی از يك آنتن در واحد زاویه فضایی (استرادیان) در جهتی که توان ما کزیمم است، تقسیم بر (4π) ضرب در توان کل تابشی، معیاری است از جهتمندی يك آنتن. جهتمندی يك دو قطبی الکتریکی نوسان کننده را محاسبه کنید.

۸.۲۰ فرض کنید دو قطبی الکتریکی $\mathbf{p}$ با سرعت زاویه ای ثابت ω حول محوری عمود بر گشتاور دو قطبی دوران می کند. میدان تابش و بردار پوینتینگ را پیدا کنید. (داهنمایی: دو قطبی دوران کننده را به صورت برهم نهش دو دو قطبی در نظر بگیرید که به یکدیگر عمودند و به طور سینوسی تغییر می کنند.)

۹.۲۰ در مدل کلاسیک اتم هیدروژن الکترون در مداری دایره ای به شعاع r می گردد و انرژی جنبشی آن عبارت است از

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(الف) کسر انرژی تابش شده در دور گردش، PT/E_k ، را محاسبه کنید. در اینجا T دوره تناوب مداری است. (ب) مکانیک کوانتومی حکم می کند که در تراز n ام

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{n} \frac{1}{137}$$

PT/E_k را به ازای $n = 2$ محاسبه کنید.

۱۰.۲۰ باریکه ای از پرتوهای ایکس ناعطیبیده با شدت I_0 بر ماده ای حاوی الکترونهای آزاد فرود می آید. با در نظر گرفتن تنها يك الکترون و استفاده از عبارتهای بخش ۳.۲۰

نشان دهید که شدت باریکه پراکنده شده عبارت است از

$$I_s = I_0 \frac{(1 + \cos^2 \beta)}{2} \frac{R_e^2}{r^2}$$

که در آن β زاویه بین خط OP و جهت باریکه پرتو ایکس اصلی است. نقطه O مکان الکترون است، و P نقطه ای است که در آنجا باریکه پراکنده شده مشاهده می شود.

۱۱.۲۵ پرتوهای ایکس با طول موج $0.25 \text{ \AA}$ در آلومینیوم عمده‌تاً توسط پراکندگی کامپتون تضعیف می شوند. ضریب جذب، $\alpha = 2/8$ ، را از سطح مقطع مؤثر تامسون محاسبه کنید. در هر متر مکعب تعداد $10^{28} \times 606$ اتم آلومینیوم وجود دارد.